

Wstęp do Geometrii Różniczkowej
Pomocnik studenta in statu nascendi

Stefan Jackowski

20 stycznia 2020

Spis treści

1 Preliminaria	5
1.1 Przestrzenie afiniczne i euklidesowe	5
1.2 Przekształcenia gładkie i wektory styczne	7
1.3 Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych	9
1.4 Przystawanie i izometrie wewnętrzne podrozmaitości	11
1.5 Wiązka wektorów stycznych	12
1.6 Pola wektorowe i gradient funkcji	13
1.7 Twierdzenie o ekstremach warunkowych	14
1.8 Grupa liniowa i grupa ortogonalna	15
1.9 Metoda ruchomego reperu	17
1.10 Zadania	19
2 Krzywe w przestrzeni euklidesowej	21
2.1 Parametryzacje krzywych	21
2.2 Krzywe niezdegenerowane	24
2.3 Równania Freneta-Serreta	25
2.4 Podstawowe twierdzenie teorii krzywych	27
2.5 Równania Freneta - Serreta krzywej płaskiej	28
2.6 <i>Umlaufsatz</i>	30
2.7 Ewoluta i inwoluta krzywej płaskiej	33
2.8 Równania Freneta-Serreta krzywej przestrzennej	37
2.9 Ewoluta i inwoluta krzywej przestrzennej	39
2.10 Zadania	41
3 Powierzchnie w \mathbb{E}^3	45
3.1 Krzywe na powierzchniach	45
3.2 Formy dwuliniowe na powierzchniach	48
3.2.1 I forma podstawowa	49
3.2.2 II forma podstawowa	50
3.3 Krzywe geodezyjne, asymptotyczne i linie krzywizny	52
3.4 Krzywizny główne i kierunki główne	52
3.5 Krzywizna Gaussa a pole powierzchni	54
3.6 Powierzchnie kuliste	56
3.7 Powierzchnie obrotowe	57
3.8 <i>Theorema egregium</i>	58

3.9	Krzywe geodezyjne	60
3.10	Pochodna kowariantna i przeniesienie równoległe	61
3.11	Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa	65
3.12	Przesunięcie równoległe a krzywizna Gaussa	68
4	Lokalna geometria Riemanna	71
4.1	Lokalne rozmaitości Riemanna	71
4.2	Współrzędne półgeodezyjne	74
4.3	Metryki stałej krzywizny na płaszczyźnie	76
4.4	Zadania	78
5	Abstrakcyjne rozmaitości gładkie	81
5.1	Mapy i atlasy	81
5.2	Wektory styczne	82
5.3	Wiązka styczna do rozmaitości abstrakcyjnej	85
5.4	Metryka Riemanna	86
5.5	Rozmaitości orbit	88
5.6	Koneksja afiniczna	90
5.7	Koneksja riemannowska	91
5.8	Twierdzenie Gaussa-Bonneta	92
5.9	Powierzchnie zwarte stałej krzywizny Gaussa	92
5.10	Zadania	93

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Przestrzenie afiniczne i euklidesowe

Geometria różniczkowa ma głębokie motywacje w fizyce, a mechanice w szczególności. Otaczająca nas 3-wymiarowa przestrzeń fizyczna \mathbb{A}^3 nie ma struktury przestrzeni wektorowej, lecz ma strukturę przestrzeni afinicznej. Intuicyjnie oznacza to, że w każdym punkcie możemy zaczepić układ współrzędnych (zwany też przez fizyków *układem odniesienia*) W_1 (czyli trzy niewspółpłaszczyznowe cechowane patyki) i przypisać punktowi przestrzeni jego współrzędne w tym układzie. Jeśli zaczepimy inny układ współrzędnych W_2 w innym punkcie, to znając położenie tego drugiego układu względem pierwszego możemy obliczyć współrzędne punktu w tym drugim układzie. Ponieważ na naszych patykach odznaczone są centymetry, można układy utożsamiać z przestrzeniami \mathbb{R}^3 . Odwzorowanie, które każdemu współrzędnemu $w_1 \in W_1$ przypisuje najpierw punkt o tych współrzędnych $p(w_1) \in \mathbb{A}^3$ a następnie współrzędne w drugim układzie $w_2(p(w_1)) \in W_2$ jest odwzorowaniem afinicznym tzn. złożeniem odwzorowania liniowego i przesunięcia. Odwzorowanie to spełnia pewne warunki, które bardziej zwięźle są ujęte w abstrakcyjnej definicji przestrzeni afinicznej, o której można myśleć jako o przestrzeni wektorowej bez wyróżnionego wektora zerowego.

Definicja 1.1.1. *Niech \mathbf{V} będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową (nad dowolnym ciałem). Przestrzenią afiniczną modelowaną na \mathbf{V} nazywamy zbiór \mathbb{A} wraz z przekształceniem $\omega: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{V}$ spełniającym następujące warunki:*

1. dla każdego $p \in \mathbb{A}$ oraz $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ istnieje dokładnie jeden element $q \in \mathbb{A}$ taki, że $\omega(p, q) = \mathbf{v}$
2. (równość trójkąta) dla dowolnych punktów $p, q, r \in \mathbb{A}$ zachodzi równość

$$\omega(p, q) + \omega(q, r) = \omega(p, r).$$

Wartość przekształcenia ω na parze punktów oznaczamy symbolicznie jako różnicę $\omega(p, q) =: q - p$. Jeśli $\mathbf{v} = q - p$, to piszemy $q = p + \mathbf{v}$. Równość trójkąta ma postać $(q - p) + (r - q) = r - p$, a więc można ją traktować jako prawo łączności odejmowania względem dodawania oraz przemienności. Przestrzeń \mathbf{V} jest nazywana przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni afinicznej, lub przestrzenią styczną (wektorów stycznych) i oznaczana $T(\mathbb{A})$.

Jeśli \mathbf{W} jest przestrzenią wektorową, to posiada ona kanoniczną strukturę afiniczną, a mianowicie odejmowanie wektorów $\mathbf{W} \times \mathbf{W} \ni (p, q) \rightarrow q - p \in \mathbf{W}$. Nie każda przestrzeń afiniczna ma strukturę przestrzeni wektorowej np. podprzestrzeń afiniczna w przestrzeni wektorowej, która nie jest podprzestrzenią liniową.

Mając zadane przekształcenie ω można ustalić układ współrzędnych wokół każdego punktu $p_0 \in \mathbb{A}$, a mianowicie $\varphi_{p_0}(p) =: \omega(p_0, p) =: p - p_0$. Z aksjomatu (1) wynika, że odwzorowanie $\varphi_{p_0}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{V}$ jest bijekcją. Niech $p_1 \in \mathbb{A}$ będzie innym punktem; zbadajmy odwzorowanie przejścia:

$$\varphi_{p_1} \varphi_{p_0}^{-1}(\mathbf{w}) = \varphi_1(p_0 + \mathbf{w}) = (p_0 - p_1) + \mathbf{w}$$

jest to więc przesunięcie (skorzystaliśmy z aksjomatu 2). Nawiązując do opisywanych wyżej "cechowanych patyczków", odpowiadają one wyborowi pewnej bazy w naszej przestrzeni \mathbf{V} ; otrzymujemy wówczas izomorfizm $\mathbf{V} \simeq \mathbb{F}^n$, gdzie $n := \dim_{\mathbb{F}} \mathbf{V}$. Dowolne dwie przestrzenie afiniczne o tej samej przestrzeni wektorów swobodnych (stycznych) \mathbf{V} są izomorficzne. Przestrzeń afiniczną wymiaru n będziemy oznaczać \mathbb{A}^n .

Przestrzeń fizyczna posiada jeszcze jedną ważną strukturę: można w niej mierzyć odległość a także kąt między odcinkami zaczepionymi w ustalonym punkcie. W ten sposób wśród układów współrzędnych możemy wyróżnić układy ortonormalne tzn. pęki prostopadłych patyczków, przy czym cechowanie na każdym jest zadane przez ten sam odcinek jednostkowy. Formalna definicja przestrzeni euklidesowej (czyli przestrzeni afinicznej z metryką) jest następująca:

Definicja 1.1.2. *Afiniczną przestrzeń euklidesową nazywamy przestrzeń afiniczną \mathbb{A} , taką że przestrzeń wektorowa \mathbf{V} na której jest modelowana jest wyposażona w iloczyn skalarny $\langle -, \cdot \rangle: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Iloczyn skalarny w \mathbf{V} wyznacza metrykę w \mathbb{A} :*

$$d(p, q) := \|q - p\| = \sqrt{\langle q - p, q - p \rangle}.$$

Przesunięcie w przestrzeni afinicznej jest izometrią, bowiem $(q + \mathbf{v}) - (p + \mathbf{v}) = q - p$. Dowolne dwie euklidesowe przestrzenie afiniczne o tej samej przestrzeni wektorów swobodnych (stycznych) \mathbf{V} są izomorficzne. Euklidesową przestrzeń afiniczną wymiaru n będziemy oznaczać \mathbb{E}^n oraz utożsamiać $T(\mathbb{E}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

Zauważmy, że podobnie można mówić o unormowanej przestrzeni afinicznej, a więc takiej, że w $T(\mathbb{A})$ określona jest norma, niekoniecznie pochodząca od iloczynu skalarnego.

W tym skrypcie będziemy odróżniać przestrzeń afiniczną \mathbb{A} od przestrzeni wektorowej jej wektorów swobodnych $\mathbf{V} =: T(\mathbb{A})$. Elementy przestrzeni afinicznej będziemy nazywać *punktami* a przestrzeni wektorów stycznych *wektorami*.¹ Zauważymy teraz, że różniczkowanie ma sens dla przekształceń otwartych podzbiorów unormowanych przestrzeni afinicznych. Niech $U \subset \mathbb{A}_1$ będzie otwartym podzbiorem a $F: U \rightarrow \mathbb{A}_2$ pewnym odwzorowaniem. Powiemy, że odwzorowanie liniowe $L: T(\mathbb{A}_1) \rightarrow T(\mathbb{A}_2)$ jest pochodną w punkcie p_0 odwzorowania F jeśli w pewnym otoczeniu p_0 zachodzi równość:

$$F(p) - F(p_0) = L(p - p_0) + r(p, p_0) \quad \text{gdzie} \quad \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\|r(p, p_0)\|_2}{\|p - p_0\|_1} = 0.$$

¹Dokładną dyskusję pojęcia przestrzeni afinicznej i konstrukcji jakie można w niej wykonywać Czytelnik znajdzie w książce A. Białynicki-Birula *Algebra liniowa z geometrią*.

Pochodną w punkcie p_0 oznaczamy DF_{p_0} . Warto odnotować wzór na pochodną kierunkową odwzorowania w kierunku wektora $\mathbf{v} \in T(\mathbb{A}_1)$, czyli wartość $DF_a(\mathbf{v})$.

$$F(a + t\mathbf{v}) - F(a) = DF_a(t\mathbf{v}) + r(t, a) \quad \text{a więc} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + t\mathbf{v}) - F(a)}{t} = DF_a(\mathbf{v})$$

Przypomnijmy w tym kontekście wzór Taylora. Niech $F: U \rightarrow \mathbb{A}_2$ będzie pewnym odwzorowaniem gładkim $k+1$ -razy różniczkowalnym w sposób ciągły. Wyższe pochodne odwzorowania F są odwzorowaniami wieloliniowymi $D^k F_p: T(\mathbb{A}_1) \times \cdots \times T(\mathbb{A}_1) \rightarrow T(\mathbb{A}_2)$. Niech $[p, p + \mathbf{v}] \subset U$ będzie odcinkiem zawartym w zbiorze U . Dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość:

$$F(p + \mathbf{v}) = F(p) + DF_p(\mathbf{v}) + \frac{1}{2!} D^2 F_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \dots + \frac{1}{p!} D^p F_p(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}) + o_{k+1}(p, \mathbf{v})$$

gdzie $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{\|o_{k+1}(p, \mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|^{k+1}} = 0$.

Niech $U \subset \mathbb{E}^n$, $V \subset \mathbb{E}^m$ będą podzbiórami otwartymi. Odwzorowanie $f: U \rightarrow V$ nazywamy *gładkim* jeśli posiada pochodne dowolnie wysokiego rzędu. Jeśli w przestrzeniach stycznych wybierzemy bazy, to gładkość jest równoważna istnieniu wszystkich pochodnych cząstkowych.

1.2 Przekształcenia gładkie i wektory styczne

Uogólnimy pojęcie gładkości na odwzorowania dowolnych podzbiorów.

Definicja 1.2.1. Niech $X \subset \mathbb{E}^n$, $Y \subset \mathbb{E}^m$ będą dowolnymi podzbiórami przestrzeni kartezjańskich. Przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ jest gładkie jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje otoczenie otwarte $x \in U_x \subset \mathbb{E}^n$ oraz przekształcenie gładkie $\bar{f}_x: U_x \rightarrow \mathbb{E}^m$ takie, że $\bar{f}_x|_{U_x \cap X} = f|_{U_x \cap X}$.

Korzystając z gładkiego rozkładu jedyńki² można wykazać, że Definicja 1.2.1 jest równoważna następującemu, pozornie silniejszemu warunkowi.

Stwierdzenie 1.2.1. Przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ jest gładkie jeśli istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{E}^n$ zawierający X oraz przekształcenie gładkie $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{E}^m$ takie, że $\bar{f}|_X = f$.

Przekształcenie gładkie dowolnych zbiorów mają wiele własności klasycznych przekształceń gładkich, chociaż póki co nie możemy dobrze zdefiniować ich pochodnych. Zauważmy w szczególności, że przekształcenia gładkie są ciągłe.

Stwierdzenie 1.2.2. Jeśli $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ są dwoma przekształceniami gładkimi, to ich złożenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ też jest przekształceniem gładkim.

Dowód. Niech $x \in X$ i $\bar{f}_x: U_x \rightarrow \mathbb{E}^m$ będzie gładkim rozszerzeniem na otoczenie otwarte oraz $\bar{g}_{f(x)}: V_{f(x)} \rightarrow \mathbb{E}^k$ odpowiednim rozszerzeniem g wokół punktu $f(x)$ (Def 1.2.1). Zbiór $U_x \cap \bar{f}_x^{-1}(V_{f(x)})$ jest otwartym otoczeniem punktu $x \in X$, a złożenie

$$\bar{g}_{f(x)} \circ \bar{f}_x: U_x \cap \bar{f}_x^{-1}(V_{f(x)}) \rightarrow \mathbb{E}^k$$

²p. P. Strzelecki "Analiza Matematyczna II" Dodatek A.

jest przekształceniem gładkim jako superpozycja przekształceń gładkich między otwartymi podzbiórmi przestrzeni kartezjańskich. \square

Definicja 1.2.2. Przekształcenie gładkie $\mathbb{E}^n \supset X \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{E}^m$ jest dyfeomorfizmem, jeśli posiada gładkie przekształcenie odwrotne $g: Y \rightarrow X$. Podzbiory $X \subset \mathbb{E}^n$, $Y \subset \mathbb{E}^m$ nazywamy dyfeomorficznymi jeśli istnieje między nimi dyfeomorfizm.

Zajmiemy się teraz zdefiniowaniem pochodnej odwzorowania gładkiego. Określenie jej jako po prostu pochodnej rozszerzenia nie jest prawidłowe, bowiem różne rozszerzenia mogą prowadzić do różnych pochodnych. Okazuje się, że gdy ograniczymy dziedzinę, na której pochodna jest określona do wektorów stycznych do podzbioru, to usuniemy tę niejednoznaczność. Wektory styczne zdefiniujemy geometrycznie - jako granice siecznych. Dokładniej:

Definicja 1.2.3. Niech $X \subset \mathbb{E}^n$. Wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nazywamy stycznym do zbioru X w punkcie $x \in X$ jeśli istnieje ciąg elementów $x_k \in X$ zbieżny do punktu x oraz ciąg liczb rzeczywistych $\lambda_k \rightarrow +\infty$ taki, że $\mathbf{v} = \lim \lambda_k(x_k - x)$. Zbiór wektorów stycznych do X w punkcie $x \in X$ oznaczamy TX_x lub T_xX i nazywamy czasem kontyngencją wektorów stycznych.

Zauważmy, że zawsze $0 \in TX_x$. Jeśli wektor $\mathbf{v} \neq 0$ to Def. 1.2.3 można uprościć. Wektor \mathbf{v} jest styczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg punktów $x_n \rightarrow x$ taki, że $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \lim \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}$. Wynika stąd, że jeśli $\lambda \geq 0$ to dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in TX_x$ także $\lambda\mathbf{v} \in TX_x$. Jeśli $X \subset Y$, to oczywiście $TX_x \subset TY_x$. Kontyngencja wektorów stycznych jest lokalnym niezmiennikiem podzbioru w następującym sensie.

Stwierdzenie 1.2.3. Jeśli $\mathbb{E}^n \supset U \ni x$ jest otoczeniem otwartym, to $T_x(U \cap X) = T_xX$.

Wykażemy teraz, że pochodna odwzorowania gładkiego jest dobrze zdefiniowana na wektorach stycznych.

Stwierdzenie 1.2.4. Niech $\mathbb{E}^n \supset X \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{E}^m$ będzie przekształceniem gładkim a $\bar{f}, \bar{f}': U_x \rightarrow \mathbb{E}^m$ dwoma jego gładkimi rozszerzeniami na pewne otoczenie $U_x \ni x$. Wówczas $Df_x|_{TX_x} = D\bar{f}'_x|_{TX_x}$.

Dowód. Niech $\mathbf{v} \in TX_x$, mamy pokazać, że $D\bar{f}_x(\mathbf{v}) = D_x\bar{f}'_x(\mathbf{v})$. Ponieważ pochodne są odwzorowaniami liniowymi możemy założyć, że $\|\mathbf{v}\| = 1$, a więc istnieje ciąg $x_k \rightarrow x$ taki, że $\mathbf{v} = \lim \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}$. Ze znanej z Analizy matematycznej definicji pochodnej mamy więc:

$$\begin{aligned} D\bar{f}_x(\mathbf{v}) &= \lim \frac{D\bar{f}_x(x_k - x)}{\|x_k - x\|} = \lim \left(\frac{f(x_k) - f(x)}{\|x - x_k\|} - \frac{r(x, x_k - x)}{\|x - x_k\|} \right) = \\ &= \lim \frac{f(x_k) - f(x)}{\|x_k - x\|} - \lim \frac{r(x, x_k - x)}{\|x_k - x\|} = \lim \frac{f(x_k) - f(x)}{\|x_k - x\|} = \lim \frac{\bar{f}'(x_k) - \bar{f}'(x)}{\|x_k - x\|} = D\bar{f}'_x(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

\square

Dla dowolnego odwzorowania gładkiego $\mathbb{E}^n \supset X \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{E}^m$ i punktu $x \in X$ możemy zdefiniować pochodną $Df_x: TX_x \rightarrow TY_{f(x)}$ jako obcięcie pochodnej dowolnego rozszerzenia gładkiego f na otoczenie punktu x . Tak określona pochodna ma następujące własności wynikające z dobrze znanych własności pochodnej odwzorowań między zbiorami otwartymi.

Stwierdzenie 1.2.5.

1. Jeśli $\mathbf{v} \in TX_x$, $\lambda \in \mathbb{E}$ oraz $\lambda\mathbf{v} \in TX_x$ to $Df_x(\lambda\mathbf{v}) = \lambda Df_x(\mathbf{v})$,
2. Jeśli $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in TX_x$ oraz $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in TX_x$ to $Df_x(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Df_x(\mathbf{v}) + Df_x(\mathbf{w})$,
3. Jeśli odwzorowania gładkie $f, f': X \rightarrow Y$ pokrywają się na pewnym otoczeniu punktu $x \in X$ to $Df_x = Df'_x$,
4. Jeśli $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ są dwoma przekształceniami gładkimi, to dla dowolnego $x \in X$, $D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$.

Wniosek 1.2.1. Jeśli $f: X \rightarrow Y$ jest dyfeomorfizmem, to pochodna $Df_x: TX_x \rightarrow TY_{f(x)}$ jest bijekcją.

1.3 Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych

Przedmiotem badań geometrii różniczkowej są dostatecznie regularne podzbiory przestrzeni euklidesowych, do których można stosować szeroki aparat analizy matematycznej.

Definicja 1.3.1. Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą. Podzbiór $M \subset \mathbb{E}^k$ nazywa się gładką podrozmaitością wymiaru n jeśli dowolny punkt $x \in M$ posiada otoczenie $W \ni x$ (otwarte w \mathbb{E}^k) takie, że zbiór $W \cap M$ jest dyfeomorficzny z otwartym podzbiorem przestrzeni \mathbb{E}^n .

Przykład 1.3.1. Niech $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^k$, gdzie $U \subset \mathbb{E}^n$ jest podzbiorem otwartym będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy jego wykres $\Delta(\varphi) = \{(u, y) \in U \times \mathbb{E}^k \mid y = \varphi(u)\}$ jest n -wymiarową podrozmaitością, dyfeomorficzną z U . Istotnie, zdefiniujmy parametryzację $r: U \rightarrow \Delta(\varphi)$ wzorem $r(x) := (x, \varphi(x))$ i zauważmy, że projekcja $p_1: U \times \mathbb{E}^k \rightarrow U$ jest odwzorowaniem odwrotnym.

Stwierdzenie 1.3.1. Jeśli $M \subset \mathbb{E}^k$ jest podrozmaitością to dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subset \mathbb{E}^k$, $U \cap M$ też jest podrozmaitością.

Gładkie podrozmaitości \mathbb{E}^k będziemy często nazywać po prostu rozmaitościami. Zauważmy, że wymiar rozmaitości jest dobrze zdefiniowany, bo jeśli podzbiory otwarte przestrzeni euklidesowych są dyfeomorficzne, to przestrzenie muszą mieć ten sam wymiar (p. Wn. 1.2.1).

Dyfeomorfizm $\mathbb{E}^n \supset U \xrightarrow{r} W \cap M \subset \mathbb{E}^k$ nazywa się parametryzacją zbioru $W \cap M$, a jego odwrotność, którą zazwyczaj będziemy oznaczali $h: W \cap M \rightarrow U$ (krzywoliniowym) układem współrzędnych na $W \cap M$.

Podamy jeszcze jedną użyteczną charakteryzację parametryzacji podrozmaitości.

Stwierdzenie 1.3.2. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym. Jeśli odwzorowanie $r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, jest zanurzeniem homeomorficznym tzn. $r: U \rightarrow h(U)$ jest homeomorfizmem, oraz rząd pochodnej Dr_x jest w każdym punkcie równy n , to $r: U \rightarrow h(U)$ jest dyfeomorfizmem, a więc $r(U)$ jest podrozmaitością.

Dowód. Pozostawiamy, póki co, czytelnikowi. □

Zauważmy, że w przypadku podrozmaitości dowolny wektor styczny do niej jest do pewnej krzywej położonej na tej podrozmaitości.

Stwierdzenie 1.3.3. *Jeśli $M \subset \mathbb{E}^k$ jest n -wymiarową podrozmaitością, to kontyngencja wektorów stycznych w dowolnym punkcie $TM_x \subset \mathbb{R}^k$ jest n -wymiarową podprzestrzenią liniową. Dla dowolnego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_x$ istnieje odwzorowanie gładkie $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ takie, że $c(0) = x$ oraz $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$, czyli dowolny wektor styczny do podrozmaitości jest styczny do pewnej krzywej leżącej na tej rozmaitości.*

Dowód. Niech $\mathbb{E}^n \supset U \xrightarrow{r} W \cap M \subset \mathbb{E}^k$ będzie parametryzacją taką, że $r(p) = x$. Jej pochodna zadaje izomorfizm $Dr_p: TU_p = \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} TM_x$.

Niech teraz $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem takim, że $Dr_p(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Zdefiniujemy $c(t) := r(p + t\mathbf{w})$. Z twierdzenia o pochodnej superpozycji odwzorowań wynika, że $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$. \square

Zauważymy, że definicja podrozmaitości 1.3.1 jest równoważna definicji podanej w skrypcie [Strzelecki], która powiada że podrozmaitość to podzbiór, który lokalnie w pewnym układzie współrzędnych jest wykresem funkcji gładkiej. Przypomnijmy definicję

Definicja 1.3.2. *Zbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ nazywamy zanurzoną gładką rozmaitością (podrozmaitością) n -wymiarową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje kula $B(p, r)$ w \mathbb{R}^{n+m} , n -wymiarowa podprzestrzeń liniowa generowana przez pewne n wektorów bazy kanonicznej $P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, zbiór U otwarty w $P \cong \mathbb{R}^n$ i funkcja gładka $\varphi: U \rightarrow P^\perp$ takie, że*

$$M \cap B(p, r) = \Delta(\varphi) \cap B(p, r),$$

gdzie

$$\Delta(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} = P \oplus P^\perp : x \in U, y = \varphi(x)\}.$$

jest wykresem funkcji φ .

Dowód równoważności definicji. Jeśli M jest podrozmaitością w sensie Definicji 1.3.2 to zbiór $M \cap B$ jest dyfeomorficzny z wykresem pewnej funkcji gładkiej, a więc na mocy Przykładu 1.3.1 jest podrozmaitością.

Odwrotnie, jeśli $r: U \rightarrow W \cap M$ jest parametryzacją wokół punktu $p_0 = r(x_0)$ to $\text{im } Dr_{x_0} = TM_{r(x_0)}$ jest przestrzenią styczną i jej wymiar wynosi n . Wybierzmy podprzestrzeń prostopadłą $TM_{r(x_0)}^\perp$ i dobierzmy do niej podprzestrzeń dopełniającą n -wymiarową P generowaną przez wektory bazy kanonicznej. Pochodna rzutu ortogonalnego zbioru $W \cap M \rightarrow P + p_0$ jest izomorfizmem, a więc rzut jest dyfeomorfizmem (w szczególności różnowartościowy) na pewnym otoczeniu $W' \cap M$, a stąd ten zbiór jest wykresem funkcji. Przekonanie się, że jest to funkcja gładka pozostawiamy czytelnikowi. \square

Nie odwołując się do równoważności definicji 1.3.1 i 1.3.2 i pokażemy, że podzbiór przestrzeni euklidesowej jest podrozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy lokalnie jest zbiorem rozwiązań nieosobliwego układu równań. Żeby sformułować to precyzyjnie przypomnijmy definicję wartości regularnej.

Definicja 1.3.3. Niech $V \subset \mathbb{E}^k$ będzie podzbiorem otwartym, a $f: V \rightarrow \mathbb{E}^m$ odwzorowaniem gładkim. Punkt $x \in U$ nazywa się punktem regularnym jeśli pochodna $Df_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest epimorfizmem. Punkt $y \in \mathbb{E}^m$ nazywa się wartością regularną jeżeli wszystkie punkty $x \in f^{-1}(y)$ są regularne.

Twierdzenie 1.3.1. Jeśli $f: V \rightarrow \mathbb{E}^m$ jest odwzorowaniem gładkim określonym na otwartym podzbiórze $V \subset \mathbb{E}^k$ a $y \in \mathbb{E}^m$ jego wartością regularną taką, że $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ to $M := f^{-1}(y)$ jest podrozmaitością wymiaru $k-m$ oraz dla każdego $x \in M$, $TM_x = \ker Df_x$.

Odwrotnie, jeśli $M \subset \mathbb{E}^k$ jest podrozmaitością n -wymiarową to dla dowolnego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie $W \ni x$ oraz funkcja $f: W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ takie, że $0 \in \mathbb{R}^{k-n}$ jest wartością regularną oraz $W \cap M = f^{-1}(0)$.

Dowód. Dla dowolnego punktu $x \in M$ znajdziemy otoczenie W , o którym mowa w definicji podrozmaitości (Def. 1.3.1). Pochodna $Df_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest epimorfizmem, więc $K := \ker Df_x$ jest podprzestrzenią liniową $k-m$ -wymiarową. Niech $\Pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-m}$ będzie homomorfizmem takim, że $\Pi: K \rightarrow \mathbb{R}^{k-m}$ jest izomorfizmem. Zdefiniujemy przekształcenie $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$ wzorem $F(v) = (f(v) - y, \Pi(v))$ i zauważmy, że jego pochodna $DF_x = (Df_x, D\Pi_x): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$ jest izomorfizmem. Z twierdzenia o lokalnej odwracalności wynika, że istnieje otoczenie $W \ni x$ takie, że $F: W \rightarrow F(W)$ jest dyfeomorfizmem podzbiorów otwartych. Zauważmy, że $F(W \cap M) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-m}) \cap F(W)$, a więc zbiór $W \cap M$ jest dyfeomorficzny z podzbiorem otwartym przestrzeni \mathbb{R}^{k-m} . Zachodzi inkluzja $TM_x \subset \ker Df_x$; ponieważ są to przestrzenie wektorowe tego samego wymiaru, zachodzi więc równość.

Odwrotnie, niech $M \subset \mathbb{E}^k$ będzie podrozmaitością n -wymiarową a $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{r} M \subset \mathbb{E}^k$ parametryzacją wokół punktu $r(u_0) = x_0 \in M$. Niech $P := (TM_{x_0})^\perp \subset \mathbb{R}^k$ będzie podprzestrzenią liniową prostopadłą do przestrzeni stycznej w punkcie x_0 i zadajmy izomorfizm $L: \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow P$. Określmy odwzorowanie $R: U \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $R(u, \mathbf{v}) := r(u) + L(\mathbf{v})$ i zauważmy, że jego pochodna $DR_{x_0}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest izomorfizmem. Z twierdzenia o lokalnej odwracalności wynika, że istnieje otoczenie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \supset V \ni x$ takie, że $R: V \rightarrow R(V) =: W$ jest dyfeomorfizmem. Zdefiniujemy $f: W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ jako $f(x) := \Pi(R^{-1}(x))$ gdzie $\Pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ jest projekcją na drugi czynnik. Z definicji wynika, że $f^{-1}(0) = M \cap W$ oraz dowolny punkt $x' \in M \cap W$ jest punktem regularnym. □

1.4 Przystawanie i izometrie wewnętrzne podrozmaitości

Definicja 1.4.1. Niech $M, N \subset \mathbb{E}^n$ będą dwoma podrozmaitościami. Powiemy, że są one przystające jeśli istnieje (zachowująca orientację) izometria przestrzeni euklidesowej $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ taka, że $A(M) = N$.

Jeśli $\mathbb{E}^n \supset M \xrightarrow{f} N \subset \mathbb{E}^m$ jest odwzorowaniem gładkim między podrozmaitościami położonymi być może w różnych przestrzeniach euklidesowych, to powiemy że f jest wewnętrzną izometrią, jeśli dla każdego punktu $x \in M$ pochodna $Df_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ jest izometrią przestrzeni wektorowych, wyposażonych w iloczyn skalarny będący obcięciem iloczynu skalarnego w przestrzeni euklidesowej.

Przypomnijmy podstawowe twierdzenie o strukturze izometrii przestrzeni euklidesowych.

Twierdzenie 1.4.1. *Niech $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie izometrią przestrzeni euklidesowej. Wtedy dla dowolnego punktu $p_0 \in \mathbb{E}^n$ istnieje wektor $\mathbf{v}_0 \in T(\mathbb{E}^n)$ taki, że $A(p_0 + \mathbf{v}) = p_0 + \mathbf{v}_0 + DA(\mathbf{v})$, gdzie $DA: T(\mathbb{E}^n) \rightarrow T(\mathbb{E}^n)$ jest liniową izometrią.*

Dowód można znaleźć w skrypcie J. Chaber i R. Pol [Geometria z Algebrą Liniową](#).

Oczywiście, jeśli dwie podzaimności ustalonej przestrzeni euklidesowej są przystające, to są wewnętrznie izometryczne. Jak się niebawem przekonamy, dalece nie na odwrót.

1.5 Wiązka wektorów stycznych

Wektory styczne w różnych punktach "zorganizujemy" w jedną przestrzeń, a jeśli nasz zbiór jest podzaimnością nawet w podzaimność podwojonego wymiaru. Rozpocniemy od przypadku dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{E}^n$ i zdefiniujemy podprzestrzeń

$$TX = \{(x, \mathbf{v}) \in X \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \in TX_x\} \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}^n$$

wyposażoną w rzutowanie na pierwszy czynnik $p: TX \rightarrow X$. Punkty przestrzeni TX to zaczepione wektory styczne. Projekcja przypisuje wektorowi jego punkt zaczepienia. Przekształcenie p jest oczywiście gładkie, bo jest obcięciem projekcji $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$. Łatwo sprawdzić, że pochodna $Dp: T(TX) \rightarrow TX$ jest surjekcją.

