

Topologia Algebraiczna I

Elementy teorii homotopii

Pomocnik studenta

Wersja *in statu nascendi*

Agnieszka Bojanowska

Stefan Jackowski

20 lutego 2016

Spis treści

1	Kategoryjny punkt widzenia	5
1.1	Kategorie, funktory, transformacje naturalne	5
1.2	Funktory reprezentowalne	9
1.3	Kategoria Δ i obiekty symplecjalne	10
1.4	Funktory sprzężone	11
1.5	Produkty i koprodukty, granice i kogranice	12
1.6	Kategorie morfizmów	15
1.7	Struktury algebraiczne w kategoriach	16
1.8	Kategorie przestrzeni topologicznych	17
1.9	Grupoid podstawowy przestrzeni topologicznej	20
2	Przestrzenie przekształceń ciągłych	25
2.1	Generowanie topologii	25
2.2	Topologia zwarto-otwarta	26
2.3	Topologia \mathcal{T}_{co} a produkt kartezjański	28
2.4	Przestrzenie przekształceń przestrzeni punktowanych	31
2.5	Przestrzeń dróg	31
2.6	Grupy homotopii	32
3	Korozwłóknienia i rozwłóknienia	35
3.1	Wstęp	35
3.2	Cylinder i kocylinder	36
3.3	Korozwłóknienia i rozwłóknienia	39
3.3.1	Definicje	39
3.3.2	Jednoznaczność podnoszenia i rozszerzania homotopii	43
3.3.3	Dualność korozwłóknień i rozwłóknień	43
3.4	Korozwłóknienia i relatywne homotopijne równoważności	46
3.5	Rozwłóknienia i włókniste homotopijne równoważności	51
3.6	Lokalny opis korozwłóknień	54
3.7	Lokalny opis rozwłóknień	56
3.8	Punktowane i wolne klasy homotopii	59
4	Ciągi zbiorów klas homotopii	61
4.1	Wstęp	61
4.2	Ciągi kowłókniste i włókniste	61
4.3	Funktory półdokładne i ciągi Puppe	65
4.4	Ciągi dokładne grup homotopii	69

5	<i>CW</i>-kompleksy	75
5.1	Relatywne komórki i multikomórki	75
5.2	<i>CW</i> -kompleksy i odwzorowania komórkowe	76
5.3	Twierdzenie J.H.C. Whiteheada	77
5.4	Aproksymacja gładka	79
5.5	Aproksymacja komórkowa	82
5.6	Homotopijne własności <i>CW</i> -kompleksów	84
6	Grupy homotopii <i>CW</i>-kompleksów	87
6.1	Grupy homotopii relatywnych komórek	87
6.2	Grupy homotopii sfer	91
6.3	Stopień odwzorowania $S^n \rightarrow S^n$	93
6.4	Grupy homotopii przestrzeni jednorodnych grup liniowych	93
6.5	Przestrzenie Eilenberga-MacLane'a	94

Rozdział 1

Kategoryjny punkt widzenia

1.1 Kategorie, funktory, transformacje naturalne

Definicja 1.1.1. Kategoria \mathcal{C} składa się z:

1. Klasy obiektów $\text{ob}(\mathcal{C})$.
2. Zbiorów morfizmów $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ określonych dla dowolnych dwóch obiektów $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, a jeśli $X = Y$ wraz z wyróżnionym elementem $\iota_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$, zwanym *morfizmem identycznościowym*.
3. Odwzorowań *składania* morfizmów

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \ni (f, g) \mapsto gf \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

określonych dla dowolnych trzech obiektów $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, takie, że:

- dla dowolnych trzech składalnych morfizmów zachodzi równość $(fg)h = f(gh)$ (tzn. składanie jest łączne),
- dla dowolnego morfizmu $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ zachodzi równości: $f\iota_X = \iota_Y f = f$ (tzn. ι_X jest elementem neutralnym ze względu na składanie).

Definicja 1.1.2. Morfizm $f: X \rightarrow Y$ w kategorii \mathcal{C} nazywamy *izomorfizmem* jeśli istnieje morfizm $g: Y \rightarrow X$ taki, że $fg = id_X$ oraz $gf = id_Y$.

Uwaga 1.1.1. Kategorie oznaczamy na ogół literami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ a zbiory morfizmów między obiektami $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ oznaczamy także $\mathcal{C}(X, Y)$.

Definicja 1.1.3. Podkategorią $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ nazywamy kategorię \mathcal{C}' taką, że każdy jej obiekt jest obiektem w \mathcal{C} , dla dowolnych $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i składanie morfizmów oraz morfizmy neutralne w \mathcal{C}' pokrywają się z tymi w \mathcal{C} . Podkategoria $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ nazywa się *pełną* jeśli dla dowolnych $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')$, $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Pełna podkategoria w \mathcal{C} jest jednoznacznie zdefiniowana przez podanie klasy jej obiektów.

Definicja 1.1.4. Funktor (kowariantny) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ między kategoriami \mathcal{C} i \mathcal{D} jest zadany przez przyporządkowanie obiektom kategorii \mathcal{C} obiektów kategorii \mathcal{D} : $F: \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$ oraz odwzorowania $F_{X,Y}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, określone dla dowolnych obiektów $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, które zachowujące morfizmy identycznościowe tzn. $F_{X,X}(\iota_X) = \iota_{F(X)}$ oraz złożenie morfizmów tzn. $F_{X,Z}(gh) = F_{Y,Z}(g)F_{X,Y}(h)$.

Uwaga 1.1.2. Nie istnieje kategoria wszystkich kategorii i funktorów, bowiem funktory między kategoriami nie muszą być zbiorem, a jedynie klasą.

Definicja 1.1.5. Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ jest bijekcją dla dowolnych $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$;
2. każdy obiekt $Y \in \text{ob}(\mathcal{D})$ jest izomorficzny z obiektem $F(A)$ dla pewnego $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

Definicja 1.1.6. Jeśli dane są dwa funktory $F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $i = 1, 2$ to ich *transformacją naturalną* nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ morfizmu (w \mathcal{D}) $\Phi_X: F_1(X) \rightarrow F_2(X)$ tak, że dla dowolnego morfizmu $f: X \rightarrow Y$ w \mathcal{C} następujący diagram w kategorii \mathcal{D} jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & F_2(X) \\ F_1(f) \downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & F_2(Y) \end{array}$$

Transformacja naturalna Φ nazywa się *naturalną równoważnością funktorów* jeśli dla każdego obiektu $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, morfizm Φ_X jest izomorfizmem.

Definicja 1.1.7. Dla dowolnej kategorii \mathcal{C} definiujemy kategorię przeciwną \mathcal{C}^{op} , czyli taką, że $\text{ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{ob}(\mathcal{C})$ a dla dowolnych $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C}^{op})$ definiujemy $\mathcal{C}^{op}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$. Funktor kowariantny $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywa się funktorem kontrawariantnym na \mathcal{C} .

Przykład 1.1.1. Przykłady kategorii i standardowe oznaczenia:

1. \mathcal{S} lub *Set* – kategoria zbiorów i ich dowolnych przekształceń,
2. \mathcal{P} lub *Poset* – kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych i przekształceń zachowujących porządek,
3. \mathcal{S}_* lub *Set** – kategoria zbiorów z wyróżnionym punktem i przekształceń zachowujących te punkty,
4. \mathcal{G} lub *Grp* – kategoria grup i homomorfizmów; $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ podkategoria grup abelowych,
5. \mathcal{R} lub *Ring* – kategoria pierścieni z jedyneką i ich homomorfizmów,
6. \mathcal{M}_R lub *Mod_R* – kategoria modułów nad pierścieniem R (R -modułów) i ich homomorfizmów,
7. $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lub *Vect_ℱ* – kategoria przestrzeni liniowych nad ciałem \mathbb{F} i przekształceń liniowych,
8. \mathcal{T} lub *Top* – kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych,
9. \mathcal{T}_* lub *Top** – przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i przekształceń ciągłych zachowujących te punkty,
10. \mathcal{T}_h lub *Top_h* – kategoria homotopii przestrzeni w której obiektami są przestrzenie topologiczne a morfizmami klasy homotopii. Istnieje naturalny funktor ilorazowy $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_h$,
11. \mathcal{T}_{*h} lub *Top_{h*}* – kategoria homotopii przestrzeni z wyróżnionym punktem. Obiekty: przestrzenie z wyróżnionym punktem; morfizmy: punktowane klasy punktowanych homotopii przekształceń. Istnieje naturalny funktor ilorazowy $\mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{T}_{*h}$.

Kategorie pochodzące od przestrzeni topologicznych omawiamy dokładniej w osobnym rozdziale.

Doskonale wyjaśnienie motywacji tych definicji, a w szczególności transformacji naturalnej znajduje się we wstępie do oryginalnego artykułu [5], w którym zostały wprowadzone do matematyki pojęcia teorii kategorii. Przytoczymy omawiany tam przykład:

Przykład 1.1.2. Zdefiniujemy kategorię skończenie wymiarowych, rzeczywistych przestrzeni wektorowych $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$. Jej obiektami są skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie wektorowe. Dla dowolnych dwóch przestrzeni $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin})$, morfizmy to odwzorowania liniowe, czyli $\text{Mor}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Złożenie morfizmów to złożenie przekształceń liniowych a element neutralny to przekształcenie identycznościowe. Tak zdefiniowana $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ spełnia oczywiście aksjomaty kategorii Def. 1.1.1. Zauważmy przy okazji, że kategoria $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ jest równoważna swojej podkategorii, której obiektami są przestrzenie wektorowe $\mathcal{N} := \{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ a morfizmami wszystkie odwzorowania liniowe. Istotnie, włożenie $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ jest równoważnością kategorii, bo każda przestrzeń skończenie wymiarowa jest izomorficzna z pewną przestrzenią \mathbb{R}^n .

Na kategorii $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ rozpatrzmy dwa funktory, znane dobrze z Algebry Liniowej:

- Funktor kontrawariantny przestrzeni sprzężonej $*$: $(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin})^{op} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ przypisujący przestrzeni \mathbf{V} przestrzeń sprzężoną $\mathbf{V}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ oraz odwzorowaniu liniowemu $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ przekształcenie liniowe $f^*: \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ zdefiniowane wzorem: $f^*(\varphi)(\mathbf{v}) := \varphi(f(\mathbf{v}))$.
- Funktor drugiej przestrzeni sprzężonej, czyli złożenie funktora $*$ ze sobą. Jest to funktor kowariantny $**$: $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$, który przypisuje przestrzeni wektorowej \mathbf{V} przestrzeń $\mathbf{V}^{**} := (\mathbf{V}^*)^*$ a homomorfizmowi $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ przekształcenie liniowe $f^{**}: \mathbf{V}^{**} \rightarrow \mathbf{W}^{**}$.

Dla każdej przestrzeni liniowej \mathbf{V} istnieje izomorfizm $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^*$, ale do zdefiniowania go konieczny jest pewien wybór np. bazy w \mathbf{V} lub iloczynu skalarnego w \mathbf{V} .

Izomorfizm $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^{**}$, może być zdefiniowany kanonicznie tzn. wyłącznie w terminach przestrzeni \mathbf{V} , bez odwoływania się do dodatkowych struktur, jak w poprzednim przypadku. Dla dowolnej przestrzeni \mathbf{V} zdefiniujmy przekształcenie liniowe $\Phi_{\mathbf{V}}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^{**}$ wzorem $\Phi_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})(\varphi) := \varphi(\mathbf{v})$. Przekształcenie $\Phi_{\mathbf{V}}$ jest różnowartościowe, a więc dla skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych jest izomorfizmem, bowiem $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{V}^{**})$. Znane z Algebry Liniowej określenie $\Phi_{\mathbf{V}}$ jako *kanonicznego izomorfizmu* znajduje ścisłe sformułowanie w postaci stwierdzenia, że $\Phi_{\mathbf{V}}$ jest transformacją naturalną (równoważnością) funktora identycznościowego do funktora drugiej przestrzeni sprzężonej. Istotnie, dla dowolnego odwzorowania liniowego $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ diagram przekształceń liniowych:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{V}}} & \mathbf{V}^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ \mathbf{W} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{W}}} & \mathbf{W}^{**} \end{array}$$

jest przemienny.

Zad. 1.1.1. Dla dowolnego ciała \mathbb{F} i ustalonej przestrzeni wektorowej $\mathbf{V} \in \text{ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin})$ definiujemy funktor $F_{\mathbf{V}}: \mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin}$, $F_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}) := \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, oraz dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ funktor $F_n(\mathbf{W}) := \mathbf{W} \times \dots \times \mathbf{W}$ (n -krotny produkt). (Zdefiniować te funktory na morfizmach!) Udowodnić, że dowolna baza B przestrzeni \mathbf{V} zdaje naturalną równoważność funktorów $\Phi_B: F_{\mathbf{V}} \rightarrow F_{\dim(\mathbf{V})}$.

Zad. 1.1.2. Dla dowolnego zbioru X przez $\mathcal{P}(X)$ oznaczamy zbiór którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X . Zdefiniujemy funktor kontrawariantny $P^1: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tak, że $P^1(X) := \mathcal{P}(X)$ a dla

$f: X \rightarrow Y$ przekształcenie $P^1(f): \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ wzorem $P^1(f)(B) := f^{-1}(B)$. Zdefiniujemy drugi funktor $F^2: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, zdefiniowany na dowolnym obiekcie X jako $F^2(X) = 2^X$ - zbiór przekształceń $X \rightarrow \{0, 1\}$, a na morfizmie $f: X \rightarrow Y$ jako $F^2(f)(\phi) := \varphi f$ dla dowolnej funkcji $\phi \in 2^Y$. Udowodnić, że istnieje naturalna równoważność funktorów $P^1 \rightarrow F^2$.

Zad. 1.1.3. Zinterpretuj znaną z Topologii II odpowiedniość przestrzeni nakrywających nad ustaloną lukowo spójną i lokalnie jednopójną przestrzenią X i $\pi_1(X, x_0)$ -zbiorów jako równoważność dwóch kategorii: przestrzeni nakrywających nad X oraz $\pi_1(X, x_0)$ -zbiorów.

Wiele przykładów kategorii ma podobny charakter do kategorii przestrzeni wektorowych: rozważa się zbiory z pewną dodatkową strukturą (np. działaniem grupowym, działaniami definiującymi strukturę pierścienia, topologią, porządkiem) oraz przekształcenia zachowujące te struktury. Takie podejście pozwala dostrzec analogie między różnymi twierdzeniami i teoriami matematycznymi.¹

Zauważmy, że dla każdej z kategorii 1.–9. istnieje *funktor zapominania* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ prowadzący do kategorii zbiorów, polegający na przyporządkowaniu zbiorowi ze strukturą samego zbioru, a morfizmom odpowiednich przekształceń zbiorów. Funktor zapominania jest oczywiście różnowartościowy na zbiorach morfizmów, ale na ogół skleja klasy izomorfizmu obiektów np. $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$ przeprowadza nieizomorficzne grupy \mathbb{Z}_4 i $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ na izomorficzne zbiory czteroelementowe. Kategorie wyposażone w funktor zapominania do kategorii zbiorów (który można opisać aksjomatycznie) nazywają się **kategoriami konkretnymi**. Mówiąc nieformalnie, są to kategorie których obiektami są zbiory z wyróżnioną strukturą (np. porządkiem, działaniem lub topologią) a morfizmami przekształcenia zbiorów zachowujące tę strukturę.

Chociaż powstanie pojęć kategorijskich było motywowane analogiami teorii matematycznych i potrzebą sprecyzowania intuicji "naturalnych równoważności", to w następnych latach okazało się, że ważne jest także rozważanie "małych" kategorii, będących uogólnieniem struktur algebraicznych.

Definicja 1.1.8. Kategorię \mathcal{C} nazywamy *małą* jeśli klasa obiektów $\text{ob}(\mathcal{C})$ jest zbiorem.

Obiekty w małych kategoriach często oznaczamy małymi literami, a więc $c \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Poszczególne grupy, zbiory częściowo uporządkowane możemy rozważać jako kategorie.

Przykład 1.1.3. Niech G będzie grupą (a nawet monoidem, czyli zbiorem z działaniem łącznym i z jednością). Zdefiniujemy kategorię \mathcal{C}_G jako posiadającą jeden obiekt $*$, a zbiór morfizmów $\mathcal{C}_G(*, *) := G$. Złożenie morfizmów jest zadane przez działanie grupowe, a morfizmem neutralnym jest element neutralny w grupie. Zauważmy, że funktorom między kategoriami zadanymi przez dwie grupy $\mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ odpowiadają dokładnie homomorfizmy grup $G \rightarrow H$. Istnieje także równoważność (a nawet izomorfizm) kategorii $(\mathcal{C}_G)^{op} = \mathcal{C}_G$.

Zad. 1.1.4. Niech $f_0, f_1: G \rightarrow H$ będą dwoma homomorfizmami grup. Udowodnić, że istnieje bijectcja zbioru transformacji naturalnych między wyznaczonymi przez nie funktorami $F_0, F_1: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ a elementami $h \in H$ takimi, że dla każdego $g \in G$, $f_1(g) = hf_0(g)h^{-1}$, czyli $f_1 = c_h f_0$ gdzie $c_h: H \rightarrow H$ jest automorfizmem wewnętrznym wyznaczonym przez element $h \in H$.

Przykład 1.1.4. Niech (S, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym (*poset*). Zdefiniujemy kategorię \mathcal{C}_S , w której $\text{ob}(\mathcal{C}_S) := S$ oraz $\text{Mor}(s_1, s_2) = \begin{cases} (s_2, s_1) & \text{jeśli } s_1 \leq s_2 \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$ Złożenie zdefiniowane jest w oczywisty sposób: $(s_3, s_2)(s_2, s_1) := (s_3, s_1)$.

Zad. 1.1.5. Niech $f_0, f_1: S \rightarrow T$ będą dwoma morfizmami posetów (odwzorowaniami zachowującymi porządek). Udowodnić, że istnieje transformacja naturalna (dokładnie jedna) między

¹Maksyma przypisywana Stefanowi Banachowi: *Matematykiem jest, kto umie znajdować analogie między twierdzeniami, lepszym - kto widzi analogie między dowodami, jeszcze lepszym - kto dostrzega analogie między teoriami, a można wyobrazić sobie i takiego, co widzi analogie między analogiami*. Być może młody Eilenberg usłyszał tę maksymę od Banacha i to stanowiło jedną z motywacji powstania pojęcia kategorii.

definiowanymi przez nie funktorami $F_0, F_1 : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_T$ wtedy i tylko wtedy gdy $f_0(s) \leq f_1(s)$ dla każdego $s \in S$.

Małe kategorie i funktory między nimi tworzą kategorię (bo funktory między małymi kategoriami tworzą zbiór!) oznaczaną \mathcal{Cat} . Ostatnie przykłady oznaczają, że kategoria grup i kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych są równoważne pewnym podkategoriom w \mathcal{Cat} . Jedynym wspólnym obiektem obu odpowiednich podkategorii jest zbiór jednopunktowy.

Zad. 1.1.6. Mała kategoria \mathcal{C} w której dla dowolnych dwóch obiektów $c, c' \in \text{ob}(\mathcal{C})$ istnieje co najwyżej jeden morfizm $c \rightarrow c'$ jest równoważna (ale nie identyczna!) z kategorią definiowaną przez poset (zbiór częściowo uporządkowany).

Zad. 1.1.7. Jeśli w małej kategorii każdy morfizm jest izomorfizmem oraz między każdymi dwoma obiektami istnieje morfizm, to ta kategoria jest równoważna kategorii definiowanej przez grupę. Podaj (nietrywialne) przykłady takich kategorii.

1.2 Funktory reprezentowalne

Dowolny obiekt kategorii \mathcal{C} wyznacza funktor kowariantny i funktor kontrawariantny do kategorii zbiorów.

Definicja 1.2.1. Dla $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ definiujemy funktory:

- Funktor kowariantny $R_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ reprezentowany przez obiekt $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$:
 - $R_X(U) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, U)$ dla $U \in \text{ob}(\mathcal{C})$
 - $R_X(f)(g) := f \circ g$ dla $U \xrightarrow{f} V$ i $X \xrightarrow{g} U$
- Funktor kontrawariantny $R^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ reprezentowany przez obiekt X .
 - $R^X(U) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(U, X)$ dla $U \in \text{ob}(\mathcal{C})$
 - $R^X(f)(g) := g \circ f$ dla $U \xrightarrow{f} V$ i $V \xrightarrow{g} X$

Definicja 1.2.2. Funktor kontrawariantny $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ nazywamy reprezentowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt $X \in \mathcal{C}$ oraz naturalna równoważność funktorów $R^X \rightarrow F$. Analogicznie dla funktora kowariantnego.

Przykład 1.2.1. Funktor F_n zdefiniowany w Zad. 1.1.1 jest reprezentowalny, a obiektem go reprezentującym jest przestrzeń \mathbb{R}^n .

Twierdzenie 1.2.1 (Lemat Yonedy). *Niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ będzie funktorem kontrawariantnym oraz $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Wówczas istnieje naturalna bijekcja między transformacjami naturalnymi funktorów $\Phi : R^X \rightarrow F$ a elementami zbioru $F(X)$ zadana przez przyporządkowanie*

$$\text{Nat}_{\mathcal{C}}(R^X, F) \ni \Phi \rightsquigarrow \Phi(X)(id_X) \in F(X).$$

Dowód. Zdefiniujemy odwrotne przyporządkowanie: każdemu elementowi $x \in F(X)$ przyporządkujemy transformację $\Phi_x : R^X \rightarrow F$ daną wzorem: $\Phi_x(f) := F(f)(x)$. \square

Wniosek 1.2.1. *Dla dowolnych obiektów $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ przyporządkowanie $f \rightsquigarrow \tau_f$, $\tau_f(h) = f \circ h$ definiuje bijekcję między elementami zbioru $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a transformacjami naturalnymi funktorów przez nie reprezentowanych $R^X \rightarrow R^Y$.*

Wniosek 1.2.2. *Jeżeli funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ jest reprezentowalny, to obiekt go reprezentujący jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Dla małej kategorii \mathcal{C} i dowolnej kategorii \mathcal{D} niech $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ oznacza kategorię, której obiektami są funktory z $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, a morfizmami między funktorami transformacje naturalne. Jako wniosek z Lematu Yonedy 1.2.1 otrzymujemy:

Wniosek 1.2.3. *Przyporządkowanie $X \rightsquigarrow R^X$ definiuje funktor, który jest równoważnością kategorii \mathcal{C} z pełną podkategorią (p.Def. 1.1.3) $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S})$ złożoną z funktorów reprezentowalnych.*

Zauważmy, że w przypadku kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych funktory $R^{\mathbf{V}}$, $R_{\mathbf{V}}$ mają wartości w tej samej kategorii, bo zbiór homomorfizmów sam jest przestrzenią wektorową. Kategorie mające tę własność nazywamy **kategoriami zamkniętymi**. Innym przykładem kategorii zamkniętej jest kategoria grup abelowych (ale nie wszystkich grup!). Nieco delikatniejsza jest kwestia nadania struktury kategorii zamkniętej kategorii przestrzeni topologicznych, bo w zbiorze przekształceń ciągłych można rozpatrywać różne topologie.

1.3 Kategoria Δ i obiekty symplecjalne

Ogromną rolę w topologii odgrywa kategoria skończonych zbiorów dobrze uporządkowanych i przekształceń zachowujących porządek, a dokładniej jej pełna podkategoria Δ składająca się z ciągów $[n] := \underline{n} := \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Geometryczna motywacja wynika stąd, że istnieje funktor $\Delta \rightarrow \mathcal{T}$ przypisujący zbiorowi \underline{n} sympleks $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rozpięty afinicznie na wektorach bazy kanonicznej e_0, e_1, \dots, e_n (współrzędne numerujemy $0, \dots, n$). Dowolne przekształcenie $\varphi: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ indukuje przez afiniczne rozszerzenie przekształcenie ciągłe $\Delta^n \rightarrow \Delta^m$.

Zad. 1.3.1. Wykaż, że dowolny morfizm w kategorii Δ można przedstawić jako złożenie przekształceń ścian (face maps) $\delta^0, \dots, \delta^n: [n-1] \rightarrow [n]$, gdzie δ^i jest injekcją pomijającą wierzchołek o numerze i oraz przekształceń degeneracji $\sigma^0, \dots, \sigma^n: [n+1] \rightarrow [n]$ zdefiniowane jako jedyna surjekcja taka, że $\sigma_i^{-1}(i) = \{i, i+1\}$. Przekształcenia δ^i, σ^i spełniają tożsamości symplecjalne (*simplicial identities*):

1. $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$ jeśli $i < j$
2. $\sigma_j \delta_i = \delta_i \sigma_{j-1}$ jeśli $i < j$
3. $\sigma_j \delta_i = id$ jeśli $i = j$ lub $i = j+1$
4. $\sigma_j \delta_i = \delta_{i-1} \sigma_j$ jeśli $i > j+1$
5. $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$ jeśli $i \leq j$.

Definicja 1.3.1. Niech \mathcal{C} będzie dowolną kategorią. Obiekt symplecjalny w kategorii \mathcal{C} to funktor $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$. Wartość funktora $X: \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ na obiekcie $[n] \in \Delta$ oznaczamy w skrócie X_n . Kategorię obiektów symplecjalnych i transformacji naturalnych oznaczamy $\mathbf{Sp}_{\mathcal{C}} := \text{Funct}(\Delta^{op}, \mathcal{C})$. Gdy $\mathcal{C} = \mathcal{S}$ jest kategorią zbiorów kategorię obiektów symplecjalnych w \mathcal{S} , zwanych zbiorami symplecjalnymi, oznaczamy \mathbf{Sp} .

Z Zad. 1.3.1 wynika, że aby zadać obiekt symplecjalny wystarczy wskazać ciąg obiektów $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ oraz morfizmy $F(\sigma^i) = s_i$ oraz $F(\delta^i) = d_i$ spełniające warunki wynikające z równości w Zad. 1.3.1.

Definicja 1.3.2. Symplecjalnym sympleksem n -wymiarowym nazywamy funktor $\Delta[n]: \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{S}$ reprezentowany przez $[n] \in \mathbf{Sp}$, czyli $\Delta[n]([m]) := \text{Mor}_{\Delta}([m], [n])$.

Otrzymujemy szczególny przypadek tzw. zanurzenia Yonedy 1.2.3:

Wniosek 1.3.1. *Przyporządkowanie $[n] \rightsquigarrow \Delta[n]$ definiuje funktor, który jest równoważnością kategorii Δ z pełną podkategorią kategorii \mathbf{Sp} , złożoną z funktorów reprezentowalnych.*

Kategoria zbiorów symplecjalnych \mathbf{Sp} odgrywa ogromną rolę we współczesnej teorii homotopii. Poglądowe wprowadzenie do teorii zbiorów symplecjalnych zawiera artykuł [6].

1.4 Funktory sprzężone

Adjoint functors arise everywhere.

Saunders Mac Lane

Pojęcie funktorów sprzężonych (dołączonych - *adjoint functors*) nawiązuje do pojęcia przekształcenia sprzężonego, znanego z algebry liniowej. Jeśli $(\mathbf{V}, \langle -, - \rangle_{\mathbf{V}})$ oraz $(\mathbf{W}, \langle -, - \rangle_{\mathbf{W}})$ są skończone wymiarowymi rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi wyposażonymi w iloczyn skalarny, to dowolnemu przekształceniu liniowemu $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ można przypisać przekształcenie sprzężone (lub dołączone) $f^!: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ takie, że dla dowolnych elementów $\mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ zachodzi równość: $\langle \mathbf{v}, f^!(\mathbf{w}) \rangle_{\mathbf{V}} = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{W}}$. Puszczając nieco wodze matematycznej fantazji można myśleć o przyporządkowaniu parze obiektów kategorii zbioru morfizmów jako rodzaju "formy dwuliniowej", której wartościami są zbiory. Ten punkt widzenia prowadzi naturalnie do definicji funktorów sprzężonych dołączonych.

Definicja 1.4.1. Funktory $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy sprzężonymi gdy istnieje naturalna równoważność funktorów na kategorii $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ o wartościach w \mathcal{S}

$$\Phi: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, G(\cdot)) \xrightarrow{\simeq} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), \cdot)$$

tnzn. dla dowolnej pary morfizmów $C_2 \xrightarrow{f} C_1$ w \mathcal{C} oraz $D_1 \xrightarrow{h} D_2$ w \mathcal{D} diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C_1, G(D_1)) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{C_1, D_1}} & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C_1), D_1) \\ \downarrow G(h), f^! & & \downarrow h_! F(f)^! \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C_2, G(D_2)) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{C_2, D_2}} & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C_2), D_2) \end{array} \quad (1.1)$$

jest przemienny. Mówimy, że functor F jest *lewo-sprzężony* do funktora G , a G jest *prawo-sprzężony* do funktora F .

Warunek równoważności funktorów można zapisać korzystając z oznaczeń dla funktora reprezentowanego.

$$R^{G(D)}(C) \simeq R_D(F(C))$$

Przykład 1.4.1. Zbiór morfizmów w kategorii zbiorów oznaczamy $\text{Map}(-, -)$. Dla trzech zbiorów $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{S})$ istnieje naturalna równoważność funktorów

$$\Phi_{(X, Y, Z)}: \text{Map}(X \times Y, Z) \simeq \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

dana wzorem $\Phi_{(X, Y, Z)}(f)(x)(y) := f(x, y)$. Ustalając zbiór Y otrzymujemy, że functor $R_Y(Z) = \text{Map}(Y, Z)$ posiada functor lewo-dołączony $F(X) := X \times Y$.

Zad. 1.4.1. Wykazać, że funktory $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy gdy istnieją transformacje naturalne $\eta: id_{\mathcal{C}} \rightarrow FG$ oraz $\epsilon: GF \rightarrow id_{\mathcal{D}}$ takie, że złożenia $F \xrightarrow{L\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon G} F$ oraz $G \xrightarrow{\eta R} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$ są identycznościami.

Zad. 1.4.2. Pokazać, że jeżeli functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii, to istnieje functor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sprzężony do F zarówno z prawej jak i lewej strony.

Zad. 1.4.3. Pokazać, że functor sprzężony do danego funktora, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do naturalnej równoważności funktorów.

Zad. 1.4.4. Niech \mathcal{S}_* będzie kategorią zbiorów z wyróżnionym punktem. Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora $R_X^*: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$, gdzie punktem wyróżnionym w $R_X^*(Z) := \text{Map}_*(X, Z)$ jest przekształcenie stałe w punkt wyróżniony w Z .

Zad. 1.4.5. Niech $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ będzie kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem \mathbb{F} . Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora $R_{\mathbb{V}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$, $R_{\mathbb{V}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{W}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Zad. 1.4.6. Niech $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin}$ będzie kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem \mathbb{F} . Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora $R_{\mathbb{V}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin}$.

Bardzo ważnymi przykładami functorów dołączonych są funktory dołączone do functorów zapominania.

Zad. 1.4.7. Skonstruuj funktory lewo-dołączone do functorów zapominania:

1. $\mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}$;
2. $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$, skonstruuj także functor prawo-dołączony;
3. $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$ oraz $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}_*$ (punkt wyróżniony w zbiorze na którym określona jest struktura grupowa to element neutralny);
4. $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, gdzie \mathcal{A} podkategoria grup abelowych, oraz $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$;
5. Niech G będzie grupą, a \mathcal{S}_G oznacza kategorię, której obiektami są G -zbiory a morfizmami G -przekształcenia. Dla dowolnej podgrupy $H \subset G$ definiujemy functor zapominania (obciążenia działania) $\mathcal{S}_G \rightarrow \mathcal{S}_H$.

1.5 Produkty i koprodukty, granice i kogranice

Definicja 1.5.1. Produktem (kartezjańskim) obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} nazywamy obiekt P wraz z morfizmami $P \xrightarrow{p_X} X$ i $P \xrightarrow{p_Y} Y$, który ma następującą własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów $W \xrightarrow{f} X$ i $W \xrightarrow{g} Y$ istnieje dokładnie jeden morfizm $W \xrightarrow{h} P$, dla którego $p_X \circ h = f$ i $p_Y \circ h = g$.

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{g} & X \\
 \downarrow f & \searrow h & \uparrow p_X \\
 Y & \xleftarrow{p_Y} & P
 \end{array} \tag{1.2}$$

Definicja 1.5.2. Koproduktem obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} nazywamy obiekt S wraz z morfizmami $X \xrightarrow{i_X} S$ i $Y \xrightarrow{i_Y} S$, który ma następująca własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów $X \xrightarrow{f} W$ i $Y \xrightarrow{g} W$ istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{h} W$, dla którego $h \circ i_X = f$ i $h \circ i_Y = g$.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xleftarrow{i_X} & X \\
 \uparrow i_Y & \searrow h & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{g} & W
 \end{array} \tag{1.3}$$

Uwaga. Koprodukt obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} jest produktem w kategorii \mathcal{C}^{op} .

Zad. 1.5.1. Podać definicję produktu i koproduktu dowolnej rodziny obiektów $\{X_j\}_{j \in J}$.

Zad. 1.5.2. Zbadać istnienie produktów i koproduktów (skończonych i nieskończonych) w znanych kategoriach.

Zad. 1.5.3. Dla obiektów X i Y kategorii \mathcal{C} rozpatrujemy funktor $F(\cdot) = R^X(\cdot) \times R^Y(\cdot)$, gdzie \times oznacza produkt kartezjański zbiorów. Funktor F jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje produkt $X \times Y$ i jest to obiekt go reprezentujący.

Z lematu Yonedy (Wniosek 1.2.1) wynika, że produkt, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Produkt (odpowiednio koprodukt) rodziny obiektów $\{X_j\}_{j \in J}$ oznaczamy:

$$\text{Produkt } \prod_{j \in J} X_j \quad \text{Koprodukt } \coprod_{j \in J} X_j$$

Produkt rodziny obiektów nazywamy czasem *produktem kartezjańskim* a koprodukt *sumą prostą*.

Zdefiniujemy teraz ogólniejszą konstrukcję granicy (zwanej też granicą odwrotną) i kogranicy (zwanej też granicą prostą) diagramu modelowanego na małej kategorii.

Definicja 1.5.3. Niech \mathcal{I} będzie małą kategorią. Diagramem w kategorii \mathcal{C} modelowanym na \mathcal{I} nazywamy dowolny funktor $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Powiemy, że rodzina morfizmów $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in \mathcal{I}}$ jest *zgodna* jeżeli dla każdego $\alpha_{ij} : i \rightarrow j$ morfizmu w \mathcal{I} , $F(\alpha_{ij}) \circ f_i = f_j$.

Definicja 1.5.4. *Granica* (lub granicą odwrotną) diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy obiekt L w kategorii \mathcal{C} (oznaczamy go $\lim_{\mathcal{I}} F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $\{p_j : L \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$, który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : W \rightarrow L$, dla którego $p_j \circ g = f_j$ dla każdego $j \in \text{ob } \mathcal{I}$.

Jeżeli odwrócimy strzałki dostaniemy dualne pojęcie granicy prostej (zwanej też kogranicą) diagramu.

Definicja 1.5.5. *Kogranicą* (lub granicą prostą) diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy obiekt C w kategorii \mathcal{C} (oznaczamy go $\text{colim}_{\mathcal{I}} F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $\{s_j : F(j) \rightarrow C\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$, który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : F(j) \rightarrow W\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : C \rightarrow W$, dla którego $g \circ s_j = f_j$ dla każdego $j \in \text{ob } \mathcal{I}$.

Zad. 1.5.4. Granica (odp. kogranica) diagramu modelowanego na kategorii dyskretnej (tzn. w której istnieją tylko morfizmy identycznościowe) jest izomorficzna z produktem (odp. koproduktem) rodziny obiektów.

Zad. 1.5.5. Jeśli kategoria \mathcal{I} ma obiekt początkowy $i_0 \in \text{ob } \mathcal{I}$ (odpowiednio końcowy $i_\infty \in \text{ob } \mathcal{I}$), to dla dowolnego diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ mamy $\lim_{\mathcal{I}} F = F(i_0)$ (odpowiednio $\text{colim}_{\mathcal{I}} F = F(i_\infty)$).

Przykład 1.5.1. Opiszemy bardzo ważne konstrukcje granicy i kogranicy diagramu zbiorów. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$ będzie diagramem w kategorii zbiorów.

Granica diagramu F jest podzbiorem zdefiniowanym następująco:

$$\lim_{\mathcal{I}} F := \{ \{x_i\} \in \prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} F(i) \mid \forall \alpha : i \rightarrow j \ F(\alpha)(x_i) = x_j \}$$

Morfizmy $p_i : \lim_{\mathcal{I}} F \rightarrow F(i)$ to obciążenia rzutowania z iloczynu kartezjańskiego na czynniki.

Kogranicę diagramu definiujemy dualnie, jako zbiór ilorazowy sumy rozłącznej.

$$\text{colim}_{\mathcal{I}} F := \left(\prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} F(i) \right) / \sim$$

gdzie \sim jest najmniejszą relacją zawierającą utożsamienia $(x', i) \sim (x'', j)$ jeśli istnieją morfizmy $\alpha_i : i \rightarrow k$ oraz $\alpha_j : j \rightarrow k$ takie, że $F(\alpha_i)(x') = F(\alpha_j)(x'')$. Morfizmy $s_i : F(i) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}} F$ są zdefiniowane przez włożenia w koprodukt.

Zad. 1.5.6. Opisać konstrukcje produktu i koproduktu w kategorii grup abelowych.

Stwierdzenie 1.5.1. Niech $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie dowolnym diagramem. Obiekt $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ z morfizmami strukturalnymi $\{C \rightarrow F(i)\}_{i \in \text{ob}(\mathcal{I})}$ jest granicą odwrotną diagramu F wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje funktor $G_F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ dany wzorem $G_F(X) = \lim_{\mathcal{C}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, F(-))$ (lim w kategorii Set) a morfizmy strukturalne odpowiadają elementowi $\text{id} \in G_F(C)$.

Wniosek 1.5.1. Granica i kogranica diagramu, o ile istnieje, to tylko jedna z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód. ZADANIE. □

Definicja 1.5.6. Niech w kategorii \mathcal{C} będą dane poniższe diagramy morfizmów oznaczonych litymi strzałkami.

Kogranicę diagramu morfizmów, oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} X_{12} & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow \bar{f}_2 \\ X_2 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & X_1 \sqcup_{X_{12}} X_2 \end{array}$$

nazywa się koproduktem kowłóknistym (inaczej *push-out*).

Granice diagramu morfizmów, oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_{12}} X_2 & \xrightarrow{\bar{f}_2} & X_1 \\ \downarrow \bar{f}_1 & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_{12} \end{array}$$

nazywa się produktem włóknistym (inaczej *pull-back*).

Zad. 1.5.7. Sprawdź, że powyższa definicja produktu włóknistego jest równoważna następującej: Produktem włóknistym morfizmów $X \xrightarrow{f} T$ oraz $Y \xrightarrow{g} T$ nazywamy obiekt Z wraz z morfizmami $Z \xrightarrow{p_X} X$ i $Z \xrightarrow{p_Y} Y$, dla których przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_X} & X \\ p_Y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

i który spełnia następujący warunek uniwersalności: dla każdego obiektu W i morfizmów $W \xrightarrow{h} X$ i $W \xrightarrow{k} Y$ takich, że $f \circ h = g \circ k$ istnieje dokładnie jeden morfizm $W \xrightarrow{r} Z$, taki że $p_X \circ r = h$ i $p_Y \circ r = k$.

Zad. 1.5.8. Zbadać istnienie granic i kogranic w znanych kategoriach.

Definicja 1.5.7. Granicę diagramu modelowanego na kategorii $0 \rightrightarrows 1$ (czyli dwóch morfizmów między tymi samymi obiektami) nazywamy ekwalizatorem tych morfizmów (także jądrem różnicowym) i oznaczamy Eq , a kogranicę ich koekwalizatorem (także kójądrem różnicowym) i oznaczamy Coeq .

Przykład 1.5.2. Niech $f, g: V \rightrightarrows W$ będą dwoma odwzorowaniami liniowymi. Wtedy $\text{Eq}(f, g) = \ker(f - g)$ a $\text{Coeq}(f, g) = \text{coker}(f - g)$. W szczególności jeśli $g = 0$, to jądro różnicowe jest po prostu jądrem przekształcenia f , a kójądro różnicowe, jego kójądrem.

Zad. 1.5.9. Opisz ekwalizator i koekwalizator dowolnej pary morfizmów w kategorii zbiorów i innych znanych kategoriach (zbadaj istnienie).

