

LOGIKA STOSOWANA

WYKŁAD 8 - WNIOSKOWANIE INDUKCYJNE CZĘŚĆ 1 – PROBLEM INDUKCJI

Marcin Szczuka

Instytut Informatyki UW

Wykład monograficzny, semestr letni 2018/2019

1 WPROWADZENIE

2 NIEZUPEŁNE WNIOSKOWANIE INDUKCYJNE

- Rodzaje wnioskowań indukcyjnych

3 W STRONĘ LOGIKI INDUKCYJNEJ

**AND NOW FOR
SOMETHING
COMPLETELY
DIFFERENT**



Wszystkie systemy wnioskowania poznane dotąd na tym wykładzie były *systemami dedukcyjnymi*, czyli działającymi w sposób *całkowicie pewny* w oparciu o przyjęty zbiór przesłanek (założeń, aksjomatów) za pomocą niezawodnych *reguł wnioskowania*. W szczególności, niesprzeczne systemy dedukcyjne są zamknięte ze względu na tworzenie nowych pojęć i wyciąganie **prawdziwych** wniosków.

Rozumowania czysto dedukcyjne są stosunkowo rzadko spotykane w prawdziwym świecie. Najczęściej mamy z nimi do czynienia w przypadku matematycznych modeli świata (fizyka teoretyczna, matematyka, informatyka) których opis poddaje się uporządkowaniu. Znamienitym przykładem stosowania podejścia (głównie) dedukcyjnego są *Elementy* Euklidesa. Jednak rygorystyczne trzymanie się dedukcji i zasady zachowywania absolutnej prawdziwości wniosków bardzo szybko napotyka na wielkie problemy.

Dlatego, istotnym dopełnieniem metod dedukcyjnych w nauce są rozumowania innego rodzaju, w szczególności oparte o indukcję, abdukcję i/lub kombinację tychże.

W największym uproszczeniu, rozumowania indukcyjne można rozumieć jako wnioskowania

*od szczegółu do ogółu
czyli od przykładów do reguły.*

Wnioskowania indukcyjne są ze swojej natury *niedokładne*.

Wnioskowanie indukcyjne jest oparte na wrodzonej ludziom zdolności do znajdowania wzorców i reguł na podstawie skończonej (i być może niekompletnej i niedokładnej) próbki pochodzącej z obserwacji.

Na przykład na podstawie obserwacji każdy “rozsądny” badacz stwierdzi empirycznie prawdziwość stwierdzenia:

Wszystkie kruki są czarne, ale nie wszystkie koty są czarne.

Zagadnieniem przeprowadzania wywodów w oparciu o obserwację, czyli indukcyjnych, zajmowali się badacze od zarania dziejów. Jednakże aż do schyłku średniowiecza za niepodważalną metodę badawczą uważano dedukcję w formie wprowadzonej przez Arystotelesa.

Dzisiejsze pojęcie indukcji jest znacznie precyzyjniejsze niemniej jednak arystotelesowskie podejście też wymagało przyjęcia założeń i prowadzenia rozumowania w sposób, który ich nie podważa. Arystoteles rozważał wprawdzie metodę rozumowania indukcyjnego, ale tylko w formie prymitywnej *indukcji enumeracyjnej zupełnej*.

Pierwsze znaczące wątpliwości co do tej metody badawczej przedstawił Francis Bacon (1561-1626) jednocześnie proponując zasadę *indukcji eliminacyjnej*. Zasada indukcji eliminacyjnej została dokładniej sformułowana przez Johna Stuarta Milla w *Systemie logiki dedukcyjnej i indukcyjnej* (1843) w formie tzw. *kanonów Milla*.

Indukcję niezupełną eliminacyjną poddał krytycznej analizie David Hume (1748). Swoje trzy grosze dorzucił też Immanuel Kant. W swoich dziełach filozoficznych, zajmujących się przede wszystkim zagadnieniami poznania i kwestiami przyczynowości, Hume zaproponował nowe spojrzenie na indukcję i przeprowadził jej krytyczną analizę.