Zauważmy, że jeśli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym, to $TU = U \times \mathbb{E}^n$, bo każdy wektor z \mathbb{R}^n jest styczny w każdym punkcie.

Dowolne przekształcenie gładkie $\mathbb{E}^n \supset X \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{E}^m$ definiuje przekształcenie ciągle $Df: TX \rightarrow TY$ określone wzorem $Df(x, \mathbf{v}) := (f(x), Df_x(\mathbf{v}))$, a więc jest przemienny diagram przekształceń gładkich:

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Df} & TY \\ \downarrow p_X & & \downarrow p_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Wykażemy, że przekształcenie Df jest gładkie.

Lemat 1.5.1. *Jeśli $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} V \subset \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem gładkim między podzbiórami otwartymi to przekształcenie $Df: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$ jest gładkie.*

Dowód. Zapisujemy przekształcenie Df w terminach pochodnych cząstkowych:

$$Df(u, (v_1, \dots, v_n)) = (f(u), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u)).$$

Ponieważ f jest gładkie, zatem wszystkie pochodne cząstkowe są gładkie, a więc Df jest gładkie. \square

Stwierdzenie 1.5.1. *Jeśli $\mathbb{R}^n \supset X \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem gładkim, to jego pochodna $Df: TX \rightarrow TY$ też jest przekształceniem gładkim. Jeśli f jest dyfeomorfizmem, to $Df: TM \rightarrow TN$ też jest dyfeomorfizmem.*

Dowód. Dla dowolnego punktu $(x, \mathbf{v}) \in TX$ trzeba znaleźć otoczenie otwarte w $\mathbb{E}^n \times \mathbb{R}^n$ oraz rozszerzenie Df na to otoczenie. Z definicji gładkości istnieje otoczenie $\mathbb{E}^n \supset U \ni x$ oraz rozszerzenie $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{E}^m$. Jego pochodna jest przekształceniem gładkim (Lemat 1.5.1) $D\bar{f}: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}^m \times \mathbb{R}^m$ i oczywiście $D\bar{f}|_{p_X^{-1}(U)} = Df$. \square

Stwierdzenie 1.5.2. *Jeśli $M \subset \mathbb{E}^n$ jest podrozmaitością wymiaru k , to $TM \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością wymiaru $2k$.*

Dowód. Niech $\mathbb{E}^k \supset U \xrightarrow{r} M \subset \mathbb{E}^m$ będzie dowolną parametryzacją. Pokażemy, że jej pochodna $Dr: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow TM$ jest też parametryzacją. Istnieje podzbiór otwarty $\mathbb{E}^n \supset W \ni r(U)$ oraz przekształcenie gładkie $g: W \rightarrow U$, którego obcięcie $g|_r(W)$ jest odwrotnością r , a jego pochodna $Dg: W \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ obcięta do $(TX) \cap (W \times \mathbb{R}^k)$ jest gładką odwrotnością przekształcenia Dr . \square

Przekształcenie $p: TM \rightarrow M$ nazywa się wiązką styczną do rozmaitości. Przeciwobraz każdego punktu posiada naturalną strukturę przestrzeni wektorowej, bo jest postaci $\{x\} \times TM_x$. Wiązka ta jest również *lokalnie trywialna* w następującym sensie. Dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie $V \subset M$ otwarte w M oraz dyfeomorfizm $V \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} p_M^{-1}(V)$ taki, że następujący diagram przekształceń jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & p_M^{-1}(V) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_M \\ & & V \end{array}$$

oraz dla każdego $x \in V$ przekształcenie $h: \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{x\} \times TM_x$ jest izomorfizmem liniowym. Dyfeomorfizm h nazywa się *trywializacją* wiązki p nad zbiorem V . Dowolna parametryzacja $r: U \rightarrow r(W) = V \subset M$ wyznacza trywializację wiązki stycznej nad V : $h_r(x, \mathbf{v}) := (x, Dr_{r^{-1}(x)}(\mathbf{v}))$. Lokalnie trywialne wiązki wektorowe odgrywają ogromną rolę w geometrii i topologii rozmaitości.

1.6 Pola wektorowe i gradient funkcji

Definicja 1.6.1. *Polem wektorowym na podrozmaitości $M \subset \mathbb{E}^k$ nazywamy odwzorowanie gładkie $\mathbf{v}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ takie, że dla każdego punktu $x \in M$, $\mathbf{v}(x) \in TM_x$.*

Równoważnie, można zdefiniować pole wektorowe jako gładki przekrój wiązki stycznej, czyli przekształcenie $s: M \rightarrow TM$ takie, że $p_M \circ s = id_M$. Odpowiedniość między tymi definicjami jest zdana wzorem: $s(x) := (x, \mathbf{v}(x)) \in TM$.

Ważnym przykładem pola wektorowego jest pole gradientowe funkcji gładkiej określonej na rozmaitości. Niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Dla każdego punktu $x \in M$ pochodna jest funkcjonałem na przestrzeni stycznej $df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}$ (pochodne funkcji

rzeczywistych często oznaczamy małym d). Iloczyn skalarny w przestrzeni \mathbb{R}^n pozostaje iloczynem skalarnym po obcięciu do podprzestrzeni TM_x , zatem zadaje izomorfizm tej przestrzeni z przestrzenią dualną. Definiujemy wektor $\text{grad } f_x \in TM_x$ jako spełniający równość:

$$df_x(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \text{grad } f_x \rangle \quad \text{dla każdego wektora } \mathbf{v} \in TM_x.$$

Z definicji gradientu wynika natychmiast, że pole gradientowe jest prostopadłe do poziomic funkcji.

Stwierdzenie 1.6.1. *Jeśli $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką oraz $\mathbf{v} \in Tf^{-1}(y)_x$, to $\langle \text{grad } f_x, \mathbf{v} \rangle = 0$.*

Stwierdzenie 1.6.2. *Dla dowolnej funkcji gładkiej określonej na podrozmaitości $\mathbb{R}^k \supset M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ odwzorowanie $\text{grad } f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest gładkim polem wektorowym.*

Dowód. Pozostaje sprawdzić gładkość przekształcenia $\text{grad } f$. Niech $r: U \rightarrow M$ będzie parametryzacją. Wystarczy sprawdzić, że złożenie $(\text{grad } f) \circ r$ jest odwzorowaniem gładkim. Pochodne $\mathbf{r}_i(u) := \frac{\partial r}{\partial u_i}$ tworzą bazę przestrzeni $TM_{r(u)}$ i są odwzorowaniami gładkimi $\mathbf{r}_i: U \rightarrow \mathbb{R}^k$. Zapisujemy gradient w tej bazie: $\text{grad } f_{r(u)} = \sum_{i=1}^k \alpha_i(u) \mathbf{r}_i(u)$. Trzeba wykazać, że współczynniki $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi. W tym celu rozpatrujemy układ n równań z n niewiadomymi.

$$\frac{\partial(f \circ c)}{\partial u_j} = df_x(\mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$$

Macierz $(\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle)$ jest nieosobliwa więc ten układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wyrażające się przez funkcje algebraiczne współczynników będących funkcjami gładkimi, a więc α_i , z zatem $\text{grad } f$ są odwzorowaniami gładkimi. \square

Jeżeli dla pola wektorowego $v: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ istnieje funkcja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $v = \text{grad } f$, to pole v nazywa się *potencjalnym* a funkcja f jego *potencjałem*. Pola potencjalne odgrywają ogromną rolę w fizyce.

1.7 Twierdzenie o ekstremach warunkowych

Jako ilustrację pojęcia podrozmaitości i przestrzeni stycznej podamy geometryczny dowód twierdzenia Lagrange'a³ o ekstremach warunkowych (związanych). Twierdzenie to, znane z Analizy matematycznej, podaje warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego w następującej sytuacji. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem gładkim określonym na podzbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^k$. Niech $G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem gładkim, a $y \in \mathbb{R}^m$ jego wartością regularną. Punkty ekstremalne (lokalne minima lub maksima) funkcji $f: G^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ekstremami lokalnymi funkcji f związanymi warunkiem $G(x) = y$.

Twierdzenie 1.7.1. *Niech $G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają powyższe założenia. Jeśli punkt $x_0 \in G^{-1}(y)$ jest ekstremum f związanym warunkiem $G(x) = y$ to istnieje funkcjonal liniowy $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że $Df_{x_0} = \lambda \circ DG_{x_0}$.*

³Joseph-Louis Lagrange (Turin, Sardinia-Piedmont 1736 - 1813 Paryż)

Twierdzenie Lagrange'a łatwo wynika z lematu uogólniającego na dowolne rozmaitości znanego z Analizy twierdzenia o znikaniu pochodnej w punkcie ekstremalnym .

Lemat 1.7.1. *Jeśli $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką zdefiniowaną na podrozmaitości $M \subset \mathbb{R}^k$ a $x_0 \in M$ jest lokalnym ekstremum funkcji f , to pochodna $Df_{x_0}: TM_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zerowa.*

Dowód. Trzeba wykazać, że dla dowolnego $\mathbf{v} \in TM_{x_0}$, $Df_{x_0}(\mathbf{v}) = 0$. Niech $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ będzie krzywą styczną do wektora \mathbf{v} (Wn. 1.3.3). Punkt $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ jest punktem ekstremalnym funkcji $f \circ c$, a więc $\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = 0$. Z twierdzenia o pochodnej złożenia odwzorowań wynika, że $\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = Df_{c(0)}(\dot{c}(0)) = Df_{x_0}(\mathbf{v})$. \square

Dowód Tw. 1.7.1. Oznaczmy $M := G^{-1}(y)$. Z Tw. 1.3.1 wynika, że $TM_x = \ker DG_x$ a z Lematu 1.7.1, że $Df_x|_{TM_x} = 0$, a więc Df_x rozkłada się na superpozycję $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k / \ker DG_x \xrightarrow{[Df_x]} \mathbb{R}$. Z drugiej strony pochodna odwzorowania G zadaje izomorfizm $[DG_x]: \mathbb{R}^k / \ker DG_x \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definiujemy funkcjonal $\lambda := [Df_x] \circ [DG_x]^{-1}$. \square

Współczynniki funkcjonału λ w bazie kanonicznej nazywają się *mnożnikami Lagrange'a*.

1.8 Grupa liniowa i grupa ortogonalna

Dla dowolnej liczby naturalnej n przestrzeń wektorową złożoną ze wszystkich macierzy rzeczywistych $n \times n$ można utożsamiać z przestrzenią \mathbb{R}^{n^2} . Iloczyn macierzy

$$\circ: M(n, n) \times M(n, n) \rightarrow M(n, n)$$

jest oczywiście odwzorowaniem gładkim, bo jest przekształceniem dwuliniowym.

Przez $GL(n) \subset M(n, n)$ będziemy oznaczali podzbiór składający się z macierzy odwracalnych, a więc dokładnie takich których wyznacznik jest różny od zera.

$$GL(n) := \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \subset M(n, n; \mathbb{R}) = \prod_{i,j=1}^n \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

Elementy grupy $GL(n)$ można utożsamiać z automorfizmami liniowymi $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lub bazami przestrzeni \mathbb{R}^n .

Ponieważ wyznacznik $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest odwzorowaniem ciągłym (a nawet gładkim), więc $GL(n) \subset M(n, n)$ jest podzbiorem otwartym, a więc rozmaitością. Odwzorowanie przypisujące macierzy jej odwrotność $-1: GL(n) \rightarrow GL(n)$ jest także gładkie (por. wzór na macierz odwrotną)⁴. Wnioskujemy także, że

$$GL(n; \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$$

jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów otwartych składających się odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym. Mnożenie przez dowolną macierz $A \in GL^-(n, \mathbb{R})$ zadaje dyfeomorfizm

$$h_A: GL^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^-(n, \mathbb{R}).$$

⁴Rozmaitości, które posiadają strukturę grupową taką, że odpowiednie odwzorowania są gładkie nazywają się *grupami Lie*. (Sophus Lie, Nordfjordeide, N 1842 - 1899 Kristiania (obecnie Oslo), N)

Theorem 1.8.1. *Zbiór macierzy $GL^+(n)$ jest łukowo spójny.*

Dowód. Ponieważ podzbiór otwarty przestrzeni euklidesowej jest lokalnie łukowo spójny, więc wystarczy pokazać, że $GL^+(n, \mathbb{R})$ jest zbiorem spójnym. Będziemy postępować indukcyjnie ze względu na wymiar macierzy: $GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ a więc jest to zbiór spójny. Załóżmy, że przestrzeń $GL^+(k, \mathbb{R})$ jest spójna dla $k < n$ i rozważmy rzutowanie $p: GL^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przypisujące każdej macierzy jej ostatnią kolumnę. Jako obcięcie rzutowania w produkcie kartezjańskim do otwartego podzbioru jest to odwzorowanie otwarte, a więc ilorazowe. Zauważmy, że odwzorowanie p polega na mnożeniu macierzy z prawej strony przez pionowo zapisany wektor bazy kanonicznej $\mathbf{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$

Do odwzorowania p zastosujemy znane z Topologii I kryterium spójności. Jeśli $X \xrightarrow{p} Y$ jest odwzorowaniem ilorazowym, przestrzeń Y jest spójna oraz dla każdego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest spójny, to przestrzeń X jest spójna. Dla $n > 1$ przestrzeń $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest łukowo spójna, a więc spójna. Należy więc zbadać przeciwobrazy $p^{-1}(\mathbf{v})$ gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zauważmy przede wszystkim, że dla dowolnych dwóch wektorów $p^{-1}(\mathbf{v})$ i $p^{-1}(\mathbf{w})$ są homeomorficzne. Istotnie, jeśli $C \in GL^+(n, \mathbb{R})$ jest macierzą taką, że $C(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, to mnożenie przez C z lewej strony zadaje homeomorfizm $C: p^{-1}(\mathbf{v}) \rightarrow p^{-1}(\mathbf{w})$ – przekształcenie odwrotne jest mnożeniem przez C^{-1} .

Rozpatrzmy więc $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$. Jest to zbiór macierzy postaci zapisanych blokowo

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $A \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$ a $\mathbf{c} = (c_{n,1}, \dots, c_{n,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Taką macierz można włączyć drogą $\omega: [0, 1] \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$ z macierzą dla której $\mathbf{c} = 0$:

$$\omega(t) := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ t\mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Zbiór macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in GL^+(n, \mathbb{R})$$

jest homeomorficzny z $GL^+(n-1, \mathbb{R})$, a więc na mocy założenia indukcyjnego jest spójny, a zatem zbiór $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$ jest spójny, co kończy dowód twierdzenia. \square

Wniosek 1.8.1. *Rozkład $GL(n; \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$ jest rozkładem na sumę dwóch dyfeomorficznych ze sobą składowych spójnych.*

Zbadamy obecnie ważną podgrupę grupy $GL(n)$ składającą się ze wszystkich macierzy ortogonalnych: $O(n) := \{A \in GL(n) \mid A^T A = Id\}$. Zauważmy, że ortonormalizacja Grama-Schmidta zadaje gładkie odwzorowanie $ort: GL(n) \rightarrow O(n)$. Traktując $GL(n)$ jako zbiór wszystkich baz przestrzeni \mathbb{R}^n , a $O(n)$ jako zbiór baz ortogonalnych, ortonormalizacja Grama⁵-Schmidta⁶ jest scharakteryzowana przez następujące warunki: Oznaczając ortonormalizację bazy $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ przez $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n)$:

⁵Jorgen Pedersen Gram (Nustrup, DK 1850 - 1916 Kopenhaga)

⁶Erhard Schmidt (Dorpat, RU 1876 - 1959 Berlin, D)

- dla każdego $k \leq n$, $\text{Lin}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Lin}\{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_k\}$;
- obie bazy wyznaczają tę samą orientację podprzestrzeni.

Jeśli baza $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest ortonormalna to $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, a więc odwzorowanie *ort* jest surjekcją. Wynika stąd, że grupa $O(n)$ także ma dwie dyfeomorficzne składowe. Składową jedności $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ nazywa się specjalną grupą ortogonalną.

Stwierdzenie 1.8.1. *Grupa ortogonalna $O(n)$ jest zwartą rozmaitością a przestrzeń styczna w macierzy identycznościowej składa się z macierzy antysymetrycznych:*

$$TO(n)_{Id} = \{M \in M(n, n) \mid M = -M^T\},$$

a więc $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dowód. Przestrzeń $O(n)$ jest zwarta, bo traktując kolumny jako wektory o normie 1 interpretujemy ją jako podzbiór domknięty produktu n jednostkowych sfer $S^n \times \dots \times S^n$, a więc zbioru zwartego.

Żeby wykazać, że $O(n)$ jest rozmaitością skorzystamy z Tw. 1.3.1. Rozważmy odwzorowanie $GL(n) \ni A \mapsto A^T A \in M_{sym}(n, n)$ zdefiniowane na grupie macierzy odwracalnych o wartościach w przestrzeni macierzy symetrycznych - oznaczmy je $F(A) := A^T A$. Jest ono oczywiście gładkie, a grupa ortogonalna jest przeciwobrazem macierzy identycznościowej $O(n) = F^{-1}(Id)$. Trzeba więc pokazać, że $Id \in M_{sym}(n, n)$ jest wartością regularną. Obliczymy pochodną $DF_A: M(n, n) \rightarrow M_{sym}(n, n)$: $DF_A(M) = M^T A + A^T M$. Wystarczy zauważyć, że dowolna macierz symetryczna N jest tej postaci. Połóżmy $M := \frac{1}{2}AM$. Wtedy $DF_A(M) = N$. Przestrzeń styczna $TO(n)_{Id}$ jest jądrem odwzorowania $DF_{Id}(M) = M^T + M$, a więc składa się z macierzy antysymetrycznych. Wymiar tej przestrzeni wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$. \square

Korzystając z opisu przestrzeni stycznej w macierzy identycznościowej możemy opisać przestrzeń styczną w dowolnej innej macierzy $TO(n)_A$. Przesunięcie (lewe lub prawe) $R_A: O(n) \rightarrow O(n)$, $R_A(B) := BA$ jest dyfeomorfizmem, zatem $DR_A: TO(n)_{Id} \simeq TO(n)_A$ jest izomorfizmem. Ponieważ przesunięcie jest dobrze zdefiniowanym przekształceniem liniowym całej przestrzeni macierzy, zatem $DR_A = R_A$. Wynika stąd, że

$$TO(n)_A = \{MA \in M(n, n) \mid M = -M^T\} \quad (1.1)$$

Zauważmy, że jeśli $A \in SO(n)$ to ponieważ $SO(n) \subset O(n)$ jest podzbiorem otwartym, zachodzi równość $TSO(n)_A = TO(n)_A$.

1.9 Metoda ruchomego reperu

Chociaż pojęcie reperu ma ogólniejszy charakter, a pochodzi z geodezji, to w klasycznej geometrii różniczkowej jest używane jako nazwa dla bazy ortonormalnej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n , zorientowanej zgodnie z bazą kanoniczną. Repery można więc utożsamiać z elementami grupy $SO(n)$.

Definicja 1.9.1. *Ruchomym reperem⁷ w \mathbb{R}^n nazywa się rodzinę gładkich odwzorowań $\mathbf{e}_i: J \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$ taką, że dla każdego elementu przedziału $t \in J$ wektory $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)$ tworzą kanonicznie zorientowaną bazę ortonormalną tzn. $\langle \mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$.*

Ruchomy reper w sensie ostatniej definicji to dokładnie krzywa gładka $\mathbf{E} := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n): J \rightarrow SO(n)$ (wektory zapisujemy pionowo lub poziomo w zależności od potrzeb). Tradycyjne sformułowanie twierdzenia o ruchomym reperze brzmi następująco:

Twierdzenie 1.9.1. *Jeśli rodzina odwzorowań $\mathbf{e}_i: J \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$ jest ruchomym reperem, to istnieją funkcje gładkie $\omega_{ij}: J \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że*

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) \quad \text{przy czym} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

Wzory z Tw. 1.9.1 wygodnie jest zapisywać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \dots & \omega_{1(n-1)} & \omega_{1n} \\ -\omega_{12} & 0 & \dots & \omega_{2(n-1)} & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega_{1(n-1)} & -\omega_{2(n-1)} & \dots & 0 & \omega_{(n-1)n} \\ -\omega_{1n} & -\omega_{2n} & \dots & -\omega_{(n-1)n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

a oznaczając $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$ oraz macierz $\Omega = (\omega_{ij})$ jeszcze krócej: $\dot{\mathbf{E}} = \Omega \mathbf{E}$. Posłużymy się tą notacją w dowodzie.

Dowód. Podamy dowód traktując rodzinę odwzorowań \mathbf{e}_i jako gładką drogę $\mathbf{E}: J \rightarrow SO(n)$. Wtedy pochodna $\dot{\mathbf{E}}(t) \in TSO(n)_{\mathbf{e}(t)}$. Z równości 1.1 wynika, że dla każdego $t \in J$ istnieje antysymetryczna macierz $\Omega(t)$ taka, że $\dot{\mathbf{E}}(t) = \Omega(t) \mathbf{E}(t)$. Ponieważ $\mathbf{E}(t)$ jest macierzą odwracalną, a \mathbf{E} odwzorowaniem gładkim macierz $\Omega(t) = \dot{\mathbf{E}}(t) \mathbf{E}(t)^{-1}$ jest odwzorowaniem gładkim $\Omega: J \rightarrow M(n, n)$, co oznacza że wszystkie wyrazy macierzy $\Omega(t) = (\omega_{ij})$ są funkcjami gładkimi. \square

Można także bezpośrednio wykazać, że macierz $\Omega(t)$ jest antysymetryczna, metodą różniczkowania iloczynu skalarnego często stosowaną w geometrii różniczkowej. Ponieważ wektory $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)$ tworzą bazę ortonormalną więc istnieją funkcje ω_{ij} takie, że $\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t)$, gdzie $\omega_{ij} = \langle \dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j \rangle$, więc są to funkcje gładkie. Antysymetria wynika ze wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \dot{\mathbf{e}}_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji}.$$

⁷Po angielsku ruchomy reper nazywa się *moving frame*.

1.10 Zadania

Zad. 1. Udowodnić, że dowolny przedział na prostej (tzn. podzbiór $J \subset \mathbb{R}$ takie, że jeśli $a, b \in J$ oraz $a < c < b$ to $c \in J$) jest dyfeomorficzny z odcinkiem otwartym $(0, 1)$, jednostronnie lub dwustronnie domkniętym $[0, 1)$ lub $(0, 1]$ i te odcinki nie są parami dyfeomorficzne (a nawet homeomorficzne).

Zad. 2. Które pary z następujących podzbiorów płaszczyzny są dyfeomorficzne (odp. homeomorficzne), a które nie są (zrobić tabelkę).

1. $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
2. $V := \{(x, y) \mid y = |x|\}$
3. $T := \{(x, y) \mid x^2 - y^3 = 0\}$
4. $A = \{(t^3 - 4t, t^2 - 4) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$
5. $B := \{(x, y) \mid xy = 0\}$
6. $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-1)^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0, (x, y) \notin \{(-2, 0), (2, 0)\}\}$
7. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
8. $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1, x \text{ lub } y \in \{-1, 1\}\}$

Zad. 3. Jeśli $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem gładkim, to odwzorowanie wykresu $\Delta: A \rightarrow W(f) := \{(a, y) \mid y = f(a) \subset A \times \mathbb{R}^n\}$ jest dyfeomorfizmem, a zbiór wektorów stycznych w punkcie $(a, f(a)) \in W(f)$ jest identyczny z wykresem pochodnej Df_a .

Zad. 4. Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, to $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ oraz dla dowolnych punktów $a \in A$, $b \in B$ zachodzi inkluzja $T_{(a,b)}(A \times B) \subset T_a A \times T_b B$, lecz nie zawsze zachodzi równość. Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są podrozmaitościami, to $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ też jest podrozmaitością oraz $T_a A \times T_b B = T_{(a,b)}(A \times B)$.

Zad. 5. Załóżmy, że dany jest podzbiór w $A \subset \mathbb{R}^3$ położony w półpłaszczyźnie $x = 0$, $y > 0$.

1. Opisać analitycznie zbiór powstały przez obrót zbioru A wokół osi $x = y = 0$ (ozn. A^{obr}). Podać warunki dostateczne, aby zbiór A^{obr} był podrozmaitością;
2. Opisać zbiór wektorów stycznych w dowolnym punkcie w terminach zbioru wektorów stycznych do zbioru A , w szczególności gdy A^{obr} jest podrozmaitością;
3. Jeśli podzbiór A jest zbiorem rozwiązań nieosobliwego równania $f(y, z) = 0$, to znaleźć równanie opisujące zbiór powstały przez obrót zbioru A oraz równanie przestrzeni stycznej w dowolnym punkcie.

Zad. 6. Na dowolnej sferze nieparzystowymiarowej $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ istnieje pole wektorowe $\mathbf{v}: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ takie, że dla każdego punktu $p \in S^{2n-1}$, $\|\mathbf{v}(p)\| = 1$. Dla $n = 1, 2, 4$ na sferze S^{2n-1} istnieje n liniowo niezależnych w każdym punkcie pól wektorowych.⁸

⁸Dla każdego n znana jest maksymalna liczba liniowo niezależnych w każdym punkcie pól wektorowych na S^{2n-1} . (p. H. Miller *Vector Fields on Spheres, etc.*)

Zad. 7. Wykaż, że zbiór macierzy rzeczywistych 3×3 ustalonego rzędu $r \leq 3$ jest rozmaitością, zbadaj jej zwartość i spójność; oblicz jej wymiar.

Uwaga. Ogólnie, jeśli $n \leq r \leq m$ to zbiór macierzy $n \times m$ rzędu r jest podrozmaitością w $M(n, m)$.

Zad. 8. Wykaż, że jeśli $k \leq n$ to zbiór $V_k(\mathbb{R}^n) := \{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}\}$ jest podrozmaitością. Zbadaj jej spójność oraz oblicz wymiar. (Rozmaitość $V_k(\mathbb{R}^n)$ nazywa się rozmaitością Stiefla ⁹).

Zad. 9. Wykaż, że grupa unitarna $U(n) = \{A \in M(n, n; \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^T = Id\}$ oraz specjalna grupa unitarna $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ są podrozmaitościami w $M(n, n; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$. Oblicz ich wymiar. Udowodnij, że $U(1)$ jest dyfeomorficzna (a nawet izomorficzna) z S^1 , a $SU(2)$ z S^3 (traktowaną jako grupa jednostkowych kwaternionów).

Zad. 10. W dowolnej euklidesowej przestrzeni afinicznej sferę o środku w punkcie $p \in \mathbb{E}$ i promieniu $r > 0$ oznaczamy $S(p, r)$. Sferę w \mathbb{R}^n o promieniu 1 i środku w punkcie 0 oznaczamy w skrócie S^{n-1} . Sprawdź, że dowolne dwie sfery są dyfeomorficzne.

Zad. 11 ([Rzut stereograficzny](#)). Sprawdzić, że formuła

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}, 0 \right)$$

definiuje dyfeomorfizm "przekłutej sfery" $S^{n-1} \setminus \{x \in S^{n-1} \mid x_n = 1\}$ na płaszczyznę $x_n = 0$ (tzn. przestrzeń \mathbb{R}^{n-1}). Sprawdź, że w przypadku gdy $n = 3$ rzut stereograficzny przekształca koła wielkie na okręgi. Uogólnij ten fakt na n -wymiarów.

Zad. 12 (Inwersja). Inwersja w $f: \mathbb{E}^k \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{E}^k \setminus \{p_0\}$ o środku w punkcie $p_0 \in \mathbb{E}^k$ i promieniu $r > 0$ jest zdefiniowana następująco $f(p) := p_0 + \frac{r^2}{\|p-p_0\|^2}(p-p_0)$. Zrobić rysunek dla $k = 2, 3$. Wykazać, że inwersja jest dyfeomorfizmem. (Geometryczna definicja inwersji p. [Inversion - Wolfram](#) oraz [Stereographic Projection and Inversion](#).)

⁹[Eduard Stiefel](#) (Zürich, CH 1909 - 1978 Zürich, CH)

Rozdział 2

Krzywe w przestrzeni euklidesowej

2.1 Parametryzacje krzywych

Definicja 2.1.1. *Parametryzacją krzywej w afinicznej przestrzeni euklidesowej \mathbb{E}^n nazywamy odwzorowanie gładkie $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$, gdzie $J \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem na prostej, takie że $\dot{c}(t) \neq 0$ dla każdego $t \in J$.*

Z fizycznego punktu widzenia o parametryzacji krzywej można myśleć jako o ruchu punktu po krzywej bez przystanków tzn. punktów, w których prędkość jest zerowa. Zauważmy, że obraz parametryzacji $c(J)$ nie musi być podzbiorem. Natomiast dla każdego punktu wewnętrznego przedziału $t \in J$ istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że

$$c: (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \rightarrow c((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \subset \mathbb{E}^n$$

jest dyfeomorfizmem. O ile z fizycznego punktu widzenia interesuje nas ruch, o tyle z geometrycznego jedynie kształt trajektorii. Dlatego wprowadzamy relację równoważności między ruchami odbywającymi się po tej samej trajektorii.

Definicja 2.1.2. *Parametryzacje $c_k: J_k \rightarrow \mathbb{E}^n$, $k = 1, 2$ są równoważne jeśli istnieje dyfeomorfizm przedziałów $h: J_1 \rightarrow J_2$ taki, że pochodna $h'(t) > 0$ oraz $c_1 = c_2 \circ h$. Klasę równoważności tej relacji nazywamy krzywą zorientowaną.*

Mówimy o krzywej zorientowanej, gdyż dopuszczamy tylko dyfeomorfizmy o dodatniej pochodnej. Zauważmy, że obraz parametryzacji $c(J)$ nie zależy od wyboru parametryzacji z klasy abstrakcji. Zbiór $c(J)$ nazywamy nośnikiem (trajektorią lub śladem) krzywej. Jeżeli parametryzacja $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest dyfeomorfizmem $J \simeq c(J)$ to istnieją dokładnie dwie krzywe zorientowane o nośniku $c(J)$. O niezmiennikach parametryzacji, które nie zależą od wyboru parametryzacji z klasy abstrakcji mówimy jako o geometrycznych niezmiennikach krzywych. Szczególnie intuicyjną jest długość krzywej, czyli supremum długości łamanych o końcach leżących na nośniku krzywej $c(J)$.

