Między przestrzeniami i grupami: kompleksy łańcuchowe
Wersja 1.0

7 marca 2013

1 Moduły z gradacją.

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jednością; na ogół dziedziną ideałów głównych (PID).

Definicja 1.1 (Moduł z gradacją). *R-modułem (krótko modułem) z $\mathbb{Z}$-gradacją (krótko gradacją) nazywamy ciąg R-modułów M_i gdzie $i \in \mathbb{Z}$ lub - równoważnie - moduł M_* wraz z rodziną podmodułów $M_i \subset M_*$ takich, że $\bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} M_q \simeq M_*$. Element $a \in M_*$ nazywa się* jednorodny, *jeśli $a \in M_n$ dla pewnego $n =: \deg(a)$.*

Homomorfizmem modułów z gradacją stopnia $n \in \mathbb{Z}$ nazywamy rodzinę homomorfizmów $f_i : M_i \to M_{i+n}$.

Kategorię R-modułów z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 oznaczamy $\mathcal{M}_R^*$.

Zad. 1. Znaleźć funktory dołączone do funktora zapominania $\mathcal{M}_R^* \to \mathcal{M}_R$

Zad. 2. Dla dowolnych modułów z gradacją M_*, , N_* oznaczmy przez $\mathrm{Hom}_d(M,N)$ zbiór homomorfizmów $M_* \to N_*$ zbiór homomorfizmów stopnia d oraz $\mathrm{Hom}_*(M_*,N_*) := \bigoplus_{d=-\infty}^{\infty} \mathrm{Hom}_d\,(M_*,N_*)$. Zauważyć, że $\mathrm{Hom}_*(M_*,N_*)$ jest modułem z gradacją.

Zad. 3. Dla modułow z gradacją definiujemy iloczyn tensorowy M_*, N_*

$$(M_* \otimes N_*)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$$

Sprawdzić, że tak zdefiniowany iloczyn tensorowy jest lewym funktorem dołączonym do funktora $\mathrm{Hom}(M_*,-)$ na $\mathcal{M}_R$. Pokazać, że zachodzi również naturalny izomorfizm

$$\mathrm{Hom}_*(M_* \otimes N_*, K_*) \simeq \mathrm{Hom}_*(M_*, \mathrm{Hom}_*(N_*,K_*)).$$

2 Algebry z gradacją i moduły nad nimi

Definicja 2.1 (Algebra z gradacją). *R-algebrą przemienną z $\mathbb{Z}$-gradacją (krótko z gradacją) nazywamy R-moduł z gradacją $A_* = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} A_q$ wyposażony w homomorfizm stopnia 0*

$$\mu : A_* \otimes_R A_* \to A_*$$

spełniające aksjomaty mnożenia w algebrze, takie, że dla $a \in A_p$, $b \in B_q$ zachodzi $ab = (-1)^{pq} ba$.

Kategorię R-algebr z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 zachowujących mnożenie oznaczamy Alg_R^* .

Definicja 2.2 (Moduł z gradacją nad algebrą z gradacją)**.** *Niech A_* będzie R-algebrą z gradacją. A_*-modułem z gradacją nazywamy R-moduł z gradacją wyposażony w mnożenie $A_* \otimes M_* \to M_*$, spełniające warunki z definicji modułu.*

Zad. 4. Dla algebry z gradacją A_* i ideału $I < A_*$ generowanego przez elementy jednorodne algebra ilorazowa A_*/I jest algebrą z gradacją i jednocześnie A_*–modułem.

Definicja 2.3. *R-modułem z różniczką nazywa się moduł M wraz z homomorfizmem $\partial : M \to M$ takim, że $\partial^2 = 0$. Moduł $H(M, \partial) := \ker \partial / \operatorname{im} \partial$ nazywamy modułem homologii. Kategorię R-modułów z różniczkowaniem oznaczmy $\mathcal{DM}_R$.*

Zad. 5. Zauważ, że kategoria R-modułów z różniczką jest równoważna kategorii modułów nad pierścieniem $S := R[t]/(t^2)$. Znajdź funktory dołączone do funktora zapominania $\mathcal{DM}_R \to \mathcal{M}_R$.