Stwierdzenie 1.5.2. *Jeśli w kategorii \mathcal{C} istnieją ekwalizatory dla dowolnej pary morfizmów (odp. koekwalizatory) oraz produkty (odp. koprodukty) dowolnej (skończonej) rodziny obiektów, to istnieją w niej granice (odp. kogranice) dowolnych (skończonych) diagramów.*

Dowód. ZADANIE. □

Stwierdzenie 1.5.3. *Funktor dołączony z lewej (prawej) strony zachowuje kogranice (granice) diagramów. Tzn. jeśli functor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest lewo dołączony do pewnego funktora, to dla dowolnego diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ to naturalny morfizm $\text{colim}_{\mathcal{C}}(G \circ F) \rightarrow G(\text{colim}_{\mathcal{C}} F)$ jest izomorfizmem.*

Dowód. ZADANIE. □

1.6 Kategorie morfizmów

Dla dowolnej kategorii \mathcal{C} można rozważać kategorię jej morfizmów $\text{Mor}(\mathcal{C})$ której obiektami są morfizmy w \mathcal{C} a morfizmami między dowolnymi dwoma obiektami $f : X \rightarrow Y$ i $f' : X' \rightarrow Y'$ (czyli morfizmami w \mathcal{C}) są przemiennie diagramy morfizmów w \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

czyli pary morfizmów (\bar{h}, h) w \mathcal{C} , dla których powyższy diagram jest przemienny.

Definicja 1.6.1. Mówimy, że morfizm $f : X \rightarrow Y$ jest *ortogonalny z lewej strony* do $f' : X' \rightarrow Y'$ jeśli dla każdego morfizmu (diagramu) między nimi istnieje przekątna $Y \rightarrow X'$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \\ f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

Odpowiednio mówimy, że f' jest ortogonalny do f z prawej strony. Jeśli $\mathcal{M} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ jest klasą obiektów w $\text{Mor}(\mathcal{C})$ (tzn. morfizmów w \mathcal{C}), to klasę morfizmów do nich ortogonalnych z prawej strony oznaczamy \mathcal{M}^\perp , a z ortogonalnych z lewej strony ${}^\perp\mathcal{M}$.

Zauważmy, że w dowolnej kategorii \mathcal{C} można mówić o retraktach:

Definicja 1.6.2. Obiekt c jest *retraktem* obiektu d jeśli istnieją morfizmy $c \rightarrow d \rightarrow c$ których złożenie jest identycznością id_c . Morfizm $d \rightarrow c$ nazywamy retrakcją.

Lemat 1.6.1. *Dla dowolnej klasy morfizmów \mathcal{M} klasy morfizmów ortogonalnych ${}^\perp\mathcal{M}$ i \mathcal{M}^\perp są zamknięte ze względu na retrakcje w kategorii $\text{Mor}(\mathcal{C})$.*

Dla ustalonego obiektu A możemy rozważać pełną podkategorię \mathcal{C}_A kategorii morfizmów, której obiektami są morfizmy o wartościach w A , a morfizmami diagramy w których dolna strzałka jest identycznością. Morfizmy możemy więc utożsamiać z trójkątami przemiennymi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & g \searrow & \swarrow h \\ & & A \end{array}$$

Dualnie rozważa się kategorię morfizmów wychodzących z A , oznaczaną \mathcal{C}^A , której obiektami są morfizmy $A \xrightarrow{f} X$ a morfizmami są także diagramy przemienne:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Kategorię \mathcal{C}_A nazywa się kategorią obiektów *nad* A , a kategorię \mathcal{C}^A nazywa się kategorią obiektów *pod* A .

Zad. 1.6.1. Produkt włóknisty morfizmów $X \xrightarrow{f} T$ oraz $Y \xrightarrow{g} T$ w kategorii \mathcal{C} jest izomorficzny z ich produktem w kategorii \mathcal{C}_T . Odpowiednio koprodukt kowłóknisty morfizmów $S \xrightarrow{f} X$ oraz $S \xrightarrow{g} Y$ w kategorii \mathcal{C} jest izomorficzny z ich koproduktem w kategorii \mathcal{C}^S .

Zad. 1.6.2. Zbadać istnienie produktów włóknistych i koproduktów kowłóknistych w znanych kategoriach.

1.7 Struktury algebraiczne w kategoriach

Pokażemy, że o strukturach algebraicznych takich jak monoid i grupa można mówić w dowolnej kategorii. Niech \mathcal{M} oznacza kategorię łącznych monoidów z jednością, a \mathcal{G} kategorię grup (grupa to monoid posiadający odwrotności). Zauważmy, że monoid można utożsamiać z kategorią posiadającą jeden obiekt, a grupę z takim monoidem w którym wszystkie morfizmy są odwracalne. Istnieją oczywiste funktory zapominania $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{Z} \mathcal{S}$.

Definicja 1.7.1. Strukturą grupową (odp. kogrupową) na obiekcie $Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ nazywamy podniesienie funktora kontrawariantnego reprezentowanego przez obiekt Y , $R^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$, $R^Y(X) := \text{Mor}(X, Y)$ (odp. R_X) do kategorii grup i ich homomorfizmów \mathcal{M} tzn. funktor $\tilde{R}^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \tilde{R}^Y \nearrow & \downarrow Z & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{R_Y} & \mathcal{S} \end{array}$$

w którym $Z : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$ jest funktorem zapominania o strukturze grupy, jest przemienny. Jeśli kategoria grup \mathcal{G} jest zastąpiona kategorią monoidów \mathcal{M} , to mówimy o strukturze monoidalnej (odp. komonoidalnej) na obiekcie X .

Działanie grupowe w zbiorze G definiuje strukturę grupową na tym zbiorze jako obiekcie kategorii: dla dowolnego zbioru X , zbiór przekształceń $\text{Mor}_{\mathcal{S}}(X, G)$ jest oczywiście grupą, a przekształcenia zbiorów $X \rightarrow Y$ indukują homomorfizmy grup. Natomiast w kategorii zbiorów nie ma obiektów kogrupowych, stąd ich mniejsza popularność, choć z kategorijskiego punktu widzenia definicje są symetryczne. Obiekt grupowy w kategorii \mathcal{C} staje się obiektem kogrupowym w kategorii \mathcal{C}^{op} i odwrotnie. Obiekty ko-grupowe odgrywają ważną rolę w teorii homotopii i w teorii algebr Hopfa. Konstrukcje obiektów grupowych i kogrupowych w kategorii homotopii przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem opiszemy w następnym rozdziale.

Zad. 1.7.1. Załóżmy, że na obiektach $X, Y \in \mathcal{C}$ zadane są struktury monoidu. Kiedy morfizm $f : X \rightarrow Y$ nazwiemy homomorfizmem tych struktur?

Zad. 1.7.2. Zbadać związek definicji grupy (topologicznej) z pojęciem obiektu grupowego w kategorii zbiorów (przestrzeni topologicznych) i kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem (przestrzeni z wyróżnionym punktem). Zbadać istnienie struktur ko-monoidu w tych kategoriach.

Jeśli w kategorii istnieją produkty oraz obiekt końcowy, to definicję struktury grupowej na X można wyrazić równoważnie w postaci bliższej tradycyjnej definicji grupy.

Zad. 1.7.3. Zakładamy, że w kategorii \mathcal{C} istnieją produkty dowolnych obiektów oraz obiekt końcowy P . Pokazać, że struktury grupowe na X są w bijekcji z trójkami morfizmów w \mathcal{C} :

1. $\mu : X \times X \rightarrow X$ (działanie grupowe),
2. $^{-1} : X \rightarrow X$ (branie elementu odwrotnego),
3. $e : P \rightarrow X$ (jedynka).

które spełniają odpowiednie warunki (te warunki proszę wypisać samodzielnie - to nic innego jak aksjomaty grupy napisane przy pomocy przemiennej diagramów). Wykazać analogiczne stwierdzenie dla obiektów kogrupowych.

Zad. 1.7.4. Zdefiniować działanie obiektu grupowego na obiekcie w kategorii oraz dualnie kodziałanie obiektu kogrupowego na obiekcie, tak żeby definicja działania w przypadku kategorii zbiorów i przestrzeni topologicznych pokrywała się z dobrze znaną.

Stwierdzenie 1.7.1. Załóżmy, że morfizm $\nu : X \rightarrow X \sqcup X$ zadaje strukturę kogrupową, zaś $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ zadaje strukturę grupową w kategorii \mathcal{C} posiadającej obiekt początkowy P , będący jednocześnie obiektem końcowym. Wtedy działania wyznaczone w $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ przez ν i przez μ pokrywają się i działanie jest przemienne.

Dowód. Pokrywanie się obu działań i przemienność działania grupowego wynika z następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\nu} & X \sqcup X & \xrightarrow{f \sqcup g} & Y \sqcup Y & & \\
 \downarrow \delta & \searrow \delta & \downarrow j_X & & \downarrow j_Y & \searrow id \sqcup id & \\
 X \times X & \xrightarrow{T} & X \times X & \xrightarrow{f \times g} & Y \times Y & \xrightarrow{\mu} & Y
 \end{array}$$

w którym e_X jest złożeniem $X \rightarrow P \rightarrow X$, $j_X := (id_X, e_X) \sqcup (e_X, id_X)$ (odpowiednio e_Y i j_Y), $\delta := (id, id)$ a $T := p_2 \times p_1$ jest zamianą współrzędnych. \square

1.8 Kategorie przestrzeni topologicznych

Centralną rolę w naszych rozważaniach będzie odgrywała kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych \mathcal{T} oraz kategorie z niej otrzymane przez rozmaite konstrukcje. Opiszemy bardziej szczegółowo kilka z nich:

Kategoria par przestrzeni topologicznych \mathcal{T}_2

Jest to podkategoria w kategorii morfizmów $\text{Mor}(\mathcal{T})$ składająca się z morfizmów (czyli przekształceń ciągłych) będących włożeniami podprzestrzeni w przestrzeń $A \subset X$. Morfizmami są przemienne

diagramy:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\
 \downarrow c & & \downarrow c \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} \tag{1.4}$$

a więc przekształcenia $f: X \rightarrow Y$ takie, że $f(A) \subset B$. Morfizmy w kategorii par przestrzeni zapisujemy $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Kategoria przestrzeni i par przestrzeni z wyróżnionym punktem \mathcal{T}_* .

Podkategorią kategorii par jest kategoria przestrzeni z wyróżnionym punktem: rozpatrujemy pary (X, A) takie, że $A = \{x_0\}$ jest zbiorem jednopunktowym. Obiektami w \mathcal{T}_* są więc pary (X, x_0) gdzie X jest przestrzenią, a $x_0 \in X$; morfizmami z (X, x_0) do (Y, y_0) przekształcenia $f: X \rightarrow Y$ takie, że $f(x_0) = y_0$, które oznaczamy $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Zauważmy, że kategorię \mathcal{T}_* możemy utożsamiać z kategorią morfizmów określonych na zbiorze jednopunktowym $\{pt\} \rightarrow X$.

Zad. 1.8.1. Zdefiniować kategorię par przestrzeni z wyróżnionym punktem \mathcal{T}_{2*} .

Kategoria \mathcal{T}^A - przestrzeni "pod A "

Dla ustalonej przestrzeni A rozważamy pełną podkategorię \mathcal{T}^A kategorii przekształceń $\text{Mor}(\mathcal{T})$, której obiektami są przekształcenia $A \xrightarrow{f} X$ a morfizmami są diagramy przemienne:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 i \swarrow & & \searrow j \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Kategoria \mathcal{T}_B - przestrzeni "nad B "

Dla ustalonej przestrzeni B rozważamy pełną podkategorię \mathcal{T}_B kategorii przekształceń $\text{Mor}(\mathcal{T})$, której obiektami są morfizmy o wartościach w B , a morfizmami przemienne trójkąty przekształceń

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g \searrow & & \swarrow h \\
 & B &
 \end{array}$$

Kategorie homotopii

Z każdą z powyższych kategorii można związać jej kategorię homotopii. Zaczniemy od podstawowej definicji kategorii homotopii przestrzeni topologicznych \mathcal{T}_h .

Definicja 1.8.1. *Homotopią* nazywamy dowolne przekształcenie ciągłe $F: X \times I \rightarrow Y$, gdzie $I = [0, 1]$ jest odcinkiem euklidesowym. Przekształcenia $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ nazywamy *homotopijnymi* jeśli istnieje homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzą równości $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ i oznaczamy $f_0 \sim f_1$ lub jeśli chcemy pamiętać jaka homotopia je łączy $f_0 \sim_F f_1$.

Stwierdzenie 1.8.1. *Homotopia \sim jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń $\text{Map}(X, Y)$.*

Dowód. Sprawdzimy trzy warunki, które musi spełniać relacja równoważności:

Zwrotność. Każde przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ jest homotopijne ze sobą przez homotopię stałą:
 $F: X \times I \rightarrow Y, F(x, t) := f(x)$.

Symetria. Jeśli $F: X \times I \rightarrow Y$ jest homotopią między f_0 i f_1 , to $F': X \times I \rightarrow Y, F'(x, t) := F(x, 1 - t)$ jest homotopią między f_1 i f_0 .

Przechodniość. Jeśli $F: X \times I \rightarrow Y$ jest homotopią między f_0 i f_1 a $G: X \times I \rightarrow Y$ jest homotopią między f_1 i f_2 to $H: X \times I \rightarrow Y$ zdefiniowane przez F na dolnej połowie walca i przez G na górnej połowie:

$$H(x, t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

jest homotopią między f_0 a f_2 . □

Uwaga 1.8.1. Zdefiniowaną wyżej homotopię H będziemy nazywać *konkatenacją* lub złożeniem homotopii F i G .

Zbiór klas homotopii oznaczamy $[X, Y] := \text{Map}(X, Y) / \sim$. Zauważmy, że $\{p\}, X =: \pi_0(X)$, gdzie $\{p\}$ – przestrzeń jednopunktowa, jest zbiorem składowych łukowych przestrzeni X . Składanie przekształceń zachowuje relację homotopii:

Stwierdzenie 1.8.2. *Jeśli $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ oraz $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ oraz $f_0 \sim f_1$ i $g_0 \sim g_1$, to ich złożenia są homotopijne: $g_0 f_0 \sim g_1 f_1$*

Dowód. Skonstruujemy homotopie $g_0 f_0 \sim g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ i skorzystamy z przechodniości relacji homotopii. Niech $F: X \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 a $G: Y \times I \rightarrow Z$ homotopią między g_0 i g_1 . Wtedy złożenie $X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g_0} Z$ jest homotopią $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$ a złożenie $X \times I \xrightarrow{f_1 \times id} Y \times I \xrightarrow{G} Z$ jest homotopią $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$. □

Definicja 1.8.2. Obiektami kategorii homotopii przestrzeni topologicznych \mathcal{T}_h są przestrzenie topologiczne, a dla dowolnych dwóch przestrzeni X, Y morfizmy między nimi to klasy to klasy homotopii przekształceń, czyli $\text{Mor}_{\mathcal{T}_h}(X, Y) = [X, Y]$

W dalszych rozważaniach ważną rolę będą odgrywały funktory reprezentowane przez obiekty tej kategorii: $R^Y(X) = [X, Y]$ i $R_X(Y) = [X, Y]$.

Zauważmy, że homotopię $F: X \times I \rightarrow Y$ można traktować jako rodzinę przekształceń (morfizmów w \mathcal{T}) parametryzowaną punktami odcinka: $f_t(x) = F(x, t)$. Ta obserwacja pozwala w uniwersalny sposób zdefiniować kategorie homotopii dla omówionych wyżej kategorii pochodzących od przestrzeni topologicznych. Morfizmy w kategoriach $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_*, \mathcal{T}^A, \mathcal{T}_B$ to odwzorowania odpowiednich przestrzeni spełniające dodatkowe warunki. Ich homotopią będziemy nazywać taką homotopię $F: X \times I \rightarrow Y$, że każde z przekształceń f_t spełnia te warunki. Homotopie w kategorii \mathcal{T}_2 nazywa się homotopią par, homotopię w kategorii \mathcal{T}_* – homotopią punktowaną, w kategorii \mathcal{T}^A nazywa się *homotopią relatywną rel(A)*, a w kategorii \mathcal{T}_B *homotopią nad B* lub homotopią włóknistą.

Retrakcje

Jak już zauważyliśmy, pojęcie retrakcji można zdefiniować w dowolnej kategorii \mathcal{C} . *Retrakcją* morfizmu $A \xrightarrow{f} X$ nazwiemy morfizm $X \xrightarrow{r} A$ taki, że złożenie $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{r} A$ jest identycznością. Rozważymy warianty tego pojęcia w zdefiniowanych wyżej kategoriach pochodzących od przestrzeni topologicznych.

Zad. 1.8.2. Jeśli morfizm w kategorii przestrzeni topologicznych $f: A \rightarrow X$ posiada retrakcję, to f jest zanurzeniem homeomorficznym A w X . Jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa, to podzbiór $f(A) \subset X$ jest domknięty.

W dalszym ciągu ograniczamy się więc do włożeń podzbiorów.

Definicja 1.8.3. Niech $A \subseteq X$ będzie podprzestrzenią w X a $i_A : A \hookrightarrow X$ oznacza włożenie.

1. Przekształcenie $r : X \rightarrow A$ nazywa się *retrakcją X na A* , jeżeli $r \circ i_A = id_A$. Podzbiór A nazywa się *retraktem X* .
2. Retrakcja $r : X \rightarrow A$ nazywa się *retrakcją deformacyjną*, jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X ; podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy *retraktem deformacyjnym X* .
3. Retrakcja $r : X \rightarrow A$ nazywa się *silną retrakcją deformacyjną*, jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X względem A tzn. istnieje homotopia $H : i_A \circ r \sim id_X$ taka, że $H(a, t) = a$ dla dowolnych $a \in A$, $t \in I$. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy *silnym retraktem deformacyjnym przestrzeni X* .

Zad. 1.8.3. Zinterpretować te definicje w języku kategorii \mathcal{T}^A .

1.9 Grupoid podstawowy przestrzeni topologicznej

Ważnym narzędziem badania własności przestrzeni topologicznej jest analiza klas homotopii dróg w tej przestrzeni. Zdefiniujemy i omówimy własności tzw. grupoidu podstawowego przestrzeni topologicznej. Zanim go zdefiniujemy wprowadzimy abstrakcyjną definicję grupoidu i podamy kilka łatwych własności.

Definicja 1.9.1. Grupoidem nazywamy małą kategorię w której wszystkie morfizmy są izomorfizmami.

Grupoidy i funktory między nimi tworzą pełną podkategorię kategorii małych kategorii.

Definicja 1.9.2. Składową spójną obiektu małej kategorii $c \in \mathcal{C}$ nazywamy pełną podkategorię, składającą się z obiektów c' które dają się połączyć łańcuchem morfizmów z obiektem c tzn. istnieje morfizmy $c \leftarrow c_1 \rightarrow c_2 \leftarrow \dots \rightarrow c'$. Kategorię nazywamy spójną jeśli składowa spójna jest równa całej kategorii.

Stwierdzenie 1.9.1. Jeśli \mathcal{G} jest spójnym grupoidem, to jest on równoważny z kategorią wyznaczoną przez grupę $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(c, c)$. Dowolny grupoid jest równoważny sumie prostej (w kategorii małych kategorii *Cat*) kategorii definiowanych przez grupy.

Stwierdzenie 1.9.2. Jeśli \mathcal{G} jest grupoidem to przyporządkowanie $\mathcal{G} \ni c \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{G}}(c, c)$ oraz dowolnemu morfizmowi $f : c_1 \rightarrow c_2$ odwzorowania $f_*(\alpha) := f\alpha f^{-1}$ określa funktor z \mathcal{G} do kategorii grup.

W grupoidzie podstawowym przestrzeni topologicznej obiektami będą jej punkty a morfizmami klasy homotopii dróg je łączących. Przypomnimy podstawowe definicje.

Definicja 1.9.3. Drogą ω w przestrzeni topologicznej X nazywamy przekształcenie $\omega : I \rightarrow X$, gdzie $I := [0, 1]$ jest odcinkiem jednostkowym. Droga ω ma początek $\text{org}(\omega) := \omega(0)$ i koniec $\text{end}(\omega) := \omega(1)$.

Dla drogi ω definiujemy drogę odwrotną $\omega^{-1} : \omega^{-1}(t) := \omega(1-t)$. Zauważmy, że $\text{org}(\omega^{-1}) = \text{end}(\omega)$ oraz $(\omega^{-1})^{-1} = \omega$.

Drogą stałą zaczepioną w punkcie x i oznaczaną ω_x nazywa się przekształcenie stałe $\omega_x(t) = x$ dla każdego $t \in I$.

Drogę dla której $\text{org}(\omega) = \text{end}(\omega) = x$ nazywa się drogą zamkniętą lub pętlą zaczepioną w punkcie x .

Zauważmy, że drogę można traktować jako homotopię między dwoma włożeniami zbioru jednopunktowego: na początek i na koniec drogi. Z drugiej strony homotopia $F: X \times I \rightarrow Y$ to rodzina dróg parametryzowanych punktami przestrzeni X .

Zbiór wszystkich dróg w X oznaczajmy symbolem $P(X)$.² Podzbiór dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczajmy symbolem $P(X; x, y)$. Mamy więc $P(X) = \bigcup_{(x,y) \in X \times X} P(X; x, y)$.

W zbiorze $P(X)$ zdefiniowane jest działanie składania (konkatenacji) dróg, jeśli koniec pierwszej drogi pokrywa się z końcem drugiej. Formalnie, rozważmy pull-back diagram:

$$\begin{array}{ccc} P(X) \times_X P(X) & \longrightarrow & P(X) \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ P(X) & \xrightarrow{p_1} & X \end{array}$$

czyli $P(X) \times_Y P(X) = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1(1) = \omega_2(0)\} \subset P(X) \times P(X)$.

Definicja 1.9.4. Definiujemy składanie dróg $*$: $P(Y) \times_Y P(Y) \rightarrow P(Y)$ zdefiniowane jest składanie dróg:

$$(\omega_1 * \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Przypisanie przestrzeni topologicznej X zbioru dróg $P(X)$ wraz z działaniem składania można rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że dowolne przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ definiuje przekształcenie zbiorów $f_{\#}: P(X) \rightarrow P(Y)$ polegające na "przeciąganiu" dróg: $f_{\#}(\omega) := f \circ \omega$. Przeciąganie dróg przez przekształcenie zachowuje składanie - $f_{\#}(\omega \star \eta) = f_{\#}(\omega) \star f_{\#}(\eta)$. Ponadto przyporządkowanie przekształceniu odwzorowania zbiorów dróg spełnia zależność: $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ oraz $id_{\#} = id$.

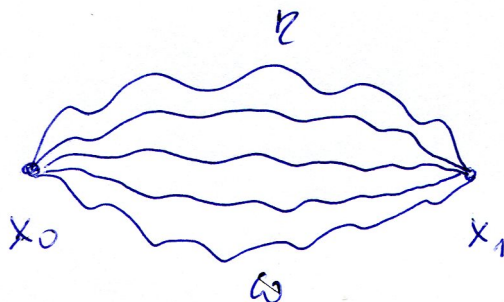
Działanie \star na zbiorze $P(X)$, choć jest naturalne, niestety nie ma dobrych własności algebraicznych - nie jest łączne, pętle stałe nie są elementami neutralnymi a droga odwrotna nie jest odwrotnością. Sytuacja zmienia się drastycznie jeśli podzielimy zbiór $P(X)$ przez relację równoważności zwaną homotopią.

Definicja 1.9.5. *Homotopią* między drogami $\omega, \eta: I \rightarrow X$ o wspólnym początku x_0 i końcu x_1 nazywamy przekształcenie $F: I \times I \rightarrow X$ takie, że dla każdego $t, s \in I$

$$F(t, 0) = \omega(t), \quad F(0, s) = x_0, \quad F(t, 1) = \eta(t), \quad F(1, s) = x_1$$

Mówimy, że drogi ω i η są homotopijne, co oznaczamy $\omega \sim \eta$ jeżeli istnieje między nimi homotopia, lub $\omega \sim_F \eta$ jeśli chcemy pamiętać o ustalonej homotopii.

²W następnym rozdziale zdefiniujemy topologię w tym zbiorze.

Rys Homotopia między drogami ω i η .**Zad. 1.9.1.**

1. Dowlone dwie drogi leżące w podzbiorze wypukłym w \mathbb{R}^n są homotopijne.
2. Jeżeli dwie drogi leżące w podzbiorze otwartym \mathbb{R}^n są dostatecznie bliskie (w metryce sup), to są homotopijne.
3. Dowlona droga podzbiorze otwartym \mathbb{R}^n jest homotopijna z drogą kawałkami liniowa oraz z drogą gładką.

Stwierdzenie 1.9.3. *Homotopia dróg jest relacją równoważności w zbiorze $P(X)$.*

Dowód. p. Stw. 1.8.1. □

Klasę abstrakcji drogi ω oznaczamy symbolem $[\omega]$, a zbiór klas homotopii dróg w X łączących punkt x z punktem y oznaczamy $\pi(X; x, y)$.

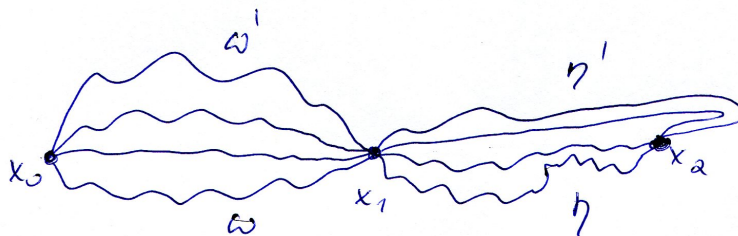
Zbiór klasy równoważności tej relacji będziemy oznaczać $\Pi(X)$. Podobnie jak poprzednio zbiór klas homotopii dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczamy symbolem $\pi(X; x, y)$ i mamy

$$\Pi(X) = \bigcup_{(x,y) \in X \times X} \pi(X; x, y).$$

Zauważmy, że relacja homotopii zachowuje składanie dróg, to znaczy prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1.9.4. *Jeżeli $\omega, \omega' \in P(X; x, y)$, $\eta, \eta' \in P(X; y, z)$ oraz $\omega \sim \omega'$ i $\eta \sim \eta'$, to $\omega \star \eta \sim \omega' \star \eta'$.*

Dowód. Niech F będzie homotopią między ω a η , zaś H homotopią między ω' a η' . Wówczas szukana homotopia między odpowiednimi złożeniami jest dana wzorem $K(t, s) = (F(\cdot, s) \star H(\cdot, s))(t)$. □



Rys. Homotopia i składanie dróg.

Możemy zatem zdefiniować składanie klas homotopii dróg, które będziemy oznaczać tym samym symbolem \star i ma ono następujące własności.

Stwierdzenie 1.9.5. *W zbiorze $\Pi(X)$ składanie klas homotopii dróg*

$$\star : \pi(X; x, y) \times \pi(X; y, z) \rightarrow \pi(X; x, z)$$

zdefiniowane dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$ ma następujące własności:

1. *Dla każdej klasy homotopii dróg $[\omega] \in \pi(X; x, y)$ zachodzą równości:*

$$[\omega] \star [\omega_y] = [\omega], \quad [\omega_x] \star [\omega] = [\omega], \quad [\omega] \star [\omega^{-1}] = [\omega_x], \quad [\omega^{-1}] \star [\omega] = [\omega_y].$$

2. *Dla dowolnych $[\omega] \in \pi(X; x, y)$, $[\eta] \in \pi(X; y, z)$, $[\zeta] \in \pi(X; z, u)$ zachodzi równość:*

$$([\omega] \star [\eta]) \star [\zeta] = [\omega] \star ([\eta] \star [\zeta]).$$

Dowód. a) Udowodnijmy na przykład, że $[\omega] \star [\omega^{-1}] = [\omega_x]$. Zanim wypiszemy wzór na homotopię (a takich możliwych homotopii jest oczywiście bardzo wiele) wyobraźmy sobie jak ona wygląda. Dla $s = 0$ przebiegamy drogę ω tam i z powrotem, zaś dla $s = 1$ "stoimy w miejscu" - zatem jeżeli dla dowolnego s dojdziemy do punktu $\omega(1 - s)$ i zawrócimy, to powinniśmy otrzymać szukaną ciągłą rodzinę dróg, czyli homotopię. Jeżeli zapiszemy to wzorem, to otrzymamy:

$$H(t, s) = \begin{cases} \omega(2(1 - s)t) & \text{dla } t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2(s - 1)t + 2(1 - s)) & \text{dla } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b) Żeby udowodnić łączność musimy po prostu zmienić "tempo" przebiegania całej drogi od x przez y do z . Szukany wzór jest następujący:

$$H(t, s) = \begin{cases} \omega\left(\left(\frac{4}{s+1}\right)t\right) & \text{dla } t \leq \frac{s+1}{4} \\ \eta(4t - (s + 1)) & \text{dla } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \zeta\left(\left(\frac{4}{2-s}\right)t + \frac{2+s}{4}\right) & \text{dla } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Definicja 1.9.6. Zbiorem obiektów grupoidu podstawowego przestrzeni X , oznaczanego $\Pi(X)$, są punkty przestrzeni X a morfizmami między punktami x, y zbiory klas homotopii dróg je łączących $\pi(X; x, y)$. Składanie morfizmów jest zdefiniowane przez składanie dróg.

Uwaga 1.9.1. Ponieważ konwencja zapisu kolejności składania dróg jest odwrotna od zapisu kolejności składania przekształceń, więc w celu osiągnięcia kompatybilności grupoid podstawowy definiuje się często jako kategorię $\Pi(X)^{op}$. My jednak pozostaniemy przy naturalnej definicji przy której morfizm prowadzi od początku do końca drogi. Zato pewne funktory będą kontrawariantne, a nie kowariantne.

Definicja 1.9.7. Grupą podstawową przestrzeni X z wyróżnionym punktem $x \in X$ nazywamy grupę $\pi_1(X, x) := \pi(X; x, x)$ klas homotopii pętli zaczepionych w punkcie $x \in X$ z działaniem składania pętli. Przestrzeń nazywa się *jednospójna* jeżeli jest łukowo spójna i jej grupa podstawowa jest trywialna.

Zauważmy, że pętle zaczepione w x można także traktować jako punktowane odwzorowania $(S^1, 1) \rightarrow (X, x)$ a homotopia dróg odpowiada homotopii punktowanej. Zatem $\pi_1(X, x) = [S^1, X]_*$. Stw. 1.9.2 zastosowane do grupoidu podstawowego daje nam:

Wniosek 1.9.1. *Dowolna droga $[\eta] \in \pi(X; , x, y)$ definiuje izomorfizm*

$$h_{[\eta]} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) \quad h_{[\eta]}([\omega]) = [\eta^{-1}] \star [\omega] \star [\eta].$$

a przyporządkowanie $\Pi(X) \ni x \mapsto \pi_1(X, x) \in \mathcal{Gr}$ jest funktorem określonym na grupoidzie podstawowym o wartościach w kategorii grup.

Dowód. To jest szczególny przypadek Stw. 1.9.2. □

Przyporządkowanie przestrzeni grupoidu podstawowego możemy rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że jeżeli $f : X \rightarrow Y$ jest przekształceniem, to przeciągnięcie dróg $f_{\#} : P(X) \rightarrow P(Y)$ zachowuje relację homotopii, a więc definiuje przekształcenie $f_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$. Przekształcenie $f_{\#}$ zachowuje działanie składania dróg:

$$f_{\#}([\omega] \star [\eta]) = f_{\#}([\omega]) \star f_{\#}([\eta])$$

więc przekształcenie $f_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ jest funktorem. Homomorfizm indukowany przez identyczność na przestrzeni X jest identycznością na grupoidzie $\Pi(X)$. Dla przekształceń $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ spełnione są zależności:

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} \quad \text{oraz} \quad id_{\#} = id.$$

Wniosek 1.9.2. *Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej jej grupoidu podstawowego a przekształceniu ciągłemu homomorfizmu indukowanego określa funktor z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii małych kategorii.*

W szczególności wynika stąd, że przekształcenie $f : X \rightarrow Y$ indukuje homomorfizm grup podstawowych $f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$. Homomorfizm indukowany przez identyczność jest identycznością i dla przekształceń $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow Z$, zachodzi równość $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, gf(x))$.

Rozdział 2

Przestrzenie przekształceń ciągłych

2.1 Generowanie topologii

Niech X będzie dowolnym zbiorem a $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ dowolną rodziną jego podzbiorów.

Definicja 2.1.1. Topologią *generowaną* przez rodzinę $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy najmniejszą topologię w X zawierającą \mathcal{U} - czyli przecięcie wszystkich topologii zawierających rodzinę \mathcal{U} . Oznaczamy ją $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Zad. 2.1.1. Jeśli $\{\mathcal{T}_s\}_{s \in S}$ jest rodziną topologii w zbiorze X , to ich przecięcie $\bigcap_{s \in S} \mathcal{T}_s$ też jest topologią.

Konstrukcja topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$:

1. Dołączamy do rodziny \mathcal{U} przecięcia skończenie wielu elementów rodziny \mathcal{U} definiując rodzinę:

$$\mathcal{U}^\cap := \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid U_i \in \mathcal{U}\}.$$

Rodzina \mathcal{U}^\cap jest już zamknięta ze względu na branie przecięć skończenie wielu zbiorów tzn. jeśli $V_1, V_2 \in \mathcal{U}^\cap$ to $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^\cap$.

2. Do rodziny \mathcal{U}^\cap dołączamy wszystkie sumy zbiorów należących do \mathcal{U}^\cap definiując rodzinę:

$$(\mathcal{U}^\cap)^\cup := \left\{ \bigcup_{i \in I} V_i \mid V_i \in \mathcal{U}^\cap \right\}.$$

Rodzina $(\mathcal{U}^\cap)^\cup$ jest zamknięta ze względu na branie sum zbiorów tzn. dla dowolnej rodziny $\{W_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{U}^\cap)^\cup$ jej suma $\bigcup_{j \in J} W_j \in (\mathcal{U}^\cap)^\cup$.

3. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}^\cap)^\cup$

Zad. 2.1.2. Sprawdzić, że rodzina $(\mathcal{U}^\cap)^\cup$ jest zamknięta ze względu na skończone przecięcia.

Dla ułatwienia śledzenia konstrukcji topologii, przestrzenie topologiczne będziemy w tym rozdziale zwykle oznaczać jako pary (X, \mathcal{T}) , gdzie X jest zbiorem a $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ topologią.

Stwierdzenie 2.1.1. Niech (X, \mathcal{T}) będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y będzie zbiorem oraz $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$ rodziną jego podzbiorów. Przekształcenie $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $V \in \mathcal{V}$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. \square

Stwierdzenie 2.1.2. Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ generowanej przez rodzinę \mathcal{B} wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

1. Rodzina \mathcal{B} jest pokryciem X ;
2. Dla dowolnych zbiorów $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ oraz punktu $x \in V_1 \cap V_2$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in V \subset V_1 \cap V_2$.

□

2.2 Topologia zwarto-otwarta

Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami Hausdorffa. Zbiór przekształceń ciągłych $\text{Map}(X, Y)$ można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego $\prod_{x \in X} Y_x$ gdzie dla każdego $x \in X$, $Y_x = Y$. Zbiór $\text{Map}(X, Y)$ można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy \mathcal{T}_p i nazywamy *topologią zbieżności punktowej*. Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w Y , a topologia w X określa jedynie jakie funkcje należą do $\text{Map}(X, Y)$. W przestrzeniach przekształceń definiuje się więc subtelniejszą topologię, zwaną topologią zwarto-otwartą, lub topologią zbieżności niemal jednostajnej, która zależy od obu topologii.

Definicja 2.2.1 (Topologia zwarto – otwarta). $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ – przestrzenie Hausdorffa. *Topologią zwarto – otwartą* - oznaczaną \mathcal{T}_{co} - nazywamy topologię w zbiorze $\text{Map}(X, Y)$ generowaną przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \subset Y \text{ otwarty}\},$$

gdzie $\langle A, W \rangle := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci $\langle A, W \rangle: \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiarami zwartymi, a $W_i \subset Y$ podzbiarami otwartymi.

Stwierdzenie 2.2.1. Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$, a jeśli (X, \mathcal{T}) jest przestrzenią dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.

Dowód. Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. □

Wniosek 2.2.1. $(\text{Map}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teorio-mnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci $\langle A, W \rangle$.

Lemat 2.2.1. Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów $A \subset X, W \subset Y$ $\langle A, W \rangle := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$. Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:

$$\begin{aligned} 1) \bigcap_{i \in J} \langle A_i, W \rangle &= \langle \bigcup_{i \in J} A_i, W \rangle & 2) \bigcap_{i \in J} \langle A, W_i \rangle &= \langle A, \bigcap_{i \in J} W_i \rangle \\ 3) \bigcap_{i \in J} \langle A_i, W_i \rangle &\subset \langle \bigcup_{i \in J} A_i, \bigcup_{i \in J} W_i \rangle \end{aligned}$$

Dowód. Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto-otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w (Y, \mathcal{T}_Y) , np. z jej bazy.

Lemat 2.2.2. *Jeśli topologia \mathcal{T}_Y jest generowana przez rodzinę $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_Y$ to rodzina $\{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ generuje topologię zwarto-otwartą na $\text{Map}(X, Y)$.*

Dowód. Oczywiście rodzina $\mathcal{F}_{\text{Map}} := \{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ jest zawarta w rodzinie generującej topologię zwarto – otwartą (Def. 2.2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci $\langle A, W \rangle$ gdzie $A \subset X$ jest zwarty, a $W \subset Y$ jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę \mathcal{F}_{Map} .

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny \mathcal{F} . Zauważmy najpierw, że jeśli $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$ gdzie $W_i \in \mathcal{F}$, to (p.2.2.1)

$$\langle A, W \rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i \rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli $W = \bigcup_{s \in S} W_s$ oraz dla każdego zwartego podzbioru $A \subset X$ oraz każdego $s \in S$, $\langle A, W_s \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$ to $\langle A, W \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego $f \in \langle A, W \rangle$ istnieje zbiór taki, że $f \in \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle \subset \langle A, W \rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiórmi zwartymi oraz $\langle A_i, W_i \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$.

Dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje $s(a) \in S$ taki, że $f(a) \in W_{s(a)}$, a więc z ciągłości f wynika, że istnieje otoczenie $a \in \text{cl}_A(V_a) \subset A$ takie, że $f(\text{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$. Zbiory $\{V_a\}_{a \in A}$ tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego A , można więc wybrać skończone podpokrycie $V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n} = A$. Zdefiniujemy zbiór zwarty $A_a := \text{cl}_A(V_a)$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i} \rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1} \rangle \cap \dots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n} \rangle \subset \left(\bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i} \right) \subset \langle A, W \rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

Lemat 2.2.3. *Niech $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s \in S}$ będzie rodziną zwartych zbiorów w (X, \mathcal{T}_X) z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego $A \subset X$ i otwartego $U \supset A$ istnieje skończenie wiele $C_i \in \mathcal{C}$ spełniających $A \subset \bigcup_{i=1}^n C_i \subset U$. Niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$ będzie pewną bazą. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W \rangle \mid C \in \mathcal{C}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w $\text{Map}(X, Y)$.

Dowód. Na mocy Lematu 2.2.2 wiemy, że $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(\text{All}, \mathcal{B}))$ gdzie All oznacza rodzinę wszystkich podzbiórów zwartych, a baza \mathcal{B} generuje topologię. Ponieważ $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(\text{All}, \mathcal{B}))$ więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla dowolnego zbioru zwartego $C \subset X$ oraz zbioru otwartego $W \in \mathcal{B}$ oraz dowolnego elementu $f \in \langle C, W \rangle$, istnieją zbiory zwarte $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ oraz otwarte $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{B}$ takie, że $f \in \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle \subset \langle C, W \rangle$. Rozważmy zbiór otwarty $U := f^{-1}(W) \supset C$, z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ taka, że $C \subset \bigcup_{i=1}^n C_{s_i} \subset U$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle C_{s_i}, W \rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle C_{s_i}, W \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n C_{s_i}, W \rangle \subset \langle C, W \rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni $\text{Map}(X, Y)$ pochodzące od przekształceń $X \rightarrow X'$ i $Y \rightarrow Y'$.

Stwierdzenie 2.2.2. *Dla dowolnych przekształceń ciągłych $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (X', \mathcal{T}_{X'})$ oraz $g: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y', \mathcal{T}_{Y'})$, odwzorowania indukowane:*

$$f^* : \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y), \quad f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_* : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y'), \quad g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej, a więc funktory reprezentowane przez dowolną przestrzeń Y (odp. X), R^Y (odp. R_X) mają wartości w kategorii przestrzeni topologicznych.

Dowód. Ciągłość wynika łatwo z teorio-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż f^* jest ciągłe, wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w $\text{Map}(X, Y)$ zachodzi: $(f^*)^{-1}(\langle C, W \rangle) = \langle f(C), W \rangle$, a więc jest zbiorem otwartym w $\text{Map}(X', Y)$. Podobnie $(g_*)^{-1}(\langle C, W' \rangle) = \langle C, g^{-1}(W') \rangle$ jest zbiorem otwartym w $\text{Map}(X, Y)$. \square

Uwaga 2.2.1. Jeśli $Y = Y' = \mathbb{R}^n$, to zbiór odwzorowań jest przestrzenią liniową i dla dowolnego przekształcenia $f: X \rightarrow X'$ przekształcenie indukowane f^* jest liniowe. Jeśli Y, Y' skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i $g: Y \rightarrow Y'$ jest odwzorowaniem liniowym, to g_* też jest liniowe.