Definicja 2.1.3. *Długością parametryzacji $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ nazywamy liczbę (także $+\infty$)*

$$L(c) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \|c(t_i) - c(t_{i+1})\| \mid t_0 < \dots < t_k \right\}$$

Twierdzenie 2.1.1. *Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest parametryzacją krzywej, to*

$$L(c) = \int_J \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Lemat 2.1.1. *Dla dowolnej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ klasy C^1 zachodzi nierówność*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Dowód. $\|f(b) - f(a)\| = \|\int_a^b f'(t) dt\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$ - skorzystaliśmy za założenia, że funkcja $f \in C^1$, żeby zapewnić całkowalność pochodnej. \square

Dowód Tw. 2.1.1. Ponieważ każdy przedział jest sumą wstępującą odcinków domkniętych wystarczy udowodnić twierdzenie dla przedziałów $J = [a, b]$. Korzystając z Lematu 2.1.1 dla każdego podziału $a = t_0 < \dots < t_k = b$ otrzymujemy nierówność:

$$\sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

zatem $L(c) \leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$. Pokażemy teraz odwrotną nierówność. Pochodna $t \mapsto \dot{c}(t)$ jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym na zwartym odcinku $[a, b]$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc $\delta > 0$ taka, że jeśli $|t - t'| < \delta$ to $\|\dot{c}(t) - \dot{c}(t')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Niech $a = t_0 < \dots < t_k = b$ będzie podziałem takim, że $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Wtedy dla dowolnych $t_i \leq t, t' \leq t_{i+1}$ zachodzi nierówność:

$$\left| \|\dot{c}(t)\| - \|\dot{c}(t')\| \right| \leq \|\dot{c}(t) - \dot{c}(t')\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Zauważmy, że

$$c(t_{i+1}) - c(t_i) = \dot{c}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + [(c(t_{i+1}) - \dot{c}(t_i)t_{i+1}) - (c(t_i) - \dot{c}(t_i)t_i)]$$

a zatem

$$\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \|\dot{c}(t_i)(t_{i+1} - t_i)\| - \|(c(t_{i+1}) - \dot{c}(t_i)t_{i+1}) - (c(t_i) - \dot{c}(t_i)t_i)\|$$

gdzie

$$\|(c(t_{i+1}) - \dot{c}(t_i)t_{i+1}) - (c(t_i) - \dot{c}(t_i)t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t) - \dot{c}(t_i)\| dt \leq \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \|\dot{c}(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) - \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}.$$

Oszacujemy składnik $\|\dot{c}(t_i)\|(t_{i+1} - t_i)$:

$$\|\dot{c}(t_i)\| = \|\dot{c}(t) - \dot{c}(t) + \dot{c}(t_i)\| \geq \left| \|\dot{c}(t)\| - \|\dot{c}(t) - \dot{c}(t_i)\| \right|.$$

Całkując obie strony tej nierówności otrzymujemy

$$\|\dot{c}(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t)\| dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t) - \dot{c}(t_i)\| dt \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t)\| dt - \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}$$

a stąd

$$\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t)\| dt - \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}$$

Sumując obie strony po $i = 0, 1, \dots, k-1$ otrzymujemy:

$$L(c) \geq \sum_{i=1}^{k-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \geq \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt - \varepsilon$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ było dowolną liczbą, więc $L(c) \geq \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$ co kończy dowód. \square

Wniosek 2.1.1. *Jeśli $c_i: J_i \rightarrow \mathbb{E}^n$ są równoważnymi parametryzacjami to $L(c_1) = L(c_2)$.*

Dowód. Wystarczy wykazać tezę dla $J_1 = [a, b]$. Niech $h: [a, b] \rightarrow [h(a), h(b)]$ będzie dyfeomorfizmem ustalającym równoważność parametryzacji. Korzystamy z twierdzenia pochodnej funkcji złożonej i o zamianie zmiennych dla całki Riemanna.

$$L(c_1) = \int_a^b \left\| \frac{dc_2(h(t))}{dt} \right\| dt = \int_a^b \|\dot{c}_2(h(t))h'(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{c}_2(h(t))\| |h'(t)| dt = \int_{h(a)}^{h(b)} \|\dot{c}_2(s)\| ds = L(c_2)$$

\square

Definicja 2.1.4. *Parametryzacja krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ nazywa się unormowaną jeśli dla każdego $s \in J$, $\|\dot{c}(s)\| = 1$.*

Jeśli $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest parametryzacją unormowaną, to $L(c) = b - a$, dlatego taką parametryzację nazywamy parametryzacją długością krzywej.

Twierdzenie 2.1.2. *Każda krzywa zorientowana posiada parametryzację unormowaną, jedyną z dokładnością do przesunięcia.*

Dowód. Niech $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie parametryzacją krzywej. Zdefiniujemy funkcję długości $s: [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$, $s(t) := \int_a^t \|\dot{c}(t)\| dt$. Ponieważ $s'(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$, więc s jest funkcją monotoniczną. Istnieje więc funkcja odwrotna $[0, L(c)] \xrightarrow{g} [a, b]$ dla której $g'(s) = \|\dot{c}(g(s))\|^{-1}$, czyli g jest dyfeomorfizmem. Złożenie odwzorowań $c \circ g: [0, L(c)] \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest równoważną z c parametryzacją unormowaną: $\|(c \circ g)'(s)\| = \|\dot{c}(g(s))g'(s)\| = 1$.

Jeśli $c_i: J_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ są równoważnymi parametryzacjami unormowanymi to

$$1 = \|\dot{c}_1(t)\| = \|\dot{c}_2(h(s))h'(s)\| = \|\dot{c}_2(h(s))\| |h'(s)| = |h'(s)|,$$

czyli $h(s) = s + s_0$. \square

Wiele ciekawych przykładów znajduje się w [Wiki Galerii Krzywych](#).

2.2 Krzywe niezdegenerowane

Pokazaliśmy, że dowolna krzywa posiada dokładnie jedną parametryzację unormowaną. Nałożymy teraz silniejszy warunek na rozpatrywane krzywe w \mathbb{E}^n : będziemy rozpatrywać parametryzacje $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ takie, że wektory pochodnych $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ są liniowo niezależne dla każdego $t \in J$. Takie parametryzacje będziemy nazywać *niezdegenerowanymi*.

Definicja 2.2.1. Dla dowolnej parametryzacji $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ i punktu $t \in J$ zdefiniujemy ciąg podprzestrzeni liniowych w $T(\mathbb{E}^n)_{c(t)} = \mathbb{R}^n$:

$$T_t^{(k)}(c) := \text{Lin}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)\} \quad \text{gdzie } k = 1, \dots, n-1.$$

Podprzestrzenie $T_t^{(k)}(c)$ nazywają się przestrzeniami ściśle stycznymi¹.

Podprzestrzenie ściśle styczne są niezmiennikami geometrycznymi tzn.

Stwierdzenie 2.2.1. Jeśli $c_i: J_i \rightarrow \mathbb{E}^n$ są równoważnymi parametryzacjami krzywej, a dyfemorfizm $h: J_1 \rightarrow J_2$ ustala tę równoważność, to dla każdego $t \in J_1$, $T_t^{(k)}(c_1) = T_{h(t)}^{(k)}(c_2)$.

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na k . Dla $k = 1$ mamy $\text{Lin}\{\dot{c}_1(t)\} = \text{Lin}\{\dot{c}_2(h(t))h'(t)\} = \text{Lin}\{\dot{c}_2(h(t))\}$. Załóżmy, że $T_t^{(k-1)}(c_1) = T_{h(t)}^{(k-1)}(c_2)$ i rozpatrzmy k -tą pochodną. Skorzystamy ze wzoru Leibniza na k -tą pochodną iloczynu (p. [Link](#)):

$$c_1^{(k)}(t) = \frac{d^k(c_2 \circ h)}{dt^k} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(\dot{c}_2(h(t))h'(t)) = c_2^{(k)}(h(t))h'(t) + \mathbf{v} \quad \text{gdzie } \mathbf{v} \in T_{h(t)}^{(k-1)}(c_2) = T_t^{(k-1)}(c_1)$$

a stąd wynika, że $T_t^{(k)}(c_1) = T_{h(t)}^{(k)}(c_2)$. □

Zauważmy, że jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest niezdegenerowaną parametryzacją krzywej, to dla $k = 1, \dots, n-1$, $\dim T_t^{(k)}(c) = k$. Pokażemy teraz, że przypadek zdegenerowanej parametryzacji można zredukować do przypadku parametryzacji niezdegenerowanej w niższej wymiarowej przestrzeni.

Stwierdzenie 2.2.2. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie parametryzacją, a $k \leq n-2$ najmniejszą liczbą taką, że dla każdego $t \in J$ zachodzi równość $T_t^{(k)}(c) = T_t^{(k+1)}(c)$. Wtedy obraz parametryzacji c leży w k -wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni \mathbb{E}^n , lecz nie leży w jej właściwej podprzestrzeni.

Dowód. Pokażemy, że dla każdego wektora $\mathbf{v} \in T_{t_0}^{(k)}(c)^\perp$ oraz $t \in J$ znika iloczyn skalarny $\langle c(t) - c(t_0), \mathbf{v} \rangle = 0$ skąd wynika, że $c(t) \in c(t_0) + T_{t_0}^{(k)}(c)$. Z założenia wynika, że $k+1$ -pochodna c wyraża się przez pochodne niższych rzędów:

$$c^{(k+1)}(t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) c^{(j)}(t)$$

¹po angielsku *osculating subspaces*

Dla ustalonego niezerowego wektora $\mathbf{v} \in T_{t_0}^{(k)}(c)^\perp$ zdefiniujemy ciąg funkcji

$$v_m(t) := \langle c^{(m)}(t), \mathbf{v} \rangle, \quad m = 1, \dots, k$$

i zauważmy, że spełniają one układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{v}_m(t) = v_{m+1}(t) & m = 1, \dots, k-1 \\ \dot{v}_k(t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) v_j(t) \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $v_j(t_0) = 0$. Funkcje zerowe stanowią rozwiązanie tego układu; jedyne jak wiadomo z teorii równań zwyczajnych. Stąd w szczególności:

$$0 = \int_{t_0}^t \langle \dot{c}(t), \mathbf{v} \rangle dt = \langle \int_{t_0}^t \dot{c}(t) dt, \mathbf{v} \rangle = \langle c(t) - c(t_0), \mathbf{v} \rangle.$$

□

2.3 Równania Freneta-Serreta

Dla dowolnej niezdegenerowanej parametryzacji $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ zdefiniujemy ruchomy reper $\mathbf{e}: J \rightarrow SO(n)$ zwany reperem Freneta²-Serreta³, a w skrócie przez nas FS-reperem. W dowolnym punkcie $t \in J$ liniowo niezależny układ $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t) \in \mathbb{R}^n$ możemy jednoznacznie uzupełnić do dodatnio zorientowanej bazy przestrzeni \mathbb{R}^n dodając do niego na ostatnim miejscu wektor $\mathbf{v}_n(t) := \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) \times \dots \times c^{(n-1)}(t)$, gdzie \times oznacza iloczyn wektorowy. Układ wektorów $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t), \mathbf{v}_n(t) \in \mathbb{R}^n$ definiuje odwzorowanie $Der_c: J \rightarrow GL^+(n)$. Składając je z ortonormalizacją Grama-Schmidta $ort: GL^+(n) \rightarrow SO(n)$ otrzymujemy FS-reper: $\mathbf{E}(t) := ort(Der_c)$, czyli $\mathbf{E}: J \rightarrow SO(n)$.

Twierdzenie 2.3.1. *Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest unormowaną, niezdegenerowaną parametryzacją krzywej to istnieją gładkie odwzorowania $K: J \rightarrow M(n, n)$ takie, że*

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = K(t)\mathbf{E}(t)$$

przy czym macierz $K(t) = (\kappa_{ij})$ ma następujące własności:

1. Jest antysymetryczna tzn. $\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$,
2. jeśli $|i - j| > 1$ to $\kappa_{ij} = 0$,
3. dla $i < n - 1$, $\kappa_{i, i+1} > 0$,
4. jeśli $\kappa_{n-1, n} = 0$ to nośnik krzywej leży w podprzestrzeni afinicznej wymiaru $n - 1$.

²Jean Frédéric Frenet (Pèrigueux, F 1816 - 1900 Pèrigueux, F)

³Joseph Alfred Serret (Paris 1819 - 1885 Versailles)

Dowód.

Ad 1. Antysymetria macierzy $K(t)$ wynika bezpośrednio z twierdzenia o ruchomym reperze (Tw. 1.9.1).

Ad 2. Z własności ortonormalizacji Grama-Schmidta wiemy, że dla każdego $i \leq n-1$, $\text{Lin}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(i)}(t)\} = \text{Lin}\{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_i(t)\}$ a więc $\dot{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \kappa_{ij} \mathbf{e}_j$. Stąd wynika, że $\kappa_{ij} = 0$ dla $j > i+1$, a zatem z antysymetryczności macierzy dla $|i-j| > 1$.

Ad 3. Zauważmy, że dla $i \leq n-1$, $\kappa_{i,i+1} = \langle \dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$. Dla $i < n$ zapiszmy wektor $\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^i \lambda_{ij} c^{(j)}$. Ponieważ z definicji ortonormalizacji wiemy, że $\langle \mathbf{e}_i, c^{(j)} \rangle = 0$ dla $j < i$ a więc $1 = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_{ii} \langle c^{(i)}, \mathbf{e}_i \rangle$ a więc $\lambda_{ii}^{-1} = \langle c^{(i)}, \mathbf{e}_i \rangle > 0$ dla $i \leq n-1$ a pochodna $\dot{\mathbf{e}}_i$ jest równa:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \lambda_{ii} c^{(i+1)} + \sum_{j=1}^i \alpha_j c^{(j)}.$$

Wynika stąd, że dla $i \leq n-2$

$$\kappa_{i,i+1} = \langle \dot{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \lambda_{ii} \langle c^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \lambda_{ii} \lambda_{i+1,i+1}^{-1} > 0.$$

Ad 4. Ostatni wektor FS-reperu jest prostopadły do podprzestrzeni $T_t^{n-1}(c)$, a z pkt. 1,2 wnioskujemy, że $\dot{\mathbf{e}}_n = 0$, a więc $\mathbf{e}_n = \text{const}$. Całkując równość $\langle \dot{c}, \mathbf{e}_n \rangle = 0$, podobnie jak w dowodzie Stw. 2.2.2 otrzymujemy, że $c(t) \in c(t_0) + \text{Lin}\{\mathbf{e}_n\}^\perp$. \square

Definicja 2.3.1. Współczynniki $\kappa_{i,i+1} =: \kappa_i$ nazywamy krzywiznami krzywej c .

Definicja 2.3.2. Dwie krzywe zorientowane o unormowanych opisach $c_1, c_2: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ są przystające jeśli istnieje afiniczna izometria zachowująca orientację $F: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ taka, że $F \circ c_1 = c_2$.

Zauważmy, że przystające krzywe mają te same krzywizny a w następnym podrozdziale udowodnimy twierdzenie odwrotne.

Stwierdzenie 2.3.1. Jeśli dwa opisy $c_1, c_2: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ są przystające, to $\kappa_i^{c_1} = \kappa_i^{c_2}$ dla $i = 1, \dots, n-1$.

Dowód. Niech $F: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie afiniczną izometrią taką, że $F \circ c_1 = c_2$. Dla pochodnych zachodzą więc równości $DF_{c_1(s)}(c_1^{(k)}(s)) = c_2^{(k)}(s)$, w szczególności opis c_1 jest unormowany i niezdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy taki jest opis c_2 . Ponieważ F jest izometrią zachowującą orientację, to pochodna DF (część liniowa F) jest izometrią liniową zachowującą orientację. Wynika stąd, że przeprowadza ortonormalizację układu wektorów pochodnych $c_1^{(k)}(s)$ na ortonormalizację układu $c_2^{(k)}(s)$, więc jeśli $\{\mathbf{e}_1^i, \dots, \mathbf{e}_n^i\}$ jest FS-reperem krzywej c_i , to $DF(\mathbf{e}_k^1) = \mathbf{e}_k^2$. Z definicji krzywizn (wzory FS) $\dot{\mathbf{e}}_k^i = -\kappa_{k-1}^i \mathbf{e}_{k-1}^i + \kappa_{k+1}^i \mathbf{e}_{k+1}^i$ a więc stąd wynika, że $\kappa_k^1 = \kappa_k^2$. \square

Zauważmy, że przystające krzywe mają tę samą długość. W następnym rozdziale pokażemy, że krzywizny wyznaczają jednoznacznie krzywą z dokładnością do przystawiania.

2.4 Podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Twierdzenie 2.4.1. Niech $\kappa_i: J \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$ będą gładkimi funkcjami takimi, że $\kappa_i > 0$ dla $i < n-1$ określonymi na przedziale $J \subset \mathbb{R}$. Wtedy istnieje niezdegenerowana, unormowana parametryzacja krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ taka, że funkcje κ_i są jej krzywiznami. Dwie krzywe mające te same krzywizny są przystające.

Dowód. Zdefiniujemy antysymetryczną macierz $K = (\kappa_{ij})$ w której $\kappa_{i,i+1} = \kappa_i$ oraz $\kappa_{ij} = 0$ jeśli $|i-j| > 1$. FS-reper $\mathbf{E}(t)$ szukanej krzywej musiałby spełniać równanie różniczkowe:

$$\dot{\mathbf{E}}(s) = K(s)\mathbf{E}(s). \quad (2.1)$$

Zanalizujemy rozwiązania tego równania z warunkiem początkowym $\mathbf{E}(s_0) = Id$, czyli $\mathbf{E}(s_0)$ jest bazą kanoniczną. Mając rozwiązania tego równania zdefiniujemy odwzorowanie $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ z warunku $\dot{c}(s) = \mathbf{e}_1(s)$, a więc

$$c(s) = p_0 + \int_{s_0}^s \mathbf{e}_1(s) ds.$$

Sprawdzimy, że:

1. c jest unormowaną, niezdegenerowaną parametryzacją krzywej,
2. Wektory $\mathbf{E}(s) = (\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_n(s))$ tworzą FS-reper krzywej c , a zatem κ_i są krzywiznami.

Wykażemy, że macierze $\mathbf{E}(s)$ są ortogonalne. Obliczmy pochodną

$$(\mathbf{E}^T \mathbf{E})' = \dot{\mathbf{E}}^T \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^T K^T \mathbf{E} + \mathbf{E}^T K \mathbf{E} = 0.$$

Stąd wynika, że $\mathbf{E}^T \mathbf{E} = \text{const}$. Jeśli więc w pewnym punkcie $\mathbf{E}(s_0) = Id$ (lub ogólniej jest macierzą ortogonalną), to dla każdego s , $\mathbf{E}^T(s)\mathbf{E}(s) = Id$, a więc $\mathbf{E}(s)$ jest macierzą ortogonalną. Wynika stąd w szczególności, że c jest parametryzacją unormowaną.

Pozostaje wykazać, że $\mathbf{E}(s)$ jest FS-reperem parametryzacji c , wykazując zarazem, że c jest niezdegenerowaną parametryzacją. Trzeba sprawdzić następujące warunki:

1. $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_i(s)\} = \text{Lin}\{\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dots, c^{(i)}(s)\}$
2. Bazy $\{\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_i(s)\}$ i $\{\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dots, c^{(i)}(s)\}$ wyznaczają tę samą orientację.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na i . Dla $i = 1$ z definicji $\dot{c}(s) = \mathbf{e}_1(s)$. Załóżmy, że punkty 1,2 zachodzą dla i . Wynika stąd, że

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^i \lambda_{ij} c^{(j)} \quad \text{oraz} \quad 1 = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \lambda_{ii} \langle c^{(i)}, \mathbf{e}_i \rangle \quad (2.2)$$

a więc $\langle c^{(i)}, \mathbf{e}_i \rangle^{-1} = \lambda_{ii} > 0$, bowiem odpowiednie układy są zgodnie zorientowane. Różniczkując równość 2.2 i korzystając z równania 2.1 otrzymujemy, że

$$\kappa_i \mathbf{e}_{i+1} = \dot{\mathbf{e}}_i + \kappa_{i-1} \mathbf{e}_{i-1} \equiv \lambda_{ii} c^{(i+1)} \pmod{T^i(c)}$$

Ponieważ $\kappa_i > 0$ wynika stąd, że $\text{Lin}\{\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_{i+1}(s)\} = \text{Lin}\{\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dots, c^{(i+1)}(s)\}$. Żeby wykazać, iż bazy $\{\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_{i+1}(s)\}$ i $\{\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dots, c^{(i+1)}(s)\}$ wyznaczają te same orientacje, trzeba zauważyć że $\langle c^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle > 0$. Istotnie:

$$\lambda_{ii} \langle c^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \langle \lambda_{ii} c^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \langle \kappa_i \mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \kappa_i > 0.$$

Ponieważ $\lambda_{ii} > 0$, więc także $\langle c^{(i+1)}, \mathbf{e}_{i+1} \rangle > 0$, co kończy dowód, że $E(s)$ jest FS-reperem parametryzacji c .

Wykażemy teraz, że krzywizny wyznaczają krzywą jednoznacznie z dokładnością do przystawiania. Wynika to z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych z zadaniem warunkiem początkowym. Niech $c_1, c_2: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ będą dwoma niezdegenerowanymi, unormowanymi parametryzacjami krzywych oraz $s_0 \in J$. Istnieje przekształcenie afiniczne $F: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ takie, że $F(c_1(s_0)) = c_2(s_0)$ oraz $DF(\mathbf{e}_i^1(s_0)) = \mathbf{e}_i^2(s_0)$. Ponieważ wektory $DF(\mathbf{e}_i^1)$ spełniają to samo równanie co wektory \mathbf{e}_i^2 i z tym samym warunkiem początkowym, więc z twierdzenia o jednoznaczności $DF(\mathbf{e}_i^1(s)) = \mathbf{e}_i^2(s)$ dla $s \in J$. Podobnie $F(c_1(s)) = c_2(s)$. \square

W kolejnych podrozdziałach omówimy szczegółowo zastosowania wzorów Freneta-Serreta w przypadku krzywych płaskich i przestrzennych.

2.5 Równania Freneta - Serreta krzywej płaskiej

Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ jest opisem unormowanym to jej reper Freneta-Serreta stanowią wektory $\mathbf{e}_1(s) := \dot{c}(s)$ oraz $\mathbf{e}_2(s)$ - wektor jednostkowy prostopadły do $\mathbf{e}_1(s)$, taki, że baza $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s) \in \mathbb{R}^2$ jest dodatnio zorientowana (tzn. zgodnie z bazą kanoniczną). Jeśli $\mathbf{e}_1(s) = (\dot{c}_1(s), \dot{c}_2(s))$ to $\mathbf{e}_2(s) = (-\dot{c}_2(s), \dot{c}_1(s))$. Wzory Freneta sprowadzają się do dwóch równań:

$$\dot{\mathbf{e}}_1(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \quad \dot{\mathbf{e}}_2(s) = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s)$$

gdzie $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}$ jest zorientowaną krzywizną krzywej c . Oczywiście $|\kappa(s)| = \|\dot{\mathbf{e}}_1(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$. - moduł krzywizny zorientowanej nazywa się często *krzywizną*.

Przypomnimy, znane z Topologii, własności przekształcenia eksponencjalnego.

Definicja 2.5.1. *Nawinięciem prostej na okrąg nazywamy przekształcenie $ex: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ zadane wzorem $ex(\theta) = e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$.*

Stwierdzenie 2.5.1. *Niech $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 0$, będzie zwartym zbiorem gwiazdzystym względem $x_0 \in X$ (to znaczy zawierającym, dla każdego $x \in X$, cały odcinek łączący x z x_0). Niech $f: X \rightarrow S^1$ będzie funkcją ciągłą, $t_0 \in \mathbb{R}$ zaś dowolną liczbą taką, że $ex(t_0) = f(x_0)$. Istnieje wtedy dokładnie jedna funkcja ciągła $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca równości*

$$\tilde{f}(x_0) = t_0 \quad \text{oraz} \quad \forall x \in X \quad ex(\tilde{f}(x)) = f(x).$$

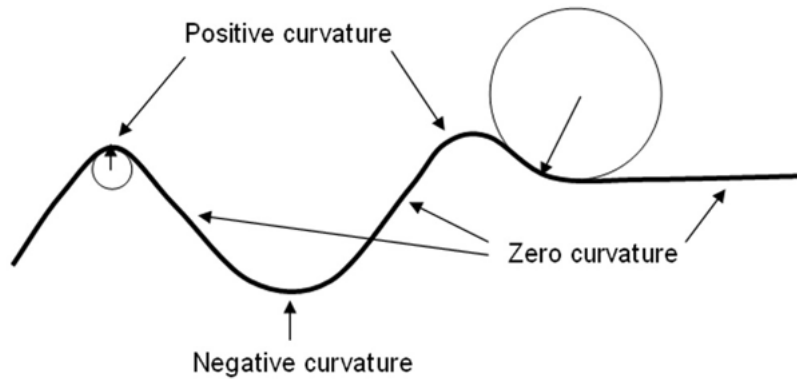
W przypadku krzywych płaskich wektor \mathbf{e}_1 oznacza się często \mathbf{t} (styczny - *tangent*) a wektor \mathbf{e}_2 przez \mathbf{n} - normalny. Ponieważ $\mathbf{t}(s)$ jest wektorem o długości 1, może więc być zapisany w postaci $\mathbf{t}(s) := (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, gdzie $\theta(s)$ jest funkcją gładką, miarą kąta między wektorem stycznym a ustalonym wektorem. Krzywizna mierzy szybkość zmian tego kąta.

Stwierdzenie 2.5.2 (Geometryczna interpretacja krzywizny krzywej płaskiej).

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}(s).$$

Dowód. Skoro $\mathbf{t} := (\cos \theta, \sin \theta)$, to $\dot{\mathbf{t}} = \dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta)$. Z definicji $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$, a więc $\kappa(s) = \dot{\theta}(s)$. \square

Poniższy [rysunek](#) pokazuje, że krzywizna zorientowana zmienia znak zależnie od tego czy wektor styczny porusza się zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Krzywizną całkowitą krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ nazywamy całkę $\int_J \kappa(s) ds$. Jeśli $J = [a, b]$, to ze Stw. 2.5.2 wynika, że całkowita krzywizna jest zmianą kąta stycznej od punktu a do punktu b :

$$\int_a^b \kappa(s) ds = \int_a^b \dot{\theta}(s) ds = \theta(b) - \theta(a).$$

Obliczymy teraz krzywiznę krzywej na podstawie jej opisu $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$, który niekoniecznie jest unormowany. Niech $s \mapsto t(s)$ będzie reparametryzacją krzywej taką, że złożenie $c(t(s))$ jest krzywą unormowaną. Wtedy⁴

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{d}{ds}(c(t(s))) = \frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \Big|_{t=t(s)}$$

a więc funkcja wektorowa $\mathbf{e}_1(s)$ jest złożeniem odwzorowań $s \mapsto t(s)$ oraz $\mathbf{e}_1(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Wynika stąd wzór na pochodną $\dot{\mathbf{e}}_1(s)$ w terminach opisu c :

$$\dot{\mathbf{e}}_1(s) = \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \Big|_{t=t(s)} \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\|c'(t)\|} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \Big|_{t=t(s)} \quad (2.3)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c'}{\|c'\|} \right) = \frac{c''\|c'\| - c'\|c'\|'}{\|c'\|^2} = \frac{c''\|c'\| - c'\frac{\langle c', c'' \rangle}{\|c'\|}}{\|c'\|^2} = \frac{c''\|c'\|^2 - c'\langle c', c'' \rangle}{\|c'\|^3} \quad (2.4)$$

⁴Pochodne krzywej po parametrze t oznaczamy c', c'' rezerwując kropkę na różniczkowaniu opisu unormowanego.

Stwierdzenie 2.5.3. *Jeśli krzywa $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ dana jest przez opis parametryczny $c(t) = p_0 + (x(t), y(t))$, to*

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\|(x', y')\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dowód. Skorzystamy ze wzoru definiującego krzywiznę $\kappa = \langle \dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ oraz faktu, że $\mathbf{e}_2(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|}(-y', x')$. Podstawiając obliczenie wektora $\dot{\mathbf{e}}_1(s)$ (p. 2.3, 2.4) oraz $c' = (x', y')$ i $c'' = (x'', y'')$ otrzymujemy równość:

$$\kappa = \langle \dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{1}{\|c'\|^5} \langle c'' \|c'\|^2 - c' \langle c', c'' \rangle, (-y', x') \rangle = \frac{1}{\|\dot{c}\|^3} \langle (x'', y''), (-y', x') \rangle = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□

2.6 Umlaufsatz

Gładką krzywą zamkniętą nazywamy krzywą posiadającą gładką parametryzację $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ taką, że $c(a) = c(b)$ oraz równe są pochodne $c^{(r-)}(a) = c^{(r+)}(b)$, gdzie wskaźniki $-$, $+$ oznaczają odpowiednio pochodną prawo- i lewostronną. Zauważmy, że jeśli pewien opis posiada opisaną własność, to każdy opis równoważny także ją posiada; w szczególności opis unormowany. Równoważnie, krzywa jest zamknięta, jeśli istnieje parametryzacja $\bar{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ oraz i liczba $T > 0$ taka, że $c(s+T) = c(s)$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$ oraz $\bar{c}|_J = c$.

Krzywą zamkniętą nazywamy *prostą*, jeśli odwzorowanie c jest różnowartościowe na odcinku otwartym (a, b) . Obraz (nośnik) krzywej zamkniętej jest homeomorficzny z okręgiem. Udowodnimy klasyczne twierdzenie, mówiące, że krzywizna całkowita krzywej zamkniętej jest równa $\pm 2\pi$.⁵

Niech $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem unormowanym. Odwzorowanie wektora stycznego $\mathbf{t}(s) := \dot{c}(s)$ przyjmuje wartości w okręgu jednostkowym S^1 oraz $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$. Odwzorowanie $\mathbf{t}: [0, L] \rightarrow S^1$ jest więc pętlą na okręgu. Naszym celem jest wykazanie, że przy założeniu braku samoprzecięć krzywej c , pętla ta obiega okrąg dokładnie raz.

Stwierdzenie 2.6.1. *Niech $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem unormowanym zamkniętej krzywej. Wówczas istnieje ciągła funkcja $\tilde{\mathbf{t}}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\mathbf{t} = \text{ex} \circ \tilde{\mathbf{t}}$ oraz dla każdej takiej funkcji różnica*

$$\tilde{\mathbf{t}}(L) - \tilde{\mathbf{t}}(0)$$

przyjmuje tę samą wartość, która jest całkowitą wielokrotnością 2π .

Dowód. Istnienie podniesienia $\tilde{\mathbf{t}}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ wynika wprost z Stw. 2.5.1. To, że różnica $\tilde{g}(L) - \tilde{g}(0)$ jest całkowitą wielokrotnością 2π , wynika z równości $g(0) = g(L)$ oraz $g = \text{ex} \circ \tilde{g}$. □

Dowiedliśmy właśnie poprawności poniższej definicji.

⁵Wykorzystujemy opracowanie *Umlaufsatz*, w szczególności rysunki, zawarte w pracy licencjackiej p. Jakuba Paligi, wykonanej pod kierunkiem autora.

Definicja 2.6.1. Liczbą obiegu krzywej zamkniętej o opisie unormowanym $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ nazywamy liczbę

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\tilde{\mathbf{t}}(L) - \tilde{\mathbf{t}}(0)),$$

gdzie $\tilde{\mathbf{t}}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ jest podniesieniem przekształcenia $\mathbf{t}: [0, L] \rightarrow S^1$.

Ponieważ zachodzi równość $\mathbf{t}(0) = \mathbf{t}(L)$, a więc \mathbf{t} jest pętlą na okręgu, a n_c po prostu stopniem tej pętli. Również z tego powodu, wybór „punktu startowego” $\gamma(0)$ nie jest wiążący i liczba obiegu może być obliczona w identyczny sposób po jego zmianie. Poniższe stwierdzenie będzie nam służyć w taki właśnie sposób.

Stwierdzenie 2.6.2. Niech $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem unormowanym zamkniętej krzywej. Niech odwzorowanie $h: [0, L] \times [0, L] \rightarrow S^1$ będzie dane przez $h(t, c) = \mathbf{t}((t+c) \bmod L)$. Istnieje wtedy funkcja ciągła $\tilde{h}: [0, L] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $h = ex \circ \tilde{h}$; dla każdej takiej funkcji i dowolnego punktu $t \in [0, L]$ zachodzi równość

$$\tilde{h}(L, t) - \tilde{h}(0, t) = 2\pi n_c.$$

Dowód. Istnienie funkcji \tilde{h} jest konsekwencją zwartości $[0, L] \times [0, L]$, ciągłości przekształcenia h i stwierdzenia 2.5.1. Ponieważ $h(-, 0): [0, L] \rightarrow S^1$ jest identyczna funkcji g ze stwierdzenia 2.6.1, jednoznaczność podniesienia pociąga równość $z_\gamma = \frac{1}{2\pi}\tilde{h}(L, 0) - \tilde{h}(0, 0)$.

Jako, że dla każdego $c \in [0, L]$ różnica $\tilde{h}(L, c) - \tilde{h}(0, c)$ jest całkowitą wielokrotnością 2π , to przyporządkowanie $c \mapsto \tilde{h}(L, c) - \tilde{h}(0, c)$ przyjmuje jedynie wartości postaci $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; jego ciągłość i spójność odcinka $[0, L]$ oznaczają, że funkcja ta jest stała, bowiem zbiór $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ jest dyskretny. \square

W przypadku krzywej nieposiadającej samoprzecięć, do zbadania liczby obiegu możemy użyć naturalnego rozszerzenia funkcji \mathbf{t} . Każdy kierunek styczny jest bowiem granicą siecznych łączących punkty zbiegające do punktu styczności; gdy brak samoprzecięć, pozwala to zadać ciągle odwzorowanie trójkąta w okrąg S^1 .