Definicja 2.4 (DGA)**.** *Różniczkowaniem w algebrze z gradacją A_* nazywamy endomorfizm modułu z gradacją $d : A_* \to A_*$ stopnia +1 taki, że $d(ab) = d(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot d(b)$ dla $a \in A_p$, $b \in B_q$. Algebrę z gradacją i różniczką nazywa się DGA ("Differential Graded Algebra").*

Definicja 2.5. *Moduł z gradacją i różniczką stopnia* -1 *nazywa się* kompleksem łańcuchowym*, a z różniczką stopnia* $+1$ kompleksem kołańcuchowym*. Moduły homologii kompleksu łańcuchowego są modułami z gradacją. Moduły homologii kompleksu kołańcuchowego nazywają się modulami kohomologii. $\mathcal{C}_R$ bedzie oznaczać kategorię kompleksów łańcuchowych R-modułów i homomorfizmów stopnia 0.*

Zad. 6. Zauważ, że kategoria $\mathcal{C}_R$ jest równoważna kategorii S_*– modułów z gradacją, gdzie $S_* := R[t]/(t^2)$ w którym $\deg(t) = -1$. Analogicznie kategoria kompleksów kołańcuchowych jest równoważna z kategorią S_*– modułów z gradacją, gdzie $S_* := R[t]/(t^2)$ w którym $\deg(t) = +1$.

Zad. 7. Dla kompleksów łańcuchowych C_*, C'_* definiujemy w iloczynie tensorowym modułów z gradacją $C_* \otimes C'_*$ operatory $\partial_\otimes(c \otimes c') = \partial(c) \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'(c')$ dla $c \in C_p$ i $c' \in C'_q$.

1. Sprawdzić, że $C_* \otimes C'_*$ jest kompleksem łańcuchowym.
2. Zdefiniować różniczkę w module z gradacją $\operatorname{Hom}_*(C_*, C'_*)$ i udowodnić izomorfizm kompleksów łańcuchowych $\operatorname{Hom}_*(C_* \otimes C'_*, C_*'') \simeq \operatorname{Hom}_*(C_*, \operatorname{Hom}_*(C'_*, C''{}_*))$.
3. Wykazać, że $H_0(\operatorname{Hom}_*(C_*, C'_*)) = \operatorname{Hom}(C_*, C'_*)/\operatorname{Hom}_{null}(C_*, C'_*) =: [C_*, C'_*]$ gdzie $\operatorname{Hom}(C_*, C'_*)$ jest modulem homomorfizmów kompleksów łańcuchowym stopnia 0, $\operatorname{Hom}_{null}(C_*, C'_*)$ oznacza podmoduł homomorfizmów łańcuchowo ściągalnych, a $[C_*, C'_*]$ jest grupą klas łańcuchowej homotopii homomorfizmów $C_* \to C'_*$.

Zad. 8 (Struktury multyplikatywne)**.** Dla kompleksów łańcuchowych C_*, C'_* oraz homomorfizmu R-modułów $\alpha : G \otimes_R G' \to G''$ sprawdzić, że poniższe odwzorowania są homomorfizmami łańcuchowymi oraz są naturalne (sprecyzować w jakim sensie!) .

a) $\times : (C_* \otimes G) \otimes (C'_* \otimes G') \to (C_* \otimes C'_*) \otimes G','$ $(c \otimes g) \times (c' \otimes g') := c \otimes c' \otimes \alpha(g \otimes g')$

b) $\times : \operatorname{Hom}(C_*, G) \otimes \operatorname{Hom}(C'_*, G') \to \operatorname{Hom}(C_* \otimes C'_*, G)$, $(\phi \otimes \psi)(c \otimes c') = \alpha(\phi(c) \otimes \psi(c')$

c) $/ : \operatorname{Hom}(C_* \otimes C'_*, G) \otimes (C'_* \otimes G') \to \operatorname{Hom}(C, G)'$, $(\phi / c' \otimes g')(c) := \alpha(\phi(c \otimes c') \otimes g')$

d) $\backslash : (C_* \otimes C'_* \otimes G) \otimes \operatorname{Hom}(C'_*, G') \to C \otimes G''$, $(c \otimes c' \otimes g) \backslash \psi := c \otimes \alpha(g \otimes \psi(c'))$

e) $\times : H(C_*) \otimes H(C'_*) \to H(C_* \otimes C'_*)$, $[c] \times [c'] := [c \otimes c']$.