Zauważmy, że jeśli przekształcenie f , o którym mowa w Stw. 2.2.2 jest surjekcją, to $f^* : \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ jest injekcją; jeśli g jest injekcją, to $g_* : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y')$ też jest injekcją. Aby były to zanurzenia homeomorficzne odwzorowania muszą spełniać dodatkowe warunki:

Stwierdzenie 2.2.3.

1. *Jeśli przekształcenie $f: X \rightarrow X'$ jest zwarcie-nakrywające tzn. dla dowolnego podzbioru zwartego $K \subset X'$ istnieje podzbiór zwarty $C \subset X$ taki, że $f(C) = K$, to dla dowolnej przestrzeni Y przekształcenie $f^* : \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ jest zanurzeniem homeomorficznym.*
2. *Jeśli przekształcenie $g: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ jest zanurzeniem homeomorficznym, to dla dowolnej przestrzeni X przekształcenie $g_* : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y')$ też jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Dowód. ZADANIE \square

2.3 Topologia \mathcal{T}_{co} a produkt kartezjański

Stwierdzenie 2.3.1. *Rzutowania na współrzędne $p_i: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$ zadają homeomorfizm:*

$$(p_{1*}, p_{2*}): \text{Map}(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\cong} \text{Map}(X, Y_1) \times \text{Map}(X, Y_2)$$

Dowód. Ciągłość odwzorowania (p_{1*}, p_{2*}) wynika z Stw. 2.2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 2.2.2 topologia w $\text{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$ jest generowana przez zbiory postaci $\langle C, p_i^{-1}(W_i) \rangle$ gdzie $i = 1, 2$, $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$, $C \subset X$ – zwarty. Dla $i = 1$ zachodzi równość zbiorów

$$(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1) \rangle) = \langle C, W_1 \rangle \times \text{Map}(X, Y_2)$$

i podobnie dla $i = 2$, a więc obrazy zbiorów generujących topologię w $\text{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$ generują topologię w produkcie $\text{Map}(X, Y_1) \times \text{Map}(X, Y_2)$. \square

Stwierdzenie 2.3.2. Włozenia $\iota_k: X_k \rightarrow X_1 \sqcup X_2$, $k = 1, 2$ definiują homeomorfizm

$$(\iota_1^*, \iota_2^*): \text{Map}(X_1 \sqcup X_2, Y) \rightarrow \text{Map}(X_1, Y) \times \text{Map}(X_2, Y).$$

Dowód. Dowód, że przekształcenie (ι_1^*, ι_2^*) jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 2.3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w $\text{Map}(X_1 \sqcup X_2, Y)$ przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 2.2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór $C \subset X_1 \sqcup X_2$ jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$. \square

Interesujące jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych $f: X \times Y \rightarrow Z$ jako rodziny przekształceń jednej zmiennej $f_x: Y \rightarrow Z$, $f_x(y) := F(x, y)$ parametryzowane w sposób ciągły przestrzenią X . O przestrzeni Y musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

Definicja 2.3.1. Przestrzeń Hausdorffa (Y, \mathcal{T}_Y) nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt $y \in Y$ posiada otoczenie $V \ni y$ takie, że jego domknięcie $\text{cl}_Y(V)$ jest zbiorem zwartym.

Uwaga 2.3.1. Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych są zbiorami domkniętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

Twierdzenie 2.3.1. Jeśli Y jest lokalnie zwarta, to przekształcenie

$$\text{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni przekształceń z topologią zwarto-otwartą.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni $\text{Map}(X \times Y, Z)$.

Lemat 2.3.1. Zbiory postaci $\langle A \times B, W \rangle$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są podzbiórami zwartymi, a $W \subset Z$ jest podzbiorem otwartym generują topologię zwarto-otwartą w $\text{Map}(X \times Y, Z)$.

Dowód. Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y: A \subset X, B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 2.2.3. Niech $X \times Y \supset U \supset C$ będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu $c \in C$ istnieją zbiory otwarte $U_c \subset X$, $V_c \subset Y$ takie, że $U_c \times V_c \subset U$, a ze zwartości C można wybrać skończone przykrycie otwarte $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \dots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisać pokrycie C zbiorami domkniętymi $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$. Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^n p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru C produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu $U \supset C$. \square

Dowód Twierdzenia 2.3.1. Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie e jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego $f: X \times Y \rightarrow Z$ przyporządkowane mu przekształcenie $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$ jest odwzorowaniem ciągłym $X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$. Zauważmy najpierw, że dla każdego $x \in X$, $\hat{h}(x) \in \text{Map}(Y, Z)$, jest to bowiem obcięcie h do poziomu $\{x\} \times Y$. Teraz sprawdzimy ciągłość $\hat{h}: X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$.

Załóżmy, że $\hat{h}(x) \in \langle C, W \rangle$ co oznacza, że $h(\{x\} \times C) \subset W$. Z ciągłości h wynika, że istnieje zbiór otwarty $G \supset \{x\} \times C$ taki, że $h(G) \subset W$, a ze zwartości C wynika (p.Lemat o tubie), że istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \times C \subset G$, a więc $\hat{h}(U) \subset \langle C, W \rangle$. Zauważmy, że dla poprawnego zdefiniowania przekształcenia e założenie lokalnej zwartości Y nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest oczywiście różnowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli przekształcenie $\hat{h}: X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ jest ciągłe, to odpowiadające mu przekształcenie $h(x, y) := \hat{h}(x)(y)$ jest ciągłe. Niech $h(x_0, y_0) \in W$ tzn. $\hat{h}(x_0) \in \langle \{y_0\}, W \rangle$, a z ciągłości $\hat{h}(x_0)$ i lokalnej zwartości Y wynika istnienie otoczenia $V \ni y_0$ takiego, że \bar{V} jest zbiorem zwartym i $\hat{h}(x_0) \in \langle \bar{V}, W \rangle$. Z ciągłości \hat{h} wynika, że istnieje otoczenie $U \ni x_0$ dla którego $\hat{h}(U) \in \langle \bar{V}, W \rangle$, a więc $h(U \times V) \subset W$ co kończy dowód, że przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyć, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w $\text{Map}(X \times Y, Z)$, opisany w Lemacie 2.3.1 generuje topologię w $\text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$. \square

Wniosek 2.3.1. *Dla dowolnych przestrzeni X, Z oraz lokalnie zwartej przestrzeni Y przekształcenie e definiuje bijekcję zbiorów klas homotopii $[X \times Y, Z] \xrightarrow{e} [X, \text{Map}(Y, Z)]$.*

Dowód. Wniosek wynika z Tw. 2.3.1: $\text{Map}(X \times Y \times I, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}(X \times I, \text{Map}(Y, Z))$ – homotopie przekształceń $X \times Y \xrightarrow{f} Z$ odpowiadają homotopiom przekształceń $X \xrightarrow{e(f)} \text{Map}(Y, Z)$. \square

Przekształcenia ilorazowe

Z Tw. 2.3.1 wynika też pewna ważna własność przekształceń ilorazowych. Przypomnimy, że przekształcenie $q: X \rightarrow Y$ nazywa się ilorazowe jeśli podzbiór $V \subset Y$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy jego przeciwobraz $q^{-1}(V) \subset X$ jest otwarty. Najważniejsze przekształcenia ilorazowe to projekcje na przestrzeń warstw relacji równoważności określonych na przestrzeni X . Zauważmy, że własność ilorazowości przekształcenia q jest równoważna następującemu warunkowi: przekształcenie $Z \rightarrow W$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy ciągłe jest złożenie $X \xrightarrow{q} Z \rightarrow W$.

Stwierdzenie 2.3.3. *Jeśli $q: X \rightarrow Z$ jest odwzorowaniem ilorazowym, a Y jest przestrzenią lokalnie zwartą, to przekształcenie $q \times \text{id}: X \times Y \rightarrow Z \times Y$ też jest ilorazowe.*

Dowód. Rozważmy następujący przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(Z \times Y, W) & \xrightarrow{(q \times \text{id})^*} & \text{Map}(X \times Y, W) \\ \simeq \downarrow e_Z & & \downarrow e_X \\ \text{Map}(Z, \text{Map}(Y, W)) & \xrightarrow{q^*} & \text{Map}(X, \text{Map}(Y, W)) \end{array}$$

Zauważmy, że diagram ten jest przemienny także jeśli zastąpimy zbiory przekształceń ciągłych $\text{Map}(-, -)$ przez zbiory wszystkich odwzorowań między zbiorami, przy czym podzbiory odwzorowań ciągłych są zachowywane przez odwzorowania w diagramie. Niech złożenie $X \times Y \xrightarrow{q} Z \times Y \xrightarrow{f} W$ będzie przekształceniem ciągłym; musimy wywnioskować stąd, że przekształcenie f jest ciągłe. Zauważmy, że $f q = (q \times \text{id})^*(f) \in \text{Map}(X \times Y, W)$ a stąd wynika, że $e_X(f q) = q^* e_Z(f) \in \text{Map}(X, \text{Map}(Y, W))$ jest przekształceniem ciągłym. Ponieważ q jest ilorazowe, więc wynika, że $e_Z(f) \in \text{Map}(Z, \text{Map}(Y, W))$ jest ciągłe. A ponieważ Y jest przestrzenią lokalnie zwartą, więc z Tw. 2.3.1 wynika, że $f \in \text{Map}(Z \times Y, W)$, czyli f jest przekształceniem ciągłym. \square

Uwaga. Zainteresowanym polecam notatki N. Stricklanda [16], w których rozpatrywane są *compactly generated weakly Hausdorff spaces*, co pozwala nadać wielu twierdzeniom o przestrzeniach przekształceń bardziej elegancką formę (w szczególności usuwając warunek lokalnej zwartości).

2.4 Przestrzenie przekształceń przestrzeni punktowanych

Jeśli $(X, x_0), (Y, y_0)$ są przestrzeniami z wyróżnionymi punktami to przez $\text{Map}_*(X, Y) \subset \text{Map}(X, Y)$ zbiór przekształceń $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ z topologią podprzestrzeni. Przypomnijmy, że bukiet $(X, x_0) \vee (Y, y_0) := (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y, (x_0, y_0))$, a smash-produkt jest przestrzenią ilorazową $(X \wedge Y, [x_0, y_0]) := (X \times Y / X \vee Y, [x_0, y_0])$. Zauważmy następujący wniosek z Twierdzenia 2.3.1:

Wniosek 2.4.1. *Jeśli $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ są przestrzeniami punktowanymi a przestrzeń Y jest lokalnie zwarta, to przekształcenie e skonstruowane w Tw. 2.3.1 definiuje ciągłą bijekcję*

$$\text{Map}_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z)).$$

Dowód. Dowód wynika natychmiast z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X \wedge Y, Z) & \xrightarrow{e} & \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z)) \\ \downarrow q^* & & \downarrow j \\ \text{Map}(X \times Y, Z) & \xrightarrow{\bar{e}} & \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z)) \end{array}$$

w którym pionowe odwzorowania są różnowartościowe a przekształcenie \bar{e} przekształca obraz odwzorowania q^* (indukowanego przez przekształcenie ilorazowe $X \times Y \xrightarrow{q} X \wedge Y$ na obraz włożenia j). \square

Wniosek 2.4.2. *Dla dowolnych przestrzeni punktowanych $(X, x_0), (Z, z_0)$ oraz lokalnie zwartej przestrzeni punktowanej (Y, y_0) przekształcenie e definiuje bijekcję zbiorów klas homotopii*

$$[X \wedge Y, Z]_* \xrightarrow{e} [X, \text{Map}_*(Y, Z)]_*.$$

Dowód. Dowód jest w pełni analogiczny do dowodu Wn. 2.3.1, przy czym należy zastosować Wniosek 2.4.1. Zauważmy jedynie, że punktowane homotopie $X \times I \rightarrow Y$ są w bijekcji z odwzorowaniami punktowanymi $X \wedge I^+ \rightarrow Y$, gdzie $I^+ := (I \sqcup \{+\}, +)$. \square

2.5 Przestrzeń dróg

Dla dowolnej przestrzeni Y będziemy rozważać przestrzeń dróg w Y , $P(Y) := Y^I = \text{Map}(I, Y)$ z topologią zwarto-otwartą. Dla dowolnego punktu $t \in I$ oznaczamy $p_t: P(Y) \rightarrow Y$ przekształcenie ewaluacji w punkcie t , $p_t(\omega) := \omega(t)$.

Stwierdzenie 2.5.1. *Przekształcenia $P(Y) \times_Y P(Y) \xrightarrow{*} P(Y)$ definiowane przez składanie dróg oraz przekształcenie $\text{inv}: P(Y) \rightarrow P(Y)$ przypisujące drodze drogę powrotną są ciągłe.*

Dowód. Patrz [14] Tw. 1.6.8. \square

Niech $y_0 \in Y$ będzie punktem wyróżnionym. W przestrzeni $P(Y)$ wyróżniamy podzbiór $\Omega Y = \Omega(Y, y_0) := \{\omega \mid \omega(0) = \omega(1)\}$ składający się z pętli zaczepionych w punkcie y_0 i rozpatrujemy w nim topologię podprzestrzeni oraz punkt wyróżniony - pętlę stałą ω_{y_0} . Przestrzeń pętli jest też wygodnie utożsamiać z przestrzenią punktowanych przekształceń okręgu $(S^1, 1) \rightarrow (Y, y_0)$, czyli $\Omega Y = \text{Map}_*(S^1, Y)$. Przy tym utożsamieniu, danym przez przekształcenie $\exp: [0, 1] \rightarrow S^1$, $\exp(t) := e^{2\pi i t}$ składanie dróg odpowiada działaniu w $\text{Map}(S^1, Y)$ zdefiniowanemu przez przekształcenie $\nu: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$,

$$\nu(z) = \begin{cases} (z^2, 1) & \text{gdy } \text{Im}(z) \geq 0 \\ (1, z^2) & \text{gdy } \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases}.$$

Zad. 2.5.1. Sprawdź, że przekształcenie ν zadaje strukturę ko-grupy w kategorii \mathcal{T}_{*h} na okręgu S^1 (zdefiniuj przekształcenia zadające element neutralny i odwrotny).

Stwierdzenie 2.5.2. Przekształcenie $\Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{*} \Omega Y$ definiowane przez składanie pętli wraz z odwzorowaniem $inv: \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ zadaje w przestrzeni ΩY strukturę obiektu grupowego w kategorii homotopii punktowanych przestrzeni topologicznych tzn. dla każdej przestrzeni punktowanej X zbiór punktowanych klas homotopii $[X, \Omega Y]_*$ ma strukturę grupy zdefiniowaną wzorem:
 $(f * g)(x) := f(x) * g(x)$.

Strukturę kogrupy w kategorii \mathcal{T}_{*h} posiada zawieszenie dowolnej przestrzeni punktowanej: $\nu_X := \nu \wedge id: S^1 \wedge X \rightarrow (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge X)$, oraz z definicji $S^1 \wedge X = \Sigma X$ jest zawieszeniem przestrzeni punktowanej X .

Wniosek 2.5.1. Przekształcenie $e: \text{Map}_*(\Sigma X, Z) \cong \text{Map}_*(X, \Omega Z)$ jest morfizmem obiektów grupowych w kategorii \mathcal{T}_h i definiuje izomorfizm grup

$$[\Sigma X, Z]_* \cong [X, \Omega Z]_*$$

Dowód. Wynika natychmiast z powyższych rozważań oraz 2.4.2 i 2.4.1. □

Wniosek 2.5.2. Dla dowolnej przestrzeni punktowanej X , H -kogrupa $\Sigma^2 X$ oraz H -grupa $\Omega^2(X)$ są abelowe.

Dowód. Mamy izomorfizmy grup $[\Sigma^2 X, Y]_* \simeq [\Sigma X, \Omega Y]_* \simeq [X, \Omega^2 Y]_*$ a środkowy zbiór z działaniami pochodzącymi od ν_X oraz $*_Y$ spełniają założenia Stw. 1.7.1. □

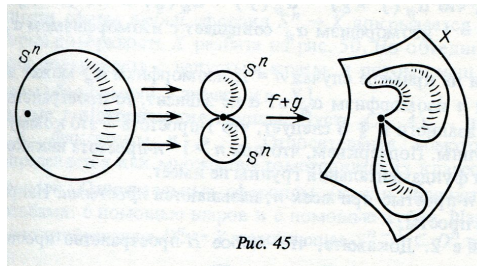
2.6 Grupy homotopii

W badaniu zbiorów klas homotopii $[X, Y]_*$ i homotopijnych równoważności szczególną rolę odgrywają funktory kowariantne na kategorii homotopii punktowanych przestrzeni topologicznych \mathcal{T}_{*h} , reprezentowane przez sfery $(S^n, 1)$ dla $n = 1, 2, \dots$ zwane funktorami grup homotopii. Dla $n > 0$ sfery są bowiem obiektami ko-grupowymi w kategorii \mathcal{T}_{*h} , a więc zbiory $[S^q, X]_*$ posiadają strukturę grupową.

Definicja 2.6.1. Dla $n = 0, 1, 2, \dots$ na kategorii \mathcal{T}_{*h} funktor kowariantny reprezentowany przez sferę $(S^n, 1)$ oznaczamy $\pi_n(X, x_0) := [(S^n, 1), (X, x_0)]_*$ i dla $n > 0$ nazywamy n -tą grupą homotopii przestrzeni punktowanej (X, x_0) , (dla $n = 1$ także grupą podstawową.) Zbiór $\pi_0(X, x_0)$ jest zbiorem z wyróżnionym punktem.

Stwierdzenie 2.6.1. Dla $n > 0$ funktory π_n mają wartości kategorii grup, a dla $n \geq 2$ w kategorii grup abelowych.

Dowód. Dowód wynika natychmiast z Stw. 1.7.1 oraz Wn. 2.5.1. □



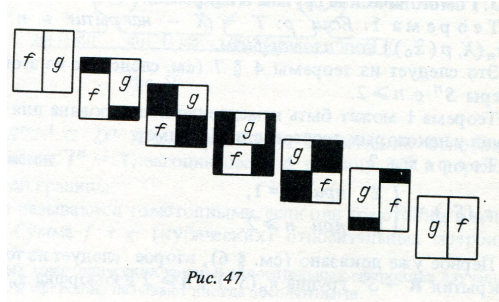
Puc. 45

Rys. Wizualizacja działania w grupach homotopii $(f, g: (S^n, 1) \rightarrow (X, x_0))$.
 Trzy strzałki między sferą a bukieciem sfer pokazują działanie odwzorowania ν . [7]

Ze Stw. 2.5.1 wynika natychmiast, że istnieje naturalny izomorfizm $\pi_q(X, x_0) \simeq \pi_{q-1}(\Omega(X, x_0), \omega_{s_0})$.

Ponieważ istnieje homeomorfizm $S^q \simeq D^q/S^q$ więc elementy $\pi_q(X, x_0)$ można utożsamiać z klasami homotopii odwzorowań par $[(D^q, S^{q-1}), (X, x_0)]$, czyli odwzorowaniami z dysku stałymi na sferze, lub dzięki homeomorfizmowi $(I^q, \partial I^q) \simeq (D^q, S^{q-1})$ z $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$, czyli odwzorowaniami określonymi na kostce, stałymi na jej brzegu.

Zad. 2.6.1. Zdefiniować wprost działanie w zbiorze $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$ i zdefiniować izomorfizm grup $\pi_q(X, x_0) \simeq [(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$. Pokazać wprost, że to działanie dla $q \geq 2$ jest przemienne.



Rys. Wizualizacja przemienności działania w grupach homotopii $f, g: (I^2/\partial I^2, *) \rightarrow (X, x_0)$. [7]

Stwierdzenie 2.6.2. Dla dowolnych punktowanych przestrzeni $(X, x_0), (Y, y_0)$ rzutowania na współrzędne $Y \leftarrow X \times Y \rightarrow X$ zadają izomorfizm grup

$$\pi_q(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_q(X, x_0) \times \pi_q(Y, y_0).$$

Dowód. ZADANIE. Opisać izomorfizm odwrotny. □

Zad. 2.6.2. Rzutowania zadają izomorfizm kategorii $\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y)$.

Pokażemy jak rozszerzyć przyporządkowanie $X \ni x \mapsto \pi_n(X, x)$ do funktora na grupoidzie podstawowym $\Pi(X)$, uogólniając konstrukcję podaną w Stw. 1.9.1. Niech $[\omega] \in \Pi(X)$ będzie dowolną drogą a $[\varphi] \in \pi_q(X, x_0)$ gdzie $\varphi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ oraz $x_0 = \omega(0)$. Zdefiniujemy odwzorowanie $h_\omega(\varphi): (D^n, 1) \rightarrow (X, x_1)$ gdzie $x_1 = \omega(1)$ następująco:

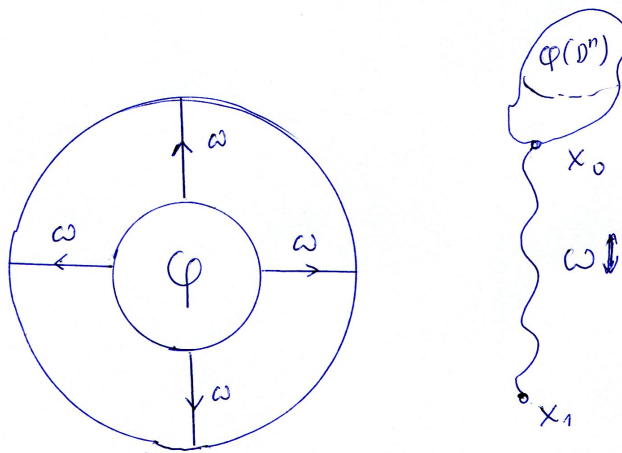
$$h_\omega(\varphi)(t\mathbf{v}) = \begin{cases} \varphi(2t\mathbf{v}) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \mathbf{v} \in S^{n-1} \\ \omega(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \mathbf{v} \in S^{n-1} \end{cases}$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy funktor opisany w Stw. 1.9.1.

Stwierdzenie 2.6.3. Powyższa konstrukcja ma następujące własności.

1. $h_{\omega * \eta}(\varphi) \sim h_\omega(h_\eta(\varphi))$,
2. klasa homotopii $[h_\omega(\varphi)]$ zależy tylko od klas homotopii $[\omega]$ i $[\varphi]$,
3. odwzorowania $h_\omega: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ są homomorfizmami.

Dowód. ZADANIE. □



Rys. Działanie grupy podstawowej na grupach homotopii.

Wniosek 2.6.1. Przyporządkowanie $\Pi(X) \ni x \mapsto \pi_n(X, x)$ oraz $\Pi(X) \ni [\omega] \mapsto h_{[\omega]}$ jest funktorem z grupoidu podstawowego przestrzeni X do kategorii grup. Dowlone przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ definiuje transformację naturalną funktorów $\pi_n(X, -) \rightarrow \pi_n(Y, -) f_{\#}$, gdzie $f_{\#}: \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ jest funktorem indukowanym przez przekształcenie f .

Zad. 2.6.3. Niech G będzie obiektem grupowym w kategorii \mathcal{T}_{*h} (w szczególności grupą topologiczną), Podać bezpośredni dowód następujących faktów wynikającego z Stw. 1.7.1:

1. Mnożenie $G \times G \rightarrow G$ zadaje działanie grupowe w zbiorach $[S^q, G]_* = \pi_q(G, e)$ identyczne z działaniem zdefiniowanym przez strukturę kogrupową na sferze;
2. Grupa podstawowa $\pi_1(G, e)$ jest przemienna.

Wykazać, że działanie grupy podstawowej $\pi_1(G, e)$ na grupach $\pi_q(G, e)$ jest trywialnie.

Zad. 2.6.4. Jeśli przestrzeń X jest ściągalna, to dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ i $q > 0$, $\pi_q(X, x_0) = 0$.

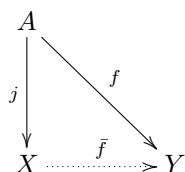
Rozdział 3

Korozwłóknienia i rozwłóknienia

3.1 Wstęp

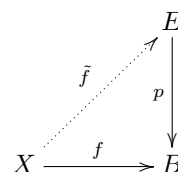
Wiele problemów topologii sprowadza się do następujących pytań o istnienie rozszerzenia lub podniesienia przekształcenia:

Problem rozszerzania Niech $j: A \rightarrow X$ będzie pewnym przekształceniem (zazwyczaj zanurzeniem). Czy dla przekształcenia $f: A \rightarrow Y$ istnieje rozszerzenie na X , tzn. przekształcenie $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ takie, że $\tilde{f}(j(a)) = f(a)$ dla $a \in A$?



Przykład 3.1.1. Pytanie czy dowolne odzworowanie $f: D^n \rightarrow D^n$ ma punkt stały (tw. Brouwera) sprowadza się do pytania czy istnieje retrakcja dysku na sferę, a więc rozszerzenie identyczności $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ na dysk $D^n \supset S^{n-1}$.

Problem podniesienia Niech $p: E \rightarrow B$ będzie pewnym przekształceniem (zazwyczaj surjeksią). Czy dla przekształcenia $f: X \rightarrow B$ istnieje podniesienie względem p , czyli przekształcenie $\tilde{f}: X \rightarrow E$ takie, że $p\tilde{f}(x) = f(x)$ dla $x \in X$?



Przykład 3.1.2. Pytanie, czy na sferze S^n istnieje wszędzie nieznikające pole wektorowe sprowadza się do pytania, czy identyczność na sferze posiada podniesienie ze względu na rzutowanie $TS_0^n := \{(x, \mathbf{v}) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp \mathbf{v}, \mathbf{v} \neq 0\} \xrightarrow{p} S^n$, $p(x, \mathbf{v}) := x$.

Zauważmy, że oba problemy mogą być oczywiście sformułowane gdy j , f i f , p są morfizmami w dowolnej kategorii, ale my ograniczymy się tu do kategorii przestrzeni topologicznych. Korozwłóknienia (odp. rozwłóknienia) to takie przekształcenia $j: A \rightarrow X$ (odp. $p: E \rightarrow B$) dla których problem rozszerzenia (odp. podniesienia) jest problemem w kategorii homotopii. Dokładniej, jeśli mamy dwa homotopijne przekształcenia $f_0 \sim f_1$ i jedno z nich daje się rozszerzyć (odp. podnieść) to i drugie można rozszerzyć (odp. podnieść), co więcej rozszerza się (odp. podnosi) homotopia między tymi przekształceniami. Z tym zjawiskiem czytelnik zapewne zetknął się w [teorii przekształceń nakrywających](#), które stanowią ważny przykład rozwłóknień.

Definicja 3.1.1. Przekształcenie $j : A \rightarrow X$ ma *własność rozszerzania homotopii* (HEP¹) jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow j & & \downarrow j \times id \\
 X \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 & \searrow f_0 & \nearrow F \\
 & & Y
 \end{array}$$

istnieje rozszerzenie (przerwana strzałka) $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$ tzn. dwa trójkątne diagramy są przemienne.

Definicja 3.1.2. Przekształcenie $p : E \rightarrow B$ ma *własność podnoszenia homotopii* (HLP²) jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\
 \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

istnieje podniesienie, (przerwana strzałka) $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$ tzn. dwa trójkątne diagramy są przemienne.

Zauważmy, że przekształcenia $j : A \rightarrow X$ mające własność HEP to dokładnie te przekształcenia względem których problem rozszerzenia jest problemem w kategorii homotopii; odpowiednio przekształcenia $p : E \rightarrow B$ mające własność HLP to dokładnie te przekształcenia względem których problem podniesienia jest problemem w kategorii homotopii.

W kategorii przestrzeni topologicznych wyróżnia się trzy więc trzy ważne klasy przekształceń: homotopijne równoważności, rozwłóknienia, i korozwłóknienia. Przekonamy się, że te klasy przekształceń generują wszystkie przekształcenia tzn. dowolne przekształcenie można przedstawić jako superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności, a także homotopijnej równoważności i rozwłóknienia.

Choć definicje rozwłóknienia i korozwłóknienia na pierwszy rzut oka wyglądają bardzo abstrakcyjnie, to wzajemna interakcja tych klas przekształceń pozwala identyfikować typ homotopijny konkretnych przestrzeni. Z drugiej strony pojęcia te posiadają pewne własności, które mogą być przeniesione do dowolnych kategorii, pozwalając budować analogiczne teorie homotopii m.in. w kategoriach algebraicznych. Kategorie w których wyróżnia się tak nazwane klasy morfizmów, spełniające pewne warunki analogiczne do tych, o których będzie mowa poniżej nazywa się *closed model categories*.

3.2 Cylinder i kocylinder

Przypomnijmy, że funktor mnożenia kartezjańskiego przestrzeni przez odcinek $X \mapsto X \times I$ posiada funktor dołączony: $\text{Map}(X \times I, Y) \simeq \text{Map}(X, P(Y))$ gdzie $P(Y) := \text{Map}(I, Y)$ jest przestrzenią dróg w Y . Homotopię $F : X \times I \rightarrow Y$ między przekształceniami $f_0 \sim f_1$ można więc traktować jako przekształcenie $\hat{F} : X \rightarrow P(Y)$ a warunek iż $F i_k = f_k$, $k = 0, 1$ gdzie $i_k : X \rightarrow X \times I$ jest włożeniem odpowiednio na dolną i górną podstawę, odpowiada warunkom $p_k \hat{F} = f_k$ gdzie $p_k : P(Y) \rightarrow Y$ jest ewaluacją $p_k(\omega) := \omega(k)$. Te rozważania motywują definicje cylindra i kocylindra - dla podkreślenia dwoistości tych pojęć umieszczamy je obok siebie:

Definicja 3.2.1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

<p><i>Cylindrem (lub walcem)</i> o podstawie X nazywamy włożenie $X \xrightarrow{i_0} X \times I$, $i_0(x) := (x, 0)$.</p>	<p><i>Kocylindrem (lub kowalcem)</i> nad X nazywamy projekcję $P(X) \xrightarrow{p_0} X$ gdzie $P(X) := X^I = \text{Map}(I, X)$, $p_0(\omega) := \omega(0)$.</p>
---	--

Konstrukcje cylindra i kocylindra zadają funktory z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii morfizmów w kategorii przestrzeni topologicznych tzn. dowolne przekształcenie $X \xrightarrow{f} Y$ definiuje diagramy przemienne:

$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{f \times id} & Y \times I \end{array}$	$\begin{array}{ccc} P(X) & \xrightarrow{\bar{f}} & P(Y) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$
--	--

oraz $\text{Map}(X \times I, Y) \simeq \text{Map}(X, P(Y))$, czyli funktory cylindra i kocylindra $- \times I, P: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ są sprzężone.

Stwierdzenie 3.2.1. Dla dowolnej przestrzeni X odwzorowania cylindra $X \xrightarrow{i_0} X \times I$ i kocylindra $P(X) \xrightarrow{p_0} X$ są homotopijnymi równoważnościami.

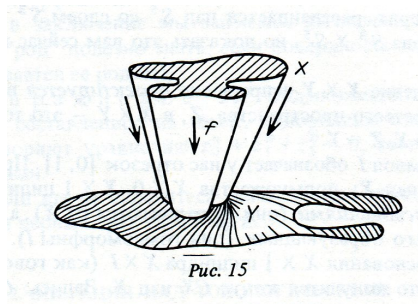
Dowód. ZADANIE □

Definicja 3.2.2. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie dowolnym przekształceniem.

<p><i>Cylindrem (lub walcem) przekształcenia f</i> nazywa się przestrzeń $Z(f)$ z włożeniem $i_0 : Y \hookrightarrow Z(f)$ zdefiniowanym jako push-out diagramu:</p>	<p><i>Kocylindrem (lub kowalcem) przekształcenia f</i>, nazywa się przestrzeń $P(f)$ wraz z projekcją $P(f) \xrightarrow{p_0} X$ zdefiniowane jako pull-back diagramu:</p>
---	---

$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} P(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & P(Y) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$
--	--

Zad. 3.2.1. Wypisać *explicitie* definicje cylindra i kocylindra przekształcenia f .



Rys. Wizualizacja cylindra przekształcenia [7]

Konstrukcje cylindra i kocyndra przekształcenia są funktorialne ze względu na morfizmy przekształceń. Dowlolny diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

indukuje odwzorowania $Z(f) \rightarrow Z(f')$ oraz $P(f) \rightarrow P(f')$ dla których odpowiednie diagramy są przemienne.

Zad. 3.2.2. Narysuj te diagramy.

Zad. 3.2.3. Sprawdź, że funktory $Z: \text{Mor}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{T})$ i $P: \text{Mor}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{T})$ definiowane przez konstrukcję cylindra i kocyndra są sprzężone, tzn. istnieje naturalna bijekcja między diagramami:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X' \\ \downarrow i_0 & & \downarrow f' \\ Z(f) & \xrightarrow{\varphi} & Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & P(f') \\ \downarrow f & & \downarrow p'_0 \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X' \end{array}$$

gdzie $\hat{\varphi}(x) := (\tilde{\varphi}(f(x)), \varphi(x, -))$.

Stwierdzenie 3.2.2. Jeżeli X jest przestrzenią lokalnie zwartą, Z dowolną przestrzenią

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

jest diagramem definiującym cylinder przekształcenia $f: X \rightarrow Z$. Wtedy diagram otrzymany przez zastosowanie do niego funktora $\text{Map}(-, Z)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(Z(f), Z) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & \text{Map}(X \times I, Z) \\ \downarrow i_0^* & & \downarrow i_0^* \\ \text{Map}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Map}(X, Z) \end{array}$$

jest diagramem definiującym kocyndr przekształcenia $f^*: \text{Map}(Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, Z)$, a zatem kostożek $P(f^*)$ jest homeomorficzny z przestrzenią $\text{Map}(Z(f), Z)$.

Dowód. Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} P(\bar{f}^*) & \xleftarrow{\cong} & \text{Map}(Z(f), Z) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & \text{Map}(X \times I, Z) & \xrightarrow{\cong} & P(\text{Map}(X, Z)) \\ & \searrow \bar{p}_0 & \downarrow i_0^* & & \downarrow i_0^* & \swarrow p_0 & \\ & & \text{Map}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Map}(X, Z) & & \end{array}$$

Kwadrat to dokładnie diagram powstający z diagramu definiującego cylinder (pierwszy diagram) po zastosowaniu funktora $\text{Map}(-, Z)$. Łatwo sprawdzić, że skoro ten wyjściowy był push-outem, to ten jest pull-backiem. Trójkąty to homeomorfizmy przestrzeni z górnego wiersza z przestrzeniami występującymi w definicji kocyndra. \square

3.3 Korozwsłóknienia i rozwsłóknienia

3.3.1 Definicje

Twierdzenie 3.3.1. Dla przekształceń $j : A \rightarrow X$ i odpowiednio $p : E \rightarrow B$ następujące warunki są równoważne:

- Dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & P(Y) \\ j \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (3.1)$$

istnieje przekształcenie $\bar{F} : X \rightarrow P(Y)$ takie, że $p_0 \bar{F} = F$ oraz $\bar{F} j = f$.

- Dla przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\ j \downarrow & \searrow j \times id & \downarrow F \\ X \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ & \searrow f_0 & \downarrow \bar{F} \\ & & Y \end{array} \quad (3.2)$$

istnieje przekształcenie $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$ takie, że $\bar{F} i_0 = f_0$, $\bar{F} (j \times id) = F$.

- Przekształcenie $\bar{j} : Z(j) \rightarrow Z(id) = X \times I$ indukowane przez morfizm przekształceń:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & X \\ j \downarrow & & \downarrow id \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array} \quad (3.3)$$

posiada lewą odwrotność $r : X \times I \rightarrow Z(j)$, czyli $Z(j)$ jest retraktem walca $X \times I$ - przekształcenie r nazywa się funkcją retrahującą korozwsłóknienia j .

- Dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array} \quad (3.4)$$

istnieje przekształcenie $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$ takie, że $p \tilde{F} = F$ i $\tilde{F} i_0 = \tilde{f}_0$.

- Dla przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccccc} Y & & & & \\ & \searrow \tilde{F} & & & \\ & & P(E) & \xrightarrow{p_0} & E \\ & \searrow F & \downarrow P(p) & & \downarrow p \\ & & P(B) & \xrightarrow{p_0} & B \end{array} \quad (3.5)$$

istnieje przekształcenie $\tilde{F} : Y \rightarrow P(E)$ takie, że $p_{\#} \tilde{F} = F$ oraz $p_0 \tilde{F} = f$.

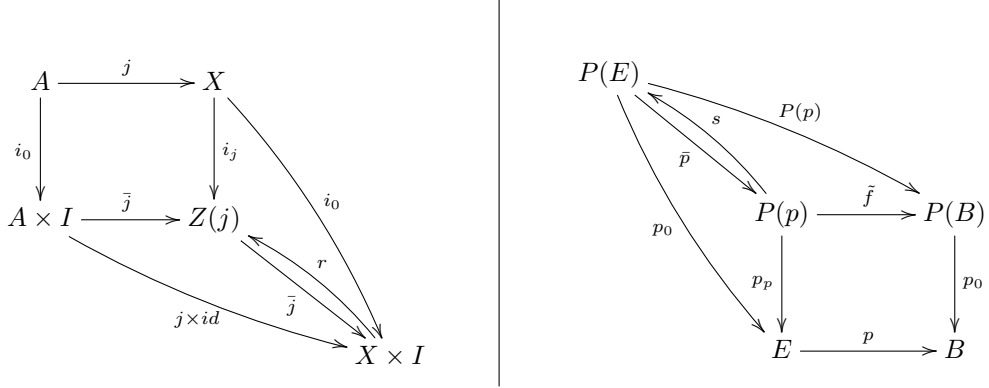
- Przekształcenie $\bar{p} : P(E) \rightarrow P(p)$ indukowane przez morfizm przekształceń:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{id} & E \\ id \downarrow & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \quad (3.6)$$

ma prawą odwrotność tzn. $s : P(p) \rightarrow P(E)$ takie, że $\bar{p} \circ s = id_{P(p)}$ - przekształcenie s nazywa się funkcją podnoszącą drogi rozwsłóknienia p .

Uwaga 3.3.1. Zauważmy, że:

1. Warunki nr (3.3) i (3.6) w definicjach korozwłóknienia i rozwłóknienia są wewnętrzne w tym sensie, że nie odwołują się do trzecich przestrzeni i przekształceń.
2. Warunki nr (3.3) i (3.6) oznaczają, że występujące w nich odwzorowania r i s wpisują się w następujące diagramy przemienne:



3. Warunek (3.2) dla korozwłóknienia oznacza, że kwadratowy diagram (3.2) jest "słabym push-out'em" - przekształcenie \tilde{F} nie jest bowiem jednoznacznie wyznaczone. Warunek 2 dla rozwłóknienia oznacza, że kwadratowy diagram (3.5) jest "słabym pull-back'iem", bo przekształcenie \tilde{F} nie jest jednoznacznie wyznaczone.
4. Warunki (3.1) i (3.2) w prawej kolumnie są tożsame z Def. 3.1.1, zaś warunek (3.4) jest tożsamy z warunkiem istnienia podniesienia homotopii Def. 3.1.2.
5. W warunku (3.2) homotopię $F: A \times I \rightarrow Y$ będziemy nazywali "rozszerzoną homotopią", odwzorowanie $f_0: X \times \{0\} \rightarrow Y$ warunkiem początkowym, a homotopię $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$ rozszerzeniem F z warunkiem początkowym f_0 .
6. Analogicznie, w warunku (3.4) będziemy nazywać F podnoszoną homotopią, \tilde{f}_0 warunkiem początkowym a $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow E$ podniesieniem F z warunkiem początkowym \tilde{f}_0 .

Definicja 3.3.1. Przekształcenie $A \xrightarrow{j} X$ mające własność rozszerzania homotopii nazywamy *korozwłóknieniem*.

Korozwłóknienie $A \xrightarrow{j} X$ nazywamy *acyklicznym* jeśli j jest jednocześnie homotopijną równoważnością.

Definicja 3.3.2. Przekształcenie $E \xrightarrow{p} B$ mające własność podnoszenia homotopii nazywamy *rozwłóknieniem*.

Rozwłóknienie $E \xrightarrow{p} B$ nazywamy *acyklicznym* jeśli p jest jednocześnie homotopijną równoważnością.

Od nazwisk twórców tych pojęć rozwłóknienia *rozwłóknieniami Hurewicza*³, a pary przestrzeni (X, A) , gdzie $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym i włożenie korozwłóknieniem nazywają się *parami Borsuka*⁴.

Zad. 3.3.1. Dowolny homeomorfizm jest zarówno korozwłóknieniem jak i rozwłóknieniem.