Definicja 2.6.2. Niech $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$, będzie opisem unormowanym krzywej bez samo-przecięć. Funkcją kierunku siecznej krzywej c nazywamy odwzorowanie $f_c: T \rightarrow S^1$ trójkąta $T := \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L\}$ w okrąg jednostkowy S^1 zadane wzorem

$$f_c(s_1, s_2) = \begin{cases} \mathbf{t}(s), & \text{gdy } s = s_1 = s_2. \\ -\mathbf{t}(0), & \text{gdy } (s_1, s_2) = (0, L) \\ \frac{c(s_2) - c(s_1)}{\|c(s_2) - c(s_1)\|} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stwierdzenie 2.6.3. Funkcja kierunku siecznej $f_c: T \rightarrow S^1$ posiada podniesienie $\tilde{f}_c: T \rightarrow \mathbb{R}$ względem $ex: \mathbb{R} \rightarrow S^1$; zachodzi równość

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, 0)).$$

Dowód. Na mocy stwierdzenia 2.5.1 istnieje przekształcenie \tilde{f} ; ponieważ wtedy odwzorowanie $t \mapsto \tilde{f}(t, t)$ jest podniesieniem przekształcenia $\dot{\gamma}$, teza wynika bezpośrednio z definicji liczby obiegu. \square

Definicja 2.6.3. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem unormowanym, a $\mathbf{v} \in S^1$. Funkcją wysokości od punktu p_0 krzywej c w kierunku \mathbf{v} nazywamy odwzorowanie odcinka J w oś rzeczywistą zadane wzorem $h_\gamma^b(t) := \langle c(t) - p_0, \mathbf{v} \rangle$.

Twierdzenie 2.6.1 (Umlaufsatz). Jeśli $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ jest opisem unormowanym zamkniętej krzywej płaskiej regularnej klasy C^1 nieposiadającej samoprzecięć, to $n_c = \pm 1$.

Dowód. Niech $c: [0, L] \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem unormowanym. Wybierzmy punkt $p_0 \in \mathbb{E}^2$ oraz wektor $\mathbf{i} := (0, 1) \in S^1$. Funkcja wysokości $h_c^\mathbf{i}(t) := \langle c(t) - p_0, \mathbf{i} \rangle$ posiada minimum w pewnym punkcie s_{min} i na mocy stwierdzenia 2.6.2 możemy założyć, bez straty ogólności w kontekście badania liczby obiegu, że $s_{min} = 0$.

Niech $f_c: T \rightarrow S^1$ będzie funkcją kierunku siecznej, a $\tilde{f}_c: T \rightarrow \mathbb{R}$ - jej podniesieniem względem $\text{ex}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Ponieważ liczba 0 jest ekstremum funkcji wysokości $h_c^\mathbf{i}$, a więc wektor $f_c(0, 0)$ jest prostopadły do \mathbf{i} , zatem równy $\mathbf{t} = \pm(1, 0)$. Załóżmy, że $f_c(0, 0) = (1, 0)$. Wybierzmy podniesienie $\tilde{f}_c: T \rightarrow \mathbb{R}$ funkcji f_c takie, że $\tilde{f}_c(0, 0) = 0$. Chcemy wyznaczyć liczbę obiegu równą, w myśl stwierdzenia 2.6.3,

$$z_c = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, 0)) = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}_c(L, L).$$

Pokażemy, że $\tilde{f}_c(L, L) = 2\pi$, czyli $z_c = 1$. W tym celu badamy zmianę wartości funkcji \tilde{f}_c na odcinkach łączących, odpowiednio, $(0, 0)$ z $(0, L)$ oraz $(0, L)$ z (L, L) .

Kluczowa obserwacja jest następująca: krzywa c leży w półpłaszczyźnie zadanej warunkiem $\langle p - c(0), \mathbf{i} \rangle > 0$, a więc kierunek dowolnej siecznej krzywej c , o początku w $c(0)$, leży na domkniętym górnym półokręgu w S^1 ; siecznej o końcu w $c(0)$, na dolnym.

Na mocy równości $(1, 0) = f_c(0, 0) = -f_c(0, L)$ istnieje liczba całkowita k taka, że $\tilde{f}_c(0, L) = \pi + 2k\pi$. Gdyby $k < 0$ to obraz odcinka $[0, L]$ przy ciągłym przyporządkowaniu $t \mapsto \tilde{f}_c(0, t)$ zawierałby liczby z przedziału $(-\pi, 0)$; gdyby $k > 0$, zawierałby cały przedział między dwoma kolejnymi całkowitymi wielokrotnościami 2π . W obu wypadkach, w połączeniu z równością $f_c = \text{ex} \circ \tilde{f}_c$, wyznaczałoby to sieczne z dolnego otwartego półokręgu, w sprzeczności z obserwacją.

Analogicznie, $\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, L)$ równać się musi π . Daje to ostatecznie równość

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}_c(L, L) = 1,$$

co kończy dowód w przypadku, gdy $f(0, 0) = (1, 0)$.

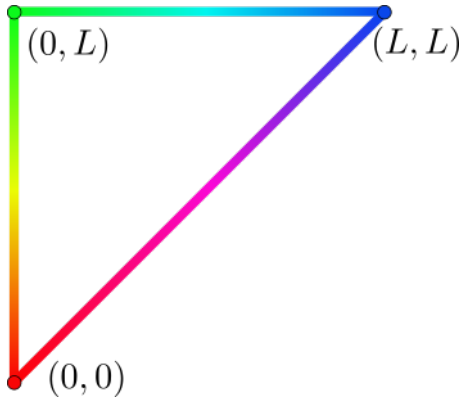
Identycznie przebiega dowód równości $z_c = -1$, jeśli $f(0, 0) = (-1, 0)$; zachodzą wtedy równości

$$\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, L) = \tilde{f}_c(0, L) - \tilde{f}_c(0, 0) = -\pi,$$

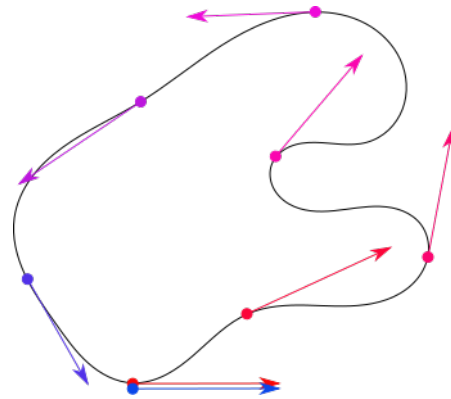
skąd

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, 0)) = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f}_c(L, L) - \tilde{f}_c(0, L) + (\tilde{f}_c(0, L) - \tilde{f}_c(0, 0))) = \frac{1}{2\pi}(-\pi - \pi) = -1.$$

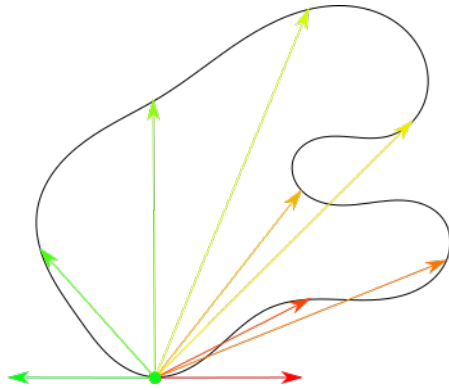
□



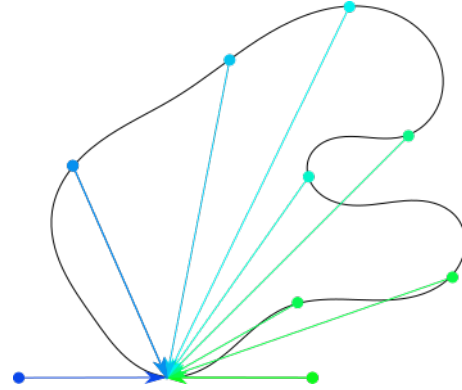
Rysunek 2.1: Część dziedziny funkcji \tilde{f}_c dla krzywej regularnej



Rysunek 2.2: $(t, t) : (0, 0) \mapsto (L, L)$



Rysunek 2.3: $(0, t) : (0, 0) \mapsto (0, L)$



Rysunek 2.4: $(t, L) : (0, L) \mapsto (L, L)$

2.7 Ewoluta i involuta krzywej płaskiej

Definicja 2.7.1. Dla opisu unormowanego krzywej płaskiej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ i punktu $s_0 \in J$ takiego, że $\kappa(s_0) \neq 0$ okręgiem ściśle stycznym w punkcie s_0 nazywamy okrąg o środku w punkcie $c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0)$ – nazywanym środkiem krzywizny krzywej w danym punkcie – i promieniu $\frac{1}{\kappa(s_0)}$. Liczba $|\kappa(s_0)|^{-1}$ nazywa się promieniem krzywizny w punkcie s_0 .

Wykażemy, że proste styczne do krzywej c i okręgu ściśle stycznego pokrywają się. Zapiszmy parametryzację łuku okręgu o środku w punkcie $c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0)$ i promieniu $R(s_0) = R$:

$$\rho(s) = (c(s_0) \pm R\mathbf{n}(s_0)) + R(\cos s)\mathbf{n}(s_0) + R(\sin s)\mathbf{t}(s_0) \quad \text{dla } s \in \mathbb{R}$$

Zakładając, że krzywizna jest ujemna dla $\rho(0) = c(s_0)$ oraz $\dot{\rho}(0) = R(\cos 0)\mathbf{t}(s_0) = R\mathbf{t}(s_0)$. Stąd wynika, że jednostkowe wektory styczne do krzywej c w punkcie s_0 i do okręgu ρ w punkcie 0 pokrywają się. W przypadku dodatniej krzywizny bierzemy $\rho(\pi) = c(s_0)$. Promień krzywizny okręgu o promieniu R wynosi R . Okrąg ściśle styczny w punkcie $s_0 \in J$ ma więc tę samą krzywiznę, co krzywa w punkcie $s_0 \in J$. Punkt $c(s_0)$ należy do okręgu

ściśle stycznego i wektor $\dot{c}(s_0)$ jest styczny do okręgu. Tak jak prosta styczna aproksymuje krzywą z dokładnością do pierwszej pochodnej, to okrąg ściśle styczny jest aproksymacją z dokładnością do drugiej pochodnej.

Podobnie jak styczna która jest granicą prostych siecznych, okrąg ściśle styczny jest granicą okręgów siecznych.

Definicja 2.7.2. *Okręgiem siecznym do opisu $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ nazywamy okrąg opisany na trójkącie, którego wierzchołki leżą na krzywej.*

Stwierdzenie 2.7.1. *Okrąg ściśle styczny do opisu unormowanego $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ w punkcie s_0 jest granicą okręgów siecznych przechodzących przez punkt $c(s_0)$ gdy punkty przecięcia z krzywą zbiegają do $c(s_0)$.*

Dowód. Wystarczy rozważać punkty postaci $c(s_0 - \delta), c(s_0), c(s_0 + \delta)$ dla dostatecznie małych wartości $\delta > 0$. Warunek $\kappa(s_0) \neq 0$ gwarantuje, że punkty te nie są współliniowe. Środek okręgu opisanego na trójkącie o tych wierzchołkach leży na przecięciu symetralnych odcinków $[c(s_0 - \delta), c(s_0)]$ oraz $[c(s_0), c(s_0 + \delta)]$. Ponieważ proste te dążą do prostej prostopadłej do wektora $\dot{c}(s_0)$ przechodzącej przez punkt $c(s_0)$, a więc granica ich punktów przecięcia, jeśli istnieje musi leżeć na tej prostej.

Znajdziemy granicę punktów przecięcia symetralnej odcinka $[c(s), c(s_0)]$ z prostą normalną do wektora $\dot{c}(s_0)$ przechodzącą przez punkt $c(s_0)$. Punkty na prostej normalnej przechodzącej przez punkt $c(s_0)$ są postaci $c(s_0) + r\mathbf{n}(s_0)$ dla pewnej wartości parametru $r \in \mathbb{R}$, a więc punkt przecięcia z symetralną odcinka $[c(s), c(s_0)]$ musi spełniać równanie:

$$0 = \langle c(s) - c(s_0), \frac{c(s) - c(s_0)}{2} - r(s)\mathbf{n}(s_0) \rangle = \frac{1}{2} \|c(s) - c(s_0)\|^2 - r(s) \langle c(s) - c(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle$$

a stąd

$$r(s) = \frac{\frac{1}{2} \|c(s) - c(s_0)\|^2}{\langle c(s) - c(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle} \quad (2.5)$$

Obliczymy granicę wartości $\lim_{s \rightarrow s_0} r(s)$. Zauważmy, że licznik i mianownik wyrażenia 2.5 dążą do 0 gdy $s \rightarrow s_0$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|c(s) - c(s_0)\|^2 \right) = \langle c(s) - c(s_0), \dot{c}(s) \rangle, \quad \frac{d}{dt} (\langle c(s) - c(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle) = \langle \dot{c}(s), \mathbf{n}(s_0) \rangle$$

Ponieważ nadal licznik i mianownik dążą do zera, obliczmy drugie pochodne:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} \|c(s) - c(s_0)\|^2 \right) = 1 + \langle c(s) - c(s_0), \ddot{c}(s) \rangle, \quad \frac{d^2}{dt^2} (\langle c(s) - c(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle) = \langle \ddot{c}(s), \mathbf{n}(s_0) \rangle$$

i ponownie stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{t \rightarrow s_0} r(s) = \lim_{t \rightarrow s_0} \frac{1 + \langle c(s) - c(s_0), \ddot{c}(s) \rangle}{\langle \ddot{c}(s), \mathbf{n}(s_0) \rangle} = \frac{1}{\kappa(s_0)}$$

Przypomnijmy, że liczbę $R(s_0) := \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ nazywamy promieniem krzywizny krzywej c w punkcie s_0 a punkt $c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0)$ środkiem krzywizny. □

Uwaga 2.7.1. Środek okręgu ściśle stycznego można także wyznaczyć jako granicę punktów przecięcia prostych normalnych do krzywej w punktach $t \rightarrow t_0$.

Ewoluta danej krzywej to krzywa której nośnik składa się ze środków okręgów ściśle stycznych (*osculating circle*) do wyjściowej krzywej. Dokładniej:

Definicja 2.7.3. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ będzie opisem parametrycznym takim, że $\kappa(t) \neq 0$.
Odwzorowanie

$$\varepsilon^c(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)$$

nazywa się ewolutą krzywej c . Liczba $|\kappa(t)|^{-1}$ nazywa się promieniem krzywizny.

Świetną ruchomą wizualizację FS reperu oraz okręgów ściśle stycznych do [krzywej Lisajous](#) można zobaczyć [tutaj](#).

Stwierdzenie 2.7.2. Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ jest opisem unormowanym takim, że $\kappa(t) \neq 0$ to

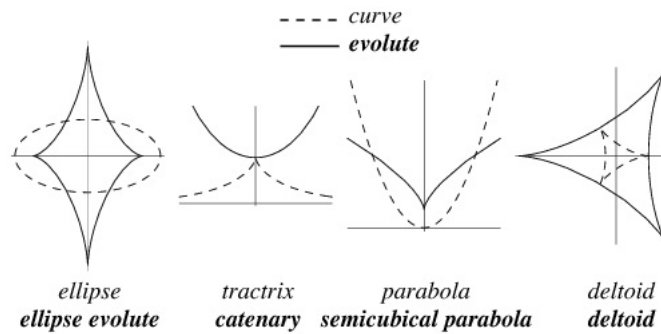
$$\dot{\varepsilon}^c(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}\mathbf{n}(t).$$

W szczególności ε^c jest parametryzacją, jeśli $\kappa'(t) \neq 0$, a wektor styczny do ewoluty $\dot{\varepsilon}^c$ jest normalny do krzywej c .

Dowód.

$$\dot{\varepsilon}^c(t) = \dot{c}(t) + \frac{\dot{\mathbf{n}}(t)\kappa(t) - \mathbf{n}(t)\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} = \dot{c}(t) - \dot{c}(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}\mathbf{n}(t)$$

□



[Źródło Wolfram](#)

Definicja 2.7.4. Ewolwentą (inwolutą) krzywej e nazywamy krzywą c taką, że e jest ewolutą krzywej c tzn. $\varepsilon^c = e$.

Stwierdzenie 2.7.3. Jeśli $e: J \rightarrow \mathbb{E}^2$ jest opisem unormowanym to dla dowolnego $s_0 \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $c(s) := e(s) - (s - s_0)\dot{e}(s)$ definiuje ewolwentę krzywej e .

Dowód. Sprawdzimy, że ewolutą krzywej c jest krzywa e . Istotnie, korzystając z Definicji 2.7.3 oraz definicji krzywizny dla opisu unormowanego mamy:

$$\varepsilon^c(s) = e(s) - (s - s_0)\dot{e}(s) + \frac{1}{\kappa_c(s)}\mathbf{n}^c(s).$$

Wyznamy wektor normalny \mathbf{n}^c do krzywej c , obliczając najpierw wektor styczny (pominijmy zmienną s , jeśli nie prowadzi to do nieporozumień)

$$\dot{c} = \dot{e} - ((s - s_0)\dot{e})' = \dot{e} - (s - s_0)\ddot{e} - \dot{e} = -(s - s_0)\ddot{e},$$

a więc ponieważ opis e jest unormowany, wektor normalny \mathbf{n}^c do krzywej c pokrywa się z wektorem $-\dot{e}$ (znak wynika z orientacji!). Obliczymy krzywiznę κ_c (dla skrócenia zapisu zastępujemy $s - s_0$ przez s):

$$\kappa_c \mathbf{n}^c = \frac{1}{\|s\dot{e}\|} \frac{d}{ds} \left(\frac{-s\ddot{e}}{\| -s\ddot{e} \|} \right) = -\frac{1}{\|s\dot{e}\|} \frac{d}{ds} (\mathbf{n}^e) = -\frac{1}{\|s\dot{e}\|} \kappa \dot{e} = -\frac{1}{\|s\kappa\dot{e}\|} \kappa \dot{e} = -\frac{1}{s} \dot{e}. \quad (2.6)$$

Zwróćmy uwagę, że chociaż opis e jest unormowany, to opis c nie musi być unormowany; stąd czynnik $\frac{1}{\|s\dot{e}\|}$ po pierwszej równości w 2.6 (p. 2.3).

Podstawiając równość 2.6 do definicji krzywej ε^c otrzymujemy:

$$\varepsilon^c = e - (s - s_0)\dot{e} + (s - s_0)\dot{e} = e.$$

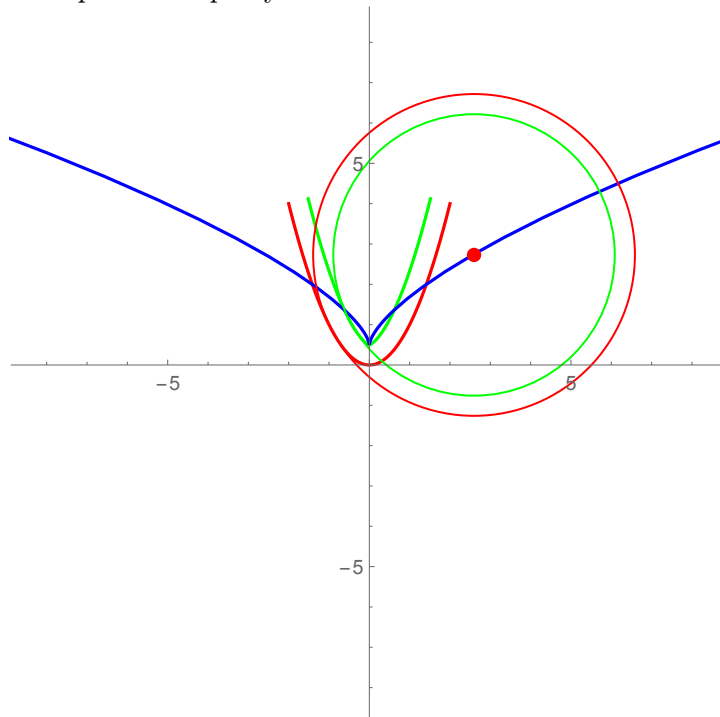
□

Uwaga. Zauważmy, że w odróżnieniu od ewoluty, inwoluta nie jest wyznaczona jednoznacznie.

Przykład 2.7.1. Krzywe zadane opisami

$$c_1(t) := (t, t^2) \text{ (czerwona)}, \quad c_2(t) := \left(t - \frac{t}{\sqrt{1+4t^2}}, t^2 - \frac{1}{2\sqrt{1+4t^2}} \right) \text{ (zielona)}$$

mają taką samą ewolutę (niebieską, poza punktem 0!) zdaną równaniem $\varepsilon(t) = (-4t^3, 1/2 + 3t^2)$ [p. rysunek]. Odpowiednio kolorami czerwonym i zielonym są narysowane okręgi ściśle styczne; czerwona kropka ich wspólny środek.



2.8 Równania Freneta-Serreta krzywej przestrzennej

Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest niezdegenerowanym opisem unormowanym to jego reper FS stanowią wektory $\mathbf{e}_1(s) := \dot{c}(s)$, $\mathbf{e}_2(s) := \frac{\dot{\mathbf{e}}_1}{\|\dot{\mathbf{e}}_1\|}$ oraz jednostkowy wektor \mathbf{e}_3 , taki że wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tworzą bazę dodatnio zorientowaną (tzn. zgodnie z bazą kanoniczną). Wzory Freneta sprowadzają się do trzech równań:

$$\dot{\mathbf{e}}_1(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \quad \dot{\mathbf{e}}_2(s) = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s), \quad \dot{\mathbf{e}}_3(s) = -\tau(s)\mathbf{e}_2(s)$$

gdzie $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się krzywizną krzywej c a $\tau: J \rightarrow \mathbb{R}$ jej torsją. Ponieważ krzywizna krzywej przestrzennej jest dodatnia, więc $\kappa(s) = \|\dot{\mathbf{e}}_1(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$. W przypadku krzywych przestrzennych

- wektor \mathbf{e}_1 oznacza się często \mathbf{t} (styczny - tangent)
- wektor \mathbf{e}_2 oznacza się często \mathbf{n} i nazywa wektorem normalnym,
- wektor \mathbf{e}_3 oznacza się często \mathbf{b} i nazywa wektorem binormalnym.

a płaszczyzny wyznaczone przez pary wektorów $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ nazywa się odpowiednio:

- $Lin\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ - płaszczyzną ściśle styczną (*osculating plane*);
- $Lin\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ - płaszczyzną normalną (*normal plane*);
- $Lin\{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ - płaszczyzną prostującą (*rectifying plane*).

Z Tw. 2.3.1 pkt. 4 wiemy, że jeśli $\tau = 0$, to krzywa jest położona w pewnej płaszczyźnie.

Zapiszemy rozwinięcie Taylora niezdegenerowanego opisu unormowanego $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ w bazie FS w ustalonym punkcie s_0 . Oznaczmy przez $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ reper FS w tym punkcie.

$$c(s_0 + h) = c(s_0) + h\dot{c}(s_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{c}(s_0) + \frac{h^3}{6}\ddot{\dot{c}}(s_0) + o_3(h) \quad \text{gdzie} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_n(h)}{h^n} = 0.$$

Pochodne wyrażamy w terminach wektorów $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ korzystając z wzorów FS - oznaczamy $\kappa := \kappa(s_0)$ oraz $\tau := \tau(s_0)$

$$\ddot{\dot{c}}(s_0) = (\kappa\mathbf{n})' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\dot{\mathbf{n}} = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b}$$

Podstawiając otrzymujemy (przypomnijmy, że $\kappa > 0$):

$$c(s_0 + h) = c(s_0) + \left(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\right)\mathbf{n} + \left(\frac{\kappa\tau}{6}h^3\right)\mathbf{b} + o_3(h) \quad (2.7)$$

Wniosek 2.8.1. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie niezdegenerowanym opisem unormowanym.

1. Lokalnie krzywa c ma dokładnie jeden punkt wspólny z afiniczną płaszczyzną prostującą i leży w półprzestrzeni wskazanej przez wektor normalny \mathbf{n} .

2. Jeśli $\tau(s_0) \neq 0$, to lokalnie krzywa ma dokładnie jeden punkt wspólny z afiniczną płaszczyzną ściśle styczną. Jeśli $\tau(s_0) > 0$, to krzywa przebija tę płaszczyznę w kierunku wektora \mathbf{b} .

Dowód. (Ad 1.) Trzeba zauważyć, że wektor $c(s_0 + h) - c(s_0)$ dla dostatecznie małych h ma składową postaci $\lambda \mathbf{n}$ gdzie $\lambda > 0$, co oznacza, że nie leży w płaszczyźnie prostującej. Istotnie, z rozwinięcia 2.7 obliczamy współczynnik przy wektorze \mathbf{n} :

$$\lambda(h) = \left(\frac{\kappa}{2} h^2 + \frac{\kappa'}{6} h^3 \right) = h^2 \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa'}{6} h \right) > 0 \quad \text{dla dostatecznie małych wartości } |h|.$$

(Ad 2.) Rozumujemy podobnie jak poprzednio. Jeśli $\tau \neq 0$ to współczynnik przy wektorze \mathbf{b} jest różny od zera a kierunek przebiegu krzywej zależy tylko od znaku torsji, bo krzywizna jest dodatnia. \square

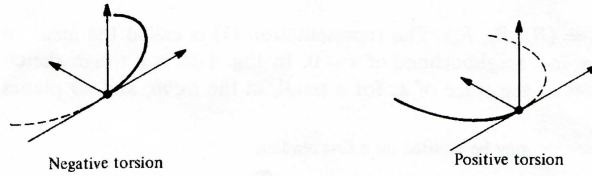


Figure 1-19

M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces.

Wniosek 2.8.2. Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest opisem krzywej przestrzennej to płaszczyzna ściśle styczna w punkcie $s \in J$ jest granicą płaszczyzn rozpiętych przez wektory $\dot{c}(s)$ i $c(s+h) - c(s)$ dla $h \rightarrow 0$.

Dowód. Przyjmijmy, że $s = 0$. Granica płaszczyzn rozpiętych przez wektory $\dot{c}(0)$ i $c(h) - c(0)$ to płaszczyzna prostopadła do granicy wektorów

$$\frac{\dot{c}(0) \times (c(h) - c(0))}{\|\dot{c}(0) \times (c(h) - c(0))\|}.$$

Z definicji płaszczyzna ta zawiera wektor styczny $\mathbf{t}(0) = \dot{c}(0)$, a więc zapisując jako (x, y, z) współrzędne wektora w bazie zadanej przez FS-trójnóg $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ musi być zadana równaniem $z = \lambda y$ lub $y = 0$. Płaszczyzna $y = 0$ jest płaszczyzną prostującą w punkcie 0, a więc nie zawiera wektorów postaci $c(h) - c(0)$ dla $h \neq 0$ (p. Wniosek 2.8.1 pkt. 1). Warunkiem, aby płaszczyzna postaci $y = \lambda(h)$ zawierała wektor $c(h) - c(0)$ jest, aby

$$\lambda(h) = \frac{\left(\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} \right) h^3 + o_2(h)}{\left(\frac{h^2\kappa(0)}{2} + \frac{h^3\kappa'(0)}{6} \right) + o_3(h)}$$

Dla $h \rightarrow 0$ ten iloraz zbiega do zera, a więc $\lambda(h) \rightarrow 0$ czyli płaszczyzny zbiegają do płaszczyzny zadanej równaniem $z = 0$, czyli płaszczyzny ściśle stycznej. \square

Zapiszemy rzuty wektora $c(s) - c(0)$ na trzy płaszczyzny tworzone przez reper FS:

1. Rzut na płaszczyznę ściśle styczną $Lin\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$:

$$pr_1(c(s) - c(0)) = s\mathbf{t} + \frac{s^2\kappa(0)}{2}\mathbf{n} + o_2(s).$$

2. Rzut na płaszczyznę normalną $Lin\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$:

$$pr_2(c(s) - c(0)) = \left(\frac{s^2\kappa(0)}{2} + \frac{s^3\kappa'(0)}{6}\right)\mathbf{n} + \left(\frac{s^3\kappa(0)\tau(0)}{6}\right)\mathbf{b} + o_3(s)$$

3. Rzut na płaszczyznę prostującą $Lin\{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$:

$$pr_3(c(s) - c(0)) = \left(s - \frac{s^3\kappa^2(0)}{6}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{s^3\kappa(0)\tau(0)}{6}\right)\mathbf{b} + o_3(s)$$

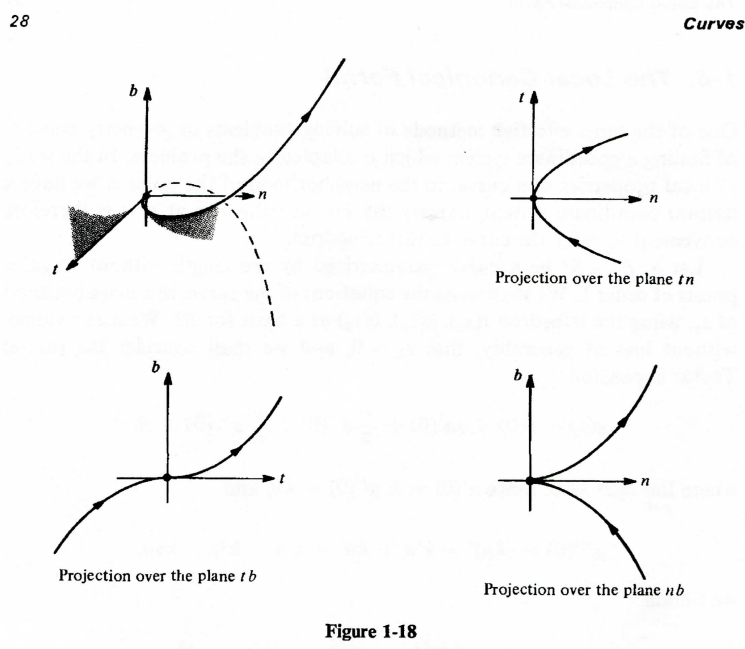


Figure 1-18

M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces.

2.9 Ewoluta i involuta krzywej przestrzennej

Definicje ewoluty i involuty Rozdz. 2.7 można uogólnić na krzywe przestrzenne⁶.

Definicja 2.9.1. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie niezdegenerowanym unormowanym opisem parametrycznym takim, że $\tau(t) \neq 0$. Odwzorowanie

$$\varepsilon^c(t) := c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + \frac{\rho'(t)}{\tau(t)}\mathbf{b}(t)$$

nazywa się ewolutą krzywej c . Liczba $\rho(t) := \kappa(t)^{-1}$ nazywa się promieniem krzywizny.

⁶p. D. Fuchs "Evolutives and Involutives of Spatial Curves"

Stwierdzenie 2.9.1. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie niezdegenerowanym opisem unormowanym takim, że $\tau(s) \neq 0$. Wtedy

$$\dot{\varepsilon}^c(s) = \left(\rho(s)\tau(s) + \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho'(s)}{\tau(s)} \right) \right) \mathbf{b}(s).$$

a więc wektor styczny do ewoluty jest prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej, a płaszczyzny normalne do krzywej c są płaszczyznami ściśle stycznymi do jej ewoluty ε^c .

Definicja 2.9.2. Sferą sieczną opisu $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ nazywamy sferę $S(p, r) \subset \mathbb{E}^3$ zawierającą co najmniej cztery punkty krzywej nie leżące w jednej płaszczyźnie. Jeśli te punkty zbiegają do punktu $c(t_0)$, a środki sfer i ich promienie zbiegają do $(p(t_0), r(t_0))$, to sferę $S(p(t_0), r(t_0)) \subset \mathbb{E}^3$ nazywamy sferą ściśle styczną do c w punkcie t_0 .

