

Topologia Algebraiczna - Pomocnik studenta

Kohomologie de Rhama w zadaniach 1.0

Semestr letni roku akademickiego 2011/2012

Agnieszka Bojanowska

Stefan Jackowski

9 maja 2012

Zad. 1. Udowodnić, że funktor kohomologii de Rhama zdefiniowany na kategorii gładkich rozmaitości i gładkich odwzorowań spełnia aksjomaty teorii kohomologii tzn. Aksjomat Homotopii, Aksjomat Mayera-Vietorisa, Aksjomat Addytywności i Aksjomat Wymiaru.

Zad. 2. Udowodnić, że na kategorii par par rozmaitości istnieje naturalny izomorfizm funktorów o wartościach w kategorii $\mathbb{R}$ -algebr z gradacją $H_{Rh}^*(M) \otimes H_{Rh}^*(N) \simeq H_{Rh}^*(M \times N)$.

Zad. 3. Opisać formy różniczkowe, których klasy kohomologii generują grupy: $H_{Rh}^n(S^n)$, $H_{Rh}^n(\mathbb{R}P(n))$ - dla nieparzystych n , $H_{Rh}^2(\mathbb{C}P(n))$, $H_{Rh}^{2n}(\mathbb{C}P(n))$, $H_{Rh}^*(P_g)$ gdzie P_g jest 2-wymiarową zwartą rozmaitością genusu g . Zauważyć, że forma generująca $H_{Rh}^n(S^n)$ może mieć dowolnie mały nośnik.

Zad. 4. Dla dowolnej rozmaitości M przez $\Omega_c^q(M) \subset \Omega^q(M)$ oznaczmy zbiór q -form różniczkowych na M mających zwarty nośnik. Sprawdzić, że $\Omega_c^*(M) \subset \Omega^*(M)$ jest podkompleksem kołańcuchowym, funktorialnym ze względu na gładkie odwzorowania właściwe. Jego kohomologie nazywamy kohomologiami de Rhama ze zwartymi nośnikami i oznaczamy $H_{Rh,c}^*(M)$. Obliczyć $H_{Rh,c}^*(\mathbb{R})$.

Zad. 5. Zauważyć, że $H_{Rh,c}^*(M)$ jest funktorem o wartościach w kategorii $\mathbb{R}$ -algebr z gradacją, przy czym algebra $H_{Rh,c}^*(M)$ ma jedność wtedy i tylko wtedy gdy M jest rozmaitością zwartą. Zauważyć, że $H_{Rh,c}^*(M)$ jest $H_{Rh}^*(M)$ -modułem z gradacją.

Zad. 6 (Kohomologie de Rhama ze zwartymi nośnikami jako funktor kowariantny). Wykazać, że:

1. Dowolne zanurzenie $M \rightarrow N$ na podzbiór otwarty indukuje homomorfizm $\Omega_c^*(M) \rightarrow \Omega_c^*(N)$ i przyporządkowanie to jest funktorialne (kowariantnie!)
2. Dla dowolnych podzbiorów otwartych U_1, U_2 takich, że $M = U_1 \cup U_2$ istnieje kowariantny krótki ciąg dokładny:

$$0 \rightarrow \Omega_c^q(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Omega_c^q(U_1) \oplus \Omega_c^q(U_2) \rightarrow \Omega_c^*(M) \rightarrow 0,$$

który indukuje długi ciąg Mayera-Vietorisa:

$$\dots \rightarrow H_c^q(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^q(U_1) \oplus H_c^q(U_2) \rightarrow H_c^q(M) \rightarrow H_c^{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \dots$$

3. Dla dowolnej rodziny rozmaitości $\{M_i\}_{i \in J}$ włożenia indukują naturalny izomorfizm $\oplus H_{Rh,c}^*(M_i) \simeq H_{Rh,c}^*(\coprod M_i)$ (por. z Aksjomatem Addytywności).

Zad. 7. Wykazać, że istnieje naturalny izomorfizm $H_{Rh,c}^q(M) \simeq H_{Rh,c}^{q+1}(M \times \mathbb{R})$ (dla zwartych rozmaitości jest to odpowiednik izomorfizmu zawieszenia). Znaleźć formę generującą $H_{Rh,c}^n(\mathbb{R}^n)$.

Zad. 8. Jeśli H^* jest singularną teorią kohomologii (z dowolnymi współczynnikami, które pomijamy) to definiujemy singularne kohomologie przestrzeni ze zwartymi nośnikami:

$H_c^q(X) := \text{colim } H^q(X, X \setminus K)$ gdzie kogranica jest brana po zbiorze częściowo uporządkowanym zwartych podzbiorów $K \subset X$. Sprawdzić, że kohomologie ze zwartymi nośnikami są funktorem kontrawariantnym na kategorii przestrzeni topologicznych i odwzorowań właściwych. zauważyć, że łukowo spójna przestrzeń X jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy $H_c^0(X) \neq 0$.

Zad. 9. Kohomologie ze zwartymi nośnikami są funktorem kowariantnym na kategorii otwartych podzbiorów ustalonej przestrzeni X i ich inkluzji. Dla podzbiorów otwartych $U_1, U_2 \subset X$ takich, że $X = U_1 \cup U_2$ istnieje (kowariantny) ciąg Mayera-Vietorisa:

$$\dots \rightarrow H_c^q(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^q(U_1) \oplus H_c^q(U_2) \rightarrow H_c^q(X) \rightarrow H_c^{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \dots$$

Zad. 10. Jeśli K będzie zwartą przestrzenią, wtedy $H_c^q(K \times \mathbb{R}) \simeq H^q(\Sigma(K^+))$, gdzie Σ jest zawieszeniem zredukowanym.

Zad. 11. Jeśli $(W, \partial W)$ jest zwartą rozmaitością z brzegiem, to $H_c^*(W \setminus \partial W) \simeq H^*(W, \partial W)$.

Zad. 12. Udowodnić twierdzenie de Rhama dla kohomologii ze zwartymi nośnikami.