³Witold Hurewicz (Łódź 1904 – 1956 Uxmal, Mexico)

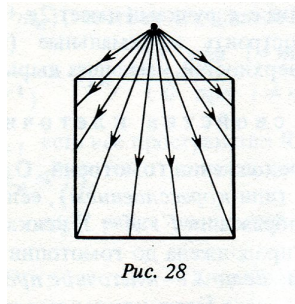
⁴Karol Borsuk (Warszawa 1905 – 1982 Warszawa)

Stwierdzenie 3.3.1.

1. Cylinder przestrzeni $i_0: X \rightarrow X \times I$ jest korowłóknieniem, a kocylinder $p_0: P(X) \rightarrow X$ jest rozwłóknieniem.
2. Dla dowolnych przestrzeni projekcja $B \times F \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem, a włożenie $X \subset X \sqcup Y$ jest korowłóknieniem.
3. Dla $n > 0$ włożenie $n - 1$ -wymiarowej sfery na brzeg n -wymiarowego dysku $S^{n-1} \subset D^n$ jest korowłóknieniem.

Dowód. Ad 1,2 – ZADANIE.

Ad 3 - poniższy rysunek.



Puc. 28

Rys. Retrakcja walca na podstawę i powierzchnię boczną [7]

□

Stwierdzenie 3.3.2. Niech $j: A \rightarrow X$ będzie korowłóknieniem. Wtedy

1. Przekształcenie $j: A \rightarrow j(A)$ jest homeomorfizmem na obraz, a więc j jest różnowartościowe.
2. Jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa to podzbiór $j(A) \subset X$ jest domknięty.
3. Dowolne korowłóknienie $A \xrightarrow{j} X$ jest złożeniem homeomorfizmu $A \simeq j(A)$ i zanurzenia $j(A) \subset X$, przy czym oba te odwzorowania są korowłóknieniami.

Dowód. Ad 1. Odwzorowanie odwrotne do j jest zadane przez obcięcie funkcji retrahującej $X \times I \xrightarrow{r} Z(j)$ do górnego denka $X \times \{1\}$; z jej definicji wynika, że $r(j(A) \times \{1\}) = A \times \{1\}$.

Ad 2. Rozważmy dwa przekształcenia: $id, \bar{j}r: X \times I \rightarrow X \times I$ i zauważmy, że skoro X jest przestrzenią Hausdorffa $A \times \{1\} = \{(x, 1) \mid id(x, 1) = \bar{j}r(x, 1)\}$, jest podzbiorem domkniętym.

Ad 3. Wynika natychmiast z 1. i 2. □

Stwierdzenie 3.3.3. Dla podzbioru domkniętego $A \subset X$ następujące warunki są równoważne:

1. (X, A) jest parą Borsuka;
2. Podzbiór $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ jest retraktem;
3. Podzbiór $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ jest silnym retraktem deformacyjnym.

Dowód. [1. \iff 2.] Wynika bezpośrednio z Tw. 3.6.1 pkt. 3.3, bo jeśli $j: A \subset X$ jest domkniętym podzbiorem, to cylinder $Z(j) = X \times \{0\} \cup A \times I$.

[2. \iff 3.] Niech $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G: X \times I \times I \rightarrow X \times I$ wzorem:

$$G((x, t), s) = (r_1(x, (1-s)t), (1-s)r_2(x, t) + st).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy retrakcją r a id i ponadto dla $a \in A$ i dowolnego $s, t \in I$, $G((x, t), s) = (x, (1-s)t + st) = (x, t)$. W drugą stronę implikacja jest oczywista. □

Zad. 3.3.2. Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem, to $p(E)$ jest sumą pewnych składowych łukowej spójności B .

Twierdzenie 3.3.2. Następujące konstrukcje zachowują klasy (ko-)rozwłóknień:

1. Przekształcenie izomorficzne w kategorii $\text{Mor}(T)$ z (ko-)rozwłóknieniem jest (ko-)rozwłóknieniem;
2. Złożenie (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem;
3. Pull-back (push-out) rozwłóknienia (ko-rozwłóknienia) jest rozwłóknieniem (ko-rozwłóknieniem);
4. Retrakt (ko-)rozwłóknienia w kategorii $\text{Mor}(T)$ jest (ko-)rozwłóknieniem;
5. Koproduct i produkt (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem.

Zad. 3.3.3. Udowodnij ostatnie stwierdzenie, używając do poszczególnych tez najodpowiedniejszego z równoważnych warunków definiujących (ko-)rozwłóknienie.

Następujący nietrudny wniosek z definicji korozwłóknienia jest bardzo silnym narzędziem przy badaniu homotopijnej równoważności przestrzeni.

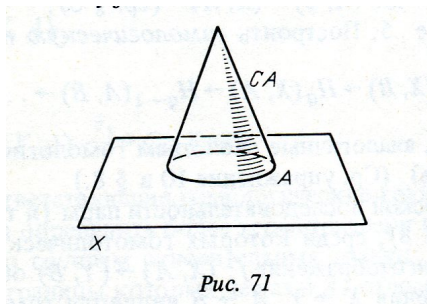
Stwierdzenie 3.3.4. Załóżmy, że włożenie podzbioru domkniętego $A \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem.

1. Jeśli podzbiór A jest ściągalny to przekształcenie ilorazowe $q: (X, A) \rightarrow (X/A, [a_0])$ jest homotopijną równoważnością par przestrzeni.
2. Dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ przekształcenie $q: (X \cup_A c(A), c(A)) \rightarrow (X/A, [a_0])$, gdzie $c(A)$ jest stożkiem nad A , jest homotopijną równoważnością par.

Dowód.

Ad 1. Skonstruujemy przekształcenie odwrotne do $q: (X, A) \rightarrow (X/A, [A])$. Niech $F: A \times I \rightarrow A$ będzie ściąganiem A do punktu $a_0 \in A$, czyli $F(-, 0) = id$, $F(-, 1) = a_0$. Rozszerzmy F do odwzorowania $F: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X$, kładąc $F(x, 0) := x$. Jest to przekształcenie ciągłe, ponieważ zbiór A jest domknięty. Z definicji korozwłóknienia wynika, że istnieje rozszerzenie $\bar{F}: X \times I \rightarrow X$. Zauważmy, że $\bar{F}(a, 1) = a_0$ a więc obcięcie do górnej podstawy walca $\bar{F}|X \times \{1\}$ wyznacza przekształcenie par $f_1: (X/A, [a_0]) \rightarrow (X, A)$ a homotopia $\bar{F}: id_X \sim f_1 q$. Homotopia $q f_1 \sim id_{X/A}$ jest wyznaczona przez złożenie przekształceń $X \times I \xrightarrow{\bar{F}} X \rightarrow X/A$, ponieważ $\bar{F}(a, t) \in A$ dla dowolnych $(a, t) \in A \times I$ a przekształcenie $X \times I \xrightarrow{q \times id} X/A \times I$ jest ilorazowe (p. Stw 2.3.3). Zatem odwzorowania q, f_1 są wzajemnie homotopijnie odwrotne.

Ad 2. Dla dowolnego podzbioru z faktu, że $A \subset X$ jest korozwłóknieniem wynika, że $c(A) \subset X \cup c(A)$ jest korozwłóknieniem (p. 3.3.2 pkt. 3). Ponieważ stożek jest ściągalny, więc teza wynika z pkt. 1. \square



Rys. Wizualizacja doklejenia stożka nad podzbiorem. [7]

Zad. 3.3.4. Jeśli włożenie domkniętego podzbioru $A \subset X$ jest korozwłóknieniem a przestrzeń X jest ściągalna, to przestrzeń ilorazowa X/A jest homotopijnie równoważna z zawieszeniem ΣA .

3.3.2 Jednoznaczność podnoszenia i rozszerzania homotopii

Twierdzenie 3.3.3. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie rozwłóknieniem a $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1: X \times I \rightarrow E$ dwoma homotopiami takimi, że istnieją homotopia $H: p\tilde{F}_0 \sim p\tilde{F}_1$ oraz homotopia $\tilde{G}: \tilde{F}_0|_{X \times \{0\}} \sim \tilde{F}_1|_{X \times \{0\}}$ takie, że $H(x, 0, t) = p\tilde{G}(x, 0, t)$ tzn. diagram litych strzałek:

$$\begin{array}{ccc} X \times \sqcup & \xrightarrow{\tilde{H}_\sqcup} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

w którym $\sqcup = I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I$ oraz

$$\tilde{H}_\sqcup(x, t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_0(x, t) & \text{gdy } s = 0 \\ \tilde{G}(x, 0, s) & \text{gdy } t = 0 \\ \tilde{F}_1(x, t) & \text{gdy } s = 1 \end{cases}$$

jest przemienny. Wtedy istnieje podniesienie $\tilde{H}: X \times I \times I \rightarrow E$, czyli homotopia $\tilde{H}: \tilde{F}_0 \sim \tilde{F}_1$ będąca rozszerzeniem \tilde{G} .

Dowód. Podniesienie istnieje ponieważ pary $(I^2, \sqcup) \simeq (I^2, I \times \{0\})$ są homeomorficzne. \square

Przypomnijmy, że jeśli (X, A) jest parą przestrzeni to skrótowo oznaczamy $X_A := X \times \{0\} \cup A \times I$.

Twierdzenie 3.3.4. Jeśli (X, A) jest parą Borsuka $\bar{F}_0, \bar{F}_1: X \times I \rightarrow Y$ dwoma homotopiami dla których istnieje homotopia $G: X_A \times I \rightarrow Y$ taka, że $G: \bar{F}_0|_{X_A \times \{0\}} \sim \bar{F}_1|_{X_A \times \{0\}}$. Wtedy istnieje homotopia $\tilde{G}: X \times I \times I \rightarrow Y$ będąca rozszerzeniem homotopii G .

Dowód. Na mocy Wn. 3.6.4 produkt par Borsuka $(X, A) \times (I, \partial I) = (X \times I, X \times 0 \cup A \times I \cup X \times 1)$ jest parą Borsuka. Wynika stąd, że przekształcenie:

$$F(x, t, s) := \begin{cases} F_0(x, t) & \text{gdy } s = 0 \\ G(x, t, s) & \text{gdy } a \in A \text{ lub } t = 0 \\ F_1(x, t) & \text{gdy } s = 1 \end{cases}$$

rozszerza się do $\tilde{G}: X \times I \times I \rightarrow Y$. \square

3.3.3 Dualność korozwłóknień i rozwłóknień

Dualność między korozwłóknieniami i rozwłóknieniami odzwierciedla następujące ważne twierdzenie:

Twierdzenie 3.3.5 (K. Borsuk). Jeśli przestrzeń X jest lokalnie zwarta a $j: A \hookrightarrow X$ jest parą Borsuka, to przekształcenie obcięcia $j^*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(A, Y)$ jest rozwłóknieniem. Jeśli korozwłóknienie j jest homotopijną równoważnością, to rozwłóknienie j^* jest homotopijną równoważnością.

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że przestrzeń A jest lokalnie zwarta, bowiem jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni lokalnie zwartej, a $Z(j) = X_A = X \times \{0\} \cup A \times I$.

Do złożenia przekształceń $Z(j) \xrightarrow{\tilde{j}} X \times I \xrightarrow{\tau} Z(j)$ opisanych w tw. 3.3.1 pkt. 2, które jest identycznością stosujemy functor $\text{Map}(-, Y)$ otrzymując złożenie, które także jest identycznością

(górny wiersz diagramu 3.7). Korzystając z tw. 2.3.1 otrzymujemy przemienny diagram w którym pionowe strzałki są homeomorfizmami (p. Stw. 3.2.2):

$$\begin{array}{ccccc} \text{Map}(Z(j), Y) & \xleftarrow{\bar{j}^*} & \text{Map}(X \times I, Y) & \xleftarrow{r^*} & \text{Map}(Z(j), Y) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ P(\bar{j}^*) & \xleftarrow{j^*} & P(\text{Map}(X, Y)) & \xleftarrow{r^*} & P(\bar{j}^*) \end{array} \quad (3.7)$$

Przekształcenie r^* jest więc prawą odwrotnością \bar{j}^* , o której mowa w 3.3.1 pkt.3, czyli funkcją podnoszącą drogi dla przekształcenia j^* . Stąd wynika że $j^*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(A, Y)$ jest rozwłóknieniem. Funktor $\text{Map}(-, Y)$ zachowuje relację homotopii (sprawdź), a więc homotopijne równoważności. \square

Przykład 3.3.1. Przekształcenia obcięcia $\text{Map}(D^n, Y) \rightarrow \text{Map}(S^{n-1}, Y)$ są rozwłóknieniami. Jeśli włożenie punktu $\{x_0\} \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem, to ewaluacja $ev: \text{Map}(X, Y) \rightarrow Y$, $ev(f) := f(x_0)$ jest rozwłóknieniem.

Następne twierdzenie powiada, że każde przekształcenie można rozłożyć na superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności lub homotopijnej równoważności i rozwłóknienia, czyli kosztem zamiany przestrzeni wartości lub argumentów, z homotopijnego punktu widzenia każde przekształcenie można zamienić zarówno na rozwłóknienie jak i korozwłóknienie.

Twierdzenie 3.3.6. *Dla dowolnego przekształcenia $f: X \rightarrow Y$ istnieje przemienny diagram, functorialnie zależący od przekształcenia f (tzn. morfizm przekształceń indukuje morfizm diagramów):*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \end{array}$$

w którym:

- Przekształcenia $s_0(x) := (\omega_{f(x)}, x)$ oraz $r_0(y) := \begin{cases} y & \text{dla } y \in Y \\ f(x) & \text{dla } (x, t) \in X \times I \end{cases}$ są homotopijnymi równoważnościami;
- Przekształcenie $i_f(x) := [x, 1]$ jest korozwłóknieniem;
- Przekształcenie $p_f(x, \omega) := \omega(1)$ jest rozwłóknieniem.

Dowód. Wykażemy, że przekształcenie i_f jest korozwłóknieniem. Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korozwłóknieniem, więc $X \times \partial I \subset X \times I$ jest korozwłóknieniem. Mamy push-out diagram, w którym utożsamiamy $X \times \partial I = X \sqcup X$

$$\begin{array}{ccc} X \times \partial I & \xrightarrow{f \sqcup id} & Y \sqcup X \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i}_f \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

Przekształcenie i_f jest złożeniem $X \hookrightarrow Y \sqcup X \rightarrow Z(f)$.

Dualnie, dowiedzimy że p_f jest rozwłóknieniem: Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korowłóknieniem, więc na mocy twierdzenia Borsuka przekształcenie $P(Y) = \text{Map}(I, Y) \rightarrow \text{Map}(\partial I, Y) = Y \times Y$ jest rozwłóknieniem. Rozpatrzmy pull-back diagram:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\widetilde{f \times id}} & P(Y) \\ \bar{p}_{0,1} \downarrow & & \downarrow p_{0,1} \\ X \times Y & \xrightarrow{f \times id} & Y \times Y \end{array}$$

i zauważmy, że $W = \{(x, y, \omega) \mid \omega(0) = f(x), \omega(1) = y\} = \{(x, \omega) \mid \omega(0) = f(x)\} = P(f)$; złożenie $P(f) \rightarrow Y \times X \rightarrow Y$ jest więc rozwłóknieniem. \square

Zad. 3.3.5. Sprawdzić, że przekształcenia s_0 oraz r_0 są homotopijnymi równoważnościami.

Definicja 3.3.3. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem.

<p><i>Homotopijnym kowłóknem f lub stożkiem f nazywamy przestrzeń ilorazową $C(f) := Z(f)/i_f(X)$.</i></p>	<p><i>Homotopijnym włóknem (lub kostożkiem) f nad punktem $y_0 \in Y$ nazywamy przeciwobraz $F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0) = \{(x, \omega) \mid f(x) = \omega(0), \omega(1) = y_0\}$.</i></p>
---	---

Włókno i kowłókno homotopijne wpisują się w diagram:

$$\begin{array}{ccc} & & F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0) \\ & & \downarrow \hookrightarrow \\ X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \\ \downarrow q & & \\ C(f) := Z(f)/i_f(X) & & \end{array}$$

Zauważmy, że homotopijne włókno $F(f)$ można też zdefiniować jako pull-back:

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(B, b_0) & \xrightarrow{p_0} & B \end{array}$$

gdzie $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(1) = b_0\}$ oraz $p_0(\omega) := \omega(0)$.

Uwaga 3.3.2. Często definiuje się przestrzeń $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(0) = b_0\}$, ale powyższa definicja zapewnia zgodność z podaną wcześniej definicją homotopijnego włókna.

3.4 Korozwłóknienia i relatywne homotopijne równoważności

Przypomnijmy, że dla ustalonej przestrzeni A przez \mathcal{T}^A oznaczamy kategorię morfizmów określonych na A , której obiektami są przekształcenia $A \rightarrow X$, a morfizmami są przekształcenia $f: X \rightarrow Y$ dla których diagram

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

jest przemienny. Rozważmy pełną podkategorię $\mathcal{T}^{cofA} \subset \mathcal{T}^A$ składającą się z przekształceń $A \rightarrow X$ będących korozwłóknieniami. Dla uproszczenia sformułowań dodajmy założenie, że rozpatrywane korozwłóknienia są inkluzjami podzbiorów, a rozpatrywane przestrzenie są Hausdorffa, co gwarantuje, że podzbiory są domknięte (p. Stw. 3.3.2).

W kategorii \mathcal{T}^A mamy relację homotopii przekształceń rel A (podaj dokładną definicję) i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy $(\mathcal{T}^{cofA})_h \subset (\mathcal{T}^A)_h$. Funktor zapominania $\mathcal{T}^A \ni (A \rightarrow X) \mapsto X \in \mathcal{T}$ indukuje functor między odpowiednimi kategoriami homotopii.

Twierdzenie 3.4.1. *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

odzworowania i, j są korozwłóknieniami a f jest homotopijną równoważnością (czyli w kategorii \mathcal{T}), to f jest homotopijną równoważnością rel A (czyli w kategorii \mathcal{T}^A).

W terminach kategoryjnych to twierdzenie można wysłowić następująco: Jeżeli functor zapominania przeprowadza pewien morfizm w kategorii $(\mathcal{T}^{cofA})_h$ na izomorfizm w \mathcal{T}_h , to jest on izomorfizmem w $(\mathcal{T}^{cofA})_h$. Ten punkt widzenia jest pomocny w zrozumieniu pierwszych kroków dowodu, zawartych w lematach o charakterze kategoryjnym. Niech $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będzie funktorem a \mathcal{M} pewną klasą morfizmów w \mathcal{C} , które F przeprowadza na izomorfizmy w \mathcal{D} . Szukamy warunków wystarczających do tego, aby każdy morfizm w \mathcal{M} był izomorfizmem. Funktor, który rozważamy to functor zapominania $(\mathcal{T}^{cofA})_h \rightarrow \mathcal{T}_h$.

Rozpocznijmy od lematu, który pozwoli na zredukowanie badania odwracalności morfizmu do znalezienie jednostronnej odwrótności. Uogólnia on nietrudny fakt z algebry, powiadający, że w aksjomatach grupy wystarczy założyć istnienie jednostronnych odwrótności elementów (np. lewostronnych), a stąd wynika, że te odwrótności są obustronne.

Lemat 3.4.1. *Jeśli \mathcal{M} jest klasą morfizmów w kategorii \mathcal{C} taką, że każdy morfizm w \mathcal{M} ma lewostronną (odp. prawostronną) odwrótność należącą do \mathcal{M} , to każdy morfizm w \mathcal{M} jest izomorfizmem.*

Dowód. Dla każdego morfizmu $f \in \mathcal{M}$ istnieje $g \in \mathcal{M}$ taki, że $gf = id$. Z założenia istnieje $f' \in \mathcal{M}$ taki, że $f'g = id$ a więc: $f' = f'(gf) = (f'g)f = f$. Stąd wynika, że g jest obustronną odwrótnością f . \square

Poniższy lemat umożliwia zredukowanie ogólnej sytuacji opisanej w Tw. 3.4.1 do sytuacji gdy $X = Y$ i znalezienia jednostronnej homotopijnej odwrótności rel A dla przekształcenia $f \sim id_X$.

Lemat 3.4.2. Niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będzie funktorem. Załóżmy, że dla każdego obiektu $c \in \text{ob } \mathcal{C}$ i morfizmu $e \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c)$ takiego, że $F(e) = \text{id}$ istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w \mathcal{C} . Wtedy dowolny morfizm $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$, dla którego istnieje $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$ takie, że $F(g)$ jest izomorfizmem oraz $F(gf) = \text{id}$ w \mathcal{D} jest izomorfizmem w \mathcal{C} .

Dowód. Rozpatrzmy klasę morfizmów

$$\mathcal{M} = \{f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \mid \exists_g F(gf) = \text{id}, F(g) \text{ jest izomorfizmem w } \mathcal{D}\}$$

Na mocy Lematu 3.4.1 wystarczy pokazać, że każdy morfizm z \mathcal{M} posiada lewą odwrotność należącą do tej klasy. Rozważmy endomorfizm $gf \in \mathcal{C}$. Na mocy założenia istnieje $e' \in \mathcal{C}$ taki, że $e'(gf) = \text{id}$. Stąd $g' = e'g$ jest lewą odwrotnością morfizmu $f \in \mathcal{C}$. Trzeba pokazać, że $g' \in \mathcal{M}$. Zauważmy, że skoro $F(g'f) = F(g')F(f) = \text{id}$ oraz $F(g')$ jest izomorfizmem, to także $F(fg') = F(f)F(g') = \text{id}$ a więc $g' \in \mathcal{M}$. \square

Rozważania topologiczne zaczniemy od następującej obserwacji będącej natychmiastowym wnioskiem z definicji korowłóknienia.

Stwierdzenie 3.4.1. Jeśli $i : A \rightarrow X$ jest korowłóknieniem, a diagram

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

jest homotopijnie przemienny, to istnieje przekształcenie $f' \sim f$ takie, że $f'i = j$, czyli diagram jest ściśle przemienny po zamianie f na f' .

Dowód. Niech $H : A \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią taką, że $H(-, 0) = fi$, $H(-, 1) = j$. Rozszerzmy ją na $X_A = X \times \{0\} \cup A \times I$ kładąc $H(x, 0) := f(x)$. Z definicji korowłóknienia istnieje retrakcja $X \times I \xrightarrow{r} X_A$. Rozważmy złożenie $H \circ r$ i jego obcięcie do górnego denka cylindra: $f' := H \circ r|_{X \times \{1\}}$, które oczywiście czyni trójkąt ściśle przemiennym oraz $f' \sim f$. \square

Wniosek 3.4.1. Jeśli $i : A \rightarrow X$ oraz $j : A \rightarrow Y$ są korowłóknieniami a w diagramie (czyli morfizmie w \mathcal{T}^A)

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

przekształcenie f jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje morfizm w \mathcal{T}^A

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xleftarrow{g} & Y \end{array}$$

taki, że $gf \sim \text{id}_X$.

Uwaga. Teza lematu oznacza, że dla dowolnego $a \in A$ przekształcenie g spełnia warunek $g(i(a)) = j(a)$, ale homotopia $gf \sim \text{id}_X$ nie musi być $\text{rel}(A)$.

Dowód. Wynika natychmiast z Lematu 3.5.1 zastosowanego do homotopijnej odwrotności przekształcenia f . \square

Dowód Tw. 3.4.1. Dzięki Lematom 3.5.1 i 3.4.2 wystarczy skonstruować lewą homotopijną odwrotność $\text{rel}(A)$ dla dowolnego $f \sim id_X$ zamykającego przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow i \\ X & \xrightarrow{f \sim id_X} & X \end{array}$$

Niech $H: X \times I \rightarrow X$ będzie homotopią taką, że $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = f(x)$. Rozważmy homotopię $H \circ (i \times id): A \times I \rightarrow X$ i rozszerzmy ją na $X \times I$ z warunkiem początkowym $id: X \times \{0\} \rightarrow X$ do homotopii $K: X \times I \rightarrow X$. Zauważmy, że dla $a \in A$, $K(a, 1) = f(a) = a$, a więc $e(x) := K(x, 1)$ jest morfizmem

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow i \\ X & \xleftarrow{e} & X \end{array}$$

Udowodnimy, że e jest szukaną lewą homotopijną odwrotnością $\text{rel} A$, konstruując homotopię $ef \sim id_X \text{ rel}(A)$. Rozważmy kompozycję dwóch homotopii: $G_0 := H^{-1} * (K \circ (f \times id)): X \times I \rightarrow X$ określoną wzorem

$$G_0(x, t) := \begin{cases} H(x, 2 - 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(f(x), t) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

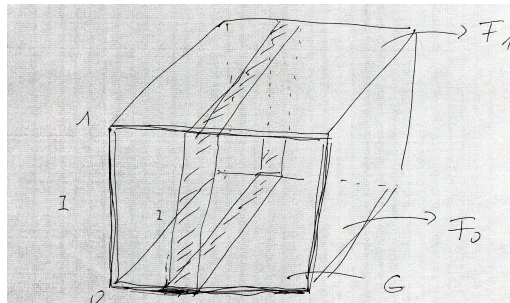
Z definicji homotopii K wynika, że $K(f(a), t) = K(a, t) = H(a, t)$ a więc dla każdego $a \in A$ droga

$$G_0(j(a), -) = H^{-1}(j(a), -) * H(j(a), -)$$

jest kanonicznie homotopijna z drogą stałą, jest to bowiem złożenie drogi z jej homotopijną odwrotnością. Istnieje więc (podwójną) homotopia $G: A \times I \times I \rightarrow X$ taką, że $G(a, t, 0) = G_0(a, t)$ oraz $G(a, 0, t) = G(a, 1, t) = G(a, t, 1) = i(a)$. Homotopię tę rozszerzamy do $\bar{G}: X \times I \times I \rightarrow X$ z warunkiem początkowym $G_0: X \times I \times \{0\} \rightarrow X$. (Korzystamy tu z faktu, że $A \times I \xrightarrow{i \times id} X \times I$ jest korowłóknieniem.) Szukana homotopia $ef \sim id_X \text{ rel}(A)$ dana jest (dla każdego $x \in X$) jako kompozycja obcięć homotopii \bar{G} do trzech boków kwadratu:

$$(\bar{G}|_{X \times 0 \times I}) * (\bar{G}|_{X \times I \times 1}) * (\bar{G}|_{X \times 1 \times I})^{-1}.$$

Homotopia jest zilustrowana na poniższym rysunku [Będzie lepszy!].



□

Wniosek 3.4.2. Jeśli $A \subset X$ jest korowłóknieniem a zarazem homotopijną równoważnością, to A jest silnym retraktem deformacyjnym X .

Dowód. Stosujemy Tw. 3.4.1 do diagramu:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ id \swarrow & & \searrow i \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

□

Jednoznaczność rozkładu na korozwłóknienie i homotopijną równoważność

Możemy teraz wykazać homotopijną jednoznaczność rozkładu przekształcenia na korozwłóknienie i homotopijną równoważność.

Stwierdzenie 3.4.2. *Niech $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ będą homotopijnymi przekształceniami. Niech dla $k = 0, 1$ dane będą faktoryzacje:*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_k \swarrow & & \searrow f_k \\ Z_i & \xrightarrow{r_k} & Y \end{array}$$

gdzie i_k jest korozwłóknieniem, a r_k homotopijną równoważnością. Wówczas istnieje homotopijna równoważność rel X , $h: Z_0 \rightarrow Z_1$:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_0 \swarrow & & \searrow i_1 \\ Z_0 & \xrightarrow{h} & Z_1 \end{array}$$

Dowód. Rozpatrzmy homotopijnie przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i_0 \swarrow & & \searrow i_1 \\ Z_0 & \xleftarrow[r_0]{\simeq} Y \xrightarrow[r_1]{\simeq} & Z_1 \end{array}$$

w którym przekształcenie $r_1 r_0^{-1}$ jest homotopijną równoważnością. Teza wynika teraz natychmiast z Stw. 3.5.1 oraz Tw. 3.4.1. □

Jako prosty wniosek z powyższego stwierdzenia otrzymujemy homotopijną jednoznaczność stożka przekształcenia.

Wniosek 3.4.3. *Dla dowolnego przekształcenia $f: X \rightarrow Y$ i jego faktoryzacji $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{r} Y$ na superpozycję korozwłóknienia i oraz homotopijnej równoważności r istnieje przemienny diagram w którym przekształcenia oznaczone pionowymi strzałkami są homotopijnymi równoważnościami:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_f} & Z(f) & \xrightarrow{r_f} & C(f) \\ \downarrow id & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ X & \xrightarrow{i} & Z & \longrightarrow & C(i) \end{array}$$

Homotopijna niezmienniczość doklejania przestrzeni

Definicja 3.4.1. Niech $A \subseteq X$ i niech $f : A \rightarrow Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas doklejeniem przestrzeni X do Y wzdłuż przekształcenia A nazywamy push-out diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{i'} & X \cup_f Y \end{array},$$

czyli $X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/R$ gdzie $xRy \iff x = y$ lub $x \in A$ i $f(x) = y$, a i oraz i' są włożeniami.

Zauważmy, że przestrzeń X z podzbiorem A zgniecionym do punktu jest szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji – jeżeli $Y = \{*\}$ jest przestrzenią jednopunktową, to przestrzeń $X \cup_f \{*\}$ jest homeomorficzna z X/A . Następne twierdzenie uogólnia Stw. 3.3.4.

Twierdzenie 3.4.2. Niech $A \xrightarrow{i} X$ będzie korozwłóknieniem. Każdej homotopii $F : A \times I \rightarrow Y$ odpowiada homotopijna równoważność $h_F : X \cup_{f_0} Y \simeq X \cup_{f_1} Y \text{ rel } (Y)$, przy czym homotopii trywialnej odpowiada przekształcenie identycznościowe a kompozycji (konkatenacji) homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie homotopijnych równoważności. Jeśli dwie homotopie $F_0, F_1 : A \times I \rightarrow Y$ są homotopijne rel $X \times \{0, 1\}$ to wyznaczone przez nie homotopijne równoważności h_{F_0} i h_{F_1} są homotopijne.

Dowód. Niech $F : A \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 . Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są reaktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną (p. Stw 3.3.3) zaś $G : X \times I \times I \rightarrow X \times I$ homotopią taką, że $G(x, t, 0) = (x, t)$, $G(a, t, s) = (a, t)$, $G(x, t, 1) = r(x, t)$. Kładąc identyczność na przestrzeni Y retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $\bar{r} : (X \times I) \cup_F Y \rightarrow X \cup_{f_0} Y$. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii $\bar{G} : (X \times I) \cup_F Y \times I \rightarrow (X \times I) \cup_F Y$ kładąc identyczność na przestrzeni Y . \bar{G} jest homotopią między identycznością a retrakcją \bar{r} . Homotopijna równoważność $X \cup_{f_0} Y \rightarrow X \cup_{f_1} Y$ wyznaczona przez homotopię F jest zadana jako złożenie: $X \cup_{f_0} Y \subset (X \times I) \cup_F Y \xrightarrow{\bar{r}} X \cup_{f_1} Y$. Sprawdzenie pozostałych tez stwierdzenia pozostawiamy czytelnikowi. \square

Zachodzi także następująca wersja Tw. 3.4.1 dotycząca morfizmów między dwoma korozwłóknieniami zdefiniowanymi na różnych przestrzeniach. [11] str. 47.

Twierdzenie 3.4.3. Jeśli w diagramie

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

i, j są korozwłóknieniami, a f oraz d są homotopijnymi równoważnościami, to (f, d) jest homotopijną równoważnością par.

3.5 Rozwłóknienia i włókniste homotopijne równoważności

Udowodnimy własności rozwłóknień, dwoiste do własności korozwłóknień opisanych w poprzednim rozdziale. Przypomnijmy, że dla ustalonej przestrzeni B przez \mathcal{T}_B oznaczamy kategorię morfizmów (przekształceń) $X \rightarrow B$, w której morfizmami są diagramy

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Rozważmy pełną podkategorię $\mathcal{T}_B^{fib} \subset \mathcal{T}_B$ składającą się z przekształceń $E \rightarrow B$ będącymi rozwłóknieniami. W kategorii \mathcal{T}_A mamy relację homotopii przekształceń \sim_B nazywaną *włóknistą homotopią* (podaj dokładną definicję) i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy $(\mathcal{T}_B^{fib})_h \subset (\mathcal{T}_B)_h$. Funktor zapominania $\mathcal{T}_B \ni (X \rightarrow B) \mapsto X \in \mathcal{T}$ indukuje functor zapominania na odpowiednich kategoriach homotopii.

Twierdzenie 3.5.1. *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

odwzorowania p, p' są rozwłóknieniami a przekształcenie f jest homotopijną równoważnością (czyli w kategorii \mathcal{T}), to f jest włóknistą homotopijną równoważnością (czyli w kategorii \mathcal{T}_B).

Zad. 3.5.1. Udowodnij następujące odpowiedniki Stw. 3.5.1 i Wniosku 3.5.1 poprzedzających dowód Tw. 3.4.1.

Stwierdzenie 3.5.1. *Jeśli $p: E' \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem, a diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

jest homotopijnie przemienny, to istnieje przekształcenie $f' \sim f$ takie, że $pf'i = p$, czyli diagram jest ściśle przemienny po zamianie f na f' .

Wniosek 3.5.1. *Jeśli $p_i: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ są rozwłóknieniami a w diagramie (czyli morfizmie w \mathcal{T}_B)*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

przekształcenie f jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje morfizm w \mathcal{T}_B

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{g} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

taki, że $fg \sim id_{E'}$.

Dowód Tw. 3.5.1. Analogicznie jak w dowodzie Tw. 3.4.1, wystarczy wykazać, że jeśli

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & B \end{array}$$

jest endomorfizmem rozwłóknienia $E \xrightarrow{p} B$ takim, że $f \simeq id_E$, to f posiada prawą włóknistą homotopijną odwrotność. Niech $\tilde{H} : E \times I \rightarrow E$ homotopią między f a id . Żeby skonstruować włóknistą prawą homotopijną odwrotność f rozpatrzmy homotopię $G := p\tilde{H} : E \times I \rightarrow B$ i jej podniesienie $\tilde{G} : E \times I \rightarrow E$ z warunkiem początkowym $E \times 0 \xrightarrow{id} E$.

$$\begin{array}{ccc} E \times \{0\} & \xrightarrow{id} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow{p\tilde{H}} & B \end{array}$$

Niech $g(e) := \tilde{G}(e, 1)$; wykażemy, że $id \sim_B fg$. Zdefiniujmy homotopię $\tilde{K}_0 := \tilde{H}^{-1} * (f \circ \tilde{G}) : id \sim fg$:

$$\tilde{K}_0(e, t) := \begin{cases} \tilde{H}(e, 2 - 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\tilde{G}(e, t)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

i rozważmy $p\tilde{K} = G^{-1} * G$, czyli dla każdego $e \in E$ mamy złożenie drogi $G(e, -)^{-1}$ z jej odwrotnością $G(e, -)$. Można więc określić homotopię $K : E \times I \times I \rightarrow B$ taką, że $K(e, t, 0) = K_0(e, t)$ oraz $K(e, 0, t) = K(e, 1, t) = K(e, t, 1) = p(e)$. Podnieśmy ją do $\tilde{K} : E \times I \times I \rightarrow E$ z warunkiem początkowym $\tilde{K}_0 : E \times 0 \rightarrow E$. Kompozycja homotopii otrzymanych przez obcięcie \tilde{K} do trzech wolnych boków kwadratu definiuje homotopię $id \sim_B fg$ (por. dowód Tw. 3.4.1). \square

Udowodnimy twierdzenie dualne do Tw. 3.4.2, mówiącego o homotopijnej niezmienniczości operacji doklejanania.

Twierdzenie 3.5.2. Niech $p : E \rightarrow B$ będzie rozwłóknieniem. Każda homotopia $F : X \times I \rightarrow B$ wyznacza klasę włóknistych homotopijnych równoważności rozwłóknień indukowanych $f_0^* E \sim_X f_1^* E$, gdzie $f_i := F(-, i)$, $i = 0, 1$. Homotopii stałej $F(x, t) = f_0(x)$ odpowiada identyczność, a kompozycji (konkatenacji) homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie włóknistych homotopijnych równoważności. Jeśli dwie homotopie $F_0, F_1 : X \times I \rightarrow B$ homotopijne rel $(X \times \{0, 1\})$ to wyznaczają tę samą klasę włóknistych homotopijnych równoważności.

Dowód. Niech $E \xrightarrow{p} X \times I$ będzie dowolnym rozwłóknieniem nad walcem; oznaczmy $E_t := p^{-1}(X \times \{t\})$. Pokażemy, że rozwłóknienie $E \xrightarrow{p} X \times I$ wyznacza homotopijnie jednoznaczne włókniste przekształcenie $E_0 \rightarrow E_t$. Polega ono na przenoszeniu włókien E_0 wzdłuż tworzących walca $X \times I$ na włókna rozwłóknienia E_t .

Zdefiniujmy homotopię $E_0 \times I \xrightarrow{p_0 \times id} X \times I$ i jej podniesienie $\tilde{P} : E_0 \times 0 \rightarrow E$ z warunkiem początkowym $E_0 \times 0 \subset E$.

$$\begin{array}{ccc} E_0 \times \{0\} & \xrightarrow{\subset} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{g} & \downarrow p \\ E_0 \times I & \xrightarrow{p_0 \times id} & X \times I \end{array} \quad (3.8)$$

Z Tw. 3.3.3 wynika, że dowolne dwa podniesienia \tilde{P}, \tilde{P}' są włókniste homotopijne. Oczywiście, dla każdego $t \in I$ mamy $\tilde{g}(-, t) : E_0 \times 1 \rightarrow E_t$, a więc $h_E(e) := \tilde{g}(e, 1)$ jest przekształceniem $E_0 \rightarrow E_1$ nad X wyznaczonym jednoznacznie z dokładnością do włóknistej homotopii.

Niech teraz $E \rightarrow B$ będzie rozwłóknieniem a $F : X \times I \rightarrow B$ będzie homotopią. Przy jej pomocy możemy zdefiniować rozwłóknienie $F^*E \rightarrow X \times I$, którego obcięcie do podstaw walca to rozwłóknienia f_0^*E i f_1^*E . Opisana konstrukcja zadaje klasę włóknistej homotopii odwzorowań $h_F : f_0^*E \rightarrow f_1^*E$.

Kompozycji homotopii można przyporządkować złożenie tych przekształceń. Żeby dowieść, że są to włókniste równoważności wystarczy sprawdzić, że klasa włóknistej homotopii nie zależy od wyboru podniesienia \tilde{g} . Wykażemy od razu więcej - że dwa przekształcenia $F_0, F_1 : X \times I \rightarrow B$ homotopijne rel $(X \times \{0, 1\})$ wyznaczają tę samą klasę włóknistych przekształceń $f_0^*E \rightarrow f_1^*E$. Niech $\tilde{g}_0 : E_0 \times I \rightarrow F_0^*E$ oraz $\tilde{g}_1 : E_0 \times I \rightarrow F_1^*E$ będą homotopiami skonstruowanymi według powyższego przepisu (Diagram 3.8). Rozważmy homotopię $F : F_0 \sim F_1$ rel $(X \times \{0, 1\})$ czyli przekształcenie $F : X \times I \times I \rightarrow B$ spełniające odpowiednie warunki i rozwłóknienie przeciągnięte $F^*E \rightarrow X \times I \times I$ oraz homotopię

$$H := p_0 \times id \times id : E_0 \times I \times I \rightarrow X \times I \times I.$$

Podnosząc H z warunkiem początkowym \tilde{H}_\sqcup określonym na korytku \sqcup :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{I \times 0} : E_0 \times I \times 0 &\rightarrow E, & \tilde{H}_{I \times 0}(e, t, 0) &= e \in E_0 \subset F^*E \\ \tilde{H}_{0 \times I} : E_0 \times 0 \times I &\rightarrow E, & \tilde{H}_{0 \times I}(e, 0, t) &= g_0(e, t) \in F_0^*E \subset F^*E \\ \tilde{H}_{1 \times I} : E_0 \times 1 \times I &\rightarrow E, & \tilde{H}_{1 \times I}(e, 1, t) &= g_1(e, t) \in F_1^*E \subset F^*E \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} E_0 \times \sqcup & \xrightarrow{\tilde{H}_\sqcup} & F^*E \\ \downarrow \subset & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ E_0 \times I \times I & \xrightarrow{p_0 \times id \times id} & X \times I \times I \end{array} \quad (3.9)$$

otrzymujemy homotopię $\tilde{H} : E_0 \times I \times I \rightarrow E$, której obcięcie $\tilde{H}|_{E_0 \times 1 \times I}$ zadaje szukaną włóknistą homotopię. \square

Wniosek 3.5.2. Niech $p : E \rightarrow B$ będzie rozwłóknieniem. Przyporządkowanie każdemu punktowi $b \in B$ włókna nad nim $p^{-1}(b)$ a klasie homotopii drogi $\omega : I \rightarrow B$ klasę homotopii $h_{[\omega]} : p^{-1}(\omega(0)) \rightarrow p^{-1}(\omega(1))$ definiuje functor $\text{Fib} : \Pi(B) \rightarrow \mathcal{T}_h$ z grupoidu podstawowego przestrzeni B do kategorii homotopii przestrzeni topologicznych.