Podobnie jak w przypadku krzywych płaskich gdy środek okręgu ściśle stycznego w punkcie jest granicą punktów przecięcia prostych normalnych w punktach bliskich temu punktowi (p. Uw. 2.7.1), w przypadku przestrzennym rozważamy punkty przecięcia płaszczyzn normalnych. Dokładniej: dla krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ i punktu $s_0 \in J$ takiego, że $\tau(s_0) \neq 0$ rozważamy płaszczyzny normalne w punktach t_1, t_2, t_3 . Jeśli te punkty są dostatecznie bliskie t_0 , to płaszczyzny te znajdują się w położeniu ogólnym, a więc ich przecięcie to jeden punkt.

Stwierdzenie 2.9.2. Środek sfery ściśle stycznej do krzywej c w punkcie t_0 pokrywa się z granicą punktów przecięcia płaszczyzn ściśle stycznych w punktach $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t_0$ a jej promień wynosi $R(t_0) = \left\| \rho(t_0)\mathbf{n}(t_0) + \frac{\rho'(t_0)}{\tau(t_0)}\mathbf{b}(t_0) \right\| = \rho(t_0)^2 + \left(\frac{\rho'(t_0)}{\tau(t_0)} \right)^2$.

Stwierdzenie 2.9.3. Sfera ściśle styczna w punkcie $c(t_0)$ przecina płaszczyznę ściśle styczną w tym punkcie wzdłuż okręgu o środku w punkcie $\varepsilon^c(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)$ i promieniu $R := \frac{1}{\kappa(t)}$.

Definicja 2.9.3. Ewolwentą (inwolutą) krzywej e nazywamy taką krzywą c taką, że e jest ewolutą krzywej c tzn. $\varepsilon^c = e$.

2.10 Zadania

Zad. 13 (Ciekawe krzywe płaskie). Zapoznaj się z następującymi krzywymi płaskimi (p. MdC str. 7-9): Stożkowe - przypomnij sobie ich równania i parametryzacje. p. [Wiki](#); [Spirala logarytmiczna](#) i [spirala Archimedesesa](#); [Cykloida](#); [Traktrysa](#); [Cysoida Dioklesa](#); [Liść Kartezjusza](#).

Zad. 14. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie niezdegenerowanym opisem krzywej (J przedział otwarty), a $p_0 \in \mathbb{E}^n$ dowolnym punktem. Wykaż, że:

1. Jeśli krzywa c nie przechodzi przez punkt p_0 , a punkt $c(t_0)$ jest najbliższym p_0 punktem jej nośnika (zakładamy, że taki istnieje), to wektor $c(t_0) - p_0$ jest prostopadły do wektora $\dot{c}(t_0)$. Wykonaj przykładowy rysunek.
2. Niech $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalonym wektorem. Załóżmy, że $\dot{c}(t) \perp \mathbf{v}$ dla wszystkich $t \in J$ oraz $(c(t_0) - p_0) \perp \mathbf{v}$. Wtedy $(c(t) - p_0) \perp \mathbf{v}$ dla wszystkich $t \in J$ (rysunek!).
3. Zachodzi równość $\|c(t) - p_0\| = \text{const}$ (czyli nośnik leży na sferze) wtedy i tylko wtedy, gdy $(c(t) - p_0) \perp \dot{c}(t)$.

Zad. 15. Sprawdź, że formuła $c(s) := p_0 + (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c})$ gdzie $c^2 = a^2 + b^2$, $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest unormowanym, niezdegenerowanym opisem krzywej (naskicuj tę krzywą), spełniającym poniższe warunki 1)-4).

1. wektory styczne tworzą stały kąt z pewnym ustalonym kierunkiem,
2. Iloraz krzywizny i torsji $\frac{\kappa}{\tau}$ jest funkcją stałą;
3. proste afiniczne wyznaczone przez wektor normalny $\mathbf{n}(s)$ i przechodzące przez punkt $c(s)$ są równoległe do pewnej płaszczyzny;
4. proste afiniczne wyznaczone przez wektor binormalny $\mathbf{b}(s)$ i przechodzące przez punkt $c(s)$ tworzą stały kąt z pewną ustaloną prostą.

Wykaż, że dla dowolnej krzywej niezdegenerowanej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ te warunki są równoważne (tw. Lancreta). Krzywa spełniająca powyższe warunki nazywa się *uogólnioną krzywą śrubową*.

Znaleźć krzywiznę i torsję eliptycznej spirali $c(t) := p_0 + (a \cos t, b \sin t, ct)$ (zakładamy, że $ab \neq 0$).

Wskazówki.

Ad 1,4. Niech \mathbf{v}_0 będzie wektorem jednostkowym takim, że $\angle(\mathbf{t}, \mathbf{v}_0) = \theta = \text{const}$. Różniczkując dostajemy, że $\angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}_0) = 0$ a więc wektor \mathbf{v}_0 leży w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{n} , czyli generowanej przez \mathbf{t}, \mathbf{b} : $\mathbf{v}_0 = \mathbf{t}(s) \cos \theta + \mathbf{b}(s) \sin \theta$. Po zróżniczkowaniu i zastosowaniu FS-wzorów dostajemy, że $\kappa(s) \cos \theta - \tau(s) \sin \theta = 0$, a więc $\frac{\kappa}{\tau} = \tan \theta = \text{const}$. Żeby udowodnić przeciwną implikację, odwracamy to rozumowanie.

Ad 2,3. Wynikają natychmiast z pkt. a). Przez linię zawierającą $\mathbf{n}(s)$ (odp. $\mathbf{b}(s)$) i przechodzącą przez $\alpha(s)$ należy rozumieć prostą o kierunku $\mathbf{n}(s)$ (odp. $\mathbf{b}(s)$) przechodzącą przez punkt $\alpha(s)$. O równoległości decyduje więc tylko wektor kierunkowy. \square

Zad. 16. Dany jest unormowany, niezdegenerowany opis krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$, której nośnik leży w płaszczyźnie $P \subset \mathbb{E}^3$. Niech $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ będzie wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny. Wykazać, że wzór $\bar{c}(t) := c(t) + t\mathbf{v}$ jest opisem krzywej (naskicuj dla znanych przykładów krzywych płaskich!) oraz, że jest to uogólniona linia śrubowa.

Zad. 17. Wykazać, że dla krzywej płaskiej (czyli położonej w \mathbb{E}^2) następujące warunki są równoważne

1. nośnik płaskiej leży na pewnym okręgu;
2. krzywa ma stałą krzywiznę (tzn. taką samą w każdym punkcie);
3. proste afiniczne o kierunkach normalnych przechodzące przez punkty krzywej do krzywej przecinają się w jednym punkcie;
4. krzywizna jest różna od zera w pewnym punkcie i istnieje punkt płaszczyzny taki, że wszystkie afiniczne proste styczne przechodzące przez dowolny punkt krzywej są od niego równo odległe;
5. wszystkie okręgi ściśle styczne do krzywej mają wspólny punkt.

Wskazówka. (1) \iff (2) FS-równania są następujące: $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t}$. Jeśli $\kappa = \text{const}$ to $\dot{\mathbf{t}} + \kappa^2\mathbf{t} = 0$. Szukamy rozwiązań tego równania przy warunkach początkowych np. $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$ oraz $\dot{\mathbf{t}}(0) = \kappa\mathbf{e}_2$. Jedynym rozwiązaniem jest $\mathbf{t}(s) = (\cos \kappa s, \sin \kappa s) = \dot{c}(s)$. Stąd $c(s) = \frac{1}{\kappa}(\sin \kappa s, -\cos \kappa s) + p_0$, czyli jest to parametryzacja łuku okręgu. Odwrotnie: bezpośrednio przeliczenie.

(4) \iff (1) Niech p_0 będzie punktem równo odległym od stycznych. Zróżniczkować dwukrotnie równość $\langle c(s) - p_0, \mathbf{n}(s) \rangle = \text{const}$.

(5) \iff (1) Niech p_0 będzie wspólnym punktem wszystkich okręgów ściśle stycznych o promieniu $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$. Dla dowolnego s istnieje więc kąt $\theta(s)$ taki, że

$$c(s) + R(s)\mathbf{n}(s) + R(s)\cos\theta(s)\mathbf{n}(s) + R(s)\sin\theta(s)\mathbf{t}(s) = p_0$$

(zauważyć, że $\theta(s)$ jest funkcją gładką). Różniczkując tę równość uzyskujemy równanie (pomijamy parametr s):

$$\mathbf{t} + R'\mathbf{n} + R\dot{\mathbf{n}} + R'(\cos\theta)\mathbf{n} - R\dot{\theta}(\sin\theta)\mathbf{n} + R(\cos\theta)\dot{\mathbf{n}} + R'(\sin\theta)\mathbf{t} + R\dot{\theta}(\cos\theta)\mathbf{t} + R'(\sin\theta)\dot{\mathbf{t}} = 0$$

Podstawiając zamiast pochodnych wektora stycznego i normalnego równości FS i dokonując redukcji składników otrzymujemy:

$$R'\mathbf{n} + R'(\cos\theta)\mathbf{n} - R\dot{\theta}(\sin\theta)\mathbf{n} - (\cos\theta)\mathbf{t} + R'(\sin\theta)\mathbf{t} + R\dot{\theta}(\cos\theta)\mathbf{t} + (\sin\theta)\mathbf{n} = 0$$

Grupując współczynniki przy liniowo niezależnych wektorach \mathbf{t} , \mathbf{n} otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} R' + R'(\cos\theta) - R\dot{\theta}(\sin\theta) + (\sin\theta) &= 0 \\ -(\cos\theta) + R'(\sin\theta) + R\dot{\theta}(\cos\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Ten układ równań posiada jednoznaczne rozwiązanie $R' = 0$ oraz $R\dot{\theta} = 1$. Skąd $R = \text{const}$, a więc krzywa jest łukiem okręgu. [Zinterpretować równość $R\dot{\theta} = 1$]. \square

Zad. 18. (MdC str. 26) Niech $\alpha: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie opisem niezdegenerowanym krzywej przestrzennej. Znajomość wektora stycznego jako funkcji parametru $\mathbf{t}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ pozwala wyznaczyć krzywiznę i torsję. Treścią poniższych zadań jest wykazanie, że przy pewnych założeniach znajomość jednego z pozostałych wektorów FS-reperu pozwala wyznaczyć krzywiznę i torsję, przynajmniej z dokładnością do znaku lub stałej. Załóżmy, że torsja krzywej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ nigdzie nie znika. Wtedy

1. Wektor binormalny $\mathbf{b}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ wyznacza krzywizną krzywej i moduł jej torsji.
2. Wektor normalny $\mathbf{n}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ wyznacza krzywizną i torsję krzywej (z dokładnością do stałej).

Wskazówka. Niech $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ będzie FS-reperem (nazywanym wówczas także trójnogiem) krzywej α . Wzory Freneta sprowadzają się do trzech równań:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{b}(s), \quad \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$$

Ad 1. Załóżmy, że znamy funkcję $\mathbf{b}(s)$; chcemy w jej terminach (także jej pochodnych) wyrazić krzywiznę i wartość bezwzględną torsji (a czy można wyznaczyć torsję?). Z ostatniego równania otrzymujemy: $\|\dot{\mathbf{b}}(s)\| = \|-\tau(s)\mathbf{n}(s)\| = |\tau(s)|$, a funkcja $\mathbf{n}(s) = \pm \frac{\dot{\mathbf{b}}(s)}{\|\dot{\mathbf{b}}(s)\|}$. Ponieważ $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ a więc z pierwszego równania wyznaczamy wartość $\kappa(s) > 0$.

Ad 2. Załóżmy, że znamy funkcję $\mathbf{n}(s)$; chcemy w jej terminach (także jej pochodnych) wyrazić krzywiznę i torsję. Z drugiego równania $\|\dot{\mathbf{n}}\|^2 = \kappa^2 + \tau^2$. Znajdziemy równanie na $\frac{\kappa}{\tau}$ w terminach \mathbf{n} i jego pochodnych, definiując funkcję (we wzorach pomijamy argument s):

$$a(s) := \frac{\langle \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{n}} \rangle}{\|\dot{\mathbf{n}}\|} = \frac{\langle \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}, -\kappa'\mathbf{t} + \tau'\mathbf{b} - (\kappa^2 + \tau^2)\mathbf{n} \rangle}{\tau^2 + \kappa^2} = \frac{-\kappa'\tau + \tau'\kappa}{\tau^2 + \kappa^2} = -\frac{(\frac{\kappa}{\tau})'}{1 + (\frac{\kappa}{\tau})^2} = -\frac{d}{ds} \arctan\left(\frac{\kappa}{\tau}\right).$$

a stąd $\arctan(\frac{\kappa}{\tau}) = \int a(s) + M$, gdzie M jest stałą. Dla każdego M możemy wyznaczyć κ i τ (czyli funkcja \mathbf{n} nie wyznacza krzywizny i torsji jednoznacznie, jak zdają się twierdzić autorzy..).

Zad. 19. Wykazać, że nośnik krzywej przestrzennej takiej, że $\kappa', \tau \neq 0$ leży na pewnej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jej krzywizna i torsja spełniają równanie:

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0. \quad (2.8)$$

Wskazówka. Jeśli obraz parametryzacji $c: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ leży na pewnej sferze, to możemy założyć, że ma ona środek w początku układu współrzędnych. W terminach FS-trójnogu możemy zapisać:

$$c(s) = \langle c, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle c, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle c, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} \quad \text{a zatem} \quad \|c(s)\|^2 = r^2 = \langle c, \mathbf{t} \rangle^2 + \langle c, \mathbf{n} \rangle^2 + \langle c, \mathbf{b} \rangle^2. \quad (2.9)$$

Aby obliczyć iloczyny skalarne różniczkujemy trzykrotnie lewą stronę ostatniego równania (2.9) i korzystamy z FS-równań:

$$\langle c, \mathbf{t} \rangle = \langle \dot{c}, c \rangle = 0, \quad \langle \ddot{c}, c \rangle + \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \kappa \langle c, \mathbf{n} \rangle + 1 = 0, \quad \kappa' \langle c, \mathbf{n} \rangle + \kappa \tau \langle c, \mathbf{b} \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Obliczymy iloczyny skalarne z równań (2.10) otrzymujemy równość:

$$r^2 = \kappa^{-2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 \quad \text{a różniczkując ją} \quad \frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0. \quad (2.11)$$

Założmy teraz, że dla pewnej krzywej drugie z równań (2.11) jest spełnione. Wykażemy, że leży ona na pewnej sferze. Zgodnie ze wzorem (2.9) krzywa ta powinna zapisywać się równaniem (pomijamy parametr s):

$$c = -\kappa^{-1}\mathbf{n} + \tau^{-1}(\kappa^{-1})'\mathbf{b} \quad \text{a jej norma} \quad \|c\|^2 = \kappa^{-2} + (\tau^{-1}(\kappa^{-1})')^2 \quad (2.12)$$

Warunek stałości normy jest równoważny zanikaniu jej pochodnej, a to właśnie gwarantuje równość (2.8).

Zad. 20. Wykazać, że nośnik krzywej przestrzennej $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ leży na pewnej sferze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $p \in \mathbb{E}^3$ taki, że dla każdego punktu krzywej $c(s)$ prosta przechodząca przez ten punkt i p jest prostopadła do prostej stycznej do krzywej w punkcie $c(s)$.

Zad. 21. Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie opisem krzywej zawartej w sferze o promieniu $r > 0$. Dla punktu $s_0 \in J$ równość $\kappa'(s_0) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa(s_0) = \frac{1}{r}$ lub $\tau(s_0) = 0$.

Wskazówka. Wykorzystać równania (2.10).

Zad. 22. Nośnik krzywej przestrzennej jest położony na pewnym (płaskim) łuku wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa ma stałą krzywiznę oraz leży na pewnej sferze.

Zad. 23. Okręgiem ściśle stycznym do krzywej przestrzennej nazywamy okrąg położony w płaszczyźnie ściśle stycznej o środku w punkcie $c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}(t_0)$ i promieniu $\frac{1}{\kappa(t_0)}$. Wykazać, że dla krzywej leżącej na sferze środek okręgu ściśle stycznego jest punktem przecięcia płaszczyzny ściśle stycznej z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek sfery.

Zad. 24. Styczna do trajektorii środków okręgów ściśle stycznych do dowolnej krzywej przestrzennej jest prostopadła do stycznej w odpowiadającym mu punkcie na krzywej wyjściowej.

Zad. 25. Jeśli $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ jest niezdegenerowanym, unormowanym opisem krzywej a $\mathbf{e}_1(s), \dots, \mathbf{e}_n(s)$ jego FS-reperem, to $\|\dot{\mathbf{e}}_j(s)\| = \sqrt{\kappa_{j-1}(s)^2 + \kappa_j(s)^2}$.

Zad. 26 (Indykatorysa). Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^n$ będzie niezdegenerowanym opisem unormowaną krzywej o niezerowej pierwszej krzywiznie. Wykazać, że odwzorowanie $\mathbf{t}(s) := p_0 + \mathbf{t}(s)$ jest parametryzacją krzywej (zwanej *indykatoryszą* styczną krzywej c). Zauważ, że nośnik krzywej α leży na sferze jednostkowej. Jeśli krzywa c jest zamknięta (tzn. $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ oraz istnieje najmniejsza liczba $T > 0$ taka, że $c(s+T) = c(s)$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$) to indykatorysa przecina każdą $(n-2)$ -wymiarową podsferę o promieniu 1 co najmniej dwa razy.

Wskazówka. Każda $(n-2)$ -wymiarową podsfera jest postaci $\mathbf{v}^\perp \cap S^{n-1}$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \in S^{n-1}$, a więc $\mathbf{t}(s) \in \mathbf{v}^\perp \iff \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = \frac{d}{ds} \langle c(s), \mathbf{v} \rangle = 0$. Ponieważ $c(0) = c(T)$ funkcja $\langle c(s), \mathbf{v} \rangle$ musi mieć co najmniej jedno maksimum i minimum.

Rozdział 3

Powierzchnie w \mathbb{E}^3

Żeby obejrzeć ciekawe historyczne modele powierzchni i przeczytać matematyczny komentarz warto zajrzeć [do Oxfordu](#).

3.1 Krzywe na powierzchniach

Podrozmaitości \mathbb{E}^3 wymiaru 2 będziemy nazywać powierzchniami. Przestrzeń styczna w dowolnym punkcie $TM_x \subset \mathbb{R}^3$ posiada iloczyn skalarny będący obcięciem iloczynu skalarnego z \mathbb{R}^3 . Będziemy oznaczać go $\langle -, - \rangle_x$.

Definicja 3.1.1. *Orientacją (lub polem normalnym) powierzchni $M \subset \mathbb{E}^3$ nazywamy odwzorowanie gładkie $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że dla każdego $x \in M$, $\|\mathbf{n}(x)\| = 1$ oraz $\mathbf{n}(x) \perp TM_x$. Powierzchnię M , na której istnieje orientacja nazywamy orientowalną.*

Zauważmy, że pole jednostkowych wektorów normalnych wyznacza orientację przestrzeni stycznej w dowolnym punkcie. Wybieramy bazę $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in TM_x$ taką, że baza $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}(x) \in \mathbb{R}^3$ jest dodatnio zorientowana.

Mówimy, że parametryzacja rozmaitości zorientowanej $r: U \rightarrow M$ jest zorientowana, jeśli baza $\mathbf{r}_1 := \frac{\partial r}{\partial u_1}, \mathbf{r}_2 := \frac{\partial r}{\partial u_2}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ jest dodatnio zorientowana. Łatwo sprawdzić, że w otoczeniu każdego punktu rozmaitości zorientowanej istnieje parametryzacja zorientowana (wystarczy poprawić dowolną parametryzację).

Stwierdzenie 3.1.1.

1. *Dowolna parametryzacja $r: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ powierzchni $M \subset \mathbb{E}^3$ wyznacza orientację podzbioru $r(U) \subset M$.*
2. *Jeśli $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką a $y_0 \in \mathbb{R}$ jej wartością regularną, to funkcja f wyznacza orientację powierzchni $f^{-1}(y_0)$.*

Dowód. Ad 1. $\mathbf{n}(p) := \frac{\frac{\partial r}{\partial t_1}(p) \times \frac{\partial r}{\partial t_2}(p)}{\|\frac{\partial r}{\partial t_1}(p) \times \frac{\partial r}{\partial t_2}(p)\|}$.

Ad 2. $\mathbf{n}_f(x) := \frac{\text{grad } f_x}{\|\text{grad } f_x\|}$. □

Definicja 3.1.2. *Reper Darboux*¹ opisu unormowanego krzywej położonej na powierzchni zorientowanej $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ definiujemy następująco:

$$\mathbf{a}_1(s) := \dot{c}(s), \quad \mathbf{a}_2(s) := \mathbf{n}(c(s)) \times \mathbf{a}_1(s), \quad \mathbf{a}_3(s) := \mathbf{n}(c(s)).$$

Zauważmy, że reper Darboux jest dodatnio zorientowany, bowiem w definicji \mathbf{a}_2 przyjęliśmy odwrotną kolejność wektorów \dot{c} , \mathbf{n} . Kolejność wektorów w reperze Darboux, na pierwszy rzut oka odmienna niż w reperze Frenet-Serreta, wynika stąd iż chcemy, aby pierwsze dwa wektory należały do przestrzeni stycznej $\mathbf{a}_1(s)$, $\mathbf{a}_2(s) \in TM_{c(s)}$.

Związek ruchomego reperu z jego pochodną dany jest przez antysymetryczną macierz (p. Tw. 1.9.1):

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

której współczynniki noszą następujące nazwy:

Definicja 3.1.3.

- ω_{12} - krzywizna geodezyjna, oznaczana κ_g ; jeśli $\kappa_g = 0$, to krzywa nazywa się geodezyjną;
- ω_{13} - krzywizna normalna, oznaczana κ_n lub κ ; jeśli $\kappa_n = 0$, to krzywa nazywa się asymptotyczną;
- ω_{23} - skręcenie (torsja) geodezyjne, oznaczana τ_g ; jeśli $\tau_g = 0$, to krzywa nazywa się linią krzywizny.

Uwaga 3.1.1. W poniższych stwierdzeniach znak "prim" nie oznacza pochodnej. Nie prowadzi to do nieporozumień, bo wszystkie opisy zakładamy, że są unormowane.

Stwierdzenie 3.1.2.

1. Jeśli $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest orientacją, a $\mathbf{n}' := -\mathbf{n}$ jest orientacją przeciwną, to $\omega'_{12} = -\omega_{12}$, $\omega'_{13} = -\omega_{13}$ oraz $\omega'_{23} = \omega_{23}$.
2. Jeśli $c'(s) := c(s_0 - s)$, to $\omega'_{12}(s) = -\omega_{12}(s_0 - s)$, $\omega'_{13}(s) = \omega_{13}(s_0 - s)$ oraz $\omega'_{23}(s) = \omega_{23}(s_0 - s)$.

Dowód. Ad 1. Reper Darboux dla orientacji \mathbf{n}' jest związany z reperem Darboux dla orientacji \mathbf{n} następująco: $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}'_2 = -\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}'_3 = -\mathbf{a}_3$ a stąd ze wzoru 3.21 mamy

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}'_3 \end{bmatrix} = \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

¹Jean Gaston Darboux (Nimes, Gard, Languedoc 1842 - 1917 Paris)

Ad 2. Ponieważ $\dot{c}'(s) = -\dot{c}(s_0 - s)$ więc zmienia się znak wektora \mathbf{a}_1 oraz \mathbf{a}_2 , natomiast nie zmienia się wektor \mathbf{a}_3 . Inaczej z pochodnymi: $\dot{\mathbf{a}}'_1 = \dot{\mathbf{a}}_1$, $\dot{\mathbf{a}}'_2 = \mathbf{a}_2$, natomiast $\dot{\mathbf{a}}'_3 = -\dot{\mathbf{a}}_3$.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \mathbf{a}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 \\ \dot{\mathbf{a}}_2 \\ -\dot{\mathbf{a}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

□

Stwierdzenie 3.1.3. Jeśli opisy unormowane $c_1, c': J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ są styczne w punkcie s_0 , tzn. $c(s_0) = c'(s_0)$ oraz $\dot{c}(s_0) = \pm \dot{c}'(s_0)$, to $\omega'_{13}(s_0) = \omega_{13}(s_0)$ oraz $\omega'_{23}(s_0) = \omega_{23}(s_0)$.

Dowód. Ponieważ krzywizna normalna i skręcenie geodezyjne nie zależą od kierunku krzywej możemy założyć, że $\mathbf{a}_1(s_0) = \mathbf{a}'_1(s_0)$, a więc także $\mathbf{a}_2(s_0) = \mathbf{a}'_2(s_0)$, $\mathbf{a}_3(s_0) = \mathbf{a}'_3(s_0)$. Pochodną wektora normalnego względem parametru możemy wyrazić jako

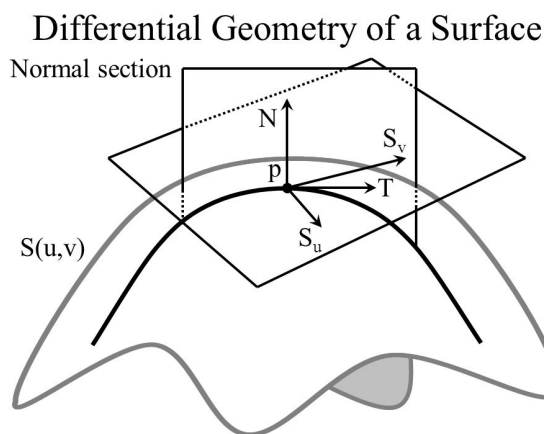
$$\dot{\mathbf{a}}_3(s_0) = D\mathbf{n}_{c(s_0)}(\dot{c}(s_0)) = D\mathbf{n}_{c'(s_0)}(\dot{c}'(s_0)) = \dot{\mathbf{a}}'_3(s_0)$$

a stąd wynikają żądane równości współczynników. □

Definicja 3.1.4. Krzywiznę normalną (odp. skręcenie geodezyjne) powierzchni $M \subset \mathbb{E}^3$ w kierunku niezerowego wektora $\mathbf{v} \in TM_p$ definiujemy jako krzywiznę normalną (odp. skręcenie geodezyjne) opisu unormowanego $c: (-s_0, s_0) \rightarrow M$ takiego, że $\dot{c}(0) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ i oznaczamy $\kappa_p(\mathbf{v})$.

Zauważmy, że dla dowolnego niezerowego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_p$ zachodzą równości $\kappa_p(\mathbf{v}) = \kappa_p(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|})$ oraz - ze Stw. 3.1.3 - $\kappa_p(\mathbf{v}) = \kappa_p(-\mathbf{v})$.

Interpretacja geometryczna krzywizny normalnej



Jordan Smith Differential Geometry of Surfaces, UC Berkeley CS284.

Niech $\mathbf{v} \in TM_p$. Rozpatrzmy płaszczyznę $P(\mathbf{v}) := p + \text{Lin}\{\mathbf{v}, \mathbf{n}(p)\}$. Wykażemy, że istnieje otoczenie $M \supset V \ni p$ takie, że przecięcie $P \cap V$ jest podrozmainością 1-wymiarową.

Niech $r: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie parametryzacją M taką, że $r(0) = p$. Punkty $u \in U$ przechodzące przy parametryzacji r na punkty należące jednocześnie do M oraz płaszczyzny $P(\mathbf{v})$ spełniają równanie $F(u) := \langle r(u) - p, \mathbf{b} \rangle = 0$ gdzie $\mathbf{b} := \mathbf{n} \times \mathbf{v} \in TM_p$. Obliczmy pochodną $DF_u(\mathbf{w}) = \langle Dr_u(\mathbf{w}), \mathbf{b} \rangle$. Oczywiście $DF_0(Dr_0^{-1}(\mathbf{b})) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$, a zatem istnieje otoczenie $U' \ni 0$ takie, że dla dowolnego $u \in U'$, $DF_u \neq 0$, a zatem 0 jest wartością regularną $F|U'$, a więc zbiór punktów $x \in U'$ spełniających równanie $F(u) = 0$ jest podrozmainością 1-wymiarową w U' , a zatem także jego obraz przy parametryzacji r w zbiorze $V := r(U')$. Wynika stąd, że lokalnie posiada opis unormowany $c: (-s_0, s_0) \rightarrow V \subset M$ taki, że $c(0) = p$ oraz $\dot{c}(0) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

Niech $\mathbf{v} \in TM_p$ będzie wektorem niezerowym. Wykażemy, że krzywizna (w sensie Freneta-Serreta) krzywej płaskiej c położonej w płaszczyźnie $P(\mathbf{v})$ zorientowanej przez bazę $\{\mathbf{n}(0), \mathbf{v}\}$ jest równa krzywiznie normalnej w kierunku wektora $\mathbf{v} \in TM_p$.

Stwierdzenie 3.1.4. $\omega_{13} = \kappa_p(\mathbf{v}) = \kappa^c(0)$ oraz $\omega_{12}(0) = 0$

Dowód. Porównamy FS-reper \mathbf{e}_i krzywej c jako krzywej płaskiej w $P(\mathbf{v})$ oraz reper Darboux \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, 3$ krzywej c jako położonej na powierzchni M . Z definicji $\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{a}_1(s)$. Równania FS mają postać:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \kappa^c \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\kappa^c \mathbf{e}_1, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{e}_2(0) = -\mathbf{n}(c(0)) = -\mathbf{a}_3(0),$$

Otrzymujemy więc, że

$$\omega_{12}(0)\mathbf{a}_2(0) + \omega_{13}(0)\mathbf{a}_3(0) = \dot{\mathbf{a}}_1(0) = \dot{\mathbf{e}}_1(0) = -\kappa^c(0)\mathbf{e}_2(0) = \kappa^c(0)\mathbf{a}_3(0)$$

a stąd wynika równość $\kappa_p(\mathbf{v}) = \omega_{13}(0) = \kappa^c(0)$. \square

Uwaga 3.1.2. Zauważmy, że w punkcie 0 reper Darboux jest identyczny z dokładnością do orientacji z FS-reperem. Z równości $\omega_{12}(0) = 0$ **nie** wynika, że c jest geodezyjną, bowiem ta równość nie musi zachodzić dla $s \neq 0$!

Na zakończenie porównamy reper FS krzywej położonej na powierzchni z reperem Darboux (por. [Wiki](#)). Niech $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ będzie unormowanym opisem krzywej na powierzchni. Z definicji zachodzą równości:

$$\mathbf{e}_1 = \dot{c}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\ddot{c}}{\|\ddot{c}\|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad - \text{reper FS}, \quad \mathbf{a}_1 = \dot{c}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{n} \quad - \text{reper Darboux}$$

oraz $\alpha := \angle(\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)$. Zachodzi równość płaszczyzn $Lin\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = Lin\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{\dot{c}\}^\perp$ przy czym bazy $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ różnią się o obrót o kąt $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Stąd:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

3.2 Formy dwuliniowe na powierzchniach

Niech $M \subset \mathbb{E}^3$ będzie powierzchnią. Dla każdego punktu $x \in M$ przestrzeń styczna TM_x jest wyposażona w dwie formy dwuliniowe związane z geometrycznymi własnościami powierzchni. Tradycyjnie nazywają się one I i II formą podstawową powierzchni. I forma

podstawowa to szczególnie przypadek ogólnego pojęcia metryki Riemanna² na rozmaitości, zwanej też tensorem metrycznym.

3.2.1 I forma podstawowa

Iloczyn skalarny w przestrzeni \mathbb{R}^3 obcięty do podprzestrzeni $TM_x \subset \mathbb{R}^3$ jest iloczynem skalarnym na płaszczyźnie stycznej i będziemy go oznaczać $G_x(-, -) := \langle -, - \rangle_x : TM_x \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$. Dla dowolnego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_x$ mamy oczywistą równość $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_x$.

Wyznamy współczynniki tej formy w bazie przestrzeni stycznej zadanej przez parametryzację $\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{r} M \subset \mathbb{E}^3$. Pochodne cząstkowe $\frac{\partial r}{\partial u_i}$ będziemy oznaczać skrótowo \mathbf{r}_i , podobnie pochodne drugiego rzędu \mathbf{r}_{ij} . Wektory $\mathbf{r}_1(u)$, $\mathbf{r}_2(u)$ są bazą przestrzeni $TM_{r(u)}$ wyznaczoną przez parametryzację r .