Zad. 9 (Dla koneserów). Rozważ kategorię A_*–modułów z gradacją i zdefiniuj w niej iloczyn tensorowy jako funktor sprzężony do funktora Hom. Wykaż, że podana wyżej definicja iloczynu tensorowego kompleksów łańcuchowych jest jej szczególnym przypadkiem.

Zad. 10. Skonstruuować sumę prostą i produkt w kategorii algebr z gradacją (rozpatrzeć najpierw przypadek algebr przemiennych bez gradacji).

Zad. 11. Zbadać istnienie funktorów dołączonych do zapominania $Alg_K^* \to Mod_K^*$, gdzie K jest cialem. [*Wsk.* Funktor wolnej algebry musi zachowywać sumę prostą.]

3 Kategoria kompleksów łańcuchowych

Zad. 12. Sprawdzić, że kompleksy łańcuchowe nad R wraz ze zbiorami morfizmów $[C, C']$ zdefiniowanymi jako klasy łańcuchowej homotopii przekształceń łańcuchowych tworzą kategorię, nazywaną kategorią homotopii kompleksów łańcuchowych.

Zad. 13. Kompleks łańcuchowy (C_*, ∂) nazywa się *split exact* jeśli jest acykliczny oraz istnieje homomorfizm stopnia 1: $s_n \colon C_n \to C_{n+1}$ taki, że $\partial s \partial = \partial$. Wykaż, że (C_*, ∂) jest *split exact* wtedy i tylko wtedy gdy jest ściągalny.

Definicja 3.1. *Walcem (cylindrem) odwzorowania łańcuchowego $f \colon B_* \to C_*$ nazywamy kompleks*
$W(f)_n := B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n$ *z różniczką* $\partial(b, b', c) := (\partial(b) + b', -\partial(b'), \partial(c) - f(b'))$.

Zad. 14. Sprawdź, że $W(f)$ jest kompleksem łańcuchowym oraz włożenie $\iota \colon C_* \subset W_*(f)$
$\iota(c) := (0, 0, c)$ jest quasi-izomorfizmem, a nawet łańcuchową homotopijną równoważnością.

Zad. 15. Homomorfizmy łańcuchowe $f, g \colon C_* \to D_*$ są łańcuchowo homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy rozszerzają się do odwzorowania łańcuchowego określonego na walcu identyczności na C_*: $f + s + g \colon C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n \to D_n$.

Definicja 3.2. *Stożkiem przekształcenia łańcuchowego $\phi : C_* \to C'_*$ nazywamy kompleks* $(\mathrm{Cone}_*(\phi), \partial^\phi)$ *w którym* $\mathrm{Cone}_*(\phi) := C_{n-1} \oplus C'_n$ *oraz* $\partial^\phi(c, d) := (-\partial(c), \phi(c) + \partial'(d))$.

Zad. 16. Zauważyć, że stożek homomorfizmu łańcuchowego jest kompleksem ilorazowym jego walca.

Zad. 17. Sprawdzić, że ∂^ϕ jest różniczką, przyporządkowanie homomorfizmowi jego stożka jest funktorialne. Jeśli $\iota \colon C_* \subset C'_*$ jest inkluzją to projekcja $\mathrm{Cone}_*(\iota) \to C'_*/C_*$ indukuje izomorfizm homologii (jest quasi-izomorfizmem).

Zad. 18. Zdefiniować funktor zawieszenia kompleksu łańcuchowego i skonstruować ciąg Puppe dla dowolnego homomorfizmu łańcuchowego $f \colon B_* \to C_*$.