Dowód. Traktujemy drogę $\omega : I \rightarrow B$ jako homotopię między włożeniami punktów końcowych i stosujemy Tw. 3.5.1 \square

Wniosek 3.5.3. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem, to istnieje włóknista homotopijna równoważność $E \sim_B P_p$, gdzie $P_p \rightarrow B$ jest kocyndrem odwzorowania p . W szczególności dla każdego punktu $b \in B$ włókno $p^{-1}(b)$ i homotopijne włókno $\text{Fib}(f, b)$ są homotopijnie równoważne.

Dowód. Z konstrukcji kocyndra wiemy, że istnieje przekształcenie włókniste $s : E \rightarrow P_p$, które jest zwykłą homotopijną równoważnością. Skoro p jest rozwłóknieniem, z Tw. 3.5.1 wynika, że s jest włóknistą homotopijną równoważnością. \square

Zad. 3.5.2. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem nad przestrzenią łukowo spójną, a przestrzeń E jest ściągalna to istnieje homotopijna równoważność: $p^{-1}(b_0) \simeq \Omega(B, b_0)$. (Jest to dualna własność do Zad. 3.3.4.)

Zad. 3.5.3. Sformułować i udowodnić wniosek dualny do 3.4.3

3.6 Lokalny opis korozwłóknień

Poniższe twierdzenie opisuje w terminach wewnętrznych i lokalnych kiedy włożenie podprzestrzeni $A \subset X$ jest korozwłóknieniem.

Twierdzenie 3.6.1. *[[17]] Dla domkniętego podzbioru $A \subset X$ następujące warunki są równoważne*

1. *Włożenie $j: A \subset X$ jest korozwłóknieniem (tzn. (X, A) jest parą Borsuka);*
2. *Istnieje deformacja rel $A, D: X \times I \rightarrow X$ (tzn. homotopia taka, że $D(x, 0) = x$, $D(a, t) = a$), oraz funkcja $\varphi: X \rightarrow I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(0)$ oraz $D(x, 1) \in A$ jeśli $\varphi(x) < 1$;*
3. *Istnieje deformacja rel $A, D: X \times I \rightarrow X$ oraz funkcja $\varphi: X \rightarrow I$ taka, że $A \subset \varphi^{-1}(0)$ oraz $D(x, t) \in A$ jeśli $\varphi(x) < t$;*
4. *Istnieje otoczenie $U \supset A$ deformowalne rel A w X do A (tzn. istnieje homotopia $H: U \times I \rightarrow X$ taka, że $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = a$, $H(x, 1) \subset A$) oraz funkcja $\varphi: X \rightarrow I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(0)$ i $\varphi(x) = 1$ dla $x \in X \setminus U$.*

Jeśli korozwłóknienie $A \subset X$ jest acykliczne (tzn. $A \subset X$ jest homotopijna równoważnością), to istnieje deformacja rel $A, D: X \times I \rightarrow X$ taka, że $D(X \times \{1\}) \subset A$.

Dowód. [1. \Rightarrow 2.] Ponieważ $A \subset X$ jest korozwłóknieniem, istnieje retrakcja $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, która posłuży nam do konstrukcji D i φ , $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$. Zdefiniujemy $\varphi: X \rightarrow I$ wzorem

$$\varphi(x) := \sup\{|t - r_2(x, t)| \mid t \in I\} \quad \text{oraz} \quad D: X \times I \rightarrow X, \quad D(x, t) := r_1(x, t).$$

Mamy $\varphi^{-1}(0) = A$ bowiem $\varphi(x) = 0$ oznacza, że $r(x, t) \in A \times I$ dla $t > 0$ a stąd także $r(x, 0) \in A \times I$ gdyż $A \times I \subset X \times I$ jest podzbiorem domkniętym. Jeśli $\varphi(x) < 1$ to znaczy, że dla każdego t , $-1 < t - r_2(x, t) < 1$, czyli $r_2(x, t) > 0$. Stąd wynika, że $r_1(x, t) \in A$.

[2. \Rightarrow 3.] Oczywiście.

[3. \Rightarrow 1.] Przy pomocy D i φ definiujemy retrakcję $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$:

$$r(x, t) := \begin{cases} (D(x, t), 0) & \text{dla } t \leq \varphi(x) \\ (D(x, t), t - \varphi(x)) & \text{dla } t \geq \varphi(x). \end{cases}$$

Istotnie: $r(x, 0) = (D(x, 0), 0) = x$ oraz $r(a, t) = (D(a, t), t) = (a, t)$.

[2. \Rightarrow 4.] Wykorzystujemy funkcję φ zdefiniowaną w punkcie 4. a deformację D obcinamy do zbioru $U := \varphi^{-1}([0, 1])$.

[4. \Rightarrow 1.] Niech dane będą otoczenie $U \supset A$, deformacja H oraz funkcja φ jak w pkt. 6. Skonstruujemy retrakcję $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$.

$$r(x, t) := \begin{cases} (x, 0) & \text{dla } \varphi(x) = 1 \\ (H(x, 2(1 - \varphi(x))t), 0) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq \varphi(x) < 1 \\ (H(x, \frac{t}{2\varphi(x)}), 0) & \text{dla } 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad 0 \leq t \leq 2\varphi(x) \\ (H(x, 1), t - 2\varphi(x)) & \text{dla } 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad 2\varphi(x) \leq t \leq 1 \\ (x, t) & \text{dla } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

□

Uwaga 3.6.1. Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią metryzowalną, to mając dany zbiór domknięty i jego otoczenie $A \subset U$ można skonstruować funkcję, o której mowa w warunku 4:

$$\varphi(x) := \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, A) + d(x, X \setminus U)},$$

gdzie d jest funkcją odległości punktu od zbioru. Warunek 4. sprowadza się więc do bardzo intuicyjnego geometrycznego założenia istnienia otoczenia $U \supset A$, które deformujące się w X do A . Można stąd łatwo wydedukować, że włożenia podrozmierności domkniętej w rozmierność gładką lub podwielościannu w wielościan są korozwłóknieniami.

Wniosek 3.6.1. *Jeśli X jest przestrzenią normalną (np. metryzowalną) oraz $A \subset U \subset X$ są podzbiórami odpowiednio domkniętym i otwartym w X , to jeśli włożenie $A \hookrightarrow U$ jest korozwłóknieniem, to włożenie $A \hookrightarrow X$ też jest korozwłóknieniem.*

Dowód. Wynika natychmiast z Tw. 3.6.1 pkt. 6. □

Wniosek 3.6.2.

1. Dowolna acykliczna para Borsuka $j : A \hookrightarrow X$ jest retraktem walca $i_0 : X \hookrightarrow X \times I$.
2. Dowolne acykliczne rozwłóknienie $p : E \rightarrow B$ jest retraktem kowalca $p_0 : P(E) \rightarrow E$.

Dowód. Ad 1. Skonstruujemy diagram:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{D(x,1)} & A \\ \downarrow j & & \downarrow i_0 & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{j}} & X \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

w którym złożenia górnych i dolnych strzałek są identycznościami. Niech $D : X \times I \rightarrow X$ będzie deformacją rel (A) a $\varphi : X \rightarrow I$ funkcją taką, że $\varphi^{-1}(0) = A$. Definiujemy $\bar{j}(x) := (x, \varphi(x))$ oraz homotopię:

$$H(x, t) := \begin{cases} D(x, \min(|1 - t/\varphi(x)|, 1)) & \text{dla } x \notin A \\ x & \text{dla } x \in A \end{cases}.$$

Homotopia H jest ciągła: jest to oczywiste dla punktów $(x, t) \notin A \times I$. Niech $(a, t) \in A \times I$ oraz $V \ni H(a, t) = a$ będzie otoczeniem. Zdefiniujemy zbiór otwarty $U := \{x \in X \mid D(\{x\} \times I) \subset V\}$. Ponieważ $D(a, t) = a$ dla każdego $t \in I$, więc U jest otoczeniem punktu a i oczywiście zachodzi inkluzja $H(U \times I) \subset V$, co dowodzi ciągłości H . Sprawdźmy, że złożenia poziomych strzałek są identycznościami i diagramy są przemienne.

Z definicji $D(a, 1) = a$ oraz $(H \circ \bar{j})(x) = D(x, \min(|1 - \varphi(x)/\varphi(x)|, 1)) = D(x, 0) = x$ dla $x \notin A$ i $(H \circ \bar{j})(a) = D(a, 0) = a$. Podobnie sprawdzamy przemienność diagramów: $\bar{j}(j(a)) = i_0 j(a) = (a, 0)$ oraz $H(x, 0) = D(x, 1)$.

Ad 2. ZADANIE. □

Wniosek 3.6.3. *Jeśli $j : A \rightarrow X$ jest acyklicznym korozwłóknieniem to jest ono lewo ortogonalne (Def. 1.6.1) do dowolnego rozwłóknienia $p : E \rightarrow B$ tzn. dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{F}} & E \\ \downarrow j & \nearrow \bar{f} & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (3.10)$$

istnieje podniesienie $\bar{F}: X \rightarrow E$.

Dowód. ZADANIE □

Wniosek 3.6.4. *Jeżeli $A \hookrightarrow X$ i $B \hookrightarrow Y$ są parami Borsuka, to włożenia $A \times B \hookrightarrow X \times B \cup A \times Y \hookrightarrow X \times Y$ są parami Borsuka.*

Dowód. (p. [18]) Ponieważ A, B są zbiorami domkniętymi, to odpowiednie podzbiory w iloczynie kartezjańskim też są domknięte. Niech $\varphi: X \rightarrow I$ oraz $H: X \times I \rightarrow X$, $\psi: Y \rightarrow I$, $G: Y \times I \rightarrow Y$ będą odwzorowaniami, których istnienie zapewnia Tw.3.6.1 pkt.4. Zdefiniujemy odpowiednie funkcje dla pary $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$.

$$\eta(x, y) := \min(\varphi(x), \psi(y)), \quad F(x, y, t) := (H((x, \min(t, \psi(y))), G(y, \min(t, \varphi(x)))).$$

Zauważmy, że $F(x, y, t) \in X \times B \cup A \times Y$ jeśli $t > \eta(x, y)$. Stąd na mocy Tw.3.6.1 pkt. 4 włożenie $X \times B \cup A \times Y \hookrightarrow X \times Y$ jest parą Borsuka. □

Wniosek 3.6.5. *Jeśli $A \hookrightarrow X$ jest parą Borsuka, $X_A := X \times \{0\} \cup A \times I$ a $p: E \rightarrow B$ dowolnym rozwłóknieniem to dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:*

$$\begin{array}{ccc} X_A & \xrightarrow{\bar{F}} & E \\ \downarrow \hookrightarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow p_0 \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (3.11)$$

istnieje podniesienie $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$.

Wniosek 3.6.6. *Jeśli $(X, x_0), (Y, y_0)$ są dobrze punktowanymi przestrzeniami Hausdorffa, to włożenie $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ jest parą Borsuka.*

3.7 Lokalny opis rozwłóknień

Przytoczymy najsilniejsze twierdzenie mówiące, że w odpowiednim sensie własność podnoszenia homotopii jest własnością lokalną. W tym celu musimy zdefiniować pewną własność pokryć zbiorami otwartymi:

Definicja 3.7.1. Pokrycie otwarte pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in J}$ przestrzeni X nazywamy *numerowalnym* jeśli dla każdego $i \in J$ można zadać funkcję $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$ tak, że następujące warunki są spełnione:

1. Dla każdego $i \in J$, $\text{supp}(\varphi_i) := \text{cl}\{x \in X \mid \varphi_i(x) \neq 0\} \subset U_i$
2. W dowolnym punkcie $x \in X$, tylko skończenie wiele funkcji φ_i jest różne od zera,
3. Dla każdego $x \in X$, $\sum_{i \in J} \varphi_i(x) = 1$

Przestrzeń Hausdorffa, której każde pokrycie jest numerowalne, nazywa się przestrzenią parazwartą.

Każda przestrzeń zwarta oraz dowolna przestrzeń metryzowalna są parazwarte, choć dowód nie jest łatwy.

Twierdzenie 3.7.1 (A. Dold [3]). *Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest przekształceniem takim, że dla pewnego numerowalnego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in I}$ obcięcia $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ są rozwłóknieniami, to p jest rozwłóknieniem.*

Oryginalny dowód znajduje się w pracy [3]; jest także opisany w [?], [14] Tw. 2.7.12. oraz [11] rozdz.7.4.

Wniosek 3.7.1. *Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest przekształceniem o wartościach w przestrzeni parazwartej takim, że dla pewnego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in I}$ obcięcia $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ są rozwłóknieniami, to p jest rozwłóknieniem.*

Szczególnie ważne z punktu widzenia zastosowań są przekształcenia *lokalnie trywialne*, a więc będące lokalnie rozwłóknieniami.

Definicja 3.7.2. Przekształcenie $p: E \rightarrow B$, jest lokalnie trywialne jeśli dla pewnego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in I}$ obcięcia $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ są izomorficzne w kategorii przestrzeni nad U_i z pewną projekcją $U_i \times F_i \rightarrow U_i$, czyli istnieje homeomorfizm h zamykający następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{h} & U_i \times F_i \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Przekształcenia lokalnie trywialne nazywa się często *wiązkami lokalnie trywialnymi* lub po prostu *wiązkami*.

Zad. 3.7.1. Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a przestrzeń B jest spójna to przestrzenie F_i występujące w definicji są homeomorficzne.

Ponieważ projekcja z iloczynu kartezjańskiego jest rozwłóknieniem, otrzymujemy następujący:

Wniosek 3.7.2. *Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym o wartościach w przestrzeni parazwartej, to p jest rozwłóknieniem.*

W przypadku odwzorowań gładkich między rozmaitościami ważne kryterium lokalnej trywialności można sformułować w terminach pochodnej.

Twierdzenie 3.7.2. *Niech $p: M \rightarrow N$ jest odwzorowaniem gładkim, które jest właściwe (tzn. przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte). Jeśli p jest submersją tzn. dla każdego punktu $x \in M$ pochodna $Dp_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ jest epimorfizmem, to przekształcenie p jest lokalnie trywialne.*

Dowód, korzystający z aparatu geometrii różniczkowej, można znaleźć w książce Bröckera i Jänicha [2].

W definicji własności podnoszenia homotopii (HLP 3.1.2) wymagaliśmy, aby podnoszona homotopia była określona na dowolnej przestrzeni topologicznej. Zauważając klasę przestrzeni może być łatwiej wykazać własność HLP.

Definicja 3.7.3. Jeśli \mathcal{C} jest pewną klasą przestrzeni (np. przestrzenie zwarte, wielościany, dyski lub kostki itp.) to będziemy mówili, że przekształcenie $p: E \rightarrow B$ ma własność podnoszenia homotopii ze względu na tę klasę, jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

w którym $Y \in \mathcal{C}$ istnieje podniesienie, (przerzywana strzałka) $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow E$. Klasę przekształceń p mających tę własność oznaczamy w skrócie $\text{HLP}(\mathcal{C})$.

Definicja 3.7.4. Klasę przekształceń $\text{HLP}(\mathcal{C})$, gdzie $\mathcal{C} := \{pt, I^1, I^2, \dots, I^n, \dots\}$ jest zbiorem kostek nazywamy rozwłóknieniami Serre'a.⁵

Zauważmy, że oczywiście kostki można zastąpić dowolnymi przestrzeniami z nimi homeomorficznymi np. dyskami D^n . Okazuje się, że rozwłóknienia Serre'a posiadają HLP ze względu na znacznie szerszą klasę przestrzeni - CW-kompleksy, które omówimy w Rozdziale ?. Kluczowym dla dowodu lematem jest następujące:

Twierdzenie 3.7.3 (Lemat Feldbau⁶). *Jeśli $p: E \rightarrow I^n$ jest wiązką lokalnie trywialną, to jest trywialna tzn. istnieje homeomorfizm h zamykający diagram:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & I^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & I^n \end{array} \quad \begin{array}{c} \simeq \\ \simeq \end{array}$$

Dowód. Niech $\{U_j\}_{j \in J}$ będzie pokryciem otwartym kostki I^n o którym mowa w definicji lokalnej trywialności 3.7.2. Ponieważ kostka jest przestrzenią zwartą, z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone, które ma liczbę Lebesgue'a $\lambda > 0$. Wybierając dostatecznie dużą liczbę k i dzieląc odcinek $[0, 1]$ na k pododcinków długości $\frac{1}{k}$ otrzymujemy podział kostki I^n na k^n małych kostek, przecinających się wzdłuż jednej ściany, nad każdą z których wiązka p jest trywialna. Tezy dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę kostek nad którymi przekształcenie jest trywialne. W przypadku jednej kostki teza jest oczywista. Zauważmy, że suma dwóch małych kostek, przecinających się wzdłuż jednej $n-1$ wymiarowej ściany jest znów przestrzenią homeomorficzną z kostką. Dowód będzie więc zakończony jeśli wykażemy lemat, który sformułujemy osobno. \square

Lemat 3.7.1. *Jeśli $p: E \rightarrow I^n$ jest wiązką, która jest trywialna nad każdym z dwóch podzbiorów $I_0^n := I^{n-1} \times [0, \frac{1}{2}]$, $I_1^n := I^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$ to p jest wiązką trywialną.*

Dowód. Oznaczmy wspólną ścianę kostek $I_{01}^{n-1} := I_0^n \cap I_1^n = I^{n-1} \times \{\frac{1}{2}\}$ oraz $F = p^{-1}(1, 0, \dots, 0)$. Zauważmy, że przestrzeń E jest homeomorficzną ze sklejeniem przestrzeni $I_0^n \times F$ i $I_1^n \times F$ wzdłuż $I_{01}^{n-1} \times F$. Istotnie, rozważmy homeomorfizmy h_i dla $k = 0, 1$:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(I_k^n) & \xrightarrow{h_k} & I_k^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & I_k^n \end{array} \quad \begin{array}{c} \simeq \\ \simeq \end{array}$$

oraz nad zbiorem I_{01}^{n-1} dwa homeomorfizmy :

$$\begin{array}{ccccc} I_{01}^{n-1} \times F & \xleftarrow{h_0} & p^{-1}(I_{01}^{n-1}) & \xrightarrow{h_1} & I_{01}^{n-1} \times F \\ & \searrow p_1 & \downarrow p & \swarrow p_1 & \\ & & I_k^n & & \end{array}$$

⁵Jean-Pierre Serre (Bages, Pyrénées Orientales, F 1926)

⁶Jacques Feldbau (Strasbourg F/D 1914 - 1945 Ganacker, D)

i ich złożenie $h := h_1 h_0^{-1}: I_{01}^{n-1} \times F \rightarrow I_{01}^{n-1} \times F$, który jest postaci $h(x, y) = (x, h_2(x, y))$. Żeby skonstruować homeomorfizm $k: E \rightarrow I^n \times F$ rozszerzymy homeomorfizm $h: I_{01}^{n-1} \times F \rightarrow I_{01}^{n-1} \times F$ do homeomorfizmu $\bar{h}: I_1^n \times F \rightarrow I_1^n \times F$ wzorem:

$$\bar{h}((z, t), y) = ((z, t), \pi_2(h_0 h_1^{-1})((z, \frac{1}{2}), y)) \quad \text{gdzie } z \in I^{n-1}, t \in [\frac{1}{2}, 1], \quad I_1^n \times F \xrightarrow{\pi_2} F.$$

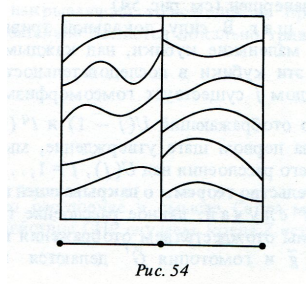
Zdefiniujemy przekształcenie $\bar{k}: E \rightarrow I^n \times F$

$$\bar{k}(e) := \begin{cases} h_0(e) & \text{dla } p(x) \in I_0^n \\ (h_1^{(1)}(e), \pi_2 \bar{h} h_1(e)) & \text{dla } p(x) \in I_1^n \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że jest to przekształcenie dobrze zdefiniowane i bijektywne oraz zamykające diagram:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{k} & I^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & I^n \end{array}$$

Odwzorowanie k jest także homeomorfizmem, bo jest homeomorfizmem między zbiorami domkniętymi $p^{-1}(I_k^n) \rightarrow I_k^n \times F$, $k = 0, 1$. \square



Rys. Wizualizacja wiązki nad odcinkiem, trywialnej na półodcinkach. [7]

3.8 Punktowane i wolne klasy homotopii

W praktyce geometrycznej interesują nas homotopijne równoważności przestrzeni, a wyróżnianie punktu ma charakter techniczny, ułatwiając wprowadzanie pomocniczych struktur algebraicznych. W tym rozdziale zbadamy relacje między zbiorami klas homotopii przy różnych wyborach punktu wyróżnionego oraz zbiorem punktowanych klas homotopii i wolnych klas homotopii. Niech (X, x_0) będzie ustaloną przestrzenią dobrze punktowaną (tzn. włożenie $\{x_0\} \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem), a (Y, y_0) dowolną przestrzenią punktowaną.

Stwierdzenie 3.8.1. *Przyporządkowanie $\Pi(Y) \ni y \rightsquigarrow [(X, x_0), (Y, y)] \in \mathcal{S}_*$ wyznacza funktor z grupoidu podstawowego do kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem. Jeśli (X, x_0) jest homotopijną kogrupą, to ma on wartości w kategorii grup.*

Dowód. Punktem wyróżnionym w zbiorze $[(X, x_0), (Y, y)]$ jest klasa przekształcenia stałego w $y \in Y$. Dla dowolnej drogi $\omega: I \rightarrow X$ łączącej y_0 z y_1 zdefiniujemy przekształcenie

$$h_{[\omega]}: [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)].$$

Mając dane $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zdefiniujemy $F : X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow Y$ wzorem: $F(x, 0) := f(x)$ oraz $F(x_0, t) := \omega(t)$. Korzystając z tego, że przestrzeń jest dobrze punktowana możemy rozszerzyć F do homotopii $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$. Definiujemy $h_{[\omega]}[f] := [\bar{F}|X \times 1]$. Pozostaje sprawdzić, że definicja $h_{[\omega]}$ nie zależy od dokonanych wyborów (p. Tw. 3.3.4), że $h_{[\omega]}$ jest homomorfizmem grup oraz $h_{[\omega * \eta]} = h_{[\eta]} \circ h_{[\omega]}$. \square

Wniosek 3.8.1. Dla dowolnej drogi ω w Y przekształcenie $h_{[\omega]} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)]$ jest bijekcją, w szczególności zadaje izomorfizm grup homotopii $h_{[\omega]} : \pi_q(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, y_1)$.

Stwierdzenie 3.8.2. Niech (Z, z_0) będzie przestrzenią punktowaną i $F : Z \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią. Oznaczmy $\omega(t) := F(z_0, t)$ oraz $\omega(0) = y_0$ i $\omega(1) = y_1$. Następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} & & [(X, x_0), (Y, y_0)] \\ & \nearrow f_{\#} & \downarrow h_{[\omega]} \\ [(X, x_0), (Z, z_0)] & \xrightarrow{f_{\#}} & [(X, x_0), (Y, y_1)] \end{array}$$

Wniosek 3.8.2. Jeśli $f : Y \rightarrow Y'$ jest homotopijną równoważnością (niepunktowaną!), to przekształcenie indukowane $f_{\#} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y', f(y_0))]$ jest bijekcją, w szczególności grupy homotopii łukowo spójnych przestrzeni homotopijnie równoważnych są izomorficzne (niezależnie od wyboru punktów wyróżnionych).

Następny wniosek jest pożytecznym kryterium trywialności elementu w grupach homotopii, który warto też udowodnić bezpośrednio nie odwołując się do powyższych twierdzeń.

Wniosek 3.8.3. Dla odwzorowania $\alpha : (S^q, 1) \rightarrow (X, x_0)$ następujące warunki są równoważne:

1. $[\alpha] = 0$ w $\pi_q(X, x_0)$;
2. $\alpha \sim c_{x_0} \text{ rel}(1)$ (c_{x_0} oznacza przekształcenie stałe w x_0);
3. $\alpha \sim c_{x_0}$;
4. α rozszerza się na dysk tzn. istnieje $\bar{\alpha} : D^{q+1} \rightarrow X$ takie, że $\bar{\alpha}|S^q = \alpha$.

Ustalmy teraz punkt wyróżniony $y_0 \in Y$. Przekształcenia $h_{[\omega]}$ zadają działanie grupy $\pi_1(Y, y_0)$ na zbiorze klas homotopii $[(X, x_0), (Y, y_0)]$:

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)].$$

Zad. 3.8.1. Jeśli $(X, x_0) = (S^1, 1)$ to powyższe działanie jest działaniem grupy $\pi_1(Y, y_0)$ na niej samej przez automorfizmy wewnętrzne.

Zad. 3.8.2. Zauważyć, że powyższe działanie jest indukowane przez kodziałanie $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$ kogrupy S^1 na przestrzeni X skonstruowane w następujący sposób: Definiujemy przekształcenie $X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow X \vee S^1$ jako identyczność na $X \times 0$ i nawinięcie odcinka $x_0 \times I$ na okrąg. Ponieważ (X, x_0) jest dobrze punktowana więc to przekształcenie rozszerza się do $X \times I \rightarrow X \vee S^1$, którego obcięcie do górnej podstawy $X \times 1$ jest kodziałaniem $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$.

Stwierdzenie 3.8.3. Jeśli przestrzeń Y jest łukowo spójna, to zapominanie o punkcie wyróżnionym zadaje bijekcję:

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] / \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} [X, Y].$$

Stwierdzenie 3.8.4. Jeśli (Y, y_0) jest H -przestrzenią, to dla dowolnej przestrzeni (X, x_0) działanie $\pi_1(Y, y_0)$ na zbiorze $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ jest trywialne.

Dowód. Niech $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ będzie (homotopijnym) mnożeniem w Y oraz $[f] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$ a $[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$. Wzór $H(x, t) := \mu(f(x), \omega(t))$ definiuje homotopię między f a f , która na tworzącej $\{x_0\} \times I$ jest drogą $[\omega]$. Wynika stąd, że $h_{[\omega]}[f] = [f]$. \square

Rozdział 4

Ciągi zbiorów klas homotopii

4.1 Wstęp

W tym rozdziale rozpatrujemy przestrzenie z wyróżnionym punktem i odwzorowania zachowujące punkt wyróżniony, czyli pracujemy w kategorii \mathcal{T}_* oraz \mathcal{T}_{*h} . Wyróżnianie punktu ma charakter techniczny, ułatwiając wprowadzanie pomocniczych struktur algebraicznych. Będziemy zakładać, że włożenie punktu wyróżnionego w przestrzeń jest korozwłóknieniem. Przypomnijmy, że takie przestrzenie nazywamy *dobrze punktowanymi*. Ponieważ będziemy rozważać tylko przestrzenie dobrze punktowane, więc słowo "dobrze" będziemy z reguły pomijać. Będziemy też często pomijać w oznaczeniach punkt wyróżniony, pisząc X zamiast (X, x_0) .

Poznane w poprzednich rozdziałach konstrukcje walca, stożka, zawieszenia itp. mają swoje odpowiedniki w kategorii punktowanej, określane przymiotnikiem *zredukowane*. Jeśli (X, x_0) jest przestrzenią punktowaną, to walcem nad (X, x_0) nazywamy walec w którym tworząca przechodząca przez punkt wyróżniony jest ściągnięta do punktu, czyli $X \times I / \{x_0\} \times I$. Dla odróżnienia od zwykłego walca nazywamy go często *walcem zredukowanym*. Walec zredukowany o podstawie X jest homeomorficzny z przestrzenią $X \wedge I^+$, stożek zredukowany to $X \wedge I / X \times 1$, zawieszenie zredukowane $\Sigma X := S^1 \wedge X$. Według tej samej zasady definiujemy walec i stożek odwzorowania punktowanego. Zauważmy, że jeśli przestrzeń jest dobrze punktowana to projekcja z konstrukcji niezredukowanej na zredukowaną jest homotopijną równoważnością, bo polega na ściąganiu do punktu jednej tworzącej, czyli podzbioru ściągającego.

W przypadku kowalca, kostożka itp. przejście do kategorii punktowanej polega jedynie na wyróżnieniu punktu bazowego. Np. kowalcem w kategorii przestrzeni punktowanych nazywamy punktowane przekształcenie $p_0: (P(X), \omega_{x_0}) \rightarrow (X, x_0)$ (por. Def. 3.2.1).

Zad. 4.1.1. Podać definicje korozwłóknienia i rozwłóknienia punktowanego i pokazać, że jeśli zakładamy, że przestrzenie są dobrze punktowane, to każde (ko-)rozwłóknienie zwykłe jest także po wyróżnieniu punktu (ko-)rozwłóknieniem punktowanym.

4.2 Ciągi kowłókniste i włókniste

Przypomnijmy, w kontekście punktowanym, definicje walca kowalca przekształcenia oraz homotopijnego kowłókna i homotopijnego włókna znane z Rozdziału 3.3.

Definicja 4.2.1. Dla przekształcenia przestrzeni punktowanych $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$ definiujemy *stożek punktowany przekształcenia (homotopijne kowłókno)* jako push-out w kategorii przestrzeni

punktowanych.

$$\begin{array}{ccc} (A, a_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ (C(A), a_0) & \longrightarrow & (C(f), b_0) \end{array} \quad (4.1)$$

gdzie $i: (A, a_0) \hookrightarrow (C(A), a_0)$ jest włożeniem na podstawie zredukowanego stożka. Równoważnie, stożek możemy zdefiniować jako przestrzeń ilorazową zredukowanego walca odwzorowania:

$$(C(f), b_0) := (Z_f/A \times \{1\}, b_0).$$

W dalszym ciągu dla oszczędności miejsca będziemy pomijać w zapisie punkty wyróżnione, ale wszystkie przestrzenie i przekształcenia będą punktowane.

Definicja 4.2.2. Ciąg przekształceń przestrzeni punktowanych $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ nazywamy *homotopijnie kowłóknistym* jeśli jest homotopijnie równoważny z ciągiem $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f)$ tzn. istnieje homotopijnie przemienny diagram w \mathcal{T}_{*h} :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array} \quad (4.2)$$

w którym pionowe przekształcenia są punktowanymi homotopijnymi równoważnościami.

Definicja 4.2.3. *Ko-stożek punktowany przekształcenia (homotopijne włókno) $F(f)$* definiujemy jako pull-back:

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(B, b_0) & \xrightarrow{p_0} & B \end{array} \quad (4.3)$$

gdzie $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(1) = b_0\}$ oraz $p_0(\omega) := \omega(0)$. Punktem wyróżnionym w $F(f)$ jest (a_0, ω_{b_0}) .

Definicja 4.2.4. Ciąg punktowanych przekształceń $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ nazywamy *homotopijnie włóknistym* jeśli jest homotopijnie równoważny z ciągiem $F(f) \xrightarrow{p_f} A \xrightarrow{f} B$ tzn. istnieje homotopijnie przemienny diagram w \mathcal{T}_{*h} :

$$\begin{array}{ccccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array} \quad (4.4)$$

w którym pionowe przekształcenia są punktowanymi homotopijnymi równoważnościami.

Ciąg przekształceń punktowanych $\dots \rightarrow X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \dots$ nazwiemy *(ko-) włóknistym* jeśli każde kolejne dwa przekształcenia $X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}$ są ciągiem (ko-) włóknistym.

Przykład 4.2.1. Jeśli $j: A \hookrightarrow X$ jest parą Borsuka to ciąg $A \rightarrow X \rightarrow X/A$ jest kowłóknisty. Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem to ciąg $F \hookrightarrow E \rightarrow B$, gdzie $F := p^{-1}(b_0)$ jest włóknisty. (p. Rozdz. 3.6 i 3.7)

Zad. 4.2.1. Opisać naturalne homeomorfizmy $C(\Sigma f) \simeq \Sigma C(f)$ oraz $F(\Omega f) \simeq \Omega F(f)$ i pokazać, że zadają one naturalne transformacje funktorów określonych na kategorii przekształceń (w przypadku punktowanym i bez punktu wyróżnionego).

Lemat 4.2.1. *Jeśli ciąg $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ jest kowłóknisty, to ciąg $\Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$ też jest kowłóknisty. Jeśli ciąg $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ jest włóknisty, to ciąg $\Omega X \rightarrow \Omega Y \rightarrow \Omega Z$ też jest włóknisty.*

Dowód. ZADANIE. □

Twierdzenie 4.2.1. [D. Puppe¹] *Dla dowolnego punktowanego odwzorowania $f: A \rightarrow B$ istnieje przekształcenie $C(f) \xrightarrow{\delta_f} \Sigma A$, zadające transformację naturalną odpowiednich funktorów na kategorii punktowanych przekształceń takie, że ciąg przekształceń*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta_f} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \delta} \Sigma C(f) \rightarrow \dots$$

zwany prawym ciągiem Puppe odwzorowania f , jest kowłóknisty. Dualnie, istnieje transformacja naturalna $\Omega B \xrightarrow{\partial_f} F(f)$ taka, że ciąg

$$\dots \rightarrow \Omega F(f) \xrightarrow{\Omega p} \Omega A \xrightarrow{\Omega f} \Omega B \xrightarrow{\partial_f} F(f) \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} B$$

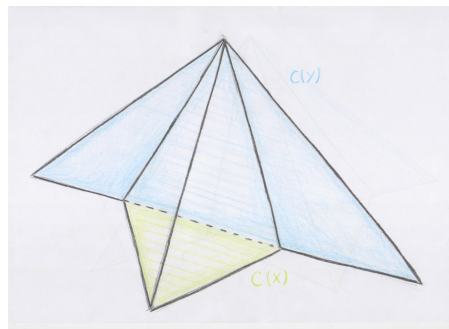
zwany lewym ciągiem Puppe odwzorowania f jest włóknisty.

Dowód. Zaczniemy od prawego ciągu Puppe. Przekształcenie $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$ jest zdefiniowane jako złożenie projekcji $C(f) \rightarrow C(f)/B$ i homeomorfizmu $C(f)/B \simeq \Sigma A$. Na mocy Lematu 4.2.1 wystarczy pokazać, że kowłókniste są krótkie ciągi rozpoczynające się do $A, B, C(f)$.

- Ciąg $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f)$ jest kowłóknisty z definicji.
- Ciąg $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$ jest homotopijnie równoważny $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} C(i)$ bowiem i jest włożeniem B na podstawę stożka $C(f)$, czyli korozwłóknieniem, a więc $C(i) \simeq C(f)/i(B) \simeq \Sigma A$.
- Rozważmy ciąg $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B$ i zauważmy, że istnieje homeomorfizm stożka

$$\Sigma A \hookrightarrow C(\delta) = C(C(f)) \cup_{\delta} \Sigma A$$

z walcem $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$. Poniższe rysunki² pokazują stożek $C(C(f))$, który doklejamy przy pomocy δ do ΣA :



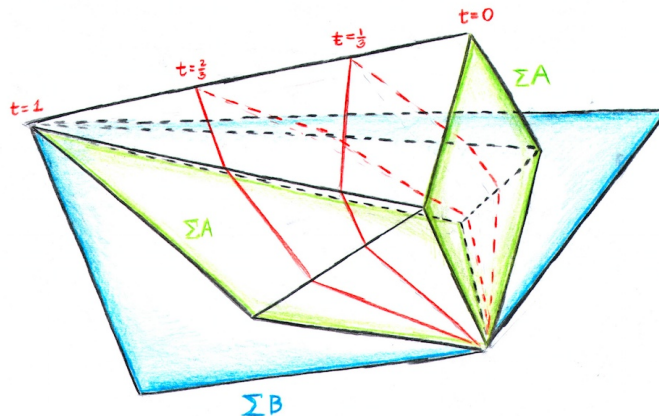
Rys. Przestrzeń $C(C(f))$ gdzie f jest włożeniem odcinków $A = X = [-1, 1] \subset [-2, 2] = Y = B$.
(Uwaga: na poniższym rysunku powinno być $X = A, Y = B$)

¹Dieter Puppe (Łódź 1930 – 2005 Heidelberg)

²rys. Paweł Ciosmak

oraz efekt tego przyklejenia, czyli przestrzeń homotopijnie równoważną z walcem

$$Z(\Sigma f) = (C(\Sigma f) \times I) \cup_{\Sigma f} \Sigma B :$$



Rys. Przestrzeń $C(\delta)$ jest homotopijnie równoważna z ΣB .

Składając włożenie $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$ z retrakcją deformacyjną $Z(\Sigma f) \xrightarrow{r} \Sigma B$ otrzymujemy przemienny diagram, w którym pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A & \xrightarrow{i} & C(\delta) \simeq Z(\Sigma f) \\ & & & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow r \\ & & & & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma B \end{array}$$

Podobnie dowodzimy włóknistość lewego ciągu Puppe. Pierwsze dwa przekształcenia są z definicji ciągiem włóknistym. Pozostaje sprawdzić, że ciągi $\Omega B \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{p} A$ oraz $\Omega A \xrightarrow{\Omega f} \Omega B \xrightarrow{\partial} F(f)$ są włókniste. Przekształcenie $F(f) \xrightarrow{p} A$ jest rozwłóknieniem, a jego włóknem jest

$$p^{-1}(a_0) = \{(a_0, \omega) \mid \omega(1) = b_0, \omega(0) = f(a_0) = b_0\} = \Omega B.$$

przekształcenie $\Omega B \xrightarrow{\partial} F(f)$ jest włożeniem $\partial(\omega) := (a_0, \omega)$. Dualnie do poprzedniego przypadku istnieje przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} F(\partial) = P_{\Omega f} & \longrightarrow & \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F(f) \\ \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow id \\ \Omega A & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F(f) \end{array}$$

w którym pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami. Utożsamienie $F(\partial) = P_{\Omega f}$ otrzymujemy wypisując definicje obu przestrzeni:

$$F_{\partial} := \{(\gamma, \Gamma) \mid \gamma \in \Omega B, \Gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), \gamma_t), f\tilde{\gamma}(t) = \gamma_t(0), (\tilde{\gamma}(0), \gamma_0) = (a_0, b_0), (\tilde{\gamma}(1), \gamma_1) = (a_0, \gamma)\}$$

$$P_{\Omega f} := \{(\tilde{\gamma}, \Lambda) \mid \tilde{\gamma} \in \Omega A, \Lambda(t) = \gamma_t, \gamma_t(0) = \gamma_t(1) = b_0, f\tilde{\gamma} = \gamma_0\}.$$

Parze $(\gamma, \Gamma) \in F_{\partial}$ w której $\gamma \in \Omega B$, $\Gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), \gamma_t)$ przypisujemy parę $(\tilde{\gamma}, \Lambda)$ gdzie $\Lambda(t) := \gamma_t$. \square

4.3 Funktory półdokładne i ciągi Puppe

Definicja 4.3.1. Funktor kontrawariantny $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$, określony na kategorii homotopii przestrzeni z wyróżnionym punktem o wartościach w kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem, nazywa się *półdokładny* (p. [4]) jeśli

- (MV) Dla dowolnego push-outu punktowanych przestrzeni

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j_1} & X_1 \\ \downarrow j_2 & & \downarrow \bar{j}_2 \\ X_2 & \xrightarrow{\bar{j}_1} & X_1 \cup_A X_2 \end{array} \quad (4.5)$$

w którym odwzorowania j_1, j_2 są korozwłóknieniami, indukowany diagram:

$$\begin{array}{ccc} F(X_1 \cup_A X_2) & \xrightarrow{\bar{j}_1^*} & F(X_1) \\ \downarrow \bar{j}_2^* & & \downarrow j_2^* \\ F(X_2) & \xrightarrow{j_1^*} & F(A) \end{array} \quad (4.6)$$

jest "słabym pull-back'iem" tzn. dla dowolnych elementów $x_k \in F(X_k)$, $k = 1, 2$ takich, że $j_1^*(x_1) = j_2^*(x_2)$ istnieje element $x \in F(X_1 \cup_A X_2)$ taki, że $\bar{j}_k^*(x) = x_k$ dla $k = 1, 2$.

- (Add) Dla dowolnej rodziny przestrzeni $\{X_j\}_{j \in J}$ homomorfizm obcięcia, definiowany przez włożenia składników w bukiet: $F(\bigvee_J X_j) \rightarrow \prod_J F(X_j)$ jest izomorfizmem.

Nazwa *półdokładny* bierze się stąd, że element $x \in F(X_1 \cup_A X_2)$, o którym mowa w warunku (MV) nie musi być jedyny: diagram push-out jest przeprowadzany na "słaby pull-back", a nie prawdziwy pull-back zbiorów. Litery (MV) nawiązują do nazwisk ciągu dokładnego Mayera-Vietoris'a będącego w istocie konsekwencją tego aksjomatu.