Współczynniki formy $\langle -, - \rangle_x$ w tej bazie są postaci:

$$g_{ij}(u) := \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$$

Oznaczmy przez du^i bazę przestrzeni funkcjonałów $TM_{r(u)}^*$ sprzężoną do bazy $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, czyli

$$du^i(\mathbf{r}_j) = \delta_{ij} \quad (\text{dla skrócenia oznaczeń pomijamy argument } u.)$$

Iloczyny $du^i du^j$ tworzą bazę przestrzeni odwzorowań dwuliniowych $TM_{r(u)} \times TM_{r(u)} \rightarrow \mathbb{R}$, a więc I forma podstawowa na $TM_{r(u)}$ ma w tej bazie postać:

$$\langle -, - \rangle_{r(-)} = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j =: g_{ij} du^i du^j$$

gdzie $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi. Ostatnia równość to zastosowanie tzw. konwencji sumacyjnej Einsteina, w myśl której jeśli ten sam wskaźnik występuje na dole i na górze, to według niego przebiega sumowanie.

Tradycyjnie wyrazy macierzy I formy podstawowej oznacza się następująco: $g_{11} =: E$, $g_{12} = g_{21} =: F$, $g_{22} =: G$, a więc macierz I formy w bazie przestrzeni stycznej wyznaczonej przez pewną parametryzację ma postać:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Definicja 3.2.1. *Dyfeomorfizm powierzchni $f : M \rightarrow N$ nazywa się izometrią, jeżeli dla każdego punktu $x \in M$ pochodna $Df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ jest izometrią (tzn. zachowuje I formę podstawową).*

Uwaga 3.2.1. Jeśli $[G_x]_r$ jest macierzą I formy w parametryzacji $r : U \rightarrow M$ a $f : M \rightarrow N$ jest izometrią to ta sama macierz jest macierzą I formy podstawowej N w parametryzacji $f \circ r : U \rightarrow N$.

Sens geometryczny pojęcia izometrii wyjaśnia następująco

²Bernhard Riemann (Breselenz, Hanover 1826 - 1866 Selasca, I)

Stwierdzenie 3.2.1. *Dyfeomorfizm powierzchni $f: M \rightarrow N$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje długości krzywych tzn. dla dowolnej parametryzacji $c: J \rightarrow M$ zachodzi równość $L(c) = L(f \circ c)$.*

Dowód. UZUPEŁNIĆ. □

Zauważmy, że tensor metryczny można zdefiniować w ten sam sposób dla dowolnej podrozmaitości $M \subset \mathbb{E}^k$.

3.2.2 II forma podstawowa

II forma podstawowa jest ściśle związana z położeniem powierzchni zorientowanej w otaczającej przestrzeni. Niech $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie orientacją a $D\mathbf{n}_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}^3$ jej pochodną. Okazuje się, że obraz pochodnej też leży w przestrzeni stycznej TM_x .

Stwierdzenie 3.2.2. *Dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in TM_x$, $D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) \in TM_x$, a więc $D\mathbf{n}_x: TM_x \rightarrow TM_x$ jest endomorfizmem przestrzeni stycznej.*

Dowód. Niech $\mathbf{v} \in TM_x$. Wtedy $0 = D\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle_x(\mathbf{v}) = 2\langle D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}), \mathbf{n}(x) \rangle$, czyli $D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) \in TM_x$. □

Odwzorowanie liniowe $-D\mathbf{n}_x: TM_x \rightarrow TM_x$, opisujące zmienność wektora normalnego w otoczeniu punktu x , nazywa się odwzorowaniem Weingartena³. Dla dowolnego punktu $x \in M$ II forma podstawowa $B_x: TM_x \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana następująco:

$$B_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := -\langle \mathbf{v}, D\mathbf{n}_x(\mathbf{w}) \rangle.$$

W bazie wyznaczonej przez parametryzację $r: U \rightarrow M$ forma B_x ma postać:

$$B_{r(-)}(-, -) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} du^i du^j = b_{ij} du^i du^j.$$

Znajdziemy współczynniki $b_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ w terminach pochodnych parametryzacji. Wiemy, że $\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{n} \rangle = 0$, a więc

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{n} \circ r \rangle = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \circ r \rangle + \langle \mathbf{r}_j, (\mathbf{n} \circ r)_i \rangle = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \circ r \rangle - b_{ji} = 0 \quad (3.5)$$

czyli $b_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \circ r \rangle$.

Wniosek 3.2.1. *II forma podstawowa jest symetryczna tzn. dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x$ zachodzi równość $B_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B_x(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z równości drugich pochodnych cząstkowych $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$. □

³Julius Weingarten (Berlin 1836 – 1910 Freiburg i.Br.)

Tradycyjnie wyrazy macierzy II formy podstawowej oznacza się następująco:
 $b_{11} =: e$, $b_{12} = b_{21} =: f$, $b_{22} =: g$, a więc macierz II formy w bazie przestrzeni stycznej wyznaczonej przez pewną parametryzację ma postać:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Znajomość macierzy I i II formy podstawowej podstawowej w bazie wyznaczonej przez pewną parametryzację pozwala wyznaczyć macierz odwzorowania Weingartena w tej bazie. Zachodzi między nimi następujący związek.

Stwierdzenie 3.2.3. *Jeśli $r: U \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ jest parametryzacją powierzchni zorientowanej to przez $[B_x]_r$, $[-D\mathbf{n}_x]_r$, $[G_x]_r$ oznaczamy odpowiednie macierze w bazie przestrzeni stycznej TM_x wyznaczonej przez tę parametryzację. Zachodzi równość:*

$$[B_x]_r = [G_x]_r[-D\mathbf{n}_x]_r \quad \text{oraz} \quad [G_x]_r^{-1}[B_x]_r = [-D\mathbf{n}_x]_r$$

Skorzystamy ze Stw. 3.2.3 żeby *explicite* obliczyć macierz $[-D\mathbf{n}_x]_r$. Niech $[B_x]_r = [b_{ij}]$, $[G_x]_r = [g_{ij}]$. Wykonując odpowiednie działania na macierzach otrzymujemy:

Stwierdzenie 3.2.4.

$$[G_x]_r^{-1} = \frac{1}{\det[G_x]_r} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \quad [-D\mathbf{n}_x]_r = -\frac{1}{\det[G_x]_r} \begin{bmatrix} b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22} & b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22} \\ b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11} & b_{12}g_{12} - b_{22}g_{11} \end{bmatrix}$$

Znając II formę podstawową w pewnym punkcie można obliczyć krzywiznę normalną w kierunku dowolnego wektora stycznego w tym punkcie.

Stwierdzenie 3.2.5. *Dla dowolnego punktu $x \in M$ i wektora $\mathbf{v} \in TM_x$ zachodzi równość*

$$B_x(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \kappa_x(\mathbf{v})\|\mathbf{v}\|^2$$

gdzie $\kappa_x(\mathbf{v})$ jest krzywizną normalną.

Dowód. Wystarczy rozpatrzyć wektory o długości 1. Niech $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ będzie opisem unormowanym takim, że $c(0) = x$ oraz $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$. Z definicji krzywizny normalnej i repiera Darboux wynika, że

$$\kappa_x(\mathbf{v}) = \omega_{13}(0) = -\langle \dot{\mathbf{a}}_3(0), \mathbf{a}_1(0) \rangle = -\langle \mathbf{v}, D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) \rangle = B_x(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

bowiem $\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{v}$ oraz $\dot{\mathbf{a}}_3(0) = D\mathbf{n}_x(\mathbf{v})$. □

Stwierdzenie 3.2.6. *Jeśli $F: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest izometrią, to obraz $(F(M), DF(\mathbf{n}))$ dowolnej powierzchni zorientowanej (M, \mathbf{n}) jest powierzchnią zorientowaną a pochodna $DF: TM_x \rightarrow TF(M)_{F(x)}$ zachowuje I i II formę podstawową.*

3.3 Krzywe geodezyjne, asymptotyczne i linie krzywizny

Przypomnijmy, że krzywe na powierzchni, dla których znikają (tożsamościowo) odpowiednie współczynniki macierzy Darboux mają specjalne nazwy p. ??, odzwierciedlające ważną rolę, jaką odgrywają w badaniu i wizualizacji powierzchni.

Definicja 3.3.1. Niech $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ będzie krzywa gładką na powierzchni M , a ω_{ij} oznaczają współczynniki jej macierzy Darboux.

1. Jeśli krzywizna geodezyjna $\omega_{12} =: \kappa_g = 0$ to krzywa nazywa się geodezyjną;
2. Jeśli krzywizna normalna $\omega_{13} =: \kappa_n = 0$ to krzywa nazywa się asymptotyczną;
3. Jeśli skręcenie geodezyjne $\omega_{23} =: \tau_g = 0$ to krzywa nazywa się linią krzywizny.

Stwierdzenie 3.3.1. Unormowany opis krzywej na powierzchni $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ jest:

1. krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $s \in J$, $\ddot{c}(s) \perp TM_{c(s)}$
2. asymptotyczną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in J$, wektor przyspieszenia jest styczny do powierzchni, czyli $\ddot{c}(s) \in TM_{c(s)}$.
3. linią krzywizny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in J$ wektor styczny $\dot{c}(s)$ jest wektorem własnym odwzorowania Weingartena.

Dowód.

Ad 1. Równoważność wynika natychmiast ze wzoru na pochodną repera Darboux 3.21: $\ddot{c} = \omega_{12}\mathbf{a}_2 + \omega_{13}\mathbf{a}_3$, a więc $\omega_{13}\mathbf{a}_3 = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy wektor przyspieszenia jest współliniowy z wektorem normalnym do powierzchni.

Ad 2. Krzywizna normalna wyraża się przez II formę podstawową

$$\omega_{13} = B(\dot{c}, \dot{c}) = \langle \ddot{c}, \mathbf{n} \circ c \rangle = 0$$

tzn. $\ddot{c}(s) \in TM_{c(s)}$ (p. Formuła 3.5 i Stw. 3.2.5).

Ad 3. Krzywizna geodezyjna $\omega_{23} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dot{\mathbf{a}}_3 = -\omega_{13}\mathbf{a}_1$. Zauważmy, że $\dot{\mathbf{a}}_3(s) = D\mathbf{n}(\dot{c}) = -\omega_{13}\mathbf{a}_1 = -\omega_{13}\dot{c}$, a więc \dot{c} jest kierunkiem głównym. \square

Więcej informacji uzasadniających nazwy oraz wagę wprowadzonych pojęć podamy w kolejnych rozdziałach.

3.4 Krzywizny główne i kierunki główne

Niech $S \subset \mathbb{E}^3$ będzie sferą o promieniu R . Wtedy dla dowolnego punktu $x \in S$ i niezerowego wektora $\mathbf{v} \in TS_x$ krzywizna normalna $\kappa_x(\mathbf{v}) = \frac{1}{R}$. Motywuje to następującą definicję:

Definicja 3.4.1. Punkt $x \in M$ nazywa się kulisty, jeśli dla dowolnych niezerowych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in TM_x$, $\kappa_x(\mathbf{v}) = \kappa_x(\mathbf{v}')$.

Stwierdzenie 3.4.1. Punkt $x \in M$ jest kulisty wtedy i tylko wtedy, gdy II forma podstawowa w tym punkcie jest proporcjonalna do I formy podstawowej. Odwzorowanie Weingartena w punkcie kulistym jest homotetią $D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) = -\kappa_x\mathbf{v}$.

Dowód. Ponieważ I i II forma podstawowa jest symetryczna, więc równość $B_x(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \kappa\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ pociąga równość wartości form dla dowolnej pary wektorów. Stąd natychmiast wynika, że odwzorowanie Weingartena $-D\mathbf{n}_x$ jest homotetią. \square

Dla ustalonego punktu $x \in M$ zbadamy funkcję krzywizny normalnej $\kappa_x: \{\mathbf{v} \in TM_x \mid \|\mathbf{v}\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Zauważmy, że $\kappa_x(\mathbf{v}) = \kappa_x(-\mathbf{v})$ jest więc uprawnione mówienie o krzywiznie normalnej powierzchni w kierunku prostej stycznej.

Stwierdzenie 3.4.2. *Jeśli punkt $x \in M$ nie jest kulisty to istnieją dokładnie dwa kierunki ekstremalne dla krzywizny $\kappa_x: \{\mathbf{v} \in TM_x \mid \|\mathbf{v}\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ odpowiadające największej i najmniejszej wartości krzywizny.*

Dowód. Pokażemy, że kierunki ekstremalne są kierunkami własnymi odwzorowania Weingartena. Szukanie kierunków ekstremalnych to badanie ekstremów funkcji $f: TM_x \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(\mathbf{v}) := B_x(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ pod warunkiem $g(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$. Z twierdzenia Lagrange'a o ekstremach związanych wynika, że warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest istnienie liczby λ takiej, że $Df(h) = \lambda Dg(h)$, czyli $B_x(h, \mathbf{v}) = \langle h, -D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) \rangle = \lambda \langle h, \mathbf{v} \rangle$. Wynika stąd, że λ jest wartością własną operatora Weingartena i oczywiście $\lambda = \kappa_x(\mathbf{v})$. Ponieważ funkcja κ_x jako funkcja ciągła określona na zbiorze zawartym posiada minimum i maksimum, a więc $D\mathbf{n}_x$ posiada dwie różne wartości własne. Ponieważ $\dim TM_x = 2$ są one jedyne. \square

Definicja 3.4.2. *Kierunki ekstremalne nazywamy głównymi, a odpowiadające im krzywizny normalne krzywiznami głównymi i oznaczamy je $\kappa_x^{(1)}, \kappa_x^{(2)}$. Poczyn krzywizn głównych $K_x := \kappa_x^{(1)}\kappa_x^{(2)}$ nazywa się krzywizną Gaussa⁴, a ich średnią arytmetyczną $H := \frac{\kappa_x^{(1)} + \kappa_x^{(2)}}{2}$ krzywizną średnią.*

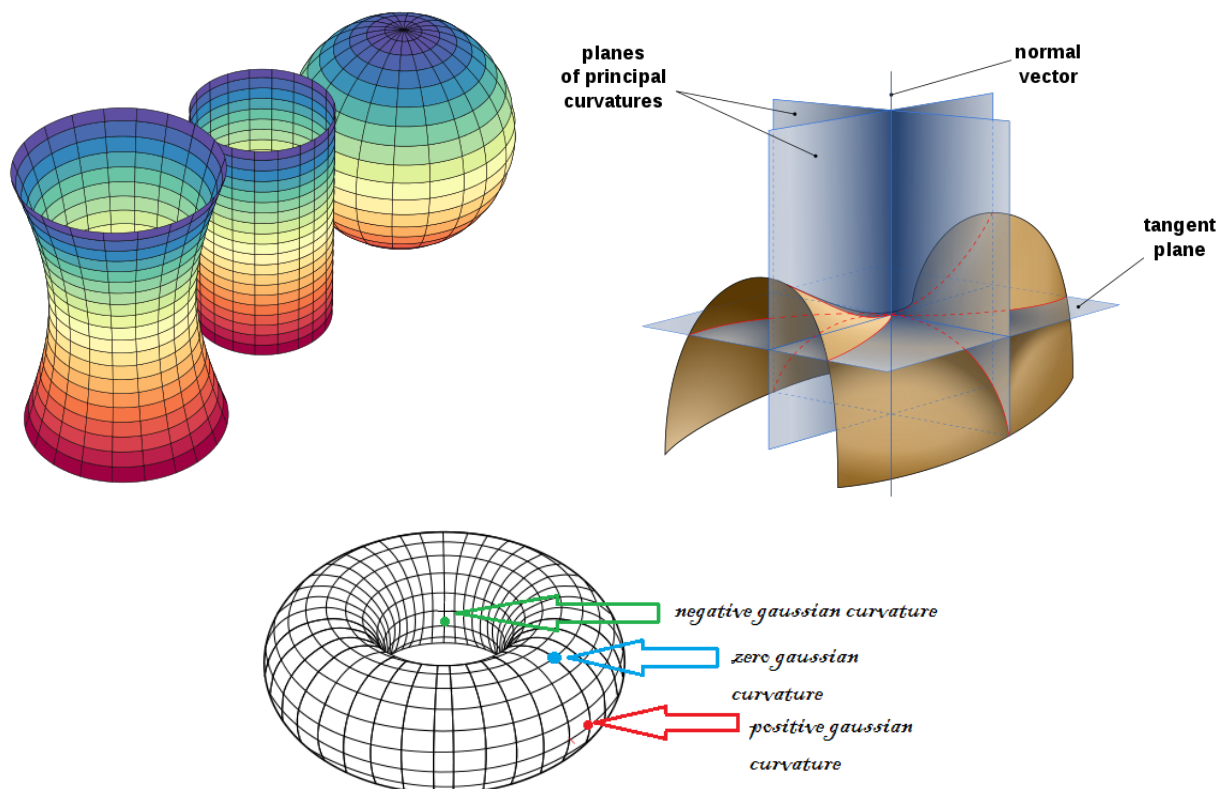
Stwierdzenie 3.4.3. *Jeśli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in TM_x$ stanowią bazę, to $K_x = \frac{\det[B_x]}{\det[G_x]}$ gdzie $[B_x], [G_x]$ oznaczają odpowiednio macierz II i I formy podstawowej w tej bazie.*

Dowód. Ponieważ $\kappa_x^{(1)}, \kappa_x^{(2)}$ są wartościami własnymi operatora Weingartena, więc $K_x = \det[-D\mathbf{n}_x]$. Z Stw. 3.2.3 wynika, że $\det[B_x] = \det[G_x] \det[-D\mathbf{n}_x]$, a stąd teza. \square

Rozpatrzmy trzy przypadki wartości krzywizny Gaussa.

- Gdy $K_x > 0$ to znaczy, że krzywizna normalna ma ten sam znak we wszystkich kierunkach, a więc afiniczna płaszczyzna styczna w punkcie x dotyka powierzchnię M w punkcie x i nigdzie poza nim w pewnym otoczeniu tego punktu. Taki punkt nazywa się *owalnym*.
- Gdy $K_x < 0$ to krzywizna normalna zmienia znak dwukrotnie podczas półobrotu płaszczyzny normalnej wokół wektora orientacji. Wynika stąd, że istnieją dwa kierunki których krzywizny normalne są zerowe. Takie kierunki nazywamy *asymptotycznymi*.
- Powierzchnie dla których $K_x = 0$ w każdym punkcie nazywamy *rozwijalnymi*.

⁴Carl Friedrich Gauss (Braunschweig 1777 - 1855 Göttingen)



3.5 Krzywizna Gaussa a pole powierzchni

Niech $M \subset \mathbb{E}^3$ będzie powierzchnią; $\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{r} M \subset \mathbb{E}^3$ jej parametryzacją wokół punktu $r(u_0) = x_0$ a $\mathbf{n}: U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ polem orientacji. Macierz I formy jest więc postaci $g_{ij}(u) = \langle \mathbf{r}_i(u), \mathbf{r}_j(u) \rangle$ a z definicji iloczynu wektorowego mamy równość $\|i(u) \times j(u)\| = \sqrt{\det(g_{ij}(u))}$. Przypomnijmy z Analizy Matematycznej II, że pole powierzchni podzbioru $S \subset r(U) \subset M$ jest zdefiniowane jako:

$$\text{vol}_M(S) := \int_{r^{-1}(S)} \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda \quad (3.7)$$

a dzięki twierdzeniu o zamianie zmiennych definicja ta nie zależy od wyboru parametryzacji.

Dygresja. W istocie metryka (I forma podstawowa) wyznacza na powierzchni formę objętości, czyli 2-formę różniczkową dM (to nie jest różniczka funkcji!) zdefiniowaną jako forma dualna ze względu na metrykę odpowiadająca iloczynowi zewnętrznemu wektorów bazowych $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$. Ogólniej, metryka Riemanna na dowolnej zorientowanej rozmaitości n -wymiarowej wyznacza n -formę objętości.

Zauważmy, że jeśli krzywizna Gaussa $K(x_0) \neq 0$ to dla pewnego podzbioru $u_0 \in U' \subset U$ superpozycja $U' \xrightarrow{r} M \xrightarrow{\mathbf{n}} S^2$ jest parametryzacją powierzchni sfery wokół punktu $\mathbf{n}(r(u_0))$,

a macierz I formy na sferze w tej parametryzacji jest postaci

$$g'_{ij}(u) = \langle D\mathbf{n}(i(u)), D\mathbf{n}(j(u)) \rangle,$$

czyli macierze obu metryk w bazie i, j są związane wzorem

$$[g'_{ij}(u)] = [D\mathbf{n}(u)]^T [g_{ij}(u)] [D\mathbf{n}(u)],$$

a więc iloraz elementów objętości jest wartością bezwzględną krzywizny Gaussa (p. Stw. 3.4.3):

$$\frac{\sqrt{\det(g'_{ij}(u))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(u))}} = |\det[D\mathbf{n}(u)]| = |K(u)|$$

W celu dokonania przejścia granicznego skorzystamy z następującego lematu, przypominającego regułę d'Hospitala znaną z Analizy Matematycznej I.

Lemat 3.5.1. *Niech $B_n := B(u_0, r_n) \subset U'$ będzie ciągiem kul euklidesowych o środkach w u_0 i promieniach $r_n \rightarrow 0$ a $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ dwoma funkcjami ciągłymi na zbiorach B_n takimi, że $g(u) \neq 0$ dla $u \in B_n$. Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_n} f}{\int_{B_n} g} = \frac{f(u_0)}{g(u_0)}.$$

Dowód. Dla każdego zbioru E miary skończonej i funkcji $f \geq 0$ całkownej na E zachodzą nierówności

$$\inf_E f \cdot |E| \leq \int_E f \leq \sup_E f \cdot |E|,$$

($|E|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru) skąd z ciągłości f w punkcie u_0 wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_n} f}{|B_n|} = f(u_0)$, więc skoro $g(u_0) \neq 0$, to stosując ostatni wzór także do tej funkcji otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_n} f}{\int_{B_n} g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_{B_n} f\right) / |B_n|}{\left(\int_{B_n} g\right) / |B_n|} = \frac{f(u_0)}{g(u_0)}$$

□

Korzystając z Lematu 3.5.1 otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_{S^2}(\mathbf{n}(r(B_n)))}{\text{vol}_M(r(B_n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_n} \sqrt{\det(g'_{ij}(u))} d\lambda}{\int_{B_n} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} d\lambda} = \det[D\mathbf{n}(u_0)] = |K(u_0)|. \quad (3.8)$$

Mówiąc pogładowo, powyższa równość oznacza, że wartość bezwzględna krzywizny Gaussa powierzchni w punkcie jest równa granicy stosunku pola powierzchni podzbioru sfery określonego przez wektor normalny na malejących płatach wokół M do powierzchni tego płata. Równość zachodzi także gdy $K(u_0) = 0$, wymaga jednak nieco odrębnego rozumowania (zad).

3.6 Powierzchnie kuliste

Przypomnijmy (Def. 3.4.1), że punkt na powierzchni nazywa się kulisty, jeśli krzywizna normalna nie zależy od kierunku wektora. Jest to równoważne proporcjonalności II formy podstawowej do I formy podstawowej (Stw. 3.4.1) .

Twierdzenie 3.6.1. *Jeżeli każdy punkt spójnej powierzchni $M \subset \mathbb{E}^3$ jest kulisty, to M jest podzbiorem pewnej sfery lub płaszczyzny.*

Dowód. Niech κ_x oznacza krzywiznę normalną w punkcie $x \in M$ (w dowolnym kierunku). Pokażemy, że $\kappa_x = \text{const}$. Ze Stw. 3.4.1 wiemy, że odwzorowanie Weingartena w punkcie x jest homotetią ze stałą κ_x , czyli $D\mathbf{n}_x(\mathbf{v}) + \kappa_x \mathbf{v} = 0$. Wybierzmy parametryzację $r: U \rightarrow M$ i zastosujmy ostatni wzór do wektorów bazy TM_x wyznaczonej przez tę parametryzację:

$$\frac{\partial(\mathbf{n} \circ r)}{\partial u_i} + (\kappa_x \circ r)i = 0 \quad (3.9)$$

a następnie różniczkując po u_j :

$$\frac{\partial^2(\mathbf{n} \circ r)}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial(\kappa_x \circ r)}{\partial u_j} i + \kappa_x ij = 0$$

Symetria drugich pochodnych implikuje równość: $\frac{\partial(\kappa_x \circ r)}{\partial u_2} 1 = \frac{\partial(\kappa_x \circ r)}{\partial u_1} 2$. Ponieważ wektory 1, 2 są liniowo niezależne wynika stąd, że

$$\frac{\partial(\kappa_x \circ r)}{\partial u_1} = \frac{\partial(\kappa_x \circ r)}{\partial u_2} = 0,$$

a więc κ_x jest funkcją lokalnie stałą, a ponieważ powierzchnia M jest spójna, więc jest globalnie stała na M . Równanie 3.9 można więc zapisać w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\mathbf{n} \circ r + \kappa r) = 0$$

skąd wynika, że $\mathbf{n} \circ r + \kappa r = \text{const}$. Jeśli $\kappa = 0$, to wektor normalny jest stały, a zatem M leży w pewnej płaszczyźnie. Jeśli $\kappa \neq 0$, to otrzymujemy, że dla pewnego punktu p_0 , $r(u) - p_0 = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(r(u))$ czyli $\|r(u) - p_0\| = \frac{1}{|\kappa|}$, a więc M leży na sferze o środku w p_0 i promieniu $\frac{1}{|\kappa|}$. \square

Definicja 3.6.1. *Mówimy, że dyfeomorfizm $\mathbb{E}^k \supset M \xrightarrow{f} N \subset \mathbb{E}^m$ zachowuje kąty jeśli w każdym punkcie $x \in M$ jego pochodna $Df_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ zachowuje kąty między wektorami.*

Twierdzenie 3.6.2 (Liouville⁵). *Jeśli dyfeomorfizm $f: U \rightarrow V$ między otwartymi podzbiórami w \mathbb{R}^3 zachowuje kąty, to również zachowuje sfery tzn. dla dowolnej sfery $S \subset U$ jej obraz $f(S) \subset V$ jest także sferą.*

Dowód. Niech $S \subset U$ będzie sferą. Wtedy jej obraz $f(S) \subset V$ jest zwartą, spójną powierzchnią. Ponieważ f zachowuje kąty, więc przeprowadza punkty kuliste na punkty kuliste [UZUPEŁNIĆ], a więc wszystkie punkty $f(S)$ są kuliste. Z Tw. 3.6.1 wynika, że $f(S)$ jest sferą. \square

⁵Joseph Liouville (Saint-Omer, F 1809 - 1882 Paris, F)

3.7 Powierzchnie obrotowe

Niech $\vec{L} \subset \mathbb{E}^3$ będzie prostą zorientowaną w przestrzeni euklidesowej. Obrotem wokół prostej \vec{L} nazywamy dowolną izometrię zachowującą orientację $R: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ taką, że $R|_L = id$. Ponieważ izometria jest przekształceniem afinicznym, dla dowolnego punktu $p_0 \in L$ zachodzi równość $R(p) = p_0 + DR(p - p_0)$ gdzie pochodna DR jest obrotem \mathbb{R}^3 wokół prostej $L - p_0$. Przypomnijmy, że pochodna przekształcenia afinicznego jest taka sama w każdym punkcie. Obrót wokół ustalonej prostej o kąt α oznaczamy R_α .

Niech $L \subset P \subset \mathbb{E}^3$ będzie płaszczyzną zawierającą prostą L a $c: J \rightarrow P$ opisem unormowanym krzywej płaskiej, której nośnik nie przecina się z prostą L oraz $c(J) \subset P$ jest podrozmaitością P .

Stwierdzenie 3.7.1. *Zbiór $S := \{R_\alpha(c(s)) \mid \alpha \in \mathbb{R}, s \in J\}$, który nazywamy powierzchnią powstałą przez obrót krzywej c wokół osi L jest 2-wymiarową podrozmaitością w \mathbb{E}^3 .*

Dowód. Pokażemy, że odwzorowanie $r(\alpha, s) := R_\alpha(c(s))$ jest lokalnym dyfeomorfizmem. Obliczymy pochodne

$$\frac{\partial r}{\partial s} = DR_\alpha(\dot{c}) \in TP, \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{R_{\alpha+\theta}(p) - R_\alpha p}{\theta} = DR_{\alpha+\frac{\pi}{2}}(p - \pi_L(p)) \in (TP)^\perp$$

gdzie $p = c(s)$, a $\pi_L: \mathbb{E}^3 \rightarrow L \subset \mathbb{E}^3$ jest rzutem ortogonalnym przestrzeni \mathbb{E}^3 na prostą L .

Pochodne cząstkowe są niezerowe i prostopadłe, więc są liniowo niezależne. Sprawdzenie, że $r: \mathbb{R} \times J \rightarrow S$ jest lokalnym homeomorfizmem pozostawiamy czytelnikowi. \square

Obliczymy współczynniki I i II formy w powyższej parametryzacji.

$$g_{ss} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s} \right\rangle = \|\dot{c}\|^2 = 1, \quad g_{\alpha\alpha} = \left\langle \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right\rangle = \|p - \pi_L(p)\|^2, \quad g_{s\alpha} = g_{\alpha s} = 0.$$

W celu znalezienia współczynników II formy zidentyfikujemy wektor normalny $\mathbf{n}(\alpha, s) := DR_\alpha(\mathbf{e}_2(s))$ gdzie $\langle \mathbf{e}_2(s), \dot{c}(s) \rangle = 0$ oraz $\|\mathbf{e}_2(s)\| = 1$, czyli \mathbf{e}_2 jest drugim wektorem FS-reperu krzywej płaskiej c , zdefiniowanym po wybraniu orientacji płaszczyzny P . Łatwo sprawdzić, że wektor $\mathbf{n}(\alpha, s)$ jest prostopadły do wektorów bazy przestrzeni stycznej $TS_{r(\alpha, s)}$ wyznaczonej przez parametryzację r . Z definicji II formy podstawowej $b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}, \mathbf{n} \right\rangle$, a więc pozostaje obliczyć drugie pochodne parametryzacji.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}(\alpha, s) = DR_{\alpha+\pi}(c(s) - \pi_L(c(s))), \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(\alpha, s) = DR_\alpha(\ddot{c}(s)), \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial s}(\alpha, s) = 0$$

a stąd

$$b_{\alpha\alpha}(\alpha, s) = \langle DR_{\alpha+\pi}(c(s) - \pi_L(c(s))), DR_\alpha(\mathbf{e}_2(s)) \rangle = -\langle c(s) - \pi_L(c(s)), \mathbf{e}_2(s) \rangle$$

$$b_{ss}(\alpha, s) = \langle \ddot{c}(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle = \kappa_c(s), \quad b_{\alpha s}(\alpha, s) = b_{s\alpha}(\alpha, s) = 0$$

3.8 Theorema egregium

Omawiane w tym rozdziale twierdzenie, któremu autor C. F. Gauss nadał łacińską nazwę *theorema egregium*, czyli "twierdzenie doskonałe" należy do najsłynniejszych twierdzeń matematyki. Za stosunkowo skomplikowaną rachunkowo formą ukrywa się głęboka geometryczna treść. Okazuje się, że krzywizna Gaussa jest niezmiennikiem wewnętrznej geometrii powierzchni. Oznacza to, że dowolna zachowująca orientację izometria między powierzchniami (niekoniecznie pochodząca od izometrii \mathbb{E}^3) $f: M_1 \rightarrow M_2$ zachowuje krzywiznę Gaussa tzn. $K_x = K_{f(x)}$. Dla dowodu wyrażamy krzywiznę Gaussa w terminach współczynników I formy podstawowej i jej pochodnych.

Niech $r: U \rightarrow M$ będzie parametryzacją powierzchni zorientowanej wokół punktu $x \in M$. Rozważmy drugie pochodne parametryzacji i pierwsze pochodne złożenia wektora normalnego z parametryzacją :

$$ij = \Gamma_{ij}^1 1 + \Gamma_{ij}^2 2 + b_{ij} \mathbf{n}, \quad (\mathbf{n} \circ r)_k = a_{1k} 1 + a_{2k} 2. \quad (3.10)$$

Zauważmy, że współczynniki a_{ij} tworzą macierz odwzorowania Weingartena w bazie i , a b_{ij} tworzą macierz II formy podstawowej. Współczynniki Γ_{ij}^k nazywają się współczynnikami Christoffela.⁶ Z równości mieszanych pochodnych cząstkowych wnioskujemy, że $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Lemat 3.8.1. *Symbole Christoffela wyrażają się przez współczynniki I formy podstawowej i jej pochodne:*

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2} \sum_k g^{pk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right) \quad (3.11)$$

gdzie $[g^{pk}]$ jest macierzą odwrotną do macierzy I formy $[g_{ij}]$.