Jego postulaty stały się początkiem współczesnego rozumienia zagadnienia indukcji - w ujęciu Hume'a stanowi ono alternatywę głoszącą, że albo wiedza jest pewna i dotyczy idei (abstraktów, np. obiektów matematycznych), albo jest niepewna i dotyczy faktów z rzeczywistości. Współcześnie pogląd, że wiedza o faktach świata materialnego nie jest pewna jest przyjęty powszechnie, w czasach Hume'a stanowił jednak szokujący paradoks, głównie ze względu na rozwój fizyki newtonowskiej. Współczesne rozumienie wnioskowań indukcyjnych odeszło od idei Kanta i Hume'a w stronę logik indukcyjnych, które na zamiast na pytanie "co uzasadnia prawdziwość?" starają się odpowiadać na pytanie "dlaczego stwierdzenie jest prawdopodobne/możliwe?". Tego typu podejście reprezentował m.in. Rudolf Carnap.

INDUKCJA ZUPEŁNA

Indukcja zupełna (indukcja enumeracyjna zupełna, indukcja wyczerpująca) to wnioskowanie, w którym jakąś ogólną prawidłowość uznaje się za prawdziwą na podstawie zdań stwierdzających **wszystkie możliwe przypadki** wystąpienia tej prawidłowości.

Indukcja zupełna jest w rzeczywistości **rozumowaniem dedukcyjnym i pewnym**, gdyż wyklucza sprzeczność przez wyliczenie (enumerację) wszystkich pozytywnych przypadków. Jest też w większości nietrywialnych przypadków całkowicie nieefektywną metodą prowadzenia praktycznego rozumowania.

Szczególnym przypadkiem indukcji zupełnej jest **indukcja matematyczna** powszechnie stosowana do dowodzenia twierdzeń. Niejako wbrew swojej nazwie, jest to metoda dedukcyjna.

“...when you have eliminated all which is impossible, then whatever remains, however improbable, must be the truth.”

Sherlock Holmes

Źródło: Arthur Conan Doyle, *The Blinded Soldier*

INDUKCJA ELIMINACYJNA

Prosta indukcja eliminacyjna (Bacon) polega na sformułowaniu listy hipotez, które wzajemnie się wykluczają a następnie dokonaniu eliminacji z użyciem narzędzia jakim jest eksperyment.

J.S. Mill rozwinął indukcję eliminacyjną poprzez dodanie pięciu reguł eliminacji hipotez (kanonów Milla) które pozwalają częściowo sformalizować proces wnioskowania. Kanony Milla pozwalają ustalać związki przyczynowo-skutkowe typu “przyczyna A powoduje skutek a”, na podstawie serii obserwacji. Na przykład metoda zgodności (kanon pierwszy) pozwala przeprowadzić wnioskowanie:

Sytuacja 1: Obserwujemy przyczyny A, B, C i skutki a, b, c.

Sytuacja 2: Obserwujemy przyczyny A, D, E i skutki a, d, e.

Wniosek: Eliminujemy niepowtarzające się (niezgodne) obserwacje i mamy “przyczyna A powoduje skutek a”.

INDUKCJA NIEZUPEŁNA

Indukcja niezupełna (indukcja enumeracyjna niezupełna), polega na uznaniu jakiejś ogólnej prawidłowości na podstawie **skończonej liczby** zdań stwierdzających niektóre wystąpienia tej prawidłowości. Wnioskujemy zatem na podstawie próbki o prawidłowościach ogólnych.

Niezupełność tego rozumowania jest naturalną manifestacją rzeczywistości którą próbujemy opisać. Prawie nigdy nie mamy możliwości obserwowania dostatecznie wielu (wszystkich możliwych) przypadków. Niezupełność oznacza także, że raz zbudowane teorie nie są zamknięte i mogą być **uzupełniane** w miarę napływania nowych przypadków (obserwacji), które nie dają się dobrze wyjaśnić za pomocą dotychczasowej wiedzy. Tak, na przykład, teoria względności Einsteina uzupełniła mechanikę Newtona. Indukcja niezupełna jest jednym z podstawowych narzędzi nauk doświadczalnych. Na potrzeby jej stosowania zostały opracowane liczne metodologie badawcze (np. rachunek błędów, ewaluacja statystyczna, etc.), które pozwalają eliminować negatywne skutki niezupełności.

1 WPROWADZENIE

2 NIEZUPEŁNE WNIOSKOWANIE INDUKCYJNE

- Rodzaje wnioskowań indukcyjnych

3 W STRONĘ LOGIKI INDUKCYJNEJ

Problem indukcji niezupełnej był rozważany i poddawany krytycznej analizie od wieków. Zasadność, wiarygodność i konieczność stosowania tego podejścia do formułowania stwierdzeń opisujących świat dyskutował już Sextus Empiricus (3-2 wiek p.n.e.). Na przestrzeni wieków wielu najwybitniejszych uczonych odnosiło się do tego zagadnienia, np. Bacon, Kartezjusz, Kant, Newton, Mill, Hume. Współcześnie własną wersję tego podejścia przedstawiali eminentni filozofowie nauki, m.in. Karl Popper, Wesley C. Salmon i David Miller.