Zauważmy, że dla dowolnego diagramu przekształceń $X_1 \xleftarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} X_2$ można zdefiniować homotopijny pushout w następujący sposób. Zamieniamy odwzorowania f_k na korozwłóknienia (p. Tw. 3.3.6) $Z(f_1) \xleftarrow{i_{f_1}} A \xrightarrow{i_{f_2}} Z(f_2)$, a następnie konstruujemy zwykły push-out. Retrakcje $Z(f_i) \rightarrow X_i$ definiują przekształcenie $Z(f_1) \cup_A Z(f_2) \rightarrow X_1 \cup_A X_2$, które jednak nie musi być homotopijną równoważnością. Wystarczy rozpatrzeć diagram $pt \xleftarrow{f_1} S^n \xrightarrow{f_2} pt$ dla dowolnego $n \geq 0$. Zachodzi jednak:

Stwierdzenie 4.3.1. *Jeśli w diagramie $X_1 \xleftarrow{f_1} A \xrightarrow{f_2} X_2$ jedno z przekształceń jest korozwłóknieniem, to naturalne odwzorowanie z jego homotopijnego push-out do zwykłego push-out jest homotopijną równoważnością.*

Dowód. ZADANIE □

Przykład 4.3.1. Homotopijne kowłótko przekształcenia $X \xrightarrow{f} Y$ jest homotopijnym push-outem diagramu $pt \leftarrow X \xrightarrow{f} Y$.

Przykład 4.3.2. Najważniejszymi funktorami półdokładnymi są funktory reprezentowalne na kategorii \mathcal{T}_{*h} , czyli dla ustalonej przestrzeni punktowanej Y zadane formułą: $F(X) := [X, Y]_*$. Okazuje się, że każdy functor półdokładny, ograniczony do podkategorii porządných przestrzeni punktowanych (CW-kompleksów - p. Rozdz. 5) jest reprezentowalny. [14], Rozdz. 7, gdzie funktory półdokładne nazywają się funktorami homotopijnymi.

Zad. 4.3.1. Zdefiniować kowariantne funktory półdokładne. Najważniejszy przykład: kowariantny funktor reprezentowalny na \mathcal{T}_{*h} (p. [10])

Uwaga 4.3.1. Dla dowolnego kontrawariantnego funktora $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ spełniającego warunek *Add* i homotopijnej kogrupy X kodziałanie $\nu: X \rightarrow X \vee X$ definiuje działanie grupowe $F(\nu): F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$. Podobnie dla dowolnej homotopijnej grupy Y i funktora kowariantnego $G: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ zachowującego produkty działanie $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ definiuje działanie grupowe $G(\mu): G(Y) \times G(Y) \rightarrow G(Y)$.

Uwaga 4.3.2. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, wartość funktora kontrawariantnego na morfizmie f będziemy oznaczali f^* a kowariantnego f_* , lub $f_{\#}$ w przypadku kowariantnych funktorów na \mathcal{T}_{*h} .

Twierdzenie 4.3.1. *Niech $f: A \rightarrow B$ będzie punktowanym przekształceniem.*

1. *Dla kontrawariantnego funktora półdokładnego $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ poniższy ciąg zbiorów z wyróżnionym punktem (zwany kontrawariantnym ciągiem Puppe) jest dokładny:*

$$\dots \rightarrow F(\Sigma C(f)) \xrightarrow{(\Sigma i)^*} F(\Sigma B) \xrightarrow{(\Sigma f)^*} F(\Sigma A) \xrightarrow{\delta^*} F(C(f)) \xrightarrow{i^*} F(B) \xrightarrow{f^*} F(A)$$

2. *Dla kowariantnego funktora półdokładnego $G: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ poniższy ciąg zbiorów z wyróżnionym punktem (zwany kowariantnym ciągiem Puppe) jest dokładny:*

$$\dots \rightarrow G(\Omega F(f)) \xrightarrow{\Omega p_{\#}} G(\Omega A) \xrightarrow{\Omega f_{\#}} G(\Omega B) \xrightarrow{\partial_{\#}} G(F(f)) \xrightarrow{p_{\#}} G(A) \xrightarrow{f_{\#}} G(B)$$

Dowód. Ciągi otrzymujemy stosując funktory F i G do ciągów Puppe z Twierdzenia 4.2.1. \square

Zauważmy, że pierwsze trzy wyrazy ciągów Puppe opisanych w Tw. 4.3.1 są jedynie zbiorami z wyróżnionymi punktami, kolejne trzy grupami, a wszystkie dalsze grupami abelowymi. Odwzorowania zachowują te struktury. Obecnie opiszemy jeszcze jedną strukturę w kontrawariantnym ciągu Puppe, a mianowicie działanie grupy $F(C(f))$ "przez przesunięcia" na zbiorze $F(B)$ (działanie nie będzie zachowywać wyróżnionego punktu!). Pokażemy (Stw. 4.3.2), że jeśli $c, c' \in F(C(f))$ są elementami takimi, że $i^*(c) = i^*(c') \in F(B)$ to elementy te leżą w tej samej orbicie tego działania. O ile do dowodu tw. 4.3.1 wykorzystywaliśmy tylko zachowanie funktora półdokładnego na ciągach postaci $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C(f)$, to teraz będziemy korzystać z warunku (MV) w pełnej ogólności.

Zacniemy od zdefiniowania homotopijnego kodziałania zawieszenia ΣA na stożku $C(f)$, czyli odwzorowania

$$C(f) \xrightarrow{\nu} C(f) \vee \Sigma A \subset C(f) \times \Sigma A$$

wzorem

$$\nu(b) := (b, [a_0, 1]), \quad \nu([a, t]) := \begin{cases} ([a, 2t], [a_0, 1]) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (b_0, [a, 2t - 1]) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Zad. 4.3.2. Podać definicję homotopijnego kodziałania homotopijnej kogrupy S na przestrzeni punktowanej X , czyli sformułować odpowiednie warunki na przekształcenie $\nu: X \rightarrow X \vee S$ oraz zauważyć, że dla dowolnego kontrawariantnego funktora $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ spełniającego warunek *Add* przekształcenie $\nu^*: F(X) \times F(S) \rightarrow F(X)$ jest działaniem grupy $F(S)$ na zbiorze $F(X)$. Sprawdzić, że $C(f) \xrightarrow{\nu} C(f) \vee \Sigma A$ jest homotopijnym kodziałaniem.

Stwierdzenie 4.3.2. *Dla dowolnego $f: A \rightarrow B$ i kontrawariantnego funktora półdokładnego F przekształcenie indukowane przez zdefiniowane powyżej $\nu: C(f) \rightarrow C(f) \vee \Sigma A$ definiuje działanie grupy $F(\Sigma A)$ na $F(C(f))$. Dla elementów $c, c' \in F(C(f))$ zachodzi równość $i^*(c) = i^*(c') \in F(B)$ wtedy i tylko wtedy gdy c, c' należą do tej samej orbity działania grupy $F(\Sigma A)$.*

Dowód. Sprawdzenie, że odwzorowanie

$$F(C(f)) \times F(\Sigma A) \simeq F(C(f)) \vee \Sigma A \xrightarrow{\nu^*} F(C(f))$$

spełnia aksjomaty działania grupy na zbiorze pozostawiamy jako ćwiczenie. Działanie elementu $c \in F(C(f))$ na $a \in F(\Sigma A)$ oznaczamy jak zwykle ca .

Pokażemy najpierw, że jeśli $c' = ca$ dla $a \in F(\Sigma A)$ to $i^*(c) = i^*(c')$. Rozpatrzmy złożenie włożenia i z przekształceniami $\nu, j: C(f) \rightarrow C(f) \vee \Sigma A$, gdzie j jest włożeniem.

$$B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow[\quad]{\begin{matrix} \nu \\ j \end{matrix}} C(f) \vee \Sigma A$$

Z definicji kodziałania zachodzi równość $\nu \circ i = j \circ i$, a więc $i^* \circ \nu^* = i^* \circ j^*$. Przekształcenie indukowane $j^*: F(C(f) \vee \Sigma A) \rightarrow F(C(f))$ odpowiada przy izomorfizmie $F(C(f) \vee \Sigma A) \simeq F(C(f)) \times F(\Sigma A)$ rzutowaniu na pierwszą współrzędną. Dla dowolnego elementu $(c, a) \in F(C(f)) \times F(\Sigma A)$ zachodzi więc równość:

$$i^*(ca) := i^* \nu^*(c, a) = i^* j^*(c, a) = i^*(c).$$

Niech teraz $c, c' \in F(C(f))$ będą dwoma elementami takimi, że $i(c) = i(c')$. Rozpatrzmy podzbiór stożka $W := i(B) \cup \{[a, t] \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$, homeomorficzny z walcem odwzorowania f . Włożenie $i: B \hookrightarrow W$ jest oczywiście homotopijną równoważnością, więc $c|_W = c|_{W'}$. Rozważmy push-out diagram:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i_W} & C(f) \\ \downarrow i_W & & \downarrow j_1 \\ C(f) & \xrightarrow{j_2} & C(f) \cup_W C(f) \end{array} \quad (4.7)$$

Przestrzeń $C(f) \cup_W C(f) = W \cup C_1(A) \cup C_2(A)$ gdzie $C_i(A)$ są dwoma egzemplarzami stożka nad A o wysokości $\frac{1}{2}$ takimi, że $W \cap C_1(A) \cap C_2(A) = \{[a, t] \mid \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$. Ponieważ włożenie $W \hookrightarrow C(f)$ jest korozwłóknieniem, więc homotopijny pushout jest homotopijnie równoważny ze zwykłym pushoutem. Zauważmy też, że ściągnięcie stożka $C_1(A)$ (podobnie drugiego) do punktu definiuje homotopijną równoważność $C(f) \cup_W C(f) \xrightarrow{h} C(f) \vee \Sigma A$, zamykającą diagram

$$\begin{array}{ccc} C(f) \cup_W C(f) & \xrightarrow[\simeq]{h} & C(f) \vee \Sigma A \\ \swarrow j_2 & & \nearrow j \\ C(f) & & \\ \nwarrow j_1 & & \searrow \nu \end{array} \quad (4.8)$$

w którym $j_k: C(f) \rightarrow W \cup C_1(A) \subset C(f) \cup_W C(f)$, $k = 1, 2$ są dwoma włożeniami. Ponieważ włożenia $W \hookrightarrow C(f)$ są korozwłóknieniami, więc z definicji funktora półdokładnego istnieje element $x \in F(C(f) \cup_W C(f))$ taki, że $j_1(x) = c$, $j_2(x) = c'$. Oznaczmy $(h^*)^{-1}(x) = (c'', a) \in F(C(f)) \times F(\Sigma A) \simeq F(C(f) \vee \Sigma A)$. Z przemienności diagramu 4.7 wynika, że $j^*(c'', a) = c'' = c$ oraz $\nu^*(c'', a) = c''a = ca$. \square

Zad. 4.3.3. Przekształcenie δ^* w kontrawariantnym ciągu Puppe jest dane wzorem $\delta^*(a) = c_0 a$ gdzie $c_0 \in F(C(f))$ jest punktem wyróżnionym.

Zad. 4.3.4. Skonstruować homotopijne działanie $\mu: \Omega B \times F(f) \rightarrow F(f)$ i udowodnić odpowiednik ostatniego stwierdzenia dla kowariantnego ciągu Puppe.

Kontrawariantny ciąg Puppe zastosowany do homotopijnego push-out'u nazywa się *ciągami dokładnym Mayera-Vietorisa*³ i odgrywa olbrzymią rolę w topologii algebraicznej. Absolwentom Topologii II powinien się kojarzyć z twierdzeniem van Kampena.

Wniosek 4.3.1. *Dla funktora półdokładnego F o wartościach w kategorii grup abelowych i homotopijnego pushoutu punktowanych przestrzeni*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & P \end{array}$$

istnieje ciąg dokładny Mayera-Vietorisa

$$F(A) \xleftarrow{f_1^* - f_2^*} F(X_1) \oplus F(X_2) \xleftarrow{(i_1^*, i_2^*)} F(P) \leftarrow F(\Sigma A) \xleftarrow{(\Sigma f_1)^* - (\Sigma f_2)^*} F(\Sigma X_1) \oplus F(\Sigma X_2) \leftarrow \dots$$

gdzie $i_n: X_n \rightarrow X$ są inkluzjami.

Dowód. Rozpatrujemy kontrawariantny ciąg Puppe (Tw. 4.3.1) dla ciągu kowłóknistego:

$$X_1 \vee X_2 \hookrightarrow P \xrightarrow{q} \Sigma A.$$

□

Następny wniosek wiąże wartości funktora półdokładnego na bukietach, produkcie i smash-produkcie dwóch przestrzeni.

Wniosek 4.3.2. *Niech X_1, X_2 będą punktowymi przestrzeniami. Niech $i_k: X_k \rightarrow X_1 \vee X_2$, oznaczają włożenia. Dla dowolnego funktora półdokładnego F o wartościach w kategorii grup istnieje ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow F(X_1 \wedge X_2) \rightarrow F(X_1 \times X_2) \rightarrow F(X_1) \times F(X_2) \rightarrow 0.$$

Jeśli F będzie funktorem półdokładnym o wartościach w grupach abelowych, to ciąg ten się rozszczepia.

Dowód. Stosujemy kontrawariantny ciąg Puppe 4.3.1 do ciągu kowłóknistego

$$X_1 \vee X_2 \xrightarrow{i} X_1 \times X_2 \xrightarrow{q} X_1 \wedge X_2$$

Przekształceniem odwrotnym z prawej strony do homomorfizmu obcięcia

$$(F(i_1), F(i_2)): F(X_1 \vee X_2) \cong F(X_1) \times F(X_2)$$

jest odwzorowanie $F(p_1) \cdot F(p_2)$, gdzie $p_k: X_1 \times X_2 \rightarrow X_k$ są rzutowaniami na współrzędne. Gdy grupy są abelowe, to odwzorowanie jest homomorfizmem. Ten sam wzór zadanie rozszczepienie dla zawiesznień, skąd wynika że q jest różnowartościowe. □

Z ostatniego wniosku wynika kolejny, uogólniający wcześniejsze zadanie o zawieszeniu produktu sfer:

Wniosek 4.3.3. *Dla dowolnych punktowanych przestrzeni X, Y istnieje homotopijna równoważność*

$$\Sigma(X_1 \times X_2) \sim \Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \Sigma(X_1 \wedge X_2).$$

³Leopold Vietoris (Radkersburg 1891 – 2002 Innsbruck)

Dowód. Pokażemy naturalną równoważność funktorów kowariantnych reprezentowanych przez obie przestrzenie. Niech p_k, i_k oznaczać jak poprzednio odpowiednio projekcje na czynniki oraz włożenia w produkt kartezjański. Dla dowolnej przestrzeni Z definiujemy przekształcenie Φ_Z

$$[\Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \Sigma(X_1 \wedge X_2), Z] \simeq [\Sigma X_1, Z] \times [\Sigma X_2, Z] \times [\Sigma(X_1 \wedge X_2), Z] \xrightarrow{\Phi_Z} [\Sigma(X_1 \times X_2), Z].$$

dane wzorem

$$\Phi_Z(f_1, f_2, f_\wedge) = (f_1 \Sigma i_1) * (f_2 \Sigma i_2) * (f_\wedge \Sigma q)$$

gdzie $*$ oznacza mnożenie wyznaczone przez ko-mnożenie $\nu: \Sigma(X_1 \times X_2) \rightarrow \Sigma(X_1 \times X_2) \vee \Sigma(X_1 \times X_2)$.

Przekształcenie Φ_Z jest transformacją naturalną ze względu na Z , a na mocy Wniosku 4.3.2 jest bijekcją. Stąd z lematu Yonedy 1.2.1 otrzymujemy, że reprezentujące te funktory przestrzenie są homotopijnie równoważne. \square

Zad. 4.3.5. Wskazać homotopijną równoważność, o której mowa we Wniosku 4.3.3 i udowodnić bez odwoływania się do ciągu Puppe, że jest to homotopijna równoważność.

4.4 Ciągi dokładne grup homotopii

Niech $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$ będzie przekształceniem punktowanych przestrzeni. Podstawiając w kowariantnym ciągu Puppe $G(-) := [S^0, -]_*$ otrzymujemy długi ciąg homotopii odwzorowania f :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i_\#} \dots \\ \dots \xrightarrow{\partial} \pi_1(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, \bar{a}_0) \xrightarrow{i_\#} \pi_0(A, a_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_0(B, b_0). \end{aligned}$$

gdzie $\bar{a}_0 := (a_0, \omega_{b_0}) \in F(f)$ jest punktem wyróżnionym w homotopijnym włóknie.

Definicja 4.4.1. Grupy homotopii przekształcenia $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$ definiujemy jako

$$\pi_q(f, a_0) := \pi_{q-1}(F(f), \bar{a}_0).$$

Zauważmy, że $\pi_q(f, \bar{a}_0)$ jest grupą dla $q \geq 2$, abelową dla $q \geq 3$. Wprowadzając to oznaczenie możemy ten ciąg przepisać w postaci:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(f, \bar{a}_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_n(f, \bar{a}_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{f_\#} \dots$$

Stwierdzenie 4.4.1. Niech $f: A \rightarrow B$ będzie przekształceniem, a n będzie liczbą naturalną. Następujące warunki są równoważne:

1. dla każdego punktu $a \in A$ odwzorowanie $f_\# : \pi_q(A, a) \rightarrow \pi_q(B, f(a))$ jest bijekcją dla $q < n$ i surjekcją dla $q = n$;
2. dla każdego punktu $a \in A$, $\pi_q(F(f), \bar{a}) = 0$ dla $q \leq n$.

Definicja 4.4.2.

1. Przekształcenie spełniające warunki Stw. 4.4.1 nazywamy n -równoważnością;
2. ∞ -równoważność nazywamy słabą homotopijną równoważnością;
3. Przestrzeń punktowana nazywa się n -spójna, jeśli włożenie punktu wyróżnionego jest n -równoważnością.

Długi ciąg dokładny grup homotopii odwzorowania ma dwa bardzo ważne szczególne przypadki: gdy przekształcenie jest włożeniem podzbioru $A \hookrightarrow X$ oraz gdy jest rozwłóknieniem $p: E \rightarrow B$.

Ciąg dokładny rozwłóknienia

Niech $F := p^{-1}(b_0, e_0) \hookrightarrow (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ będzie punktowanym rozwłóknieniem. Ponieważ w przypadku rozwłóknienia włókno homotopijne jest homotopijnie równoważne z przeciwobrazem punktu (p. Wn. 3.5.3), więc włóknisty ciąg Puppe ma postać:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \Omega F \rightarrow \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\partial} F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

Twierdzenie 4.4.1 (Ciąg dokładny rozwłóknienia). *Dla rozwłóknienia $(E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ istnieje długi ciąg dokładny:*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(E) \xrightarrow{p\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \dots \\ \dots \xrightarrow{p\#} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p\#} \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

Grupa $\pi_1(B, b_0)$ działa na zbiorze $\pi_0(F, e_0)$ a przekształcenie $\pi_0(F, e_0)/\pi_1(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_0(E, e_0)$ jest różnowartościowe. Przyporządkowanie rozwłóknieniu ciągu dokładnego grup homotopii jest funkcjonalne.

Dowód. Stosujemy kowariantny ciąg Puppe Tw. 4.3.1 do funktora $[S^0, -]_*$. □

Opiszemy *explicite* postać homomorfizmu brzegu $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0)$. Dla dowolnego odwzorowania $f: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (B, b_0)$ rozważmy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & \longrightarrow & (E, F) \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) \end{array} \quad (4.9)$$

Włóknienie $1 \hookrightarrow D^n$ jest acyklicznym korozwłóknieniem, więc istnieje przekątna tego diagramu. Zdefiniujemy: $\partial([f]) := [\tilde{f}|S^{n-1}]$. Pozostaje sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy homotopii oraz wyboru podniesienia.

Jeśli $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (D^n, S^{n-1}, 1) \times I \rightarrow (E, F, e_0)$ są dwoma przekształceniami takimi, że $p\tilde{f}_0 \sim p\tilde{f}_1$, czyli istnieje homotopia między nimi $F: (D^n, S^{n-1}, 1) \times I \rightarrow (B, b_0)$. Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (E, F) \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f}_1 & \downarrow p \\ (D^n, S^{n-1}) \times I & \xrightarrow{F} & (B, b_0) \end{array} \quad (4.10)$$

gdzie $A := (D^n, S^{n-1}) \times \{0, 1\} \cup 1 \times I$ i $B := S^{n-1} \times \{0, 1\} \cup 1 \times I$ oraz $\tilde{f}(x, k) := \tilde{f}_k(x)$ dla $k = 0, 1$ oraz $\tilde{f}(1, t) := e_0$. Włóknienie $A \subset D^n \times I$ jest acyklicznym korozwłóknieniem, więc istnieje podniesienie \tilde{F} (środkowa przekątna), które jest homotopią $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$. To dowodzi, że odwzorowanie ∂ jest dobrze zdefiniowane.

Zad. 4.4.1. Zauważyć, że powyższy opis odwzorowania $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0)$ stosuje się do dowolnego rozwłóknienia Serre'a $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ (p. Def. 3.7.4). Sprawdzić, że ∂ jest homomorfizmem grup, a ciąg z Tw. 4.4.1 jest dokładny.

Zad. 4.4.2. Opisz działanie grupy $\pi_1(B, b_0)$ na zbiorze $\pi_0(F, e_0)$ (punkt bazowy nie jest zachowywany!). Przenalizuj ciąg rozwłóknienia w przypadku gdy $p : E \rightarrow B$ jest nakryciem i w tych terminach zrekonstruować twierdzenia o grupach homotopii nakryć znane z Topologii II [1]. W szczególności korzystając z nakrycia $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ wykazać, że $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ oraz $\pi_q(S^1, 1) = 0$ dla $q > 0$.

Zad. 4.4.3. Niech $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ będzie rozwłóknieniem nad łukowo spójną przestrzenią B .

1. Jeśli $\pi_q(F, e_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $p_\# : \pi_q(E, e_0) \rightarrow \pi_q(B, b_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$;
2. Jeśli $\pi_q(E, e_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $\partial : \pi_q(B, b_0) \rightarrow \pi_{q-1}(F, e_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$;
3. Jeśli $\pi_q(B, b_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $i_\# : \pi_q(F, e_0) \rightarrow \pi_q(E, e_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$.

Sformułować analogiczne własności w przypadku gdy znikają grupy homotopii w niskich wymiarach.

Jeśli co trzeci homomorfizm w długim ciągu dokładnym jest zerowy, to długi ciąg dokładny rozpada się na krótkie ciągi dokładne. Np. jeśli $i_\# : \pi_q(F, e_0) \rightarrow \pi_q(E, e_0)$ jest trywialny dla wszystkich $q \geq 0$, to dla każdego $n > 0$ otrzymujemy ciąg dokładny:

$$0 \rightarrow \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow 0.$$

Stwierdzenie 4.4.2. Niech $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ będzie rozwłóknieniem. Jeśli włożenie $F \hookrightarrow E$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to dla każdego $n > 1$ ciąg

$$0 \rightarrow \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow 0.$$

jest dokładny i rozszczepialny. W szczególności $\pi_n(B, b_0) \cong \pi_n(E, e_0) \times \pi_{n-1}(F, e_0)$ oraz $\pi_1(F, e_0)$ jest abelowa.

Dowód. Zadanie. Wsk. Homotopia $H : F \times I \rightarrow E$ definiuje homomorfizm rozszczepiający $\pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$. □

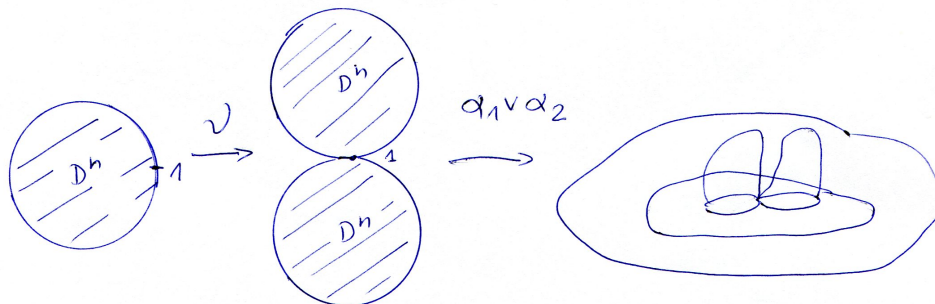
Ciąg dokładny pary

Niech (X, A, a_0) będzie punktowaną parą tzn $a_0 \in A \subset X$. Teraz rozważane przekształcenie będzie włożeniem punktowanej podprzestrzeni $(A, a_0) \hookrightarrow (X, a_0)$. Dla $q > 1$ Relatywne grupy homotopii definiujemy jako:

$$\pi_q(X, A, a_0) := \pi_{q-1}(F(\hookrightarrow, a_0), (a_0, \omega_{a_0})).$$

Funktorialność konstrukcji homotopijnego włókna implikuje, że relatywne grupy homotopii definiują funktor z kategorii punktowanych par do kategorii grup. Grupy relatywne pary mają też bardziej geometryczną interpretację w terminach przekształceń dysków w X . Dla dowolnej pary punktowanej (X, A, a_0) rozważmy zbiór klas homotopii przekształceń trójek $(D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$, który oznaczamy $[(D^q, S^{q-1}), (X, A)]_*$. W zbiorze tym można wprowadzić działanie przedłużając kompozycje $S^{q-1} \xrightarrow{\nu} S^{q-1} \vee S^{q-1}$ do przekształcenia punktowanych par:

$$(D^q, S^{q-1}, 1) \xrightarrow{\bar{\nu}} (D^q \vee D^q, S^{q-1} \vee S^{q-1}, 1).$$

Rys. Działanie grupowe w zbiorze $[(D^q, S^{q-1}, 1), (X, A, a_0)]$.

Stwierdzenie 4.4.3. Dla $q \geq 2$ istnieje naturalny izomorfizm grup

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(D^q, S^{q-1}, 1), (X, A, a_0)].$$

Dowód. Z definicji włókna homotopijnego mamy równość:

$$F(\hookrightarrow) = \{\omega \in P(X) \mid \omega(0) \in A, \omega(1) = a_0\}.$$

a stąd

$$\text{Map}_*(S^{q-1}, F(\hookrightarrow)) \subset \text{Map}_*(S^{q-1}, \text{Map}_*(I^+, X)) \simeq \text{Map}_*(S^{q-1} \wedge I^+, X)$$

oraz

$$S^{q-1} \wedge I^+ \simeq S^{q-1} \times I / \{1\} \times I$$

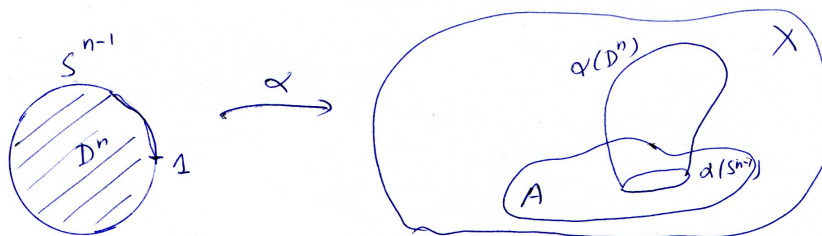
Obrazem $\text{Map}_*(S^{q-1}, F(\hookrightarrow))$ w $\text{Map}_*(S^{q-1} \times I / \{1\} \times I, X)$ jest podzbiór

$$\begin{aligned} & \{f : (S^{q-1} \times I \rightarrow X \mid f(1 \times I) = a_0, f(S^{q-1} \times 1) = a_0, f(S^{q-1} \times 0) \subset A\} \simeq \\ & \simeq \text{Map}_*(\alpha : S^{q-1} \times I / S^{q-1} \times 0 \rightarrow X \mid f(1, t) = a_0, f(S^{q-1} \times 0) \subset A) \simeq \\ & \simeq \text{Map}_*(\alpha : D^q \rightarrow X \mid f(1, t) = a_0, f(S^{q-1}) \subset A) \end{aligned}$$

Po przejściu do klas homotopii, pamiętając, że włożenie odcinka $I \subset D^q \simeq S^{q-1} \times I / S^{q-1} \times 0$ jest korozwłóknieniem, otrzymujemy bijekcję:

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(S^{q-1}, 1), (F(\hookrightarrow), (a_0, \omega_{a_0}))] \simeq [(D^q, S^{q-1}, 1), (X, A, a_0)].$$

□



Rys. Element relatywnej grupy homotopii.

Wniosek 4.4.1. $\pi_q(X, a_0, a_0) \simeq \pi_q(X, a_0)$

Zad. 4.4.4. Element $[\alpha : (D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)] \in \pi_q(X, A, a_0)$ jest trywialny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homotopia $H : (D^q, S^{q-1}) \times I \rightarrow (X, A)$ taka, że dla każdego $H(p, 0) = \alpha(p)$ oraz $p \in D^q$, $H(p, 1) \in A$.

Zad. 4.4.5. Opisać strukturę grupową w zbiorze klas homotopii przekształceń $[(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)]$ gdzie I^q jest kostka q -wymiarową a $\partial_1 I^q := \partial I^q \setminus \text{Int}(I^{q-1}) \times \{1\}$ [RYSUNEK] tak, aby zachodził izomorfizm grup

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)].$$

Relatywne grupy homotopii są funktorem zdefiniowanym na kategorii punktowanych par przestrzeni topologicznych. Projekcja na przestrzeń ilorazową $X \rightarrow X/A$ zadaje naturalną transformację funktorów $\pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X/A, [a_0])$, która jednak na ogół nie jest izomorfizmem (nawet dla par Borsuka!).

Podobnie jak w przypadku absolutnym, omówimy zależność relatywnych grup homotopii $\pi_q(X, A, a)$ od wyboru punktu wyróżnionego $a \in A$. Dla dowolnej drogi $\omega : I \rightarrow A$ można zdefiniować homomorfizm $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$.

Dla drogi $\omega : I \rightarrow A$ i sferoidu $\alpha : (D^k, S^{k-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ definiujemy przekształcenie $H : S^{n-1} \times \{0\} \cup 1 \times I \rightarrow A$, $H(x, 0) := \alpha(x)$, $H(1, t) := \omega(t)$, które rozszerzamy do $\bar{H} : S^{n-1} \times I \rightarrow A$, a następnie definiujemy przekształcenie $H' : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow X$ wzorem $H'(x, 0) := \alpha(x)$, $H'(x, t) := \bar{H}(x, t)$ dla $x \in S^{n-1}$, które rozszerzamy do $H'' : (D^n, S^{n-1}) \times I \rightarrow (X, A)$. Definiujemy $h_{[\omega]}([\alpha]) := [H''(-, 1)]$. Homotopijna jednoznaczność podanych definicji oraz następujące stwierdzenie wynikają z Tw. 3.3.4.

Stwierdzenie 4.4.4. *Jeśli $F : (D^n, S^{n-1}) \times I \rightarrow (X, A)$ jest homotopią taką, że $F(1, 0) = a_0$, $F(1, 1) = a_1$, to $[F(-, 1)] = h_{[\omega]}([F(-, 0)])$ gdzie $\omega(t) := F(1, t)$.*

Zachodzi Stwierdzenie analogiczne do 2.6.1.

Stwierdzenie 4.4.5. *Przyporządkowanie $\Pi(A) \ni a \mapsto \pi_n(X, A, a)$ oraz $\Pi(A) \ni [\omega] \mapsto h_{[\omega]}$ jest funktorem z grupoidu podstawowego przestrzeni A do kategorii grup. Dowolne przekształcenie par $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ definiuje transformację naturalną funktorów $\pi_n(X, A, -) \rightarrow \pi_n(Y, B, -) f_{\#}$.*

Zad. 4.4.6. Zinterpretuj homomorfizm przenoszenia relatywnych sferoidów wzdłuż dróg w terminach definicji relatywnych grup homotopii jako grup homotopii homotopijnego włókna włożenia podprzestrzeni (p. Stw. 4.4.3).

Z ostatniego stwierdzenia wynika natychmiast, że homomorfizmy $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$ są izomorfizmami oraz grupa $\pi_1(A, a_0)$ działa na grupach $\pi_q(X, A, a_0)$.

Twierdzenie 4.4.2 (Ciąg dokładny pary). *Dla dowolnej punktowanej pary $X \supset A \ni a_0$ istnieje długi ciąg homotopii*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \dots$$

gdzie $(A, a_0) \xrightarrow{i} (X, a_0) \xrightarrow{j} (X, A, a_0)$. Przyporządkowanie punktowanej parze ciągu dokładnego grup homotopii jest funktorialne.

Dowód. Wynika natychmiast z definicji grup relatywnych i ciągu Puppe Tw. 4.3.1. □

Podobnie jak w przypadku ciągu homotopii rozwłóknienia, homomorfizm $\pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0)$ łatwo jest opisać geometrycznie. Jeśli $f : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$, to definiujemy $\partial([f]) := [f|S^{n-1}]$. Ta definicja oczywiście nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy homotopii $[f]$, a łatwo jest sprawdzić, że ciąg w Tw. 4.4.2 jest dokładny.

Wniosek 4.4.2. *Homomorfizm brzegu w ciągu dokładnym homotopii pary $(D^n, S^{n-1}, 1)$, $\partial : \pi_q(D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow \pi_{q-1}(S^{n-1}, 1)$ jest izomorfizmem dla $q > 1$.*

Zauważmy, że włożenie punktowanych par $(D^n, S^{n-1}, 1) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1))$ jest homotopijną równoważnością, w więc $\pi_q(D^n, S^{n-1}, 1) \simeq \pi_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1)$.

Ciąg dokładny trójki

Niech (X, A, B, b_0) będzie punktowaną trójką przestrzeni tzn. $b_0 \in B \subset A \subset X$.

Twierdzenie 4.4.3 (Ciąg dokładny trójki). *Dla dowolnej punktowanej trójki (X, A, B, b_0) istnieje długi ciąg homotopii*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, b_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(X, B, b_0) \xrightarrow{j\#} \pi_n(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, b_0) \xrightarrow{i\#} \dots$$

gdzie $(A, B, b_0) \xrightarrow{i} (X, B, b_0) \xrightarrow{j} (X, A, b_0)$ są inkluzjami par. Przyporządkowanie punktowanej trójce ciągu dokładnego grup homotopii jest funktoriałne.

Dowód. Homomorfizm brzegu $\pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, b_0)$ definiujemy jako złożenie

$$\pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, b_0) \rightarrow \pi_n(A, B, b_0),$$

gdzie ∂ jest homomorfizmem brzegu w ciągu punktowanej pary (X, A, b_0) a drugi homomorfizm jest indukowany przez włożenie $A \subset B$. Sprawdzenie dokładności pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Zastosowania ciągów dokładnych do obliczeń grup homotopii poznamy w Rozdziale 6.

Rozdział 5

CW–kompleksy

5.1 Relatywne komórki i multikomórki

Przestrzeń powstałą przez doklejenie dysku wzdłuż brzegu (sfery) do innej przestrzeni będziemy nazywali relatywną komórką. Dysk jest oczywiście relatywną komórką, bo powstaje przez doklejenie dysku do sfery; także sfera jest relatywną komórką, bo powstaje przez doklejenie dysku do punktu. Dokładniej:

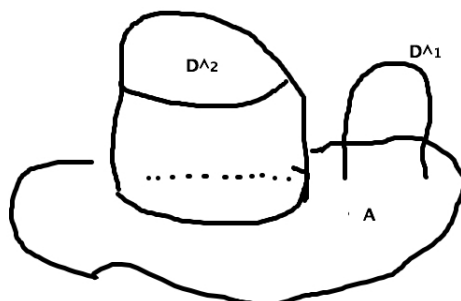
Definicja 5.1.1. Relatywną n -wymiarową komórką nazywamy parę przestrzeni (Hausdorffa) (X, A) taką, że istnieje przekształcenie $\varphi: S^{n-1} \rightarrow A$ oraz homeomorfizm par rel A , $(X, A) \simeq (D^n \cup_{\varphi} A, A)$.

Zauważmy, że para $(D^n \cup_{\varphi} A, A)$ jest homeomorficzna rel A z parą $(C(\varphi), A)$, gdzie $C(\varphi)$ jest stożkiem odwzorowania φ . Możemy nieco uogólnić pojęcie relatywnej komórki, rozważając relatywne multikomórki.

Definicja 5.1.2. Relatywną multikomórką nazywamy parę przestrzeni (X, A) taką, że istnieje rodzina przekształceń $\{\varphi_j: S_j^{n_j-1} \rightarrow A\}_{j \in J}$ oraz homeomorfizm par rel A :

$$(X, A) \simeq ((\coprod_{j \in J} D_j^{n_j}) \cup_{\cup \varphi_j} A, A).$$

Relatywną multikomórkę nazywamy n -wymiarową jeśli dla każdego $j \in J$, $n_j = n$.



Rys. Relatywna multikomórka, przestrzeń A z dwoma doklejonymi komórkami, 1- i 2-wymiarową.

Jeśli doklejamy więcej niż jeden dysk, to multikomórka nie jest stożkiem odwzorowania $\varphi = \sqcup \phi_j$, bo wnętrza doklejanych dysków pozostają rozłączne!

Zauważmy, że jeśli (X, A) jest n -wymiarową relatywną multikomórką, to każde odwzorowanie φ_j rozszerza się do odwzorowania par $\bar{\varphi}_j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$, które jest homeomorfizmem na wnętrzu dysku $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$. Odwzorowanie φ_j nazywamy odwzorowaniem doklejającym komórkę, a jego rozszerzenie $\bar{\varphi}_j$ odwzorowaniem charakterystycznym komórki. Podprzestrzeń $X \setminus A$ jest więc sumą rozłączną podzbiorów $\coprod_{j \in J_n} C_j$ gdzie każda składowa C_j jest homeomorficzna z wnętrzem n -wymiarowego dysku. Domknięcia zbiorów C_j w X też łatwo opisać w terminach przekształcenia charakterystycznego: $\text{cl}(C_j) = \text{cl}(\varphi(\mathring{D}^n)) = \varphi_j(D^n)$. Zbiory $\varphi_j(D^n)$ będziemy nazywali komórkami lub "bąblami", a zbiory $\varphi(\mathring{D}^n)$ wnętrzem komórek lub bąbli (są to wnętrza w sensie topologicznym).

Jeśli (X, A) jest dowolną multikomórką, to po usunięciu jednego punktu $x_j \in \varphi(\mathring{D}^{n_j})$ z wnętrza każdego bąbla istnieje retrakcja deformacyjna $(X \setminus \{x_j\}_{j \in J}, A) \rightarrow (A, A) \subset (X, A)$, bowiem dla dowolnego dysku istnieje retrakcja deformacyjna $(D^n \setminus \{p\}, S^{n-1}) \rightarrow (S^{n-1}, S^{n-1}) \subset (D^n, S^n)$, gdzie $p \in \mathring{D}^n$.

Stwierdzenie 5.1.1. *Jeśli (X, A) jest relatywną multikomórką, to jest parą Borsuka (tzn. włożenie $A \subset X$ jest korozwłóknieniem).*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z faktu, że włożenie $S^{n-1} \subset D^n$ jest korozwłóknieniem (3.3.1), oraz Tw. 3.3.2 pkt. 4, 3. \square

5.2 CW-kompleksy i odwzorowania komórkowe

Definicja 5.2.1. Przestrzeń topologiczna Hausdorffa nazywamy CW-kompleksem jeśli jest w niej wyróżniony wstępujący ciąg podprzestrzeni domkniętych: $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots$ taki, że:

1. $X^{(0)}$ jest przestrzenią dyskretną (której elementy nazywane są wierzchołkami X);
2. $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^{(n)}$;
3. Topologia w X jest słaba ze względu na podprzestrzenie $X^{(n)}$ tzn. zbiór $A \subset X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $n \geq 0$ zbiór $A \cap X^{(n)}$ jest domknięty;
4. Dla każdego n , para $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ jest n -wymiarową multikomórką.

Składowe spójne zbioru $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ nazywają się n -wymiarowymi komórkami kompleksu X . CW-kompleks X jest n -wymiarowy jeśli n jest najmniejszą liczbą taką, że w X nie ma komórek m -wymiarowych dla $m > n$.

Jeśli X, Y są CW-kompleksami to przekształcenie ciągłe $f: X \rightarrow Y$ nazywamy komórkowym jeśli dla każdego n , $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$. Kategorię CW-kompleksów i przekształceń komórkowych oznaczamy CW .

Zad. 5.2.1. Jeśli CW-kompleks jest przestrzenią spójną, to jest także łukowo spójną.

Z warunku, że topologia CW-kompleksu jest słaba ze względu na filtrację szkieletami wynika, że jeśli X jest CW-kompleksem, to przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy jego obcięcie do dowolnego szkieletu $f: X^{(n)} \rightarrow Y$ jest ciągłe.

Definicja 5.2.2. Podkompleksem $A \subset X$ nazywamy taki podzbiór domknięty, że filtracja $A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset \dots \subset A^{(n)} \subset \dots$ gdzie $A^{(n)} := A \cap X^{(n)}$ spełnia warunki definicji CW-kompleksu.

Przykład 5.2.1. Szkielety są podkompleksami w X .

Uwaga 5.2.1. Z definicji podkompleksu wynika, że $A^{(n)} \setminus A^{(n-1)} = (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}) \cap A$ jest sumą pewnej rodziny n -wymiarowych komórek w $X^{(n)}$.