Dowód. Wyrazimy pochodne współczynników macierzy I formy przez drugie pochodne parametryzacji. Ustalmy wskaźniki (i, j, k) :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k \rangle = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k \rangle + \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{ik} \rangle$$

Dokonując cyklicznej permutacji wskaźników $(i, j, k) \mapsto (j, k, i) \mapsto (k, j, i)$ otrzymujemy układ trzech równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk} &= \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k \rangle + \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{ik} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki} &= \langle \mathbf{r}_{jk}, \mathbf{r}_i \rangle + \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{ji} \rangle \\ -\frac{\partial}{\partial u_k} g_{ji} &= -\langle \mathbf{r}_{kj}, \mathbf{r}_i \rangle - \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{ik} \rangle \end{aligned}$$

Dodając stronami te równania i pamiętając o symetrii drugich pochodnych otrzymujemy równość:

$$\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right)$$

⁶Elwin Bruno Christoffel (Monschau, D 1829 - 1900 Strassbourg, F)

Lewą stroną ostatniej równości możemy wyrazić przez symbole Christoffela (p. 3.10).

$$\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{r}_2 + b_{ij} \mathbf{n}, \mathbf{r}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k}$$

dostajemy więc równania z których chcemy wyznaczyć niewiadome Γ_{ij}^r dla $r = 1, 2$.

$$\Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right) =: C_{ijk}$$

Dla ustalonych wskaźników i, j rozważmy dwa równania dla $k = 1, 2$, które zapiszemy w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ij1} \\ C_{ij2} \end{bmatrix} \quad \text{a więc} \quad \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{ij1} \\ C_{ij2} \end{bmatrix}$$

Rozpisując ponownie symbole C_{ijk} oraz oznaczając współczynniki macierzy odwrotnej do $[g_{mn}]$ przez $[g^{rs}]$ otrzymujemy równość

$$\Gamma_{ij}^p = g^{p1} C_{ij1} + g^{p2} C_{ij2} = \sum_k g^{pk} C_{ijk} = \sum_k g^{pk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right).$$

□

Wniosek 3.8.1. *Jeśli $f: M \rightarrow N$ jest izometrią a $r: U \rightarrow M$ jest parametryzacją, to symbole Christoffela powierzchni M w punkcie $x \in r(U)$ są identyczne z symbolami Christoffela N w punkcie $f(x)$ i parametryzacji $f \circ r: U \rightarrow N$.*

Twierdzenie 3.8.1 (*Theorema egregium*). *Dla ustalonej parametryzacji powierzchni $r: U \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ zachodzi równość:*

$$-g_{11} K_x = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

Dowód. Wyrazimy krzywiznę Gaussa przez symbole Christoffela, które jak wiemy z Lematu 3.8.1 zależą jedynie od I formy. W tym celu rozpatrzmy trzecie pochodne parametryzacji; korzystając znów z równości pochodnych mieszanych niezależnie od kolejności różniczkowania otrzymujemy dla dowolnych i, j, k :

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \mathbf{r}_{jk} - \frac{\partial}{\partial u_j} \mathbf{r}_{ik} = 0$$

Przyjmując $i = 2, j, k = 1$ i podstawiając wyrażenia na drugie pochodne w terminach symboli Christoffela (3.10) otrzymujemy równość dwóch wyrażeń:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_{12} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_{22} + b_{11} \mathbf{n}^{(2)} + (\Gamma_{11}^1)^{(2)} \mathbf{r}_1 + (\Gamma_{11}^2)^{(2)} \mathbf{r}_2 + b_{11}^{(2)} \mathbf{n} \\ & = \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_{11} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_{12} + b_{12} \mathbf{n}^{(1)} + (\Gamma_{12}^1)^{(1)} \mathbf{r}_1 + (\Gamma_{12}^2)^{(1)} \mathbf{r}_2 + b_{12}^{(1)} \mathbf{n} \end{aligned}$$

Podstawiając ponownie wzory na drugie pochodne \mathbf{r}_{ij} i przyrównując współczynniki przy \mathbf{r}_2 otrzymujemy równość:

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + b_{11} a_{22} + (\Gamma_{11}^2)^{(2)} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + b_{12} a_{21} + (\Gamma_{12}^2)^{(1)}$$

a stąd

$$b_{11} a_{22} - b_{12} a_{21} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^{(1)} - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)^{(2)}).$$

Korzystając z Stw. 3.2.4, skąd wyliczamy współczynniki a_{ij} oraz ze Stw. 3.4.3 otrzymujemy

$$b_{11} a_{22} - b_{12} a_{21} = \frac{1}{\det[g_{ij}]} (b_{11}(b_{12}g_{12} - b_{22}g_{11}) - b_{12}(b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11})) = -g_{11} \frac{\det[b_{ij}]}{\det[g_{ij}]} = -g_{11} K_x.$$

□

Formuła wyrażająca krzywiznę Gaussa przez symbole Christoffela znacznie się upraszcza gdy macierz I formy ma specjalną postać.

Definicja 3.8.1. Parametryzację $r: U \rightarrow M$ nazywamy pół-geodezyjną jeśli macierz I formy w tej parametryzacji ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$.

Naturalna parametryzacja powierzchni obrotowych jest półgeodezyjna (p. 3.7). W następnym rozdziale przekonamy się, że dowolną parametryzację można "poprawić" do półgeodezyjnej oraz wyjaśnimy nazwę. W parametryzacji pół-geodezyjnej wyrażenia 3.8.1 znacznie się upraszczają.

Lemat 3.8.2. Jeśli $r: U \rightarrow M$ jest parametryzacją półgeodezyjną to $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$,

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

$$K = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{12}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{12}}}{\partial u_1^2}.$$

3.9 Krzywe geodezyjne

Krzywe geodezyjne odgrywają fundamentalną rolę w geometrii i w fizyce. Okazuje się, że są wewnętrznymi niezmiennikami powierzchni, a więc warunek na to czy krzywa jest geodezyjna można podać w terminach symboli Christoffella, a więc I formy podstawowej (i jej pochodnych).

Stwierdzenie 3.9.1. Krzywa $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej parametryzacji $r: U \rightarrow M$ spełnione są równania:

$$\ddot{c}_p + \sum \Gamma_{ij}^p \dot{c}_i \dot{c}_j = 0, \quad p = 1, 2 \quad (3.12)$$

gdzie c_k oznaczają współrzędne opisu c w parametryzacji r tzn. $c(s) = r(c_1(s), c_2(s))$.

Uwaga 3.9.1. Zauważmy, że dla dowolnego opisu $c(t)$ z warunku (1) wynika, że $\|\dot{c}(t)\| = \text{const}$. Rozważmy pochodną $\frac{d}{dt}\langle\dot{c}, \dot{c}\rangle = 2\langle\dot{c}, \ddot{c}\rangle = 0$, gdyż $\dot{c}(t) \in TM_{c(t)}$ jest wektorem stycznym do powierzchni.

Dowód. Wyrażmy krzywą c w terminach parametryzacji $c(s) = r(c^1(s), c^2(s))$ i obliczmy jej pochodne. W bazie wyznaczonej przez parametryzację r wektor prędkości posiada współrzędne $\dot{c}(s) = Dr(\dot{c}^1(s), \dot{c}^2(s)) = \dot{c}^1(s)\mathbf{r}_1(s) + \dot{c}^2(s)\mathbf{r}_2(s) = \sum \dot{c}^k(s)\mathbf{r}_k(s)$ gdzie dla zwięzłości zapisujemy $\mathbf{r}_k(s) := \mathbf{r}_k(c^1(s), c^2(s))$. Obliczamy wektor przyspieszenia:

$$\ddot{c}(s) = \sum_k (\ddot{c}^k(s)\mathbf{r}_k(s) + \dot{c}^k(s)\frac{d\mathbf{r}_k}{ds}) = \sum_k (\ddot{c}^k(s)\mathbf{r}_k(s) + \sum_l \dot{c}^k(s)\dot{c}^l(s)\mathbf{r}_{kl}(s)) \quad (3.13)$$

Warunek, że krzywa jest geodezyjna oznacza znikanie projekcji wektora \ddot{c} na płaszczyzną styczną. Wektory $\mathbf{r}_k \in TM_{c(s)}$ więc pozostaje zająć się wektorami \mathbf{r}_{kl} . Ich rzuty na płaszczyznę styczną zapisują się w terminach symboli Christoffela. Z definicji symboli Christoffela 3.10 (pomijamy zmienną s po prawej stronie równości)

$$\pi_{TM_{c(s)}}\mathbf{r}_{kl} = \Gamma_{kl}^1\mathbf{r}_1 + \Gamma_{kl}^2\mathbf{r}_2 = \sum_p \Gamma_{kl}^p\mathbf{r}_p$$

Podstawiając do równania 3.13 otrzymujemy:

$$\pi_{TM_{c(s)}}(\ddot{c}(s)) = \sum_k (\ddot{c}^k\mathbf{r}_k + \sum_{l,p} \dot{c}^k\dot{c}^l\Gamma_{kl}^p\mathbf{r}_p) \quad (3.14)$$

Grupując wskaźniki przy wektorach $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ otrzymujemy równanie:

$$\pi_{TM_{c(s)}}(\ddot{c}) = \sum_p (\ddot{c}^p + \sum_{k,l} \Gamma_{kl}^p\dot{c}^k\dot{c}^l)\mathbf{r}_p. \quad (3.15)$$

Z definicji c jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy obie współrzędne wektora $\pi_{TM_{c(s)}}(\ddot{c})$ znikają, co jest równoważne równaniom 5.8. \square

Korzystając z konwencji sumacyjnej równania geodezyjnych można zapisać krócej:

$$(\ddot{c}^p + \Gamma_{kl}^p\dot{c}^k\dot{c}^l)\mathbf{r}_p = 0 \quad \text{lub dwóch równań} \quad \ddot{c}^p + \Gamma_{kl}^p\dot{c}^k\dot{c}^l = 0, \quad p = 1, 2.$$

Wniosek 3.9.1. *Jeśli $f: M \rightarrow N$ jest izometrią między powierzchniami a $c: J \rightarrow M$ jest geodezyjną, to krzywa $f \circ c: J \rightarrow N$ też jest geodezyjną.*

3.10 Pochodna kowariantna i przeniesienie równoległe

Niech $V: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie polem wektorowym na dowolnej podrozumności (niekoniecznie powierzchni) $M \subset \mathbb{E}^k$ tzn. $V(x) \in TM_x$. Rozpatrzmy pochodną $DV_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ - jej obraz nie musi leżeć w podprzestrzeni TM_x . Dopiero składając z projekcją ortogonalną $\pi_x^\perp: \mathbb{R}^k \rightarrow TM_x$ otrzymujemy homomorfizm: $TM_x \xrightarrow{DV_x} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_x^\perp} TM_x$ który oznaczymy $\nabla_V: TM_x \rightarrow TM_x$. Wektor $\nabla_{\mathbf{w}}V$ nazywamy *pochodną kowariantną* pola V w kierunku wektora $\mathbf{w} \in TM_x$.

Niech teraz $\mathfrak{X}(M)$ oznacza zbiór wszystkich pól wektorowych na podrozmaitości $M \subset \mathbb{E}^k$. Jest to przestrzeń wektorowa, a nawet moduł⁷ nad algebrą funkcji gładkich $C^\infty(M)$, bowiem pola wektorowe można mnożyć przez funkcje gładkie. Powyższa konstrukcja wyznacza dwuliniowe (nad \mathbb{R}) odwzorowanie:

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (\nabla_X Y)(p) := \nabla_{X(p)} Y.$$

Uwaga. Sprawdzić, że $\nabla_X Y$ jest polem wektorowym.

Stwierdzenie 3.10.1. *Dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$ i pól wektorowych $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zachodzą równości:*

1. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
2. $\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y$, gdzie $X(f)(p) := Df_p(X(p))$ (formuła Leibniza)

Będziemy także rozpatrywać pola wektorowe wzdłuż krzywych. Niech $c: J \rightarrow M$ będzie opisem krzywej; odwzorowanie gładkie $X: J \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy polem wektorowym wzdłuż c jeśli dla każdego $t \in J$, $X(t) \in TM_{c(t)}$. Zbiór pól wektorowych wzdłuż c oznaczamy $\mathfrak{X}(c)$ - jest to przestrzeń wektorowa, a nawet moduł nad $C^\infty(J)$ bo pola wektorowe wzdłuż krzywej c można mnożyć przez funkcje gładkie określone na przedziale J . Typowy przykład to pole styczne $\dot{c}(t) \in TM_{c(t)}$. Pochodna pola wzdłuż krzywej $\frac{dX}{dt}(t_0) \in \mathbb{R}^k$ może jednak nie leżeć w przestrzeni stycznej do M (np. przyspieszenie $\ddot{c}(t)$). Możemy wykorzystać projekcję ortogonalną na przestrzeń styczną do konstrukcji różniczkowania pól wzdłuż krzywej:

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) := \pi_{c(t)}^\perp \frac{dX}{dt}(t)$$

Jeśli $X = \dot{c}$ jest polem prędkości cząstki poruszającej się po M , to $\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = p_{c(t)}^\perp \ddot{c}$ jest składową wektora przyspieszenia styczną do M . Warunek, że c jest geodezyjną można więc zapisać w postaci: $\frac{\nabla \dot{c}}{dt} = 0$. Podobnie jak w przypadku Stw.3.10.1 własności zwykłej pochodnej implikują następujące własności pochodnej kowariantnej pola wzdłuż krzywej.

Stwierdzenie 3.10.2. *Odwzorowanie $\frac{\nabla}{dt}: \mathfrak{X}(c) \rightarrow \mathfrak{X}(c)$ spełnia następujące warunki:*

1. Jest \mathbb{R} -liniowe oraz $\frac{\nabla(fX)}{dt} = \frac{df}{dt} X + f \frac{\nabla X}{dt}$,
2. Jeśli X jest obcięciem pewnego pola $Y \in \mathfrak{X}(M)$ do krzywej c tzn. $X(t) = Y(c(t))$, to $\frac{\nabla X}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y$.

Różniczkowanie pól wzdłuż krzywych zachowuje się podobnie jak zwykła pochodna, także ze względu na iloczyn skalarny, a więc jest w pewnym sensie zgodne z I formą.

Stwierdzenie 3.10.3. *Dla dowolnej krzywej c i pól $X, Y \in \mathfrak{X}(c)$ zachodzi równość*

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla Y}{dt} \right\rangle.$$

⁷Oznacza to, że mnożenie przez funkcje spełnia te same warunki co mnożenie przez skalary występujące w definicji przestrzeni wektorowej. Patrz [Wiki](#)

Wprowadzimy bardzo ważną definicję pola równoległego wzdłuż krzywej.

Definicja 3.10.1. Niech $c: J \rightarrow M$ będzie krzywą na podrozmaitości $M \subset \mathbb{E}^k$ a $V: J \rightarrow \mathbb{R}^k$ polem wzdłuż tej krzywej. Nazwiemy je równoległym jeśli jego pochodna kowariantna znika tzn. $\frac{\nabla V}{dt} = 0$.

Nazwa pole równoległe wywodzi się z przypadku gdy powierzchnia $M \subset \mathbb{E}^k$ jest podprzestrzenią afiniczną, bowiem wtedy $0 = \frac{\nabla X}{dt} = \frac{dX}{dt}$, a więc $X(t) = \text{const}$. Pole prędkości krzywej jest równoległe dokładnie wtedy, gdy krzywa jest geodezyjna. Zauważmy, że suma pól równoległych wzdłuż ustalonej krzywej oraz iloczyn pola równoległego przez skalar (ale nie przez funkcję!) są polami równoległymi. Zauważmy ważną własność pól równoległych.

Wniosek 3.10.1. Dla dowolnej krzywej c i pól równoległych wzdłuż niej $X, Y \in \mathfrak{X}(c)$, $\langle X(t), Y(t) \rangle = \text{const}$, w szczególności długość wektorów pola równoległego jest stała oraz kąt między wektorami dwóch pól równoległych jest stały.

Dowód. Teza wynika natychmiast z Stw. 3.10.1 i wzorów na długość wektora oraz kąt między dwoma wektorami. \square

Od tego momentu ograniczymy się do powierzchni $M \subset \mathbb{E}^3$, choć omawiane twierdzenia mają odpowiedniki dla dowolnych wymiarach. Zastanowimy się, czy dowolny wektor styczny do powierzchni $\mathbf{v} \in TM_{c(t_0)}$ można "przedłużyć" do pola równoległego. W tym celu zauważymy, że warunek równoległości można wyrazić w terminach symboli Christoffela.

Stwierdzenie 3.10.4. Niech dane będzie parametryzacja powierzchni $r: U \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$. Niech krzywa $c: J \rightarrow M$ leży w jej obrazie a $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(c)$ będzie polem wektorowe wzdłuż tej krzywej. Niech $\mathbf{V} = v^1 \mathbf{r}_1 + v^2 \mathbf{r}_2$. Wtedy współrzędne pochodnej kowariantnej pola \mathbf{V} w tej samej bazie wyrażają się wzorem:

$$\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt} = \sum_p (\dot{v}_p + \sum_{k,l} \Gamma_{kl}^p v^k \dot{c}^l) \mathbf{r}_p \quad (3.16)$$

Dowód. Dowód jest identyczny jak formuły 3.15, w której pole prędkości krzywej \dot{c} zastępujemy polem \mathbf{V} . \square

Mając daną krzywą $c: J \rightarrow M$ oraz wektor $\mathbf{v} \in TM_{t_0}$ można "przenieść" ten wektor równoległe wzdłuż krzywej c . Dokładniej:

Twierdzenie 3.10.1. Dla dowolnej krzywej $c: J \rightarrow M$ i punktu $t_0 \in J$ oraz $\mathbf{v} \in TM_{c(t_0)}$ istnieje równoległe pole wektorowe $X_{\mathbf{v}} \in \mathfrak{X}(c)$ takie, że $X_{\mathbf{v}}(t_0) = \mathbf{v}$. Dla dowolnego punktu $t_1 \geq t_0$ przyporządkowanie $TM_{c(t_0)} \ni \mathbf{v} \mapsto X_{\mathbf{v}}(t_1) \in TM_{c(t_1)}$ wyznacza liniową izometrię $\|_c: TM_{c(t_0)} \rightarrow TM_{c(t_1)}$, zwaną przeniesieniem równoległym.

Dowód. Jeśli nośnik krzywej c leży w obrazie jednej parametryzacji $r: U \rightarrow M$, to znalezienie pola równoległego sprowadza się do rozwiązania równania 3.16 z warunkiem początkowym (v^1, v^2) , gdzie v^i to współrzędne wektora \mathbf{v} w bazie r_1, r_2 . Ponieważ jest to równanie I rzędu takie rozwiązanie istnieje na całym odcinku i jest jednoznaczne. W przypadku dowolnej krzywej pokrywamy jej nośnik skończoną liczbą map i konstruujemy przeniesienie przechodząc od mapy do mapy. Odwzorowanie $\|_c: TM_{c(t_0)} \rightarrow TM_{c(t_1)}$ jest liniową izometrią, bowiem jak zauważyliśmy suma pól równoległych i iloczyn przez skalar są polami równoległymi. Zachowywanie iloczynu skalarnego wynika z Stw. 3.10.3. \square

Zauważmy, że stosunkowo łatwo jest podać geometryczną interpretację przesunięcia równoległego wzdłuż krzywej geodezyjnej. Jeśli $c: J \rightarrow M$ jest geodezyjną, a $\mathbf{V}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ polem równoległym to na mocy Wniosku 3.10.1 iloczyn skalarny $\langle \mathbf{V}(s), \dot{c}(s) \rangle = \text{const}$. Ponieważ moduły wektorów $\mathbf{V}(s)$ i $\dot{c}(s)$ też są stałe, a więc kąt między wektorami $\mathbf{V}(s)$ i $\dot{c}(s)$ pozostaje stały gdy przemieszczamy się wzdłuż krzywej.

Niech teraz $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ będzie dowolną krzywą leżącą na zorientowanej powierzchni M , a $\mathbf{V}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ jednostkowym polem wektorowym wzdłuż tej krzywej. Analogicznie jak w przypadku gdy \mathbf{V} jest polem stycznym do krzywej możemy rozpatrywać reper Darboux dla pola V składający się z wektorów

$$\mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}(s) = \mathbf{V}(s), \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s) := \mathbf{n}(s) \times \mathbf{V}(s), \mathbf{a}_3^{\mathbf{V}}(s) := \mathbf{n}(s). \quad (3.17)$$

Niech $\mathbf{w} \in TM_{c(s_0)}$ będzie jednostkowym wektorem stycznym, a pole $\mathbf{W}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ jego przeniesieniem równoległym wzdłuż krzywej c . Ponieważ pole \mathbf{W} leży w przestrzeni stycznej do M istnieje funkcja gładka $\theta: J \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\mathbf{W}(s) = \cos \theta(s) \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s). \quad (3.18)$$

(Uwaga: precyzyjny dowód istnienia funkcji θ wymaga argumentu topologicznego, podobnego do Stw. 2.6.1, opartego na Stw. 2.5.1.)

Stwierdzenie 3.10.5. *W powyższych oznaczeniach, jeśli $a < b \in J$, to*

$$\Delta \theta := \theta(b) - \theta(a) = - \int_a^b \langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}} \rangle ds.$$

Dowód. Z definicji 3.18 mamy:

- $\langle \mathbf{W}(s), \mathbf{V}(s) \rangle = \cos \theta(s)$
- $\langle \mathbf{W}(s), \dot{\mathbf{V}}(s) \rangle = \langle \cos \theta(s) \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s), \dot{\mathbf{V}}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{V}}(s), \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s) \rangle \sin \theta(s)$
- $\langle \dot{\mathbf{W}}(s), \mathbf{V}(s) \rangle = 0$.

Różniczkując pierwszą równość otrzymujemy:

$$-\theta'(s) \sin \theta(s) = \langle \dot{\mathbf{W}}(s), \mathbf{V}(s) \rangle + \langle \mathbf{W}(s), \dot{\mathbf{V}}(s) \rangle = \langle \mathbf{W}(s), \dot{\mathbf{V}}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{V}}(s), \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s) \rangle \sin \theta(s)$$

a więc jeśli $\sin \theta(s) \neq 0$ mamy równość $-\theta'(s) = \langle \dot{\mathbf{V}}(s), \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(s) \rangle$. Równość ta zachodzi także, gdy $\sin \theta(s) = 0$. \square

Rozpatrzmy przypadek gdy pole $\mathbf{V}(s) = \dot{c}(s)$ jest polem wektorów stycznych. Wtedy reper Darboux dla \mathbf{V} jest identyczny z reperem Darboux krzywej (p. Def. 3.1.2), a więc $\langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}} \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \dot{\mathbf{a}}_1 \rangle = \omega_{12}$, czyli jest to krzywizna geodezyjna krzywej c na powierzchni M . Otrzymujemy więc następujący wniosek ze Stw. 3.10.5.

Wniosek 3.10.2. *Dla dowolnej krzywej unormowanej położonej na powierzchni $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ oraz równoległego jednostkowego pola $\mathbf{W}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ wzdłuż tej krzywej zachodzi równość*

$$\theta'(s) = -\omega_{12}(s) \quad \text{a więc} \quad \Delta \theta := \theta(b) - \theta(a) = - \int_a^b \omega_{12} ds$$

gdzie $\cos \theta(s) := \langle \mathbf{W}(s), \dot{c}(s) \rangle$.

Ostatni wniosek jest analogiczny (a nawet jest uogólnieniem) Wn. 2.5.2 mówiącego, że krzywizna krzywej płaskiej jest pochodną kąta jaki tworzy wektor styczny z ustalonym kierunkiem. Krzywizna geodezyjna ω_{12} krzywej c jest pochodną kąta (ze znakiem minus) jaki tworzy wektor styczny do krzywej z przesunięciem równoległym pewnego wektora wzdłuż tej krzywej. Jeśli podrozmaitość jest płaszczyzną, to pole równoległe jest stałe, a krzywizna geodezyjna jest zwykłą krzywizną krzywej.

Zauważmy, że zmiana kąta między przesunięciem równoległym wektora a styczną do krzywej wyznacza to przesunięcie jednoznacznie, ponieważ przestrzeń styczna jest 2-wymiarowa. Tę obserwację możemy wykorzystać np. do zbadania przesunięcia wzdłuż równoleżnika na sferze.

Przykład 3.10.1. Na sferze euklidesowej $S_R^2 \subset \mathbb{E}^3$ o promieniu $R > 0$ rozpatrzmy równoleżnik o szerokości geograficznej α . Jest to płaski okrąg o promieniu $R \cos \alpha$. Krzywizna geodezyjna tego okręgu jest stała $\omega_{12} = \frac{\tan \alpha}{R}$ [zadanie]. Zatem z wniosku wynika, że zmiana kąta wektora pola równoległego wzdłuż równoleżnika wynosi

$$\Delta\theta = -\frac{\tan \alpha}{R} 2\pi R \cos \alpha = -2\pi \sin \alpha.$$

3.11 Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa

Wieloliniowe formy antysymetryczne

Niech \mathbf{V} będzie rzeczywistą, skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Formę k -liniową $F: \mathbf{V} \times \cdots \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy antysymetryczną jeśli dla dowolnego ciągu wektorów $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ i permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ zachodzi równość $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \text{sgn}(\sigma)F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$. Jeśli $\dim \mathbf{V} = n$ to istnieje jedna z dokładnością do proporcjonalności n -forma antysymetryczna (pochodzi od wyznacznika). Oznaczmy podprzestrzeń liniową k -form antysymetrycznych w przestrzeni wszystkich form k -liniowych przez $A^k(\mathbf{V}) \subset \text{Hom}^k(\mathbf{V}, \mathbb{R})$. Jej wymiar wynosi $\binom{n}{k}$.

Zauważmy, że istnieje projekcja $\text{Alt}: \text{Hom}^k(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \rightarrow A^k(\mathbf{V})$ dana wzorem

$$\text{Alt}(F)((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma) F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

Współczynnik $\frac{1}{k!}$ zapewnia, że dla $\text{Alt}|_{A^k(\mathbf{V})} = id$. Zastosujemy projekcję Alt do skonstruowania dla dowolnych $0 \leq p, q \leq \dim \mathbf{V}$ dwuliniowego homomorfizmu

$$\wedge: A^p(\mathbf{V}) \times A^q(\mathbf{V}) \rightarrow A^{p+q}(\mathbf{V}),$$

zwanego *produktem zewnętrznym*. Istnieje oczywisty homomorfizm dwuliniowy mnożenia form $\text{Hom}^p(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \times \text{Hom}^q(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}^{p+q}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$, który przyporządkowuje parze form F, G formę

$$(FG)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_q) := F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)G(\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_q). \quad (3.19)$$

Produkt zewnętrzny form definiujemy następująco:

$$F \wedge G := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(FG).$$

Współczynnik potrzebny jest, aby produkt zewnętrzny spełniał naturalne warunki mnożenia. Zauważmy, że $F \wedge G = (-1)^{pq} G \wedge F$. Przestrzeń wektorowa $A^*(\mathbf{V}) := \bigoplus_k A^k(\mathbf{V})$ z iloczynem zdefiniowanym przez \wedge nazywa się (dualną) algebrą zewnętrzną przestrzeni wektorowej \mathbf{V} . Dowolny homomorfizm przestrzeni liniowych $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ indukuje homomorfizm algebr zewnętrznych $f^*: A^*(\mathbf{W}) \rightarrow A^*(\mathbf{V})$.

Jeśli $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jest bazą przestrzeni \mathbf{V} , a $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*)$ jest bazą sprzężoną, to wektory $\{\mathbf{v}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ tworzą bazę przestrzeni $A^k(\mathbf{V})$.

Formy różniczkowe

W języku geometrii różniczkowej przypomnimy podstawowe pojęcia dotyczące form różniczkowych oraz najważniejsze twierdzenie z nimi związane - twierdzenie Stokesa. Niech $M \subset \mathbb{E}^k$ będzie n -wymiarową podzaimnością i niech $0 \leq k \leq n$. k -formą różniczkową na M nazywa się przyporządkowanie dowolnemu punktowi $p \in M$ antysymetrycznej formy k -liniowej $\omega(p): TM_p \times \dots \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$ tak, że dla dowolnej parametryzacji $r: U \rightarrow M$ funkcja $\omega(r(u))(\mathbf{r}_{i_1}(u), \dots, \mathbf{r}_{i_k}(u))$ określona na zbiorze U jest gładką. Łatwo sprawdzić, że jeśli ten warunek zachodzi dla pewnej parametryzacji w otoczeniu punktu p to zachodzi dla dowolnej innej. Jeśli $f: M \rightarrow N$ jest dowolnym przekształceniem gładkim, to przy jego pomocy można "przeciągać" formy z zaimności N na zaimność M . Jeśli η jest formą na N , to formę przeciągniętą oznaczamy $f^*(\eta)$. Wynika to z ogólnych zasad algebry: dowolny homomorfizm przestrzeni wektorowych indukuje homomorfizm odpowiednich przestrzeni form. Zbiór k -form różniczkowych na M oznaczamy $\Omega^k(M)$ - jest to przestrzeń wektorowa, a nawet moduł nad pierścieniem funkcji gładkich. Operacja przeciągania form przez odwzorowania gładkie definiuje homomorfizm przestrzeni wektorowych $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$.

0-formy na zaimności to po prostu funkcje gładkie.

Jeśli $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to jej pochodna df jest 1-formą na M (warunek antysymetrii jest pusty). W Stw. 1.6.2 pokazaliśmy jak metryka w przestrzeniach stycznych pozwala przyporządkować formie df pole gradientowe $\text{grad } f$. Bardzo ważnym przykładem takich form są pochodne współrzędnych w przestrzeni afinicznej. Jeśli $U \subset \mathbb{E}^n$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni afinicznej, to dla dowolnego punktu $p_0 \in \mathbb{E}^n$ mamy mapę afiniczną $\mathbb{E}^n \ni p \mapsto p - p_0 \in \mathbb{R}^n$; obraz punktu p zapisujemy $(x^1(p), \dots, x^n(p))$, czyli współrzędne są funkcjami gładkimi na U . Ich pochodne dx^1, \dots, dx^n są 1-formami i tworzą bazę przestrzeni wszystkich form $A^1(U)$ nad pierścieniem funkcji gładkich $C^\infty(U)$. Forma $d\lambda_n := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ jest elementem objętości.

Dygresja. Nie każda 1-forma na zaimności musi być różniczką pewnej funkcji. Rozpatrzmy okrąg $S^1 \subset \mathbb{E}^2$ i dla wybranej półprostej L o początku w p_0 funkcję $\theta_L: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, przyporządkowującą kąt między półprostą L a półprostą przechodzącą przez wybrany punkt. Jest ona gładką, poza punktem przecięcia $\{p_L\} = L \cap S^1$. Wybierając dwie różne proste L_1 i L_2 otrzymujemy dwie funkcje gładkie $\theta_i: S^1 \setminus \{p_i\} \rightarrow \mathbb{R}$. Ich różniczki $d\theta_1 = d\theta_2$ na $S^1 \setminus \{p_1, p_2\}$, a więc definiują formę na okręgu oznaczaną dla zmylenia czytelnika ;) $d\theta$.