W konstrukcji systemu opartego na indukcji niezupełnej napotykamy na zasadniczy problem. Logika taka powinna rozszerzać systemy dedukcyjne o mechanizm do wyprowadzania **niekoniecznie całkowicie prawdziwych** twierdzeń. Chcielibyśmy, aby taki system pozwalał w jak największym stopniu odzwierciedlić podstawową własność systemów dedukcyjnych, tj.

Prawdziwość przesłanek **gwarantuje** prawdziwość wniosków.

KRYTERIUM ZGODNOŚCI

Aby logika indukcyjna zachowywała pożądaną spójność zazwyczaj wymaga się od niej, aby możliwe było ustalenie *stopnia wsparcia* dla prawdziwości sformułowanych w niej wniosków. Mierzy on **siłę wpływu prawdziwości przesłanek** na prawdziwość wniosku. Od takiej miary wymaga się spełniania CoA (Criterion of Adequacy - kryterium zgodności).

CoA - CRITERION OF ADEQUACY

As evidence accumulates, the degree to which the collection of true evidence statements comes to support a hypothesis, as measured by the logic, should tend to indicate that false hypotheses are probably false and that true hypotheses are probably true.

CoA - KRYTERIUM ZGODNOŚCI

W miarę rozszerzania zbioru faktów stopień w jakim zawarte w nim przesłanki pozytywne (prawdziwe) wspierają wniosek powinien wskazywać na wzrastające prawdopodobieństwo prawdziwości dla wniosków prawdziwych i spadające prawdopodobieństwo prawdziwości dla fałszywych.

Aby z powodzeniem stosować systemy wnioskowania indukcyjnego (logiki indukcyjne) należy się zabezpieczać przed pułapkami, które mogą prowadzić do powstawania paradoksów lub dowodzenia sofizmatów. Na przykład:

INDUKCYJNY DOWÓD NIEŚMIERTELNOŚCI

FAKTY $1 - n$ Wiele razy ($n \gg 1$) słyszałem, że ktoś umarł.

FAKT $n + 1$ Za każdym razem gdy słyszałem, że ktoś umarł, nie byłem to ja.

KONKLUZJA Nic nie wskazuje na to, że mogę umrzeć, więc jestem nieśmiertelny.

Oczywiście powyższe wnioskowanie jest błędne, bo nie uwzględnia przesłanek negatywnych i nie spełnia choćby podstawowych kryteriów "przyzwoitości" dla kompletności zbioru przesłanek. Niemniej jednak, w rzeczywistych systemach indukcyjnych musimy bardzo uważać na zabezpieczanie się przed nonsensownymi wnioskami.

1 WPROWADZENIE

2 NIEZUPEŁNE WNIOSKOWANIE INDUKCYJNE

- Rodzaje wnioskowań indukcyjnych

3 W STRONĘ LOGIKI INDUKCYJNEJ

W praktyce codziennego (formalnego) wnioskowania indukcyjnego stosuje się wiele schematów (metod), często pochodzących z innych dziedzin nauki. Są wśród nich:

- 1 Uogólnienie indukcyjne (ang. inductive generalisation).
- 2 Sylogizm statystyczny (ang. statistical syllogism).
- 3 Indukcja prosta/bezpośrednia (ang. simple/direct induction).
- 4 Wnioskowanie przez analogię (ang. argument from analogy).
- 5 Predykcja (ang. prediction).
- 6 Wnioskowanie przyczynowe lub przyczynowo-skutkowe (ang. causal inference). Etiologia.

UWAGA: wnioskowanie przez analogię może być rozpatrywane jako bardzo szczególny przypadek prostej indukcji.

Uogólnienie indukcyjne to metoda, która rozszerza przesłankę prawdziwą dla próbki na wniosek dla całej populacji.

REGUŁA

Przesłanka:

W próbce p wybranej z populacji P odsetek q przypadków w spełnia warunek A .

Wniosek:

W populacji P odsetek q przypadków w spełnia warunek A .

Zauważmy, że na razie nie zajmujemy się kwestią tego jak duża jest próbka, jak jest reprezentatywna, jak duży jest odsetek q , etc. Wpływ tych czynników nie może być jednak w ogólności zaniedbany, gdyż może to doprowadzić do błędnych wniosków.