Zad. 19. W kategorii kompleksów łańcuchowych $\mathcal{C}_R$ definiujemy korozwłóknienia jako monomorfizmy, rozwłóknienia jako epimorfizmy i (słabe) równoważności jako homomorfizmy kompleksów łańcuchowych indukujące izomorfizmy modułów homologii (nazywamy je quasi-izomorfizmami). Wykaż, że tak zdefiniowane (ko-)rozwłóknienia i równoważności posiadają własności analogiczne to (ko-)rozwłóknień i homotopijnych równoważności w kategorii przestrzeni topologicznych.

Zad. 20. Kompleks łańcuchowy C_* wolnych R-modułów, który jest ograniczony z dołu jest łańcuchowo ściągalny wtedy i tylko wtedy gdy jest acykliczny (tzn. $H(C_*) = 0$). Podaj przykład kompleksu acyklicznego, który nie jest łańcuchowo ściągalny.

Zad. 21. Jeśli C_* jest acyklicznym kompleksem łańcuchowym wolnych R-modułów, to dla dowolnego R-modułu M kompleks $C_* \otimes M$ jest acykliczny.

Zad. 22. Wykazać, że stożek homomorfizmu łańcuchowego $C(\phi_*)$ jest łańcuchowo ściągalny wtedy i tylko wtedy gdy ϕ_* jest łańcuchową homotopijną równoważnością. [Wsk. Spanier Tw. 4.2.10]. W szczególności homomorfizm kompleksów wolnych modułów jest równowżnością wtedy i tylko wtedy gdy indukuje izomorfizm homologii. [Por. twierdzenie Whiteheada]

Definicja 3.3. Uzupełnieniem *kompleksu łańcuchowego R-modułów C_* nazywamy epimorfizm $\epsilon \colon C_0 \to R$ taki, że $\epsilon\partial = 0$ (czyli homomorfzim $C_* \to R$, gdzie R traktujemy jako kompleks skoncentrowany w wymiarze 0). Kompleks łańcuchowy* uzupełniony *to nieujemny kompleks ($C_n = 0$ dla $n < 0$) wraz z uzupełnieniem $\epsilon \colon C_* \to R$. Jeśli C_* jest uzupełniony, to kompleksem* zredukowanym *$\tilde{C}_*$ nazywamy kompleks łańcuchowy określony następująco: $\tilde{C}_n = C_n$ dla $n \neq 0$ oraz $\tilde{C}_0 = \ker \epsilon$.*

Zad. 23. Jeśli C_* jest kompleksem uzupełnionym, to kompleks zredukowany $\tilde{C}_*$ jest łańcuchowo ściągalny wtedy i tylko wtedy, gdy uzupełnienie $C_* \xrightarrow{\epsilon} R$ jest równoważnością łańcuchową kompleksów .

4 Funktor homologii

Zad. 24. Definiując odpowiednio homotopię jako homotopię łańcuchową przekształceń łańcuchowych, zawieszenie kompleksu i stożek homomorfizmu jak wyżej wykazać, że funktory homologii $H_i : \mathcal{CC}_R \to R - mod$ spełniają aksjomaty analogiczne do aksjomatów Eilenberga – Steenroda teorii homologii na kategorii przestrzeni topologicznych tzn. aksjomaty homotopii, ciągu dokładnego, zawieszenia i wymiaru. Sformułować odpowiednik ciagu Mayera-Vietorisa dla kompleksów łańcuchowych.

Zad. 25. Dla skierowanego systemu kompleksów łańcuchowych funktor homologii jest przemienny z granicą prostą. Dokładniej: jeśli $F \colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}_R$ jest skierowanym systemem kompleksów łańcuchowych, to dla dowolnego n mamy izomorfizm $\operatorname{colim}_{\mathcal{S}} H_n F \cong H_n(\operatorname{colim}_{\mathcal{S}} F)$. Podać przykład skończonego diagramu kompleksów łańcuchowych dla którego funktor homologii nie jest przemienny z granicą prostą.