Zad. 5.2.2. Jeśli $A \subset X$ jest podkompleksem, to przestrzeń ilorazowa ma naturalną strukturę CW-kompleksu, taką że odwzorowanie $q: X \rightarrow X/A$ jest komórkowe.

Twierdzenie 5.2.1. *Włożenie podkompleksu w CW-kompleks jest parą Borsuka.*

Dowód. Niech $A \subset X$ będzie podkompleksem. Dla każdego n para $(X^{(n)}, A^{(n)})$ jest relatywną n -wymiarową multikomórką, a więc na mocy Stw. 5.1.1 jest parą Borsuka. Pozostaje wykazać, że $(X, A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X^{(n)}, A^{(n)})$ jest parą Borsuka. \square

Zachodzi ważne twierdzenie o aproksymacji komórkowej 5.5.1 mówiące, że dowolne odwzorowanie między CW-kompleksami jest homotopijne z odwzorowaniem komórkowym.

Na zakończenie wspomnimy o nietrudnym, ale pożytecznym pojęciu *relatywnego CW-kompleksu*, będące uogólnieniem pojęcia multikomórki (Def. 5.1.2).

Definicja 5.2.3. Relatywny CW-kompleks to para (X, A) gdzie $A \subset X$ jest domkniętą podprzestrzenią oraz wyróżniony wstępujący ciąg podprzestrzeni domkniętych, zwanych szkieletami : $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots$ taki, że:

1. $X^{(0)} = A \sqcup V$, gdzie V jest przestrzenią dyskretną (wierzchołki CW-kompleksu (X, A)) i $X = \bigcup X^{(n)}$
2. Topologia w X jest słaba ze względu na podprzestrzenie $X^{(n)}$ tzn. zbiór $B \subset X$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $n \geq 0$ zbiór $B \cap X^{(n)}$ jest domknięty;
3. Pary $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ są n -wymiarowymi relatywnymi multikomórkami.

Przykład 5.2.2. Dowolna relatywna multikomórka (X, A) jest relatywnym CW-kompleksem. Jeśli $A \subset X$ jest podkompleksem CW-kompleksu X , to para (X, A) jest relatywnym CW-kompleksem, dla której $X^{(n)} = X^{(n)} \cup A$.

Zad. 5.2.3. Opisz szczegółowo strukturę CW-kompleksu powierzchni dwuwymiarowych (sfera, torus, precle, płaszczyzna rzutowa, butelka Kleina...).

5.3 Twierdzenie J.H.C. Whiteheada

Twierdzenie 5.3.1 (J.H.C. Whitehead¹). *Niech $f: Y \rightarrow Z$ będzie n -równoważnością (Def. 4.4.2) ($1 \leq n \leq \infty$). Wtedy dla dowolnego CW-kompleksu X przekształcenie indukowane*

$$f_{\#}: [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$$

jest surjeksią jeśli $\dim X \leq n$ oraz jest injeksią jeśli $\dim X < n$. Jeśli przekształcenie f jest słabą homotopijną równoważnością (4.4.2), to dla dowolnego CW-kompleksu X odwzorowanie $f_{\#}: [X, Y]_ \rightarrow [X, Z]_*$ jest bijekcją.*

Uwaga 5.3.1. Zauważmy, że jeśli $n \geq 2$, to również odwzorowania zbiorów niepuktowanych klas homotopii $f_{\#}: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$ są bijekcjami.

Wniosek 5.3.1. *Jeśli Y, Z są punktowymi CW-kompleksami wymiaru $< n < \infty$, gdzie $1 \leq n$, a $f: Y \rightarrow Z$ jest homotopijną n -równoważnością, to f jest homotopijną równoważnością. Jeśli f jest słabą homotopijną równoważnością, to jest homotopijną równoważnością.*

¹John Henry Constantine Whitehead (Chennai (Indie) 1904 – 1960 Princeton (USA))

Dowód. Wynika natychmiast z lematu Yonedy 1.2.1. \square

Dowód twierdzenia Whiteheada zaczniemy od ważnego także dla innych zastosowań twierdzenia o podnoszeniu przekształceń ze względu na rozwłóknienia, których włókna mają trywialne grupy homotopii w niskich wymiarach.

Twierdzenie 5.3.2. *Założmy, że $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ jest rozwłóknieniem takim, że $\pi_k(F, e_0) = 0$ dla $k < n$. Niech (X, A) będzie relatywnym CW-kompleksem wymiaru $\leq n$. Wtedy poniższy przemienny kwadratowy diagram litych strzałek ma przekątną:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \end{array}$$

Przekształcenie \tilde{f} będziemy konstruować metodą "szkielet po szkielecie, komórka po komórce", która precyzyjnie opisuje następujący lemat:

Lemat 5.3.1. *Niech n będzie liczbą naturalną. Jeżeli dla każdego $q \leq n$ teza Twierdzenia 5.3.2 zachodzi dla pary dysk-sfera (D^q, S^{q-1}) , to zachodzi dla dowolnego relatywnego CW-kompleksu (X, A) wymiaru $\leq n$. Jeśli teza 5.3.2 zachodzi dla każdego q , to zachodzi dla relatywnego CW-kompleksu dowolnego wymiaru.*

Dowód. Podniesienie \tilde{f} konstruujemy indukcyjnie, po szkieletach. Korzystając z założenia dla pary (D^1, S^0) konstruujemy podniesienie $\tilde{f}_0: X^{(0)} \rightarrow E$. Założmy, że mamy już podniesienie $\tilde{f}_{q-1}: X^{(q-1)} \rightarrow E$ - rozszerzamy je do $\tilde{f}_q: X^{(q)} \rightarrow E$ komórka po komórce. \square

Dowód Tw. 5.3.2. Na mocy Lematu 5.3.1 wystarczy wykazać twierdzenie dla pary $(X, A) = (D^q, S^{q-1})$ gdzie $q \leq n$. W tym celu rozpatrzmy rozwłóknienie indukowane (pull-back): $\tilde{f}^*E \xrightarrow{p'} D^n$. Przekształcenie $f: S^{q-1} \rightarrow E$ definiuje przekrój $s: S^{q-1} \rightarrow \tilde{f}^*E$ rozwłóknienia p' nad sferą S^{q-1} , dane wzorem $s(x) := (x, f(x))$. Rozszerzenie tego przekroju na dysk D^q wyznaczy podniesienie \tilde{f} .

Ponieważ dysk jest przestrzenią ściągłą, więc na mocy Tw. 3.5.1 istnieją wzajemnie odwrotne włókniste homotopijne równoważności h, g - w diagramie zaznaczono też przekrój s , oraz jego rozszerzenie \bar{s} , o którym piszemy dalej:

$$\begin{array}{ccc} D^q \times F & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & \tilde{f}^*E \\ \begin{array}{c} \swarrow p_1 \\ \searrow \bar{s} \end{array} & & \begin{array}{c} \swarrow p' \\ \searrow s \end{array} \\ & D^q & \xleftarrow{\quad} S^{q-1} \end{array}$$

Złożenie $g \circ s: S^{q-1} \rightarrow D^q \times F$ jest przekrojem, a więc jest postaci: $(g \circ s)(x) = (x, \alpha(x))$ gdzie $\alpha: S^{q-1} \rightarrow F$. Ponieważ $\pi_k(F, e_0) = 0$ dla $k < n$ a więc α rozszerza się do odwzorowania dysku $\bar{\alpha}: D^q \rightarrow F$ i wzór $\bar{s}(x) = (x, \bar{\alpha}(x))$ zadaje rozszerzenie $g \circ s$. Złożenie $h \circ \bar{s}$ jest przekrojem p' nad dyskiem takim, że $h \circ \bar{s}|_{S^{q-1}} = h \circ g \circ s$, niekoniecznie równym s . Włóknista homotopia $h \circ g \sim_{D^q} id_{\tilde{f}^*E}$ definiuje włóknistą homotopię przekrojów $\bar{s}|_{S^{q-1}} \sim_{D^q} s$, którą oznaczymy $H: S^{q-1} \times I \rightarrow \tilde{f}^*E$. Rozpatrzmy diagram:

$$\begin{array}{ccc} D^q \times 0 \cup S^{q-1} \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & \tilde{f}^*E \\ j \downarrow & \nearrow p_D & \downarrow p' \\ D^q \times I & \xrightarrow{p_D} & D^q \end{array}$$

w którym p_D jest rzutowaniem na dysk, j - włożeniem (pustej szklanki w pełną, a więc korozwłóknieniem i homotopijną równoważnością, a $\bar{H}(x, 0) := \bar{s}(x)$, $\bar{H}(z, t) := H(z, t)$ Ponieważ p' jest rozwłóknieniem istnieje więc podniesienie \tilde{p}_D . Szukane rozszerzenie przekroju s jest dane wzorem: $\hat{s}(x) := \tilde{p}_D(x, 1)$. \square

Dowód twierdzenia Whiteheada 5.3.1. Niech $f: Y \rightarrow Z$ będzie n -równoważnością ($1 \leq n \leq \infty$). Rozważając każdą składową łukową osobno, możemy założyć że obie przestrzenie są łukowo spójne. Zastępując przestrzeń Y kowalcem odwzorowania f można zakładać, że f jest rozwłóknieniem z włóknem oznaczanym F . Założenie iż f jest n -równoważnością jest równoważne znikaniu grup homotopii włókna: $\pi_k(F, x_0) = 0$ dla $k < n$ (p. Stw. 4.4.1). Trzeba pokazać, że dla CW-kompleksu X przekształcenie indukowane $f_{\#} : [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$ jest surjekcją jeśli $\dim X \leq n$ oraz jest iniekcją jeśli $\dim X < n$.

Dla pokazania surjektywności $f_{\#}$ zastosujemy Tw. 5.3.2 do CW-pary (X, x_0) i dowolnego odwzorowania $k: X \rightarrow Z$:

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow{k} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{k} & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

Oczywiście $f_{\#}([\tilde{k}]) = [f \circ \tilde{k}] = [k]$.

Założmy teraz, że $\dim X < n$ i przypuśćmy, że $f_{\#}([\tilde{k}] \neq f_{\#}([\tilde{k}']])$. Niech $H: X \times I \rightarrow Z$ będzie punktowaną homotopią $f \circ \tilde{k} \sim f \circ \tilde{k}'$. Zastosujemy tw. 5.3.2 do CW-pary $(X \times I, S)$ gdzie $S := X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\}$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tilde{k} \cup y_0 \cup \tilde{k}'} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ X \times I & \xrightarrow{H} & Z \end{array}$$

Podniesienie $\tilde{H}: X \times I \rightarrow Z$ jest szukaną homotopią $\tilde{k} \sim \tilde{k}'$. \square

5.4 Aproksymacja gładka

Dowód twierdzenia o aproksymacji komórkowej 5.5.1 opiera się na wariacie twierdzenia Sarda, być może znanego Czytelnikowi z Analizy Matematycznej, które zastosujemy do odwzorowań relatywnych komórek.

Definicja 5.4.1. Odwzorowanie relatywnych komórek $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ nazywa się regularne jeśli przy pewnym wyborze odwzorowań charakterystycznych złożenie odwzorowań (oznaczane \hat{f})

$$\hat{G} := \chi_X^{-1}(G) \xrightarrow{\chi_X} X \setminus A \xrightarrow{f} Y \setminus B \xrightarrow{\chi_Y^{-1}} \hat{D}^m$$

ma wartość regularną tzn. istnieje $y_0 \in D^m$ taki, że dla pewnego otoczenia $U \supset \hat{f}^{-1}(y_0)$ odwzorowanie $\hat{f}|_U$ jest gładkie oraz pochodna jest epimorfizmem.

Przypomnijmy, że jeśli $f: M \rightarrow N$ odwzorowaniem gładkim między rozmaitościami, to punkt $x \in M$ nazywamy *krytycznym* jeśli $Df_x: TM_x \rightarrow TN_x$ nie jest epimorfizmem. Punkt $y \in N$ nazywa się *wartością regularną* jeśli dla każdego $x \in f^{-1}(y)$, $Df_x: TM_x \rightarrow TN_x$ jest epimorfizmem. Zauważmy, że jeżeli $\dim M < \dim N$, to $y \in N$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(y)$ jest zbiorem pustym.

Twierdzenie 5.4.1 (Twierdzenie o aproksymacji gładkiej). *Dla dowolnego odwzorowanie relatywnych komórek $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ istnieje odwzorowanie regularne $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ takie, że $f \sim g \text{ rel } (A)$.*

Dowód (p. [13]Lekcja 2 opiera się na tw. Weierstrassa i tw. Sarda i przebiega metodą "koncentrycznych dysków". [RYSUNEK].

Twierdzenie 5.4.2 (Twierdzenie Weierstrassa). *Dla każdego przekształcenia ciągłego $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ określonego na otwartym podzbiornie $U \subset \mathbb{R}^n$, podzbiornie zwarte $K \subset U$ oraz $\epsilon > 0$ istnieje odwzorowanie gładkie $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \epsilon$ dla $x \in K$.* \square

Dowód Tw. 5.4.1. Zdefiniujemy funkcję odstepu punktu od brzegu zbioru $\hat{G}: \rho := d(\cdot, \partial\hat{G}): \hat{D}^n \rightarrow \mathbb{R}$. $D_{1/2}^m \subset D^m$ będzie koncentrycznym dyskiem o średnicy $1 > r > 0$. Podzbiór $\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m) \subset \hat{G} \subset \hat{D}^n$ jest zwarty, bo $\chi_A(\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)) = f^{-1}(\chi_B(D_{1/2}^m))$ jest podzbiornie domkniętym w X i zawartym w $X \setminus A$. Stąd funkcja ρ jest ograniczona z dołu przez pewną liczbę dodatnią: $\rho(x) \geq 2\delta$ dla $x \in \hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)$. Między zbiór $\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)$ a \hat{G} można wpisać dwa zbiory zwarte

$$\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m) \subset \overset{\circ}{K}_{2\delta} \subset K_{2\delta} \subset \overset{\circ}{K}_\delta \subset K_\delta \subset \hat{G}$$

gdzie $K_\lambda := \{x \in \hat{G}: d(x, \partial\hat{G}) \geq \lambda\}$.

Ponieważ K_δ jest zbiornie zwartym, więc istnieje $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ takie, że ϵ -otoczenie zbioru $\hat{f}(K_\delta)$ jest zawarte w \hat{D}^m .

Zastosujemy twierdzenie Weierstrassa do $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \hat{D}^m$. Istnieje funkcja gładka $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ taka, że dla $x \in K_\delta$ zachodzi nierówność $|\bar{f}(x) - \hat{f}(x)| < \epsilon$.

Zdefiniujemy homotopię $\hat{F}: \hat{G} \times I \rightarrow \hat{D}^m$:

$$\hat{F}(x, t) := \begin{cases} \hat{f}(x) & \text{dla } x \in \hat{G} \setminus K_\delta \\ (1 - t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta}) \hat{f}(x) + t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta} \bar{f}(x) & \text{dla } x \in K_\delta \setminus K_{2\delta} \\ (1 - t) \hat{f}(x) + t \bar{f}(x) & \text{dla } x \in K_{2\delta} \end{cases}$$

Oznaczmy $\hat{f}_t(x) := \hat{F}(x, t)$. Zauważmy, że

1. $\hat{f}_0(x) = \hat{f}(x)$
2. $|\hat{f}_1(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon < \frac{1}{4}$ dla $x \in \hat{G}$
3. $\hat{f}_1(x) = \bar{f}(x)$ dla $x \in K_{2\delta}$, a więc \hat{f}_1 jest gładkie na $\overset{\circ}{K}_{2\delta} \supset \hat{f}^{-1}(D_r^m)$
4. $\hat{f}_1(x) = \hat{f}(x)$ dla $x \in \hat{G} \setminus K_\delta$
5. $\hat{f}^{-1}(D_{1/4}^m) \subset K_{2\delta}$ oraz $\bar{f}^{-1}(D_{1/4}^m) \subset K_{2\delta}$

Zauważmy, że z punktów 3 i 5 wynika, że dla dowolnego punktu $y \in D_{1/4}^m$ zachodzi równość: $\hat{f}_1^{-1}(y) = \bar{f}^{-1}(y)$. Ponieważ przekształcenie \bar{f} jest gładkie, więc \hat{f}_1 jest także gładkie na $\overset{\circ}{K}_{2\delta}$ a więc na mocy tw. Sarda posiada wartość regularną $y_0 \in D_{1/4}^m$, co czyni przekształcenie \hat{f}_1 regularnym.

Przy pomocy homotopii \hat{F} zdefiniujemy homotopię $F: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$

$$F(x, t) := \begin{cases} \chi_B(\hat{F}(\chi_A^{-1}(x), t)) & \text{dla } x \in G \\ f(x) & \text{dla } x \in X \setminus \chi_A(K_\delta) \end{cases}$$

Homotopia F ma następujące własności:

- 1) $F(a, t) = f(a)$, a więc F jest homotopią rel A .

2) $F(x, 0) = f(x)$

3) Dla

$$f_1(x) := F(x, 1) = \begin{cases} \chi_B(\hat{f}_1(\chi_A^{-1}(x))) & \text{dla } x \in G \\ f(x) & \text{dla } x \in X \setminus \chi_A(K_\delta) \end{cases}$$

$f_1^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ oraz $\chi_B^{-1} \circ f_1 \circ \chi_A = \hat{f}_1$ na \hat{G} a więc przekształcenie $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ jest regularne.

□

Uwaga 5.4.1. Ostatnie twierdzenie zachodzi także dla odwzorowań $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ gdzie (X, A) jest relatywną komórką, (Y, B) jest relatywną multikomórką a odwzorowanie regularne definiujemy tak, że we wnętrzu każdej komórki (Y, B) ma istnieć wartość regularna.

Wniosek 5.4.1. *Jeśli (X, A) jest relatywną komórką, a (Y, B) jest relatywną multikomórką oraz $\dim(X \setminus A) < \dim(Y \setminus B)$ to dowolne odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ jest homotopijne rel A z odwzorowaniem $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ takim, że $g(X) \subset B$.*

Dowód. Na mocy tw. o aproksymacji gładkiej 5.4.1 każde odwzorowanie jest homotopijne z odwzorowaniem regularnym, możemy więc zakładać, że $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ jest odwzorowaniem regularnym. Wobec nierówności wymiarów oznacza to, że w każdej komórce istnieje punkt $y_i \in Y \setminus B$ taki, że $y_i \notin f(X)$. Relatywną multikomórkę po usunięciu punktu z każdego "bąbla" można deformacyjnie zretrahować na (B, B) . □

Wniosek 5.4.2. *Jeśli (Y, B, b_0) jest punktowanym relatywnym CW-kompleksem, a (X, A, a_0) k -wymiarową punktowaną relatywną komórką, to dowolne przekształcenie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ jest homotopijne rel A z odwzorowaniem $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ takim, że $g(X) \subset Y_B^{(k)}$. W szczególności znikają relatywne grupy homotopii $\pi_k(Y, Y^{(n)}, b_0) = 0$ dla $0 < k \leq n$ (tzn. para (Y, B, b_0) jest n -spójna).*

Dowód. Niech $\alpha: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, Y_B^{(n)}, b_0)$. Ponieważ dysk D^k jest przestrzenią zwartą, więc obraz $\alpha(\mathring{D}^k)$ jest zawarty w pewnym skończonym podkompleksie, a więc możemy zakładać, że Y jest skończonym kompleksem wymiaru $m > k$. Pokażemy indukcyjnie, że

$$\alpha \sim \alpha_i: (X, A, a_0) \rightarrow (Y_B^{(m-i)}, Y_B^{(n)}, b_0)$$

dla $i = 1, \dots, m-n$. Wynika to natychmiast z poprzedniego wniosku zastosowanego do odwzorowań $\alpha_i: (X, A, a_0) \rightarrow (Y_B^{(m-i)}, Y_B^{(m-i-1)}, b_0)$. □

Wniosek 5.4.3. *Dla dowolnego CW-kompleksu i dowolnego $n \geq 0$ homomorfizm indukowany przez włożenie $X^{(n)} \subset X$ indukuje izomorfizm $\pi_q(X^{(n)}, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_q(X, x_0)$ dla $q < n$ i epimorfizm dla $q = n$.* □

Uwaga 5.4.2. Ostatnie tw. zachodzi też dla relatywnych CW-kompleksów, tylko trzeba skorzystać z ciągu dokładnego homotopii trójki przestrzeni.

Wniosek 5.4.4. *Dla dowolnego przekształcenie relatywnych komórek $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ takich, że $\dim X \setminus A < \dim Y \setminus B$ istnieje homotopia rel A , $F: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ taka, że $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) \in B$.*

5.5 Aproksymacja komórkowa

Korzystając z Tw. 5.4.1 podamy dwa dowody twierdzenia o homotopijnej aproksymacji komórkowej przekształceń między CW-kompleksami.

Twierdzenie 5.5.1. *Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem CW-kompleksów, $A \subset X$ podkompleksem na którym f jest komórkowe, to istnieje komórkowe przekształcenie $g : X \rightarrow Y$ takie, że $f \sim g \text{ rel } A$.*

Dowód 1. Dowód przebiega metodą "komórka po komórce" przekształcenie g konstruujemy rozszerzając je na kolejne szkielety $g_n : X^{(n)} \cup A \rightarrow Y$. W celu skrócenia zapisu, na użytek obecnego dowodu² wprowadzamy oznaczenie $X_A^{(n)} := X^{(n)} \cup A$. Podzbiór $X_A^{(n)} \subset X$ jest oczywiście podkompleksem, a więc włożenia $X_A^{(n)} \subset X_A^{(n+1)} \subset X$ są korozwłóknieniami. Podczas wszystkich kroków dowodu pozostawiamy przekształcenie f niezmiennym na podkompleksie A . Dla ułatwienia śledzenia dowodu czytelnik może przyjąć, że $A = \emptyset$.

Przekształcenie komórkowe $g_0 : X_A^{(0)} \rightarrow Y$ otrzymujemy łącząc drogami punkty ze zbioru $f(X^{(0)})$ z wybranymi wierzchołkami, czyli elementami $Y^{(0)}$. Drogi te definiują homotopię $G_0 : X_A^{(0)} \times I \rightarrow Y$ między $f|_{X_0}$ a g_0 . Załóżmy, że mamy już:

- przekształcenie komórkowe $g_{n-1} : X_A^{(n-1)} \rightarrow Y^{(n-1)} \subset Y$ oraz
- homotopię $G_{n-1} : X_A^{(n-1)} \times I \rightarrow Y$ między $f|_{X_A^{(n-1)}}$ a g_{n-1} .

Chcemy rozszerzyć homotopię G_{n-1} do $G_n : X_A^{(n)} \times I \rightarrow Y$ tak, aby

$$g_n := G_n(-, 1) : X_A^{(n)} \rightarrow Y^{(n)} \subset Y,$$

czyli g_n było przekształceniem komórkowym homotopijnym z $f|_{X^{(n)}}$. Homotopia G_{n-1} rozszerza się do przekształcenia

$$G'_{n-1} : (X_A^{(n)} \times \{0\}) \cup (X_A^{(n-1)} \times I) \rightarrow Y, \quad G'_{n-1}(x, t) := \begin{cases} G_{n-1}(x, t) & \text{dla } (x, t) \in X_A^{(n-1)} \times I \\ f(x) & \text{dla } (x, 0) \in X_A^{(n)} \times \{0\} \end{cases}.$$

Ponieważ włożenie $X_A^{(n-1)} \subset X_A^{(n)}$ jest korozwłóknieniem, więc G'_{n-1} rozszerza się do homotopii $G'_n : X_A^{(n)} \times I \rightarrow Y$. Połóżmy $g'_n = G'_n|_{X_A^{(n)} \times \{1\}}$. Z definicji wynika, że g'_n jest odwzorowaniem par

$$g'_n : (X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) \rightarrow (Y, Y^{(n-1)})$$

i oczywiście $f|_{X_A^{(n)}} \sim g'_n$. Poprawimy przekształcenie g'_n pozostając w klasie homotopii rel $X_A^{(n-1)}$, do odwzorowania $g_n : X_A^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}$, zmieniając g'_n na każdej komórce n -wymiarowej osobno (wnętrza komórek n -wymiarowych w $X_A^{(n)}$ są rozłączne).

Niech $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} (X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$ będzie odwzorowaniem charakterystycznym pewnej komórki n -wymiarowej i rozpatrzmy złożenie

$$(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} (X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) \xrightarrow{g'_n} (Y, Y^{(n-1)}).$$

Ponieważ dysk D^n jest zwarty, a więc jego obraz $\bar{g}_{n-1}(\bar{\alpha}(D^n))$ jest zawarty w pewnym szkielecie $Y^{(k)} \subset Y$, a także przecina się jedynie ze skończoną liczbą komórek k -wymiarowych, czyli jego obraz jest zawarty w zbiorze

$$Y^{(n-1)} \cup \bar{\beta}_1(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k) \subset Y^{(k)}.$$

²Nie mylić z oznaczeniem $X_A := X \times \{0\} \cup A \times I$ wprowadzonym w rozdziale o korozwłóknieniach.

gdzie β_i są odwzorowaniami charakterystycznymi pewnych komórek k -wymiarowych. Jeśli $k \leq n$ to nie musimy zmieniać przekształceń g'_n na tej komórce. Załóżmy więc, że $k > n$. Będziemy "zsuwać" odwzorowanie g'_n z kolejnych komórek $\beta_i(\bar{D}^k)$. Rozważmy g'_n jako odwzorowanie par

$$(X_A^{(n-1)} \cup \alpha(D^n), X_A^{(n-1)}) \xrightarrow{g'_n} (Y^{(n-1)} \cup \bar{\beta}_1(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k), Y^{(n-1)} \cup \bar{\beta}_2(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k))$$

Obie pary są oczywiście relatywnymi komórkami, możemy więc zastosować Wniosek ?? i znaleźć homotopię rel $X_A^{(n-1)}$

$$F: (X_A^{(n-1)} \cup \alpha(D^n), X_A^{(n-1)}) \times I \rightarrow (Y^{(k-1)} \cup \bar{\beta}_1(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k), Y^{(k-1)} \cup \bar{\beta}_2(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k))$$

taką, że $F(-, 0) = g'_n$ oraz $g_n := F(-, 1): X_A^{(n-1)} \cup \alpha(D^n) \rightarrow Y^{(k-1)} \cup \bar{\beta}_2(D^k) \cup \dots \cup \bar{\beta}_r(D^k)$, a więc zsunęliśmy odwzorowanie g'_n z komórki $\beta_1(\bar{D}^k)$. Powtarzając tę procedurę najpierw homotopijnie spychamy obraz komórki $\alpha(D^n)$ do $Y^{(k-1)}$, a następnie powtarzamy to samo postępowanie w odniesieniu do każdej komórki n -wymiarowej z osobna. Powtarzamy procedurę, aż zepchniemy obrazy wszystkich komórek n -wymiarowych do n -szkieletu $Y^{(n)}$. Zauważmy, że homotopie G_n są zgodne tzn. $G_n|_{X_A^{(n-1)}} = G_{n-1}$. Stąd wynika, że odwzorowanie $G: X \times I \rightarrow Y$ jest dobrze zdefiniowane wzorem $F(x, t) := G_n(x, t)$ jeśli $x \in X_A^{(n-1)}$. Jego ciągłość wynika stąd, że topologia w X jest słaba ze względu na filtracje szkieletami, a odcinek jest przestrzenią zwartą (p. Stw. 2.3.3). \square

Wniosek 5.5.1. *Jeśli dwa przekształcenia relatywnych CW-kompleksów $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ są homotopijne, to istnieje homotopia będąca odwzorowaniem komórkowym $F: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ łącząca f_0 z f_1 .*

Dowód. Rozbijmy odcinek na dwie komórki 0-wymiarowe (końce) i jedną 1-wymiarową i zadajmy w $(X \times I, A \times I)$ strukturę produktowego CW-kompleksu. Wtedy $X \times \{0, 1\} \subset X \times I$ jest oczywiście podkompleksem i tezę otrzymujemy stosując Tw. 5.5.1 do wyjściowej homotopii $H: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$ między f_0 i f_1 . \square

Zad. 5.5.1. Jeśli X jest CW-kompleksem takim, że $\dim X \leq 2n - 2$ to włożenie $S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n$ indukuje bijekcję zbiorów klas homotopii $[X, S^n \vee S^n] \simeq [X, S^n \times S^n]$. Uwaga: Na mocy tw. Sarda ta sama teza jest prawdziwa jeśli w zadaniu zastąpić CW-kompleks X rozmaitością gładką M taką, że $\dim M \leq 2n - 2$.

Podamy alternatywny dowód twierdzenia o aproksymacji komórkowej 5.5.1, analogiczny do dowodu twierdzenia Whiteheada 5.3.1, korzystający z twierdzenia o podnoszeniu przekształceń Tw. 5.3.2.

Lemat 5.5.1. *Jeśli (Y, B, b_0) jest punktowaną parą przestrzeni taką, że $\pi_q(Y, B, b_0) = 0$ dla $q \leq n$ to dowolne przekształcenie relatywnego CW-kompleksu $f: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, B, b_0)$ $\dim(X \setminus A) \leq n$ jest rel A homotopijne z przekształceniem $g: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, B, b_0)$ takim, że $g(X) \subset B$.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z Tw. 5.3.2 jeżeli rozważymy rozwłóknięcie równoważne z włożeniem $\iota: (B, b_0) \subset (Y, b_0)$. Grupy jego homotopijnego włókna to z definicji grupy relatywne $\pi_q(Y, B, b_0) := \pi_{q-1}(F(\iota, b_0), (b_0, \omega_{b_0}))$. Niech $p_\iota: P(\iota) \rightarrow Y$ będzie homotopijnym kocyndrem odwzorowania ι . Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & P(\iota) & \xrightarrow{\simeq, so} & B \\
 \downarrow j & \nearrow f' & \downarrow p_\iota & \searrow \iota & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & &
 \end{array}
 \quad (5.1)$$

w którym przemienny kwadrat wynika z Tw. 5.3.2, a prawy trójkąt z Tw. 3.3.6. Odwzorowanie g definiujemy jako złożenie $\iota \circ p_B \circ \tilde{f}$ gdzie p_B jest homotopijną odwrotnością $s_0: p_B(b, \omega) := b$. \square

Dowód 2 Tw. 5.5.1. Aproksymację komórkową konstruujemy szkielet po szkielecie. Oznaczmy $\iota_{n-1,n}^X: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n)}$ oraz $\iota_n^Y: Y^{(n)} \rightarrow Y$ włożenia n -tych szkieletów i rozpatrzmy diagram (p. Diagram 5.1):

$$\begin{array}{ccc} X^{(n-1)} & \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} & P(\iota_n^Y) \\ \downarrow \iota_{n-1,n}^X & \nearrow \tilde{f}_n & \downarrow p_{\iota_n^Y} \\ X^{(n)} & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (5.2)$$

Dla $n = 1$ konstruujemy przekształcenie $\tilde{f}_0: X(0) \rightarrow P(\iota_0^Y)$ łącząc obrazy wierzchołków $f(x)$ drogami z wierzchołkami w Y . Postępując indukcyjnie otrzymujemy ciąg przekształceń $\tilde{f}_n: X^{(n)} \rightarrow P(\iota_n^Y)$ taki, że diagramy:

$$\begin{array}{ccc} X^{(n)} & \xrightarrow{\tilde{f}_n} & P(\iota_n^Y) \\ \downarrow \iota_n^{n+1} & & \downarrow \iota_n^{n+1} \\ X^{(n+1)} & \xrightarrow{\tilde{f}_{n+1}} & P(\iota_{n+1}^Y) \end{array} \quad (5.3)$$

są przemiennie. Zauważmy, że każde z przekształceń $\tilde{f}_n: X^{(n)} \rightarrow P(\iota_n^Y)$ definiuje homotopię $\tilde{F}_n: X^{(n)} \times I \rightarrow Y$ taką, że $\tilde{F}_n|_{X^{(n-1)} \times I} = \tilde{F}_{n-1}$ oraz $\tilde{F}_n(x, 0) \in Y^{(n)}$ oraz $\tilde{F}_n(x, 1) = f(x)$, a więc otrzymujemy zgodną rodzinę homotopii, które definiują homotopię $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$. \square

5.6 Homotopijne własności CW-kompleksów

Udowodnimy ważne twierdzenie o własnościach homotopijnych CW-kompleksów, będące wnioskiem z twierdzenia o aproksymacji komórkowej.

Zad. 5.6.1. CW-kompleks X jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy szkielet $X^{(1)}$ jest łukowo spójny.

Twierdzenie 5.6.1. Niech X będzie k -spójnym CW-kompleksem (tzn. $\pi_q(X, x_0) = 0$ dla $q \leq k$). Wtedy X jest homotopijnie równoważny z CW-kompleksem Y takim, że $Y^{(k)} = \{x_0\}$ oraz wszystkie odwzorowania doklejające komórki są punktowane, czyli $\chi: \bigvee_{j \in J_{n+1}} (S^n, 1) \rightarrow (Y^{(n)}, y_0)$.

Dowód. Indukcyjnie zbudujemy ciąg homotopijnych równoważności CW-kompleksów

$$X \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_k$$

takich, że $Y_q^{(i)} = \{y_0\}$ dla $i \leq q$. Wówczas CW-kompleks Y_k będzie tym szukanym.

Zacznijmy od przypadku $q = 0$, czyli X jest przestrzenią spójną i wybierzmy wierzchołek $\{x_0\}$. Każdy inny wierzchołek $\{x_j\}_{j \in J_0}$ można połączyć z x_0 drogą leżącą w szkielecie $X^{(1)}$ (por. zad 5.6.1 lub tw. o aproksymacji komórkowej 5.5.1). Kompleks Y_0 zbudujemy w trzech krokach. Doklejając komórki 1 i 2 wymiarowe zbudujemy kompleks Y'_0 , którego X jest podkompleksem, tak że włożenie $X \hookrightarrow Y'_0$ jest homotopijną równoważnością, oraz w Y'_0 istnieją rozłączne komórki jednowymiarowe (krawędzie) łączące x_0 z wierzchołkami x_j .

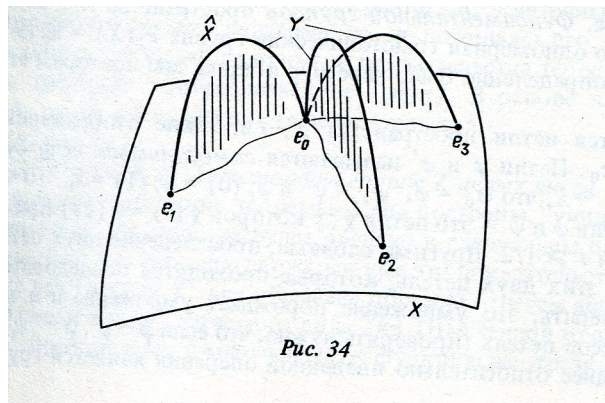
Krok 1₀. Dla każdego $j \in J_0$ przyklejamy komórkę 1-wymiarową σ_j^0 , przy pomocy odwzorowania $(D^1, 1) \supset (S^0, 1) \rightarrow (X^{(0)}, x_0)$, $0 \rightarrow \{x_j\}$, $1 \rightarrow \{x_0\}$. (Na rysunku wierzchołki oznaczone są e_i , a doklejone komórki to łuki zaznaczone grubszą linią.)

Krok 2₀. Dla każdego $j \in J_0$ przyklejamy komórkę 2-wymiarową przy pomocy odwzorowania $(D^2, 1) \supset (S^1, 1) \rightarrow (X^{(1)}, x_0)$, które na górnym półokręgu S_+^1 jest komórką doklejoną w Kroku 1, a na dolnej S_-^1 drogą ω_j . Tak otrzymany kompleks nazywamy Y^0 . Oczywiście X jest podkompleksem i retraktem deformacyjnym, bo dla każdej dwuwymiarowej komórki dolna półsfera S_-^1 jest retraktem deformacyjnym dysku. (Na rysunku doklejone dyski są zaznaczone równoległymi liniami pionowymi.)

Krok 3₀. W kompleksie Y^0 podkompleks 1-wymiarowy $K_0 := \bigvee_{j \in J_0} \sigma_j^0$ (bukiet odcinków) jest ściągalny. Zatem odwzorowanie ilorazowe $Y^0 \rightarrow Y^0 / \bigvee_{j \in J_0} \sigma_j^0 =: Y_0$ jest homotopijną równoważnością. Kompleks Y_0 ma tylko jedną komórkę zerowymiarową, którą nadal oznaczamy $\{x_0\}$. Dostajemy więc homotopijną równoważność $(X, x_0) \rightarrow (Y_0, x_0)$. Zauważmy, że 1-szkielet w Y_0 jest bukietem okręgów.

Załóżmy, że został skonstruowany kompleks Y_{q-1} , czyli $Y^{(q-1)} = pt$, a więc $Y^{(q)}$ jest bukietem sfer q -wymiarowych. "Zabijamy" ten szkielet analogicznie jak w przypadku 0-wymiarowym. Opiszemy tę konstrukcję skrótowo: Dla dowolnej komórki q wymiarowej rozpatrzmy odwzorowanie charakterystyczne $\chi_j: (D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X^{(q)}, x_0, x_0)$, które definiuje włożenie $\chi_j: (S^q, 1) \rightarrow (X^{(q)}, x_0)$. Ponieważ $\pi_q(X, x_0) = 0$, rozszerza się ono do odwzorowania $(D^{q+1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$. Na mocy tw. o aproksymacji komórkowej możemy wybrać to odwzorowanie tak, żeby $\chi_j(D^{q+1}) \subset X^{(q+1)}$. Rozważmy sferę S^{q+1} jako CW-kompleks składający się z czterech komórek: 0-wymiarowej, q -wymiarowej (równik) i dwóch $q+1$ -wymiarowych (dwie półsfery), oznaczanych S_+^{q+1} , S_-^{q+1} . Stworzymy CW-kompleks Y'_{q+1} dokleając dla każdej komórki q -wymiarowej egzemplarz sfery S_j^{q+1} przez skonstruowane wyżej przekształcenie $(D^{q+1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$, gdzie dysk D^{q+1} identyfikujemy z dolną półsferą S_-^{q+1} . W powstałym CW-kompleksie bukiet komórek $K_q := \bigvee_{j \in J_n} S_{-,j}^{q+1}$ jest podkompleksem ściągal-

nym, zawierającym szkielet $X^{(q)}$. Złożenie odwzorowań $Y \rightarrow Y'_q \rightarrow Y'_q / K_q =: Y_q$ jest homotopijną równoważnością, a Y_q jest szukanym CW-kompleksem, w którym $(Y_q)^{(q)} = x_0$. Sprawdzenie, że można zapewnić iż zachowując typ homotopii, można zapewnić, że przekształcenia charakterystyczne wszystkich komórek są punktowane pozostawiamy czytelnikowi jako ZADANIE. \square



Puc. 34

Rys. Doklejanie komórek 1-wymiarowych w celu ściągnięcia 0-szkieletu do punktu. [7]

Rozdział 6

Grupy homotopii CW-kompleksów

CW-kompleks powstaje przez sukcesywne doklejanie komórek. Jeżeli chcemy policzyć jego grupy homotopii, to naturalnym jest pytanie, jak zmieniają się one po doklejeniu jednej komórki. Zaczniemy od odpowiedzi na nie.

6.1 Grupy homotopii relatywnych komórek

Niech (X, A, a_0) będzie n -wymiarową relatywną komórką z wyróżnionym punktem. Zbadamy grupy homotopii $\pi_k(X, A, a_0)$ dla $k \leq n$. Przypomnijmy, że elementy tej grupy mogą być interpretowane jako klasy homotopii przekształceń $(D^k, S^{k-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ a dowolna droga $\omega: I \rightarrow X$ taka, że $\omega(0) = a_0, \omega(1) = a_1$ wyznacza izomorfizm $h_{[\omega]}: \pi_k(X, A, a_0) \rightarrow \pi_k(X, A, a_1)$ (p. Wn. 4.4.5), a więc grupa podstawowa $\pi_1(A, a_0)$ działa na grupie relatywnej $\pi_k(X, A, a_0)$. Jeśli $k > 2$ to grupa relatywna $\pi_k(X, A, a_0)$ jest abelowa, a więc działanie $\pi_1(A, a_0)$ rozszerza się do struktury modułu nad pierścieniem grupowym $\mathbb{Z}[\pi_1(A, a_0)]$.

Zad. 6.1.1. Opisz zbiór $\pi_1(X, A, a_0) = 0$ jeśli (X, A, a_0) jest 1-wymiarową relatywną komórką.

Twierdzenie 6.1.1. Niech (X, A, a_0) będzie n -wymiarową ($n > 2$) punktowaną relatywną komórką a $\bar{\chi}: (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ jej odwzorowaniem charakterystycznym. Wtedy

1. Grupa $\pi_k(X, A, a_0) = 0$ dla $k < n$.
2. Grupa $\pi_n(X, A, a_0)$ jest generowana przez elementy $\pi_1(A, a_0)$ -orbity klasy homotopii $[\bar{\chi}]$.
3. Gdy $n > 2$ grupa $\pi_n(X, A, a_0)$ jest wolnym $\mathbb{Z}[\pi_1(A, a_0)]$ -modułem generowanym przez klasę homotopii $[\bar{\chi}]$.