Sylogizm to technika wnioskowania o dwóch przesłankach, przy czym obie przesłanki zawierają wspólny element, a każdy element wniosku zawarty jest w dokładnie jednej z nich.

Sylogizm statystyczny to wnioskowanie o pojedynczym przypadku na podstawie przesłanek mówiących o całej populacji.

REGUŁA

Przesłanki:

- W populacji P odsetek q przypadków w spełnia warunek A .
- **Nowy** przypadek s jest w P .

Wniosek:

Z prawdopodobieństwem będącym w (jakimś) związku z q przypadek s spełnia warunek A .

Wnioskowanie przez sylogizm statystyczny jest narażone na błędy typu *secundum quid* typowe dla sylogizmów.

Błędy (fallacia) typu *secundum quid* pojawiają się przy niewłaściwym stosowaniu sylogizmów, takich jak np. sylogizm Arystotelesa:

Jeżeli każdy A jest B oraz każdy B jest C, to każdy A jest B.

W przypadku sylogizmu statystycznego możemy napotkać dwie odmiany takich błędów.

- ❶ Błąd akcydentacji – *Fallacia a dicto simpliciter ad dictum secundum quid* – wyprowadzenie zdania szczegółowego ze zdania ogólnego przy pominięciu koniecznych domyślnych ograniczeń, np. “Skoro jest tak wielu leniwych studentów, to niektórzy studenci w tej grupie są leniwi”.
- ❷ Błąd odwróconej akcydentacji – *Fallacia a dicto secundum quid ad dictum simpliciter* – wyprowadzenie zdania ogólnego ze zdania szczegółowego przez opuszczenie niezbędnego dookreślenia występującego w tym zdaniu ogólnym, np. “Skoro można zabijać w obronie koniecznej, to zabijanie jest dozwolone”.

Indukcja bezpośrednia (prosta) działa przez zastosowanie przesłanki prawdziwej dla części znanych wcześniej przykładów (populacji) do nowego przykładu.

REGUŁA

Przesłanki:

- W populacji P odsetek q przypadków spełnia warunek A .
- **Nowy** przypadek s jest w P .

Wniosek:

s spełnia A z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do q

W tym konkretnym przykładzie prosta indukcja jest wynikiem złożenia uogólnienia i sylogizmu statystycznego. Wniosek z uogólnienia staje się pierwszą przesłanką sylogizmu.

Podobieństwo w jednych aspektach przesądza o podobieństwie w innych.

REGUŁA

Przesłanki:

- Przypadki (obiekty) s i t są zgodne ze względu na warunki A, B, C .
- Przypadek (obiekt) s spełnia też warunek D .

Wniosek:

t z dużym prawdopodobieństwem spełnia D .

Analogię stosuje się bardzo często w rozumowaniach zdroworozsądkowych, naukowych (ściśłych i humanistycznych), prawniczych i filozoficznych. Doprecyzowana i uregulowana wersja tego rozumowania stanowi dział informatyki (poddział SI) znany jako CBR (od ang. Case Based Reasoning).

Predykcja to wyciąganie wniosków o nowych obiektach (obserwowanych w przyszłości) na podstawie obserwacji zebranych z posiadanej próbki obiektów (w przeszłości/teraźniejszości).

REGUŁA

Przesłanka:

W **dotychczas zaobserwowanej** populacji P odsetek q przypadków spełnia warunek A .

Wniosek:

Nowo zaobserwowany przypadek s spełnia A z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do q

Predykcja jest jednym z najczęściej wykorzystywanych schematów rozumowania indukcyjnego. Po uzbrojeniu w ścisły aparat matematyczny stanowi punkt wyjściowy współczesnych metod odkrywania wiedzy z danych w wielu dziedzinach zastosowań informatyki.

Etiologia (aitiologia) to dział nauki badający przyczyny zjawisk, procesów, faktów, zwłaszcza przyczyny przestępczości i chorób.

W sensie rozumowania indukcyjnego, szczególnie w wydaniu informatycznym, badanie związków przyczynowo-skutkowych najczęściej sprowadza się do rozstrzygnięcia następującej kwestii.

SZUKANIE PRZYCZYNOWOŚCI W DANYCH

W najprostszym przypadku w danych obserwujemy dwa fakty (dwie zmienne) X i Y . Zwykle przyjmujemy, że te fakty nie zależą od czasu. Sprawdzamy na podstawie zgromadzonych danych która z zależności $X \rightarrow Y$ czy $Y \rightarrow X$ ma więcej przesłanek wspierających (większe wsparcie) jako hipoteza (potencjalny wniosek).