Zad. 26. Podaj przykład skierowanego odwrotnego diagramu kompleksów łańcuchowych, dla którego funktor homologii nie jest przemienny z granicą odwrotną.

Zad. 27. Dla dowolnego kompleksu łańcuchowego C_* istnieje wolny kompleks $\tilde{C}_*$ oraz epimorfizm $f : \tilde{C}_* \to C_*$, który indukuje izomorfizm homologii $f_* : H(\tilde{C}_*) \to H(C_*)$. Kompleks $\tilde{C}_*$ jest wyznaczony jedoznacznie z dokładnością do łańcuchowej homotopijnej równoważności. [p.Spanier].

5 Charakterystyka Eulera, liczba Lefschetza, szereg Poincaré

Zad. 28 (Liczba Lefschetza.)**.** Dla endomorfizmu skończenie generowanej grupy abelowej $\phi : M \to M$ definiujemy jego ślad : $\operatorname{Tr}(\phi) := \operatorname{Tr}(\phi \otimes id : M \otimes \mathbb{Q} \to M \otimes \mathbb{Q})$. Dla endomorfizmu $\phi_* : M_* \to M_*$ stopnia zero skończenie generowanej grupy abelowej z gradacją definiujemy liczbę Lefschetza $L(\phi_*) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \operatorname{Tr}(\phi_q)$. Udowodnić, że:

1. $L : \operatorname{Hom}(M_*, M_*) \to \mathbb{Z}$ jest homomorfizmem;
2. Jeśli $\phi : M_* \to M_*$ i $\psi : N_* \to N_*$ to $L(\phi \otimes \psi) = L(\phi)L(\psi)$.

3. jeśli $\phi : C_* \to C_*$ jest endomorfizmem skończenie generowanego kompleksu łańcuchowego, to $L(\phi) = L(H_*(\phi))$.

Zad. 29 (Charakterystyka Eulera.)**.** Dla skończenie generowanej grupy abelowej M definiujemy $\operatorname{rank}(M) := \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes \mathbb{Q})$ a dla dowolnego ciała K, $\operatorname{rank}_K(M) := \dim_K(M \otimes K)$. Dla skończenie generowanej grupy z gradacją M_* definiujemy $\chi(M_*) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \operatorname{rank}(M_q)$ i odpowiednio $\chi_K(M_*)$. Wykazać, że:

1. Jeśli C_* jest acyklicznym kompleksem łańcuchowym (tzn. $H(C_*) = 0$), to $\chi(C_*) = 0$
2. dla krótkiego ciągu dokładnego skończenie generowanych grup abelowych z gradacją: $0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$ zachodzi $\chi(B_*) = \chi(A_*) + \chi(C_*)$.
3. $\chi(A_* \otimes B_*) = \chi(A_*)\chi(B_*)$
4. dla ograniczonego kompleksu łańcuchowego wolnych skończenie generowanych grup abelowych C_*, zachodzi równość $\chi(C_*) = \chi(H_*(C_*)) = \chi_K(H_*(C_* \otimes K))$.

Zad. 30 (Szereg Poincaré)**.** Niech K będzie ciałem. Dla dowolnej przestrzeni wektorowej z gradacją $\mathbf{V}$ nad K definiujemy jej szereg Poincare $P_{\mathbf{V}}(t) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (\dim_K \mathbf{V}_i)t^i$. Wykazać, że:

a) $P_{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2}(t) = P_{\mathbf{V}_1}(t) P_{\mathbf{V}_2}(t)$.

b) Obliczyć szereg Poincare algebry tensorowej, algebry symetrycznej i algebry zewnętrznej generowanej przez przestrzeń wektorową z gradacją.

c) Jeśli M_* jest skończenie generowanym modułem nad algebrą wielomianów z gradacją $K[c_1, .., c_n]$ gdzie $\deg c_i = 2i$, to szereg Poincare jest funkcją wymierną postaci $P_M(t) = p(t) / \prod_{q=1}^{n} (1 - t^{2i})$, gdzie $p(t)$ jest wielomianem.