Uwaga 6.1.1. Przypadek $n = 2$ jest *de facto* pokryty przez twierdzenie van Kampena, które opisuje homomorfizm $\pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$, bowiem ciąg $\pi_2(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ jest dokładny.

Zauważmy, że pkt.1 wynika natychmiast z twierdzenia o aproksymacji przekształceń komórek przekształceniem regularnym p. Wniosek 5.4.4 oraz Zad 4.4.4. Dowód punktu 2. poprzedzimy lematami. Dowód punktu 3 będzie wymagał wprowadzenia nowego pojęcia - stopnia przekształcenia oraz pewnej wiedzy o nakryciach.

Lemat 6.1.1. Niech $n > 2$ oraz $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \overset{\circ}{D}^n \subset D^n$ będzie skończonym podzbiorem wnętrza dysku. Włożenia $(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$ i dla $q \leq n$ indukują izomorfizm grup homotopii

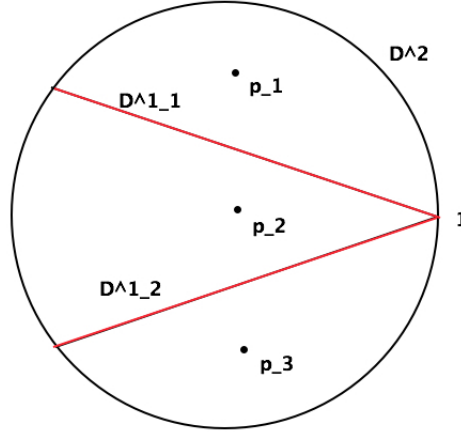
$$\pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \rightarrow \prod_{i=1}^k \pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) = \bigoplus_{i=1}^k \pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

przy czym element $[(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)] \in \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$ jest obrazem elementu $[(D^n, S^{n-1}, 1) \xrightarrow{\iota_i} (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)] \in \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$ będącego przeciągnięciem afinicznego zanurzenia $(D^n, S^{n-1}, 1) \xrightarrow{\iota_i} (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$ na dysk o środku w punkcie p_i , nie zawierający żadnego innego punktu p_j , przez drogę łączącą w $D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ punkt 1 z $\iota_i(1)$.

W dowodzie lematu 6.1.1 skorzystamy z własności jednorodności przestrzeni euklidesowej, opisanej w następującym zadaniu.

Zad. 6.1.2. Jeśli $n > 1$ to dla dowolnych dwóch ciągów różnych punktów $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ oraz $p'_1, \dots, p'_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje homeomorfizm $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego $1 \leq i \leq k$, $h(p_i) = p'_i$. Co więcej można wybrać homeomorfizm h o zwartym nośniku (tzn. taki, że poza pewnym zbiorem zwartym jest identycznością.).

Dowód. Korzystając z Zad.6.1.2 możemy założyć, że $p_i = (0, -1 + \frac{i}{k+1}, \dots, 0)$. Mając tak wygodnie rozmieszczone punkty rozpatrzmy bukiet $B := D_1^{n-1} \vee \dots \vee D_{k-1}^{n-1}$ złożony z $k-1$ dysków $n-1$ wymiarowych zaczepionych w punkcie 1 i dzielących dysk D^n na k podzbiorów, z których każdy zawiera dokładnie jeden punkt p_i . Na rysunku pokazano taki podział dla $n=2$ i $k=3$. Podział dysku D^2 dla większej k punktów uzyskujemy rozkładając je na osi pionowej i wprowadzając $k-1$ siecznych, a w wyższych wymiarach przez zawieszenie dysku 2-wymiarowego z wyróżnionymi siecznymi.



Rys. Podział dysku D^2 na sektory zawierające po jednym punkcie p_i . $B = D_1^1 \vee D_2^2$

Włożenie bukietu jest korozwłóknieniem, bukiet jest ściągalny a więc odwzorowanie ilorazowe

$$(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \xrightarrow{p_B} (D^n/B, D^n \setminus \{p_i\}/B, 1) = \bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

jest homotopijną równoważnością. Mamy więc dla $n > 2$ izomorfizm

$$\pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \xrightarrow{\cong} \pi_n\left(\bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)\right) = \bigoplus_{i=1}^k \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1).$$

Ostatni izomorfizm wynika z twierdzenia o aproksymacji komórkowej p. dowód Tw. 6.2.2, ponieważ

$$\pi_n\left(\bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)\right) \simeq \pi_{n-1}\left(\bigvee_{i=1}^k (S^{n-1}, 1)\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \pi_{n-1}(S^{n-1}, 1) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1).$$

(Znajomość grupy $\pi_{n-1}(S^{n-1}, 1)$ nie jest konieczna!)

Rozpatrzmy teraz element w $\pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$ zadany przez włożenie $(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$. Odwzorowanie to jest swobodnie homotopijne z włożeniem $\iota'_i : (D^n, S^{n-1}) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\})$ na dowolny dysk o środku w punkcie p_i . Zatem element $[(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)] = h_{\omega'_i}[\iota'_i]$ dla pewnej drogi ω'_i (p. Stw. 4.4.4). Odwzorowania $\iota_i : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, \iota_i(1))$ i droga ω_i takie, że $p_B \circ \iota_i = \iota'_i$ i $p_B \circ \omega_i = \omega'_i$ spełniają tezę. Zauważmy także, że złożenie

$$(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \xrightarrow{p_B} (D^n/B, D^n \setminus \{p_i\}/B, 1) = \bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \rightarrow (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

jest oczywiście homotopijne z włożeniem $(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$. \square

Uwaga 6.1.2. Dla $n = 2$: $\pi_2(D^2, D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \simeq \pi_1(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$ jest grupą wolną nieabelową o k -generatorach.

Wniosek 6.1.1. Niech $\alpha : (D^n, 1) \rightarrow (X, x_0)$ będzie odwzorowaniem takim, że przeciwwobraz pewnego punktu $y \in X$, $y \neq x_0$ jest zbiorem skończonym, zawartym we wnętrzu dysku tzn. $\alpha^{-1}(y) = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathring{D}^n$. Jeśli $n > 2$, to sferoid

$$[\alpha : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, X \setminus \{y\}, x_0)] \in \pi_n(X, X \setminus \{y\}, x_0)$$

jest postaci $\pm h_{[\omega_1]}([\alpha_1]) \pm \dots \pm h_{[\omega_k]}([\alpha_k])$ gdzie $D_i^n \subset \mathring{D}^n$ jest dyskiem o środku w p_i , nie zawierającym żadnego punktu p_j dla $i \neq j$, $\alpha_i = \alpha|_{(D_i^n, D_i^n \setminus \{p_i\})}$, a $[\omega_i]$ jest drogą w $X \setminus \{y\}$ łączącą punkt $\alpha(1_i)$ z x_0 .

Dowód. Wynika natychmiast z Lematu 6.1.1 \square

Lemat 6.1.2. Niech $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $f : (U, U \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy istnieje otoczenie $U' \ni 0$ takie, że $f \sim Df_0 : (U', U' \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Dowód. Zdefiniujemy homotopię $H : Df_0 \sim f$ na dowolnym dysku $U' \subset U$ o środku w $0 \in U'$ przy pomocy ilorazu różnicowego:

$$H(v, t) := \begin{cases} f(tv)/t & \text{dla } t > 0 \\ Df_0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

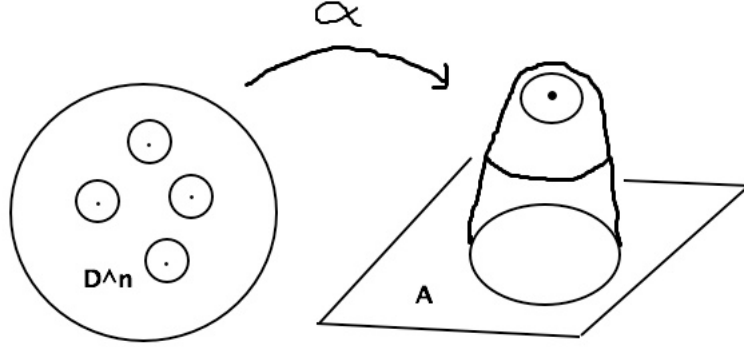
\square

Lemat 6.1.3. Dowolny izomorfizm liniowy $A : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ jest homotopijny z identycznością $I : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ lub odbiciem w hiperpowierzchni $R : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Dowód. Wystarczy przypomnieć (zad. lub p. [1]), że grupa liniowa $GL(n, \mathbb{R})$ ma dwie składowe łukowej spójności składające się odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym. \square

Dowód Tw. 6.1.1 pkt. 2. Niech $(X, A, a_0) = (D^n \cup_X A, A, 1_X)$ będzie n -wymiarową relatywną komórką z punktem wyróżnionym $1_X := [1]$. Dla dowolnego punktu $z \in \mathring{D}^n$ włożenie $(X, A, a_0) \subset (X, X \setminus \{z\}, a_0)$ jest homotopijną równoważnością.

Niech $\alpha : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ będzie dowolnym sferoidem. Na mocy Tw. 5.4.1 możemy zakładać, że odwzorowanie α posiada wartość regularną. Dla wygody możemy założyć, że jest to środek doklejonego dysku $0_X \in X \setminus A$ oraz oznaczyć $\alpha^{-1}(0_X) = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathring{D}^n$. W każdym punkcie p_i zdefiniowana jest pochodna $D\alpha_{p_i}$ i jest ona izomorfizmem, a więc α jest dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu $\mathring{D}^n \supset U_i \ni p_i$ (p. rysunek poniżej).

Rys. Działanie przekształcenia α wokół punktów regularnych.

Zastosujemy Stw. 6.1.1 do odwzorowania

$$\alpha: (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \rightarrow (X, X \setminus \{y\}, x_0).$$

Dla każdego punktu p_i wybierzmy mały dysk $D_i \ni p_i$ o środku w p_i , taki że

$$\alpha_i := \alpha|_{D_i}: (D_i, D_i \setminus \{p_i\}) \rightarrow (X, X \setminus \{0_X\})$$

jest dyfeomorfizmem na obraz. Pozostając w klasie homotopii można zmienić α_i tak, żeby $\alpha_i(1_i) = 1_X$. Na mocy Lematów 6.1.2 i 6.1.3 odwzorowanie to jest homotopijne z włożeniem małego dysku lub z odbiciem, a więc odwzorowaniem $\pm \bar{\chi}$ gdzie

$$\bar{\chi}: (D^n, D^n \setminus \{0\}) \rightarrow (X, X \setminus \{0_X\})$$

odwzorowaniem charakterystycznym komórki. Z Lematu 6.1.1 otrzymujemy, że

$$[\alpha] = \pm h_{[\omega_1]}([\bar{\chi}]) \pm \dots \pm h_{[\omega_k]}([\bar{\chi}])$$

gdzie $[\omega_i] \in \pi_1(X \setminus \{0_X\}, 1_X) \simeq \pi_1(A, 1_X)$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $\pi_n(X, A, a_0)$ jest $\pi_1(A, 1_X)$ -modułem z jednym generatorem (co wystarcza nam do wykazania twierdzenia o doklejaniu komórki Tw. 6.1.2). Żeby pokazać, że jest to moduł wolny, trzeba skorzystać z teorii nakryć. \square

Twierdzenie 6.1.2. Niech (X, A) będzie $n+1$ -wymiarową relatywną komórką ($n > 1$), a $\chi: (S^n, 1) \rightarrow (A, a_0)$ odwzorowaniem doklejającym. Włożenie $j: A \hookrightarrow X$ jest n -równoważnością, przy czym $\ker\{j_{\#}: \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)\}$ jest $\pi_1(A, a_0)$ -modułem generowanym przez klasę $[\chi]$

Uwaga 6.1.3. W przypadku $n = 1$, $\ker\{\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_1(X, a_0)\}$ jest podgrupą normalną generowaną przez klasę $[\alpha]$. Poniższy dowód obejmuje też tę sytuację; inny dowód opiera się na tw. Seiferta - van Kampena [TOPOLOGIA II]

Dowód Tw. 6.1.2. Rozpatrzmy ciąg dokładny grup homotopii pary (X, A, a_0) :

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, b_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \dots$$

który jest ciągiem $\pi_1(A, a_0)$ -modułów. Z Tw. 6.1.1 pkt. 1 wiemy, że $\pi_i(X, A, a_0) = 0$ dla $i \leq n$, a więc $j_{\#}: \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)$ jest izomorfizmem dla $i < n$ i epimorfizmem dla $i = n$.

Z dokładności ciągu wynika, że

$$\ker\{\pi_i(A, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, a_0)\} = \text{im}\{\pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0)\}.$$

Teza wynika więc natychmiast z Lematu 6.1.1, bowiem $\partial[\bar{\chi}] = [\chi]$. \square

6.2 Grupy homotopii sfer

Grupy homotopii sfer $\pi_k(S^n, 1)$ stanowią jedną z największych zagadek topologii. Znanych jest wiele szczegółowych wyliczeń dla "bliskich" wartości k, n a także kilka fundamentalnych twierdzeń o zachowaniu wszystkich grup homotopii np. twierdzenie J. P. Serre'a mówiące, że dla każdego $k > 0$ i dostatecznie dużych n grupy $\pi_{n+k}(S^n, 1)$ są skończone. Więcej informacji można znaleźć w [Wikipedii](#) a znacznie bardziej zaawansowany przegląd wyników i metod [tutaj](#).

W tym rozdziale zajmiemy się grupami homotopii w "początkowych" wymiarach. Wyniki poprzednich rozdziałów pozwalają udowodnić następujące:

Twierdzenie 6.2.1. *Niech $(S^n, 1)$ będzie sferą euklidesową.*

$$\pi_k(S^n, 1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1, k > 1 \\ 0 & \text{dla } k < n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } k = n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } k = 3, n = 2 \end{cases}$$

Generatorem grupy $\pi_n(S^n, 1)$ jest klasa identyfikacji $id: (S^n, 1) \rightarrow (S^n, 1)$, a grupy $\pi_3(S^2, 1)$ klasa rozwłóknienia Hopfa $p: (S^3, 1) \rightarrow (S^2, 1)$.

Zaciekawionego czytelnika poinformujemy, że grupy $\pi_4(S^3, 1) \simeq \pi_5(S^4, 1) \simeq \dots \simeq \pi_{n+1}(S^n, 1) \simeq \mathbb{Z}_2$ - zgodnie ze wspomnianym twierdzeniem Serre'a jest to grupa skończona. Dowód niestety wykracza poza narzędzia omówione w tym skrypcie.

Dowód Tw. 6.2.1. Dla $n = 1$ teza wynika z teorii nakryć - badamy nakrycie uniwersalne $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Sfera S^n jest oczywiście relatywną komórką - powstaje przez doklejenie dysku do punktu. Punkt 1 wynika więc natychmiast z Tw. 6.1.1 pkt. 1. Z punktu 2 tego samego twierdzenia wynika, że grupa $\pi_n(S^n, 1)$ jest grupą cykliczną generowaną przez identyfikację, nie wiemy jednak czy jest wolna. Będzie to wynikało z istnienia nietrywialnego homomorfizmu $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, czyli stopnia odwzorowania, który omawiamy w następnym podrozdziale.

Obliczenie $\pi_3(S^2, 1)$ jest możliwe korzystając z rozwłóknienia Hopfa. Analizując początkowe wyrazy ciągu dokładnego homotopii tego rozwłóknienia otrzymujemy, że homomorfizmy: $\pi_3(S^3) \xrightarrow{p\#} \pi_3(S^2)$ oraz $\pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ są izomorfizmami. Zauważmy, że przy okazji obliczyliśmy innym sposobem grupę $\pi_2(S^2)$. \square

Ważne przykłady nietrywialnych przekształceń sfer są definiowane przy pomocy struktur multiplikatywnych (mnożenia) na przestrzeniach kartezjańskich. Okazuje się, że dwuliniowe mnożenie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ można sensownie zdefiniować tylko w przypadkach, gdy $n = 1, 2, 4, 8$. To twierdzenie jest jednym ze spektakularnych osiągnięć topologii algebraicznej. poniżej fragment z materiałów do wykładu z Topologii Algebraicznej I w języku angielskim:

A structure of a normed associative and commutative \mathbb{R} -algebra (i.e. a sensible multiplication) can be defined only on the cartesian spaces \mathbb{R}^n for $n = 1, 2$ where $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ - real numbers, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ - complex numbers (pairs of real numbers.) A structure of an associative but not commutative \mathbb{R} -algebra can be defined for $n = 4$ on pairs of complex numbers $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ - quaternions. Further, if we omit the associativity assumption, then a \mathbb{R} -bilinear multiplication can be defined for $n = 8$ on pairs of quaternions $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ -octonions. Moreover, we have inclusions of \mathbb{R} -algebras $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ and a conjugation on \mathbb{O} restricts to the usual conjugation of quaternions and complex numbers. A norm on \mathbb{O} is defined as usual $\|o\|^2 = oo^*$ thus $\|oo'\| = \|o\|\|o'\|$. If $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ then any cartesian space \mathbb{F}^n carries a structure of an \mathbb{F} -module (vector space) via multiplications of coordinates and an \mathbb{F} -valued (hermitian) scalar product is defined in the

usual way: $(v, w) := \sum v_i w_i^*$, where $*$ denotes conjugation. Vectors of length 1 constitute a group for $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and an H -space for $\mathbb{F} = \mathbb{O}$ (i.e. multiplication is not associative, but associative up to homotopy).

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ i oznaczmy $d_{\mathbb{F}} := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Jednopunktowe uzwarzenie \mathbb{F} będziemy utożsamiać ze sferą $S^{d_{\mathbb{F}}}$. Definiujemy odwzorowania $S^{2d_{\mathbb{F}}-1} \xrightarrow{p_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} \cup \{\infty\} \simeq S^{d_{\mathbb{F}}}$ zadane przez dzielenie par elementów odpowiedniego ciała: $p_{\mathbb{F}}(x_1, x_2) := x_1/x_2$. Przeciwobrazy punktów przy odwzorowaniach $p_{\mathbb{F}}$ są homeomorficzne ze sferami $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$. Przekształcenia $p_{\mathbb{F}}$ są nazywane *wiązkami Hopfa*¹.

Zad. 6.2.1. Przekształcenie $p_{\mathbb{R}}$ jest homeomorficzne (w kategorii \mathcal{T}^{S^1} z dwukrotnym nakryciem $p_2 : S^1 \rightarrow S^1$, $p_2(z) = z^2$, a przekształcenie $p_{\mathbb{C}}$ jest homeomorficzne (w kategorii \mathcal{T}^{S^3} z rozwłóknieniem Hopfa $p : S^3 \rightarrow S^2$).

Stwierdzenie 6.2.1. *Wiązki Hopfa są lokalnie trywialne, a więc są rozwłóknieniami.*

Dowód. Na podzbiornie otwartym $\mathbb{F} \subset S^{d_{\mathbb{F}}}$ definiujemy przekrój $s_0 : \mathbb{F} \rightarrow S^{2d_{\mathbb{F}}-1}$ wzorem $s_0(y) := \|(y, 1)\|^{-1}(y, 1)$ i odpowiednio $s_{\infty} : (\mathbb{F} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\} \rightarrow S^{2d_{\mathbb{F}}-1}$. Przekroje zadają trywializacje np.

$$h_0 : \mathbb{F} \times p_{\mathbb{F}}^{-1}(1) \rightarrow p_{\mathbb{F}}^{-1}(\mathbb{F})$$

daną wzorem: $h_0(y, x) := s_0(y)x$. □

Zad. 6.2.2. Korzystając z ciągu dokładnego rozwłóknienia dla wiązek Hopfa i Stwierdzenia 4.4.2 wykaż następujące izomorfizmy grup homotopii sfer:

- $\pi_i(S^4) \simeq \pi_i(S^7) \oplus \pi_{i-1}(S^3)$ dla $i \geq 2$,
- $\pi_i(S^8) \simeq \pi_i(S^{15}) \oplus \pi_{i-1}(S^7)$ dla $i \geq 2$.

Wynioskować stąd, że wiązki Hopfa nie są homotopijne z odwzorowaniami stałymi.

Twierdzenie 6.2.1 oraz twierdzenie o aproksymacji komórkowej 5.5.1 pozwolą nam obliczyć grupy homotopii produktu i bukietu sfer. Niech $\bigvee_{i \in J} S^n$ będzie bukietem sfer n -wymiarowych, indeksowanym pewnym zbiorem J .

Twierdzenie 6.2.2.

$$\pi_n(\bigvee_{i \in J} S^n, 1) \simeq \begin{cases} F(J) & \text{dla } n = 1 \\ F_{ab}(J) & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

gdzie $F(J)$ (odp. $F_{ab}(J)$) oznacza grupę wolną (odp. wolną abelową) generowaną przez zbiór J . Generatory są zadane przez włożenia sfer w bukiet.

Dowód. Zauważmy, że dla każdego n wystarczy udowodnić twierdzenie dla skończonych zbiorów wskaźników, bowiem $\bigvee_{i \in J} S^n = \text{colim}_{J' \subset J} \bigvee_{i \in J'} S^n$ gdzie $J' \subset J$ przebiega podzbiory skończone w J .

Ponieważ sfera a także jej iloczyn przez odcinek są przestrzeniami zwartymi, więc obraz dowolnego sferoidu a także homotopii między sferoidami mieści się w pewnym skończonym bukiecie.

Dla $n = 1$ teza wynika z twierdzenia van Kampena, które może być wykazane przy pomocy teorii nakryć.

Dla $n > 1$ i zbioru skończonego J' rozpatrzmy grupę homotopii produktu

$$\pi_n(\prod_{J'} S^n, 1) \simeq \prod_{J'} \pi_n(S^n, 1) \simeq \bigoplus_{J'} \mathbb{Z} \simeq F_{ab}(J')$$

Rozważmy rozbitcie produktu sfer na CW-kompleks wyznaczone przez rozbitcie sfery na dwie komórki. Wtedy szkielety $(S^n \times \dots \times S^n)^{(n)} = \dots = (S^n \vee \dots \vee S^n)^{(2n-1)} = S^n \vee \dots \vee S^n$. Wynika stąd, że dla $n > 1$ włożenie bukietu w produkt indukuje izomorfizm grup homotopii w wymiarach $\leq 2n - 2$. □

¹Heinz Hopf (Gräbchen k/Wrocławia 1894 – 1971 Zollikon k/Zurichu)

6.3 Stopień odwzorowania $S^n \rightarrow S^n$

Każdemu odwzorowaniu $f: S^n \rightarrow S^n$ można przypisać liczbę całkowitą $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ w taki sposób, że definiuje ona homomorfizm $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$. Jest kilka metod konstrukcji stopnia: przy pomocy topologii różniczkowej (p. [12]) lub homologii (p. [8]). Stopień można zdefiniować w ogólniejszej sytuacji, odwzorowań dowolnych rozmaitości zorientowanych $f: M \rightarrow N$ tego samego wymiaru, zakładając, że N jest spójna. Odsyłając czytelnika do odpowiednich źródeł, podsumowujemy tutaj własności stopnia:

Twierdzenie 6.3.1. *Niech $f: S^n \rightarrow S^n$. Przyporządkowanie $f \rightsquigarrow \deg(f)$ ma następujące własności:*

1. Jest homotopijnym niezmiennikiem, więc definiuje odwzorowanie $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$
2. Odwzorowania $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ jest homomorfizmem,
3. $\deg(\text{id}: S^n \rightarrow S^n) = 1$, a więc $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ jest epimorfizmem.

Wniosek 6.3.1. *Homomorfizm $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ jest izomorfizmem.*

Zad. 6.3.1. Dla danego $d \in \mathbb{Z}$ wskaż odwzorowanie stopnia d .

Zauważmy, że stopień odwzorowania można określić dla dowolnego odwzorowania n -wymiarowych relatywnych komórek, mając wybrane (klasy homotopii) odwzorowań charakterystycznych. Dowlone odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ wyznacza przekształcenie przestrzeni ilorazowych (strzałki pionowe są odwzorowaniami ilorazowymi)

$$\begin{array}{ccccccc} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\bar{\chi}} & (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) & \xleftarrow{\bar{\chi}'} & (D^n, S^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (S^n, 1) & \xrightarrow{\bar{\chi}} & (X/A, *) & \xrightarrow{\bar{f}} & (Y/B, *) & \xleftarrow{\bar{\chi}'} & (S^n, 1) \end{array} \quad (6.1)$$

Definiujemy $\deg(f)$ jako stopień złożenia przekształceń przestrzeni ilorazowych (dolny wiersz). Dla dowolnej n -wymiarowej komórki (X, A) , $n > 1$ stopień wyznacza homomorfizm $\deg: \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ - zauważmy, że jest to złożenie homomorfizmów $\pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{q\#} \pi_n(S^n, 1) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$, gdzie $q: (X, A, a_0) \rightarrow (S^n, 1, 1)$ jest odwzorowaniem ilorazowym.

Stwierdzenie 6.3.1. *Dla dowolnej n -wymiarowej komórki $n > 1$ homomorfizm $\deg: \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ jest epimorfizmem. Jeśli przestrzeń (A, a_0) jest jednospójna, to jest to izomorfizm.*

Dowód. Stopień odwzorowania charakterystycznego komórki $\chi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ jest równy 1, bo odwzorowanie ilorazowe definiowane przez χ jest identycznością. Jeśli przestrzeń A jest jednospójna, to na mocy Tw. 6.1.1 grupa $\pi_n(X, A, a_0)$ jest cykliczna, a więc \deg jest izomorfizmem. \square

Zad. 6.3.2. Rozważając nakrycie uniwersalne relatywnej komórki (X, A) udowodnij Tw. 6.1.1 pkt. 3.

6.4 Grupy homotopii przestrzeni jednorodnych grup liniowych

Dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ grupa multiplikatywna $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$ działa wolno na przestrzeni $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ przez mnożenie przez skalar na każdej współrzędnej. Definiujemy n -wymiarowa przestrzeń rzutową nad ciałem \mathbb{F} jako przestrzeń orbit tego działania: $\mathbb{F}P(n) := (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^\times$. Zauważmy, że $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^\times$ jest podgrupą, mnożenie przez elementy ze sfery $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^\times$ zachowuje normę, mamy więc $S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1}/S^{d_{\mathbb{F}}-1} = \mathbb{F}P(n)$.

Zad. 6.4.1. Rzutowanie na przestrzeń orbit $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a więc rozwłóknieniem.

Dowód. Wystarczy wskazać przekroje nad zbiorami z kanonicznego atlasu przestrzeni rzutowej, czyli zbiorach postaci $U_k := \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_k \neq 0\}$.

$$s_k(x) = \left\| \left(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right) \right\|^{-1} \left(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right).$$

Mając przekroje konstruujemy trywializację tak jak w przypadku wiązek Hopfa (p. Stw. 6.2.1). \square

Rozwłóknienia $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$, których włóknami są sfery $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$ pozwalają powiązać grupy homotopii sfer z grupami homotopii przestrzeni rzutowych.

Zad. 6.4.2. Oblicz $\pi_i(\mathbb{F}P(n))$ dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i małych i .

Zad. 6.4.3. Udowodnij, że $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3 \times \mathbb{C}P(\infty))$ dla każdego n . Udowodnij, że S^2 nie jest homotopijnie równoważne $S^3 \times \mathbb{C}P(\infty)$. Jak pogodzić ten przykład z twierdzeniem Whiteheada?

Dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oznaczamy $GL(n, \mathbb{F})$ grupę macierzy odwracalnych a $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$ jej podgrupę składającą się z przekształceń zachowujących normę (a więc iloczyn skalarny na $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i iloczyn hermitowski dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Zad. 6.4.4. $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$ jest zwarta oraz jest silnym retraktem deformacyjnym. Wsk. przekształcenie odwrotne $GL(n, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$ jest dane przez ortonormalizację Grama-Schmidta.

Definiujemy odwzorowania $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$, $ev(A) := A(1, 0, \dots, 0)$. Istnieje homeomorfizm $O(n, \mathbb{F})/O(n-1, \mathbb{F}) \simeq S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$ przy którym projekcja ilorazowa odpowiada odwzorowaniu ev .

Zad. 6.4.5. przekształcenie $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$ jest lokalnie trywialne, a zatem jest rozwłóknieniem. Wsk. Aby skonstruować trywializację wystarczy znaleźć przekrój ev nad $S^{nd_{\mathbb{F}}-1} \setminus \{v\}$.

Zad. 6.4.6. Grupa liniowa $GL(n, \mathbb{C})$ jest spójna, a $GL(n, \mathbb{R})$ ma dokładnie dwie składowe spójne.

Zad. 6.4.7. Niech $i : O(n-1, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$ będzie zanurzeniem grup zdefiniowanym przez naturalną inkluzję $\mathbb{F}^{n-1} \subset \mathbb{F}^n$. Wykaż, że i jest $(nd_{\mathbb{F}} - 2)$ -równoważnością. Zauważ, że dla danej liczby $i > 0$ i dostatecznie dużej liczby n grupy $\pi_i(O(n, \mathbb{F}))$ nie zależą od n . Oblicz je dla małych i .

6.5 Przestrzenie Eilenberga-MacLane'a

Przestrzeniami Eilenberga²-MacLane'a³ nazywamy łukowo spójne przestrzenie, których tylko jedna grupa homotopii jest różna od zera. Dokładniej:

Definicja 6.5.1. Niech π będzie grupą a n liczbą naturalną. Łukowo spójna przestrzeń X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) typu $K(\pi, n)$ jeśli

$$\pi_q(X, x_0) \simeq \begin{cases} \pi & \text{dla } q = n \\ 0 & \text{dla } q \neq n. \end{cases}$$

Mówimy, że łukowo spójna przestrzeń X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) w wymiarze n jeśli X jest typu $K(\pi, n)$ dla pewnej grupy π .

²Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York)

³Saunders MacLane (Taftville, CN, USA 1909 – 2005 San Francisco)

Ponieważ grupy homotopii w wymiarze > 1 są przemienne, więc przestrzenie EM typu $K(\pi, n)$ dla $n > 1$ mogą istnieć tylko jeśli π jest abelowa.

Twierdzenie 6.5.1. *Dla dowolnej grupy π istnieje CW-kompleks typu $K(\pi, 1)$. Dla dowolnej grupy abelowej π i liczby $n > 1$ istnieje CW-kompleks typu $K(\pi, n)$.*

Dowód. Dowód opiera się na znajomości grup homotopii bukietów sfer 6.2.2 oraz twierdzeniu o doklejaniu komórki 6.1.2.

Dla $n = 1$ rozpatrzmy prezentację grupy π jako iloraz grupy wolnej (nieabelowej) $\pi = F/N$. Konstruujemy kolejno szkielety szukanej przestrzeni zaczynając od $X^{(1)} = \bigvee S^1$ - bukietu okręgów takiego, że $\pi_1(X^{(1)}, x_0) = F$. Następnie wybieramy generatory podgrupy normalnej N (mogą to być wszystkie jej elementy, choć to wybór nieekonomiczny) i doklejamy do 1-szkieletu dyski D^2 , otrzymując kompleks $X^{(2)}$. Na mocy twierdzenia van Kampena (czyli Tw. 6.1.2 dla $n = 1$) otrzymujemy, że $\pi_1(X^{(2)}, x_0) = \pi$. Przestrzeń $X^{(2)}$ może posiadać nietrywialne elementy w grupie $\pi_3(X^{(2)}, x_0)$, które "zabijamy" doklejając komórki 3-wymiarowe. Postępując tak w kolejnych wymiarach otrzymujemy CW-kompleks X typu $K(\pi, 1)$.

W przypadku gdy $n > 1$, grupa π musi być abelowa, więc przedstawiamy ją w postaci ilorazu $\pi = F_{ab}/N$, gdzie F_{ab} jest wolną grupą abelową. Zaczynamy konstrukcję od szkieletu $X^{(n)} = \bigvee S^n$ - bukietu sfer n -wymiarowych takiego, że $\pi_n(X^{(n)}, x_0) = F_{ab}$. "Zabijamy" elementy w kolejnych wyższych grupach homotopii tak jak w przypadku $n = 1$, otrzymując przestrzeń X typu $K(\pi, n)$. \square

Dla dowolnej grupy π można skonstruować przestrzeń typu $K(\pi, 1)$ inną metodą, korzystając z homotopijnych własności przestrzeni nakrywających. Wystarczy w tym celu znaleźć przestrzeń ściągającą $E\pi$ na której grupa π działa tak, aby projekcja na przestrzeń orbit $E\pi \rightarrow (E\pi)/\pi =: B\pi$ była nakryciem (a więc rozwłóknieniem). Stąd $\pi_1(B\pi) \simeq \pi$ oraz $\pi_q(B\pi) = 0$ dla $q > 1$. Dla konkretnych grup można często wskazać taką przestrzeń analizując geometryczną interpretację grupy np. jako grupy izometrii przestrzeni euklidesowej. Dla dowolnej grupy π , przestrzeń $E\pi$ można zbudować jako połączenie (*join*) przeliczalnie wielu egzemplarzy grupy π rozpatrywanej z topologią dyskretną. Jest to szczególnie i łatwiejszy przypadek tzw. konstrukcji Milnora, przy pomocy której dla dowolnej grupy topologicznej G buduje się przestrzeń ściągającą EG z wolnym działaniem grupy G , takim że projekcja $EG \rightarrow EG/G =: BG$ jest odwzorowaniem lokalnie trywialnym ([9]).

Przykład 6.5.1. Przykłady poznanych przestrzeni EM:

- Okrąg S^1 jest przestrzenią typu $K(\mathbb{Z}, 1)$;
- Rzeczywista ∞ -wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P(\infty)$ jest przestrzenią typu $K(\mathbb{Z}_2, 1)$;
- Zespólona ∞ -wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{C}P(\infty)$ jest przestrzenią typu $K(\mathbb{Z}, 2)$;
- Jeśli X jest przestrzenią typu $K(\pi, n)$ to przestrzeń pętli ΩX jest przestrzenią typu $K(\pi, n - 1)$.

Uwaga. Kwaternionowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{H}P(\infty)$ nie jest przestrzenią EM. Dlaczego?

Zad. 6.5.1. Jeśli $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest nakryciem między łukowo spójnymi przestrzeniami i jedna z nich jest przestrzenią EM w wymiarze 1, to druga też jest. W szczególności dowolna powierzchnia M^2 (orientowalna lub nieorientowalna), poza sferą i płaszczyzną rzutową, jest przestrzenią typu $K(\pi_1(M), 1)$.

Jeśli dwa CW-kompleksy są typu $K(\pi, n)$ to są homotopijnie równoważne. W tym celu wykazemy ogólniejsze twierdzenie świetnie ilustrujące konstruowanie przekształceń z CW-kompleksów metodą "szkielet po szkielecie".

Twierdzenie 6.5.2. Niech (X, x_0) będzie spójnym punktowanym CW-kompleksem, a (Y, y_0) przestrzenią punktowaną. Niech $n > 0$ będzie taką liczbą, że $\pi_i(X, x_0) = 0$ dla $i < n$ oraz $\pi_i(Y, y_0) = 0$ dla $i > n$. Wtedy przyporządkowanie

$$[X, Y]_* \ni f \rightsquigarrow f_{\#} \in \text{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$$

jest bijekcją.

Dowód. Na mocy Tw. 5.6.1 możemy założyć, że szkielet $X^{(n-1)} = pt$, a zatem szkielet $X^{(n)} = \bigvee S_i^n$ jest bukietem sfer. Pokażemy najpierw, że przyporządkowanie $f \rightsquigarrow f_{\#}$ jest surjekcją, konstruując dla danego homomorfizmu $\phi: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ odwzorowanie $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ takie, że $f_{\#} = \phi$. Przekształcenie f konstruujemy indukcyjnie: $f^{(n-1)}(x_0) := y_0$. Grupa $\pi_n(X, x_0)$ jest generowana przez włożenia sfer $\sigma_i: S^n \rightarrow X^{(n)}$. Definiujemy $f^{(n)} := \bigvee \phi(\sigma_i)$. Ponieważ w grupie $\pi_n(X, x_0)$ odwzorowania doklejające komórki $(n+1)$ -wymiarowe są trywialne, więc $f^{(n)}$ rozszerza się do $f^{(n+1)}: X^{(n+1)} \rightarrow Y$, a na kolejne szkielety dzięki znikaniu wyższych grup homotopii $\pi_k(Y, y_0)$. Podobnie konstruujemy homotopię między dwoma przekształceniami takimi, że $f_{0\#} = f_{1\#}$, rozszerzając odwzorowanie z $(X \times \{0, 1\}) \cup \{x_0\} \times I$ na $X \times I$. □

Wniosek 6.5.1. Jeśli X jest CW-kompleksem typu $K(G, n)$, a Y jest CW-kompleksem typu $K(H, m)$. Wtedy

$$[X, Y]_* = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n > m \\ \text{Hom}(G, H) & \text{jeśli } n = m. \end{cases}$$

Jeśli $n = m$ oraz grupy G, H są izomorficzne, to CW-kompleksy X, Y są homotopijnie równoważne.

Dowód. Dowód wynika natychmiast z Tw. 6.5.2. □

Jeśli $m > 1$ to oczywiście $[X, Y]_* = [X, Y]$. Zauważmy, że opis klas homotopii $[X, Y]_*$ w przypadku gdy $n < m$ jest bardzo trudny.

Będziemy przyjmować, że rozpatrywane przestrzenie Eilenberga-MacLane'a są CW-kompleksami i przez $K(\pi, n)$ będziemy oznaczać dowolną przestrzeń typu $K(\pi, n)$. Jeśli G jest grupą abelową to działanie grupowe $G \times G \rightarrow G$ jest homomorfizmem grup, a więc dla każdego $n \geq 0$ wyznacza klasę homotopii odwzorowania $K(G \times G, n) \rightarrow K(G, n)$ (dla $n = 0$ przyjmujemy $K(G, 0) = G$). Ze Stw. 2.6.2 wynika, że $K(G \times G, n) \simeq K(G, n) \times K(G, n)$, a więc działanie grupowe definiuje działanie $K(G, n) \times K(G, n) \rightarrow K(G, n)$, które zadaje na $K(G, n)$ strukturę obiektu grupowego w kategorii homotopii (H-grupy). Funktory kontrawariantne na kategorii homotopii przestrzeni punktowanych reprezentowana przez przestrzenie Eilenberga-MacLane'a $[-, K(G, n)]_*$ odgrywają bardzo ważną rolę w topologii. Okazuje się, że dla CW-kompleksu X , grupa $[X, K(G, n)]_*$ jest naturalnie izomorficzna z n -tą singularną grupą kohomologii X o współczynnikami w G . Grupy te są łatwiej obliczalne niż grupy homotopii i mają wiele ważnych interpretacji i zastosowań geometrycznych, o czym będzie mowa w ramach przedmiotu Topologia Algebraiczna II.

Bibliografia

- [1] Bojanowska, A., Jackowski, S. [Topologia II](#)
- [2] Bröcker, Th.; Jänich, K. [Introduction to differential topology](#).
- [3] Dold, A. [Partitions of Unity in the Theory of Fibrations](#) Annals of Mathematics, Vol. 78, No. 2 (1963), pp. 223-255
- [4] Dold, A. **Halbexakte Homotopiefunktoeren.** Lecture Notes in Math. Springer
- [5] Eilenberg, S. , MacLane, S., [General Theory of Natural Equivalences](#) Trans. Am. Math. Soc. 58 (1945): pp. 231–294).
- [6] Friedman, G. [An elementary illustrated introduction to simplicial sets. 2011](#)
- [7] Fomienko, A.T, Fuks, D.B. *Kurs gomotopической топологии* Moskwa 1989 (ros.)
- [8] Greenberg, Marvin J.; Harper, John R. **Algebraic topology. A first course.** Mathematics Lecture Note Series, 58. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. xi+311 (Tłum. polskie PWN 1980)
- [9] Husemoller, D. **Fiber Bundles.** Third Edition. GTM 20. Springer 1993
- [10] Khokhlov, A. V. [Homotopy Covariant Functors](#) Mat. Zamietki Vol. 35, No. 3 (1984)
- [11] May, J.P. [A Concise Course in Algebraic Topology](#).
- [12] Milnor, J. [Topology from differentiable viewpoint](#) Tłum. polskie.
- [13] Postnikov, M.M. **Lekcji po algebraiczeskoj topologii, Teorja kłjetocznych prostrantw.** Mir, Moskwa 1985
- [14] Spanier, E.H. **Topologia Algebraiczna**
- [15] Strickland, N. [Local fibrations](#)
- [16] Strickland, N [The category of CGWH spaces](#)
- [17] Strom, A. [Note on Cofibrations Math.Scand. 19 \(1966\), 11-14](#)
- [18] Strom, A. [Note on Cofibrations II Math.Scand. 22 \(1968\), 130-142](#)