Sposób ustalania wsparcia dla każdej z hipotez na podstawie danych odróżnia metody.

1 WPROWADZENIE

2 NIEZUPEŁNE WNIOSKOWANIE INDUKCYJNE

- Rodzaje wnioskowań indukcyjnych

3 W STRONĘ LOGIKI INDUKCYJNEJ

Od systemu (semi-)formalnego, który odważymy się nazwać logiką indukcyjną powinniśmy wymagać:

- 1 Spełniania kryterium zgodności (CoA).
- 2 Zapewnienia, aby stopień pewności, z jakim przyjmujemy wniosek nie przewyższał stopnia pewności z którym uznajemy przesłanki oraz stopnia ufności w stosowane reguły inferencji (quasi-monotoniczność).
- 3 Możliwości wskazania jednoznacznej granicy między prawidłowymi a nonsensownymi wnioskami (patrz dowód nieśmiertelności).

Dodatkowym wymogiem jest intuicyjność, choć z tym bywa różnie (patrz następny slajd).

PROBLEM (PARADOKS) MONTY HALLA

Nazwany tak na cześć wieloletniego gospodarza teleturnieju "Let's Make a Deal". Jest nie tyle paradoksem, co demonstracją, że nasza intuicja "statystyczna / probabilistyczna" jest czasem bardzo płytką i zawodną.

PROBLEM MONTY HALLA

Gracz ma przed sobą troje drzwi za którymi są odpowiednio nagroda i dwie kozy. Wybiera jedno z drzwi. Gospodarz programu, który wie za którymi drzwiami jest nagroda, otwiera jedno spośród dwóch nie wybranych przez gracza drzwi. Za tymi drzwiami jest koza. Gospodarz pyta gracza, czy chciałby zmienić wybór?

Co powinien zrobić gracz by zmaksymalizować swoje szanse na nagrodę, zmienić wybór czy pozostać przy dotychczasowym?

Odpowiedź jest na tyle nieintuicyjna, że nawet Paul Erdős nie uwierzył dopóki nie pokazano mu w 1995 roku dowodu za pomocą drzewa decyzyjnego i potwierdzenia za pomocą symulacji komputerowej.

INDUKCYJNE = STATYSTYCZNE?

Bardzo często i (przy zachowaniu odpowiedniej ostrożności) przeważnie z sukcesem do realizacji praktycznych systemów indukcyjnych wykorzystuje się elementy probabilistyczne i statystyczne.

Były to pierwsze historycznie, uporządkowane podejścia do zagadnienia ustalania wsparcia dla stwierdzeń.

Jednym z najczęściej wykorzystywanych podejść są wnioski bayesowskie (probabilistyczne). Mówi się nawet, nieco na wyrost, o logice bayesowskiej (BLOG – Bayesian LOGic).

Wykorzystanie prawdopodobieństwa, w tym warunkowego, jako miary wsparcia, pewności czy wiarygodności pozwala nam skorzystać z osiągnięć rachunku prawdopodobieństwa i dokonać formalizacji rozumowania.

Trzeba jednak być ostrożnym, bo złożone wywody probabilistyczne mają tendencję do wymykania się “naturalnej” intuicji.

Jak już wcześniej zaznaczyliśmy, wszelkie wnioskowania związane z indukcją niepełną są wnioskowaniami **niepewnymi** (ang. uncertain reasoning). W większości przypadków są to także wnioskowania **niemonotoniczne**, tzn. przy pojawieniu się nowych przykładów (nowych przesłanek) może dojść do wykluczenia (zaprzeczenia) wniosków uważanych dotąd za wysoce prawdopodobne. Wnioskowania w obecności niepewności były i są szeroko badane w wielu dziedzinach nauki. Kilka najważniejszych podejść:

- Relacje wiarygodności – plausibility relations
- Funkcje przekonań Dempstera-Shafera – Dempster-Shafer belief functions
- Jakościowe relacje prawdopodobieństwa – qualitative probability relations
- Funkcje probabilistyczne – probability functions
- Funkcje possibility (rozmyte) – possibility functions in Fuzzy Logic
- Funkcje rankujące (sic!) – ranking functions

WNISKOWANIA NIEPEWNE

Poniższy rysunek pokazuje zależności między podejściami do wnioskowań niepewnych. Strzałki prowadzą od podejść bardziej do mniej ogólnych.