Orientacji powierzchni $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ można przyporządkować element objętości, czyli 2-formę, oznaczaną $dM_p: TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowaną przez warunek $dM_p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$

jeśli $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}(p))$ jest dodatnio zorientowaną ortogonalną bazą w \mathbb{R}^3 . Dowolna 2-forma na powierzchni M jest postaci $f dM$ gdzie $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką.

n -Formy na rozmaitości n -wymiarowej można całkować po jej podzbiorach położonych w obrazach parametryzacji. Jeśli ω jest n -formą i $r: U \rightarrow M$ parametryzacją oraz $S \subset M$ to definiujemy całkę $\int_S \omega$ w następujący sposób. Forma $r^*\omega$ jest postaci $f d\lambda_n$, gdzie $d\lambda_n$ jest formą objętości na \mathbb{R}^n .

$$\int_S \omega := \int_{r^{-1}(S)} f d\lambda_n.$$

Jeśli $\omega = dM$ jest formą objętości zdefiniowaną wyżej, to $\int_S dM = \text{vol}_M(S)$ (zob. 3.7). Jeśli ω jest 1-formą na rozmaitości M dyfeomorficznej z okręgiem, to całkę z funkcji $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ po M można interpretować jako całkę po krzywej. Jeśli $[0, 2\pi] \rightarrow S^1 \xrightarrow{h} M \subset \mathbb{E}^n$ jest izometryczną parametryzacją M , to

$$\int_M f dM = \int_a^b (h \circ ex)^*(f dM) = \int_a^b f \circ c \circ ex.$$

Dla sformułowania twierdzenia Stokesa konieczne jest wprowadzenie operacji różniczkowania (zewnętrznego), która przyporządkowuje k -formie na M $k+1$ -formę. Jest to homomorfizm przestrzeni wektorowych $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ scharakteryzowany jednoznacznie przez następujące warunki:

- dla 0-formy, czyli funkcji $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, df jest różniczką funkcji
- $ddf = 0$
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \wedge d\eta$

Podamy lokalną wersję twierdzenia Stokesa, z której będziemy dalej korzystać. Niech $M \subset \mathbb{E}^3$ będzie powierzchnią z orientacją $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz lokalną parametryzacją $r: U \rightarrow M$ zachowującą orientację taką, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ kula $B := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq \varepsilon\} \subset U$. Oznaczmy brzeg kuli (czyli okrąg) ∂B - jest to 1-wymiarowa podrozmaitość zorientowana w ten sposób, że wektor styczny i zewnętrzny wektor normalny tworzą bazę dodatnio zorientowaną przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Oznaczmy obrazy parametryzacji $D := r(B)$ oraz $\partial D := r(\partial B)$ i niech ω będzie 1-formą na M .

Twierdzenie 3.11.1 (G. G. Stokes⁸). *W powyższych oznaczeniach $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.*

Wnioskiem z twierdzenia Stokesa jest twierdzenie Greena, które zastosujemy w następnym podrozdziale.

Twierdzenie 3.11.2 (G. Green⁹). *Niech $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi określonymi na dysku (lub ogólniej 2-wymiarowej podrozmaitości z brzegiem w \mathbb{R}^2). Wtedy*

$$\int_{\partial B} f dx + g dy = \iint_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.20)$$

⁸George Gabriel Stokes, Contae Shligigh, IR 1819 - 1903 Cambridge, GB

⁹George Green, Sneinton, GB 1793 - 1841 Sneinton, GB

3.12 Przesunięcie równoległe a krzywizna Gaussa

Niech $M \subset \mathbb{E}^3$ będzie powierzchnią z orientacją $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz lokalną parametryzacją $r: U \rightarrow M$ taką, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ kulę $B := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq \varepsilon\} \subset U$. Oznaczmy brzeg kuli ∂B , oraz obrazy przy parametryzacji $D := r(B)$ oraz $\partial D := r(\partial B)$. Niech będzie także dane pole wektorowe określone (co najmniej) na zbiorze D ; jego złożenie z parametryzacją oznaczamy $\mathbf{V}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, takie że $\|\mathbf{V}(u)\| = 1$ dla $u \in U$. Jak poprzednio (p. 3.17) będziemy rozważać ortonormalny układ wektorów (ruchomy reper), tym razem określony na całym zbiorze $U \subset \mathbb{R}^2$, a nie tylko na odcinku:

$$\mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}(u) := \mathbf{V}(u), \quad \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}(u) := \mathbf{n}(u) \times \mathbf{V}(u), \quad \mathbf{a}_3^{\mathbf{V}}(u) := \mathbf{n}(u)$$

Lemat 3.12.1.

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_2} \right\rangle = K \|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\| = K \sqrt{\det[g_{ij}]}$$

Dowód. Ustalając odpowiednio pierwszą i drugą współrzędną traktujemy wektory $\mathbf{a}_i^{\mathbf{V}}(u_1, u_2)$ jako ruchome repery $\mathbf{V}(u_1, u_2)$ i stosujemy do nich twierdzenie o postaci pochodnej ruchomego reperu 1.9.1.

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}} \\ \mathbf{a}_3^{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i & \beta_i \\ -\alpha_i & 0 & \gamma_i \\ -\beta_i & -\gamma_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}} \\ \mathbf{a}_3^{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

a więc

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_j} \right\rangle = \gamma_i \beta_j \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} = (\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2) \mathbf{n}.$$

Pozostaje więc obliczyć

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2}, \mathbf{n} \right\rangle = \langle D\mathbf{n}(\mathbf{r}_1) \times D\mathbf{n}(\mathbf{r}_2), \mathbf{n} \rangle = \det(D\mathbf{n}) \langle \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \mathbf{n} \rangle = K \|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|.$$

□

Będziemy badać przeniesienie równoległe wektora stycznego do M wzdłuż brzegu ∂D (p. oznaczenia na początku sekcji), a dokładniej krzywej zamkniętej parametryzującej ten brzeg. Znajdźmy odwzorowanie $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ takie, żeby złożenie $c := r \circ e: \mathbb{R} \rightarrow \partial D$ było lokalną izometrią (tzn. $\|\dot{c}(s)\| = 1$), co oznacza, że na każdym odcinku $J \subset \mathbb{R}$ takim, że $e|_J$ jest różnowartościowe, $c|_J$ jest parametryzacją łuku. Niech $s_0 < s_1 \in \mathbb{R}$ będą punktami, takimi że $c(s_0) = c(s_1) := p$, natomiast odwzorowanie $c|(s_0, s_1)$ jest różnowartościowe. Niech $\mathbf{w} \in TM_p$ i rozważmy pole $\mathbf{W}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ przesunięcia równoległego wektora \mathbf{w} wzdłuż krzywej c .

Twierdzenie 3.12.1. *W powyższych oznaczeniach $\Delta\theta = \int_D KdM$, gdzie $\Delta\theta$ jest kątem między wektorem \mathbf{w} a jego przeniesieniem równoległym wzdłuż ∂D , czyli krzywej $r \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \partial D \subset M$ między punktami s_0 i s_1 .*

Dowód. Rozważmy pole $\mathbf{V} \circ c$ wzdłuż drogi $r \circ c$. Zauważmy, że ponieważ krzywa jest zamknięta, to przyrost kąta w stosunku do wektora stycznego jest taki sam jak w stosunku do wektora \mathbf{w} . Na mocy Stw. 3.10.5 zachodzi równość

$$\Delta\theta = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V} \circ c}, \frac{d(\mathbf{V} \circ c)}{ds} \rangle ds$$

Rozpisując pochodną we współrzędnych otrzymujemy

$$\frac{d(\mathbf{V} \circ c)}{ds} = D\mathbf{V}(\dot{c}) = D\mathbf{V}(\dot{c}_1, \dot{c}_2) = \dot{c}_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_1} + \dot{c}_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_2}$$

a zatem, z definicji całki po krzywej

$$\int_0^{2\pi} \langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V} \circ c}, \frac{d(\mathbf{V} \circ c)}{ds} \rangle = \int_{\partial B} \langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_1} \rangle du^1 + \langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_2} \rangle du^2$$

Ponieważ pole \mathbf{V} określone jest na całym zbiorze U , możemy zastosować twierdzenie Greena wiążące całkę po płacie powierzchni z całką po jego brzegu.¹⁰

$$\Delta\theta = \int_{\partial B} \langle \mathbf{a}_2, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_1} \rangle du^1 + \langle \mathbf{a}_2, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u_2} \rangle du^2 = \int_B \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (\langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_1} \rangle) - \frac{\partial}{\partial u_1} (\langle \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_2} \rangle) \right] du^1 du^2$$

Z symetrii pochodnych cząstkowych wyrażenie podcałkowe po prawej stronie redukuje się do postaci

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_2} \right\rangle$$

a zatem z Lematu 3.12.1 otrzymujemy równość:

$$\int_B \left[\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{a}_2^{\mathbf{V}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{a}_1^{\mathbf{V}}}{\partial u_2} \right\rangle \right] du^1 du^2 = \int_B K \|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\| du^1 du^2 = \int_D KdM.$$

□

Z Wniosku 3.10.2 oraz z *Umlaufsatz* 2.6.1 wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 3.12.1 (Tw. Gaussa-Bonnetta, przypadek gładki). *Przy założeniach Tw. 3.12.1 zachodzi równość*

$$\int_D KdS + \int_{\partial D} \omega_{12} = 2\pi.$$

gdzie ω_{12} jest krzywizną geodezyjną krzywej $r \circ c$.

Dowód. Rozważmy kąty $\angle(\dot{c}(s), \mathbf{V}(c(s))) = \angle(\dot{c}(s), \mathbf{W}(s)) + \angle(\mathbf{W}(s), \mathbf{V}(c(s)))$. Zmiana tych kątów wzdłuż krzywej zamkniętej $r \circ c$ jest dana odpowiednio przez *Umlaufsatz* (2π), Wniosek 3.10.2 ($\int_{\partial D} \omega_{12}$) oraz Tw. 3.12.1 ($\int_D KdS$). □

¹⁰p. Paweł Strzelecki "Analiza matematyczna II".

Twierdzenie 3.12.2 (Gauss-Bonnet). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią zorientowaną; niech $\Delta \subset M$ będzie obrazem dyfeomorficznym trójkąta, którego brzeg ma orientację zgodną z orientacją M . Niech α_i będą kątami zewnętrznymi Δ . Wówczas:*

$$\int_D K dS + \int_{\partial D} \omega_{12} ds + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi.$$

Wniosek 3.12.2. *Jeśli Δ jest trójkątem, którego boki są geodezyjnymi geodezyjnym, to*

$$\int_D K dS = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi,$$

gdzie $\beta_i := \pi - \alpha_i$ są kątami wewnętrznymi Δ .

Twierdzenie 3.12.3 (Globalne tw. Gaussa-Bonneta). *Dla dowolnej zwartej powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$*

$$\int_M K dS = 2\pi\chi(M),$$

gdzie $\chi(M)$ oznacza *charakterystykę Eulera*.

Rozdział 4

Lokalna geometria Riemanna

4.1 Lokalne rozmaitości Riemanna

Dla dowolnej rzeczywistej przestrzeni wektorowej przez $SP(\mathbf{V})$ oznaczamy podzbiór przestrzeni odwzorowań dwuliniowych $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ składający się z iloczynów skalarnych, czyli form symetrycznych, dodatnio określonych. Wybierając bazę zbiór $SP(\mathbf{V})$ można utożsamiać ze zbiorem dodatnio określonych macierzy symetrycznych $n \times n$.

Przez \mathbb{A}^n będziemy oznaczać n -wymiarową przestrzeń afiniczną modelowaną na przestrzeni wektorowej \mathbb{R}^n (w odróżnieniu od \mathbb{E}^n , co zawsze oznaczało przestrzeń afiniczną z metryką euklidesową!).

Definicja 4.1.1. *Lokalną rozmaitością Riemanna nazywamy parę (U, G) gdzie $U \subset \mathbb{A}^n$ jest podzbiorem otwartym pewnej przestrzeni afinicznej (bez metryki!) a $G: U \rightarrow SP(\mathbb{R}^n)$ odwzorowaniem gładkim. Funkcję G nazywamy metryką Riemanna na U ; iloczyn skalarny $G(u)$ oznaczamy często $\langle -, - \rangle_u$.*

Dowolny dyfeomorfizm $r: V \rightarrow U \subset \mathbb{A}^n$ gdzie $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *lokalną parametryzacją* rozmaitości (U, G) . Tak jak poprzednio oznaczamy pochodne odwzorowania r pow współrzędnych $\mathbf{r}_i(u) \in \mathbb{R}^n$ a macierz $g_{ij}^r(u) := \langle \mathbf{r}_i(u), \mathbf{r}_j(u) \rangle$ nazywamy macierzą metryki G w parametryzacji r (indeks r często pomijamy). Zauważmy, że ponieważ U jest podzbiorem otwartym w przestrzeni afinicznej, a więc w każdym punkcie p_0 istnieje naturalna parametryzacja $r(\mathbf{v}) := p_0 + \mathbf{v}$ określona na zbiorze $V := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in U \mathbf{v} = u - p_0\}$. Odwzorowania odwrotne do lokalnych parametryzacji nazywamy *mapami*.

Definicja 4.1.2. *Niech (U_1, G_1) i (U_2, G_2) będą lokalnymi rozmaitościami Riemanna. Przekształcenie gładkie $f: U_1 \rightarrow U_2$ nazywamy lokalną izometrią jeśli dla dowolnego punktu $u \in U_1$ pochodna $Df_u: (\mathbb{R}^n, G_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, G_2)$ jest izometrią tzn. dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, zachodzi równość $G_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = G_2(Df_u(\mathbf{v}_1), Df_u(\mathbf{v}_2))$. Jeśli $f: U_1 \rightarrow U_2$ jest także dyfeomorfizmem, to f nazywamy izometrią.*

Zauważmy, że jeśli f jest (lokalną) izometrią, to jest (lokalnym) dyfeomorfizmem. Jeśli (U, G) jest lokalną rozmaitością Riemanna oraz $h: V \rightarrow U$ jest lokalnym dyfeomorfizmem, to na zbiorze V można zdefiniować metrykę Riemanna

$$h^*G(x)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := G(h(x))(Dh_x(\mathbf{v}), Dh_x(\mathbf{w})).$$

Z definicji wynika, że przekształcenie $h: (V, h^*G) \rightarrow (U, G)$ jest lokalną izometrią. Jeśli h jest dyfeomorfizmem, to nazywamy je *reparametryzacją* rozmaitości (U, G) . Z definicji wynika także, że jeśli $f: (U_1, G_1) \rightarrow (U_2, G_2)$ jest lokalną izometrią, to $G_1 = f^*G_2$.

Obliczmy jak wyrażają się przez siebie nawzajem współczynniki metryki Riemanna w różnych mapach.

Stwierdzenie 4.1.1. Niech $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą dwoma mapami a odwzorowanie przejścia zapiszmy w postaci: $\psi\varphi^{-1} = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, (y^n(x^1, \dots, x^n))$. Wtedy

$$g_{ij}^\psi = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}^\varphi \quad \text{czyli} \quad [g_{ij}^\psi] = \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]^T [g_{ij}^\varphi] \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right].$$

Dowód. Stosując konwencję sumacyjną zapisujemy równości:

$$g_{ij}^\psi = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}^\varphi.$$

□

Jeśli $M \subset \mathbb{E}^k$ jest n -wymiarową podrozmaitością, to dowolna parametryzacja $r: U \rightarrow M$ wyznacza lokalną rozmaitość Riemanna. Funkcję $G_r: U \rightarrow SP(\mathbb{R}^n)$ definiujemy jako

$$G_r(u)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \langle Dr_u(\mathbf{v}_1), Dr_u(\mathbf{v}_2) \rangle.$$

Macierz $G_r(u) = [g_{ij}(u)]$ jest dokładnie macierzą I formy podstawowej w parametryzacji r .

Ważne przykłady powstają przez pomnożenie metryki euklidesowej przez pewną funkcję. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dodatnią funkcją gładką. Wtedy $G^f(u) := f(u)Id$ jest także metryką Riemanna, zwaną *metryką konforemną* (też *izotermiczną*). Nazwa wywodzi się stąd, że kąty między wektorami w metryce konforemnej są takie same jak w metryce euklidesowej (sprawdzić). Bardzo ważne metryki konforemnej występują na płaszczyźnie (p. 4.3)

Na rozmaitości Riemanna można przenieść wiele pojęć znanych z ogólnej teorii podrozmaitości oraz geometrii powierzchni. Dla dowolnego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_x$ można określić jego normę $\|\mathbf{v}\|_g^2 := \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_g$, a dla dwóch niezerowych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ kąt między nimi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_g = \|\mathbf{v}\|_g \|\mathbf{w}\|_g \cos \theta$.

Metryka Riemanna na rozmaitości pozwala nam obliczać długość krzywych. Podobnie jak w przypadku euklidesowym dla drogi $c: J \rightarrow M$ definiujemy jej długość

$$L(c) := \int_J \|\dot{c}(t)\|_{c(t)} dt \quad (4.1)$$

gdzie dla wektora $\mathbf{v} \in TM_x$, $\|\mathbf{v}\|_x^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_x$. Jeśli droga leży w mapie $(x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ to możemy obliczyć długość drogi w terminach pochodnych współrzędnych oraz współczynników metryki.

$$\|\dot{c}\|^2 = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \sum_{i,j} \left\langle \frac{dc^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{dc^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt} g_{ij} \quad (4.2)$$

Możemy także zdefiniować miarę dowolnego podzbioru borelowskiego położonego w mapie $A \subset U$, a zatem także całkę z funkcji po takim zbiorze:

$$\text{vol}(A) := \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda \quad (4.3)$$

gdzie $d\lambda$ jest miarą Lebesgue'a. Sprawdzając, że ta definicja nie zależy od wyboru mapy można rozszerzyć ją (przez addytywność) na dowolny zbiór borelowski zawarty w tej rozmaitości.

Stwierdzenie 4.1.2. *Jeśli $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ są dwoma mapami oraz $A \subset U$ jest podzbiorem borelowskim, to*

$$\int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^\varphi)} d\lambda = \int_{\psi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^\psi)} d\lambda.$$

Dowód. Z Stw. 5.4.1 mamy

$$[g_{ij}^\psi] = \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]^T [g_{ij}^\varphi] \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]$$

a więc $\det[g_{ij}^\psi] = \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right]^2 \det[g_{ij}^\varphi]$ oraz $\sqrt{\det[g_{ij}^\psi]} = \sqrt{\det[g_{ij}^\varphi]} \left| \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right] \right|$. Teza wynika z twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a.

$$\int_{\psi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^\psi]} d\lambda = \int_{\psi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^\varphi]} \left| \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right] \right| d\lambda = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^\varphi]} d\lambda.$$

□

W dalszym ciągu ograniczymy się do rozmaitości 2-wymiarowych, czyli lokalnych powierzchni Riemanna. Dla takiej powierzchni (U, G) gdzie $U \subset \mathbb{A}^2$ oraz $G: U \rightarrow M(2, 2)$ można także zdefiniować symbole Christoffela metryki G :

$$\Gamma_{ij}^p := \frac{1}{2} \sum_k g^{pk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right) \quad (4.4)$$

gdzie $[g^{pk}]$ jest macierzą odwrotną do macierzy formy $[g_{ij}]$. Wzór zawarty w *Theorema egregium* Tw. 3.8.1 służy teraz do zdefiniowania krzywizny Gaussa 2-wymiarowej lokalnej rozmaitości Riemanna $G: U \rightarrow M(2, 2)$ w dowolnym punkcie $u \in U$:

$$K_u := -\frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right). \quad (4.5)$$

Wzory na symbole Christoffela można wykorzystać do zdefiniowania krzywej geodezyjnej $c: J \rightarrow U$ jako krzywej spełniającej równanie:

$$\ddot{c}_p + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^p \dot{c}_i \dot{c}_j = 0, \quad p = 1, 2 \quad (4.6)$$

gdzie $c(s) = p_0 + c_1(s)\mathbf{e}_1 + c_2(s)\mathbf{e}_2$.

Zauważmy, że jeśli izometria jest dyfeomorfizmem (co najmniej na obraz) to zachowuje długości krzywych, objętości (w szczególności pola powierzchni) podzbiorów oraz krzywe geodezyjne.

Lemat 4.1.1. *Współczynniki Christoffela dla 2-wymiarowej metryki konforemnej zadanej przez funkcję $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+$ są następujące:*

$$\Gamma_{ii}^k(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{f(u)} \frac{\partial f}{\partial u_k}, \quad \Gamma_{21}^k(u) = \Gamma_{12}^k(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{f(u)} \frac{\partial f}{\partial u_k} \quad \text{gdzie } i, k = 1, 2.$$

Wskazówka do dowodu.. Jeśli $g: U \rightarrow M(2, 2)$ jest metryką konforemną zadaną przez funkcję $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, to $g_{11} = g_{22} = f$ oraz $g_{12} = g_{21} = 0$, a więc macierz tego iloczynu w bazie standardowej jest diagonalna, a więc także łatwo obliczyć jej odwrotność. Stąd wzory 5.6 znacznie się upraszczają. \square

4.2 Współrzędne półgeodezyjne

Definicja 4.2.1. *Metrykę Riemanna $G: U \rightarrow M(2, 2)$ nazywamy pół-geodezyjną jeśli*

$$G(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(u) \end{bmatrix}.$$

Lemat 4.2.1. *Jeśli metryka $G: U \rightarrow M(2, 2)$ jest półgeodezyjna $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$,*

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

$$K = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1^2}.$$

Stwierdzenie 4.2.1. *Jeśli metryka $G: U \rightarrow M(2, 2)$ jest pół-geodezyjna, to dla dowolnego punktu p_0 odcinek prostej $c(s) := p_0 + s\mathbf{e}_1$ jest krzywą geodezyjną.*

Dowód. Korzystamy z postaci symboli Christoffela (p. Lemat 4.2.1). Równanie geodezyjnych (5.8) jest oczywiście spełnione (wystarczy wiedzieć, że $\Gamma_{11}^1 = 0$, p. Lemat 4.2.1.) \square

Uwaga. Nie każdy odcinek prostej jest geodezyjną; tylko prostej o kierunku \mathbf{e}_1 .

Twierdzenie 4.2.1. *Dla dowolnego punktu $p_0 \in U$ oraz niezerowego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_{p_0}$ istnieje krzywa geodezyjna $c: (-s_0, s_0) \rightarrow U$ taka, że $c(0) = p_0$ oraz $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$.*

Dowód. Niech $c(s) = p_0 + c_1(s)\mathbf{e}_1 + c_2(s)\mathbf{e}_2$. Układ równań (5.8) posiada rozwiązania wokół punktu $0 \in \mathbb{R}$ z warunkami początkowymi $c_1(0) = c_2(0) = 0$ oraz $\dot{c}(0) = \dot{c}_1(0)\mathbf{e}_1 + \dot{c}_2(0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}$. \square

Następne twierdzenie powiada, że wzdłuż dowolnej krzywej można skonstruować półgeodezyjną parametryzację powierzchni.

Twierdzenie 4.2.2. *Dla dowolnej krzywej $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{A}^2$ położonej na lokalnej powierzchni Riemanna (U, G) istnieją liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ oraz parametryzacja półgeodezyjna $r: (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow U$ taka, że $r(0, t) = c(t)$ (zwana parametryzacją półgeodezyjną wzdłuż krzywej c).*

Dowód. Niech $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ będzie opisem unormowanym krzywej, a $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$ jego FS-reperem (ze względu na metrykę G !). Rozważmy pewną parametryzację $V \rightarrow U$ (np. afiniczną) i zapiszmy krzywą w terminach współrzędnych $c(t) = r(c^1(t), c^2(t))$. Konstrukcja półgeodezyjnej parametryzacji polega na wypuszczeniu geodezyjnej w każdym punkcie $c(t) \in U$ w kierunku wektora $\mathbf{e}_2(t)$. W wybranej parametryzacji rozważmy równania geodezyjnych 5.8 (α^1, α^2):

$$\ddot{\alpha}^p + \sum \Gamma_{ij}^p \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j = 0, \quad p = 1, 2 \quad (4.7)$$

z warunkami początkowymi zależnymi od parametru krzywej c :

$$\alpha^i(0, t) = c^i(t), \quad i = 1, 2 \quad \text{oraz} \quad \dot{\alpha}(0, t) = \mathbf{e}_2(t).$$

Z twierdzenia o gładkiej zależności rozwiązań równania różniczkowego od warunków początkowych wynika, że istnieje odwzorowanie gładkie $F: (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow V$ takie, że dla każdego $t_0 \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, krzywa $F(s, t_0)$ spełnia równanie 4.7 oraz $F(0, t_0) = (c_1(t_0), c_2(t_0))$. Ponieważ $DF_{(0,0)}$ jest izomorfizmem, więc wybierając dostatecznie mały prostokąt otrzymujemy, że przekształcenie F jest dyfeomorfizmem.

Znajdźmy macierz metryki w tej parametryzacji. Ponieważ opisy geodezyjnych są unormowane, więc $g_{11} = 1$, czyli $\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{\partial g_{11}}{\partial s} = 0$. Z definicji przekształcenia F obrazy odcinków (s, t_0) przechodzą na geodezyjne, a więc z równań definiujących geodezyjne dla dowolnego punktu (s, t) , $\Gamma_{11}^k(s, t) = 0$. Z równania definiującego symbole Christoffela 5.6 wyliczymy pochodne współczynników metryki:

$$0 = \Gamma_{11}^p = \frac{1}{2} \sum_k g^{pk} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u_1} \right) = \sum_k g^{pk} \frac{\partial g_{1k}}{\partial u_1} = g^{p2} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \quad (4.8)$$

Ponieważ jest to macierz $[g^{ps}]$ jest nieosobliwa, więc $g^{22} \neq 0$ lub $g^{12} \neq 0$, a więc w obu przypadkach $\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} = 0$, czyli $g_{12}(s, t) = g_{12}(0, t) = 0$. \square

Twierdzenie 4.2.3 (Minimalność geodezyjnych). *Niech $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{A}^2$ będzie krzywą geodezyjną na lokalnej powierzchni Riemanna (U, G) . Wtedy istnieje otoczenie $V \ni c(0)$ oraz $\delta > 0$ taka, że dla każdych dwóch punktów $s_0 < s_1$, $|s_i| < \delta$ krzywa $c: [s_0, s_1] \rightarrow U$ ma najmniejszą długość spośród krzywych leżących w zbiorze U i łączących punkty $c(s_0)$ i $c(s_1)$.*

Zanim przystąpimy do dowodu twierdzenia zauważmy jak obliczyć długość krzywej $c: J \rightarrow M$ w parametryzacji półgeodezyjnej. Niech $c(s) = r(c^1(s), c^2(s))$. Wtedy

$$\|\dot{c}\|^2 = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \langle \dot{c}^1 r + \dot{c}^2 r, \dot{c}^1 r + \dot{c}^2 r \rangle = \dot{c}_1^2 + g_{22} \dot{c}_2^2.$$

Dowód. Niech $c: J \rightarrow U$ będzie geodezyjną natomiast $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ zbudowaną na niej parametryzacją półgeodezyjną tzn. $r(0, t) = c(t)$ oraz $V := r((-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon))$. Niech $\alpha: [s_0, s_1] \rightarrow M$ będzie inną krzywą łączącą punkty $c(s_0)$ i $c(s_1)$ położoną w zbiorze V :

$$L(\alpha) = \int_{s_0}^{s_1} \|\dot{\alpha}\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + g_{22} \dot{\alpha}_2^2} ds \geq \int_{s_0}^{s_1} |\dot{\alpha}_1| = \alpha_1(s_1) - \alpha_1(s_0) = s_1 - s_0 = L(c).$$

W celu zbadania długości krzywych łączących punkty $(s_0, 0), (s_1, 0)$ wychodzących poza ustalony prostokąt $(-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2)$ ($0 < \delta_i < \varepsilon$) szacujemy z dołu długość krzywej łączącej punkt $(s, 0), |s| < \delta$ z punktem na brzegu prostokąta. Wybieramy liczbę $\delta' > 0$, tak żeby z dowolnego punktu $(s, 0), s \in (-\delta_1, \delta_1)$ odległość do brzegu prostokąta $(-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2)$ była większa niż δ' . \square

4.3 Metryki stałej krzywizny na płaszczyźnie

Dla punktów płaszczyzny lubimy stosować zapis zespolony, pozwalający wykonywać działanie mnożenia punktów oraz pokazać związki z analizą zespoloną (funkcjami analitycznymi). Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ stosujemy L^AT_EX-owe oznaczenia części rzeczywistej $\Re(z)$ i urojonej $\Im(z)$ a \bar{z} oznacza liczbę sprzężoną; przypomnijmy, że iloczyn skalarny dwóch wektorów $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ to część rzeczywista ich iloczynu hermitowskiego $\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(z_1 \bar{z}_2)$ oraz $\|z\|^2 = z\bar{z}$. Metryki stałej krzywizny na płaszczyźnie są to metryki konforemne z odpowiednio dobraną funkcją zmiennej zespolonej. Przypomnijmy, że symbole Christoffela dla metryki konforemnej mają stosunkowo prostą postać (p. 4.1.1) co pozwala łatwiej obliczyć ich krzywiznę Gaussa 5.7.

Krzywizna zerowa.

Rozpatrujemy dowolny otwarty podzbiór płaszczyzny $U \subset \mathbb{C}$ z metryką stałą $g(u) = Id$ tzn. w każdym punkcie rozpatrujemy zwyczajny, euklidesowy iloczyn skalarny.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_z = \Re(\mathbf{v}\bar{\mathbf{w}}). \quad (4.9)$$

Krzywizna Gaussa jest oczywiście zerowa.

Krzywizna dodatnia.

Na dowolnym podzbiorku płaszczyzny $U \subset \mathbb{C}$ dla $r > 0$ definiujemy metrykę

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_z := \frac{4R^2}{(1 + \|z\|^2)^2} \Re(\mathbf{v}\bar{\mathbf{w}}). \quad (4.10)$$

Krzywizna Gaussa tej metryki wynosi $\frac{1}{R^2}$. Metryka ta pochodzi z parametryzacji sfery o promieniu R przy pomocy rzutu stereograficznego.

Krzywizna ujemna.

Niech $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ będzie otwartym dyskiem na płaszczyźnie z metryką Riemanna daną wzorem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_z := \frac{4R^2}{(1 - \|z\|^2)^2} \Re(\mathbf{v}\bar{\mathbf{w}}). \quad (4.11)$$

Tę rozmaitość riemannowską nazywamy *dyskiem Poincaré* o promieniu $R > 0$. Krzywizna Gaussa tej metryki jest ujemna i wynosi $-\frac{1}{R^2}$. W definicji dysku Poincaré często przyjmuje się $R = 1$.

Metrykę stałej ujemnej krzywizny można także określić na na górnej półpłaszczyźnie $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Dla liczby $R > 0$ określamy metrykę:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_z := \frac{R^2}{\Im(z)^2} \Re(\mathbf{v}\bar{\mathbf{w}}) = \frac{4R^2}{(z - \bar{z})^2} \Re(\mathbf{v}\bar{\mathbf{w}}). \quad (4.12)$$

Górną półpłaszczyznę w tą metrykę oznaczamy \mathbb{H}_R , a liczbę R nazywa się promieniem.

Homografie zespolone o współczynnikach rzeczywistych są izometriami półpłaszczyzny hiperbolicznej. Takie przekształcenia nazywane są transformacjami Möbiusa.

Stwierdzenie 4.3.1. *Dla dowolnej macierzy rzeczywistej o wyznaczniku 1:*

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ przekształcenie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zachowuje górną półpłaszczyznę oraz jest izometrią półpłaszczyzny hiperbolicznej.

Dowód. Skorzystamy z równości $z - \bar{z} = 2\Im(z)i$, aby wykazać, że f zachowuje górną półpłaszczyznę:

$$\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{z - \bar{z}}{\|cz + d\|^2}, \quad (4.13)$$

a więc jeśli $\Im(z) > 0$ to także $\Im(f(z)) > 0$. Trzeba obliczyć pochodną

$$f'(z) = \frac{(cz + d)a - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}, \quad (4.14)$$

oraz kwadrat normy obrazu wektora jednostkowego:

$$\|f'(z)\|_{f(z)}^2 = \frac{1}{\Im(f(z))^2} \frac{1}{\|cz + d\|^4} = \frac{1}{\Im(z)^2} = \|1\|_z^2. \quad (4.15)$$

□

Prosta homografia o współczynnikach zespolonych ustanawia izometrię półpłaszczyzny hiperbolicznej z dyskiem Poincaré.

Stwierdzenie 4.3.2. *Przekształcenie dane wzorem $f(w) := \frac{w-i}{w+i}$ definiuje izometrię półpłaszczyzny hiperbolicznej \mathbb{H} z metryką hiperboliczną o promieniu $R > 0$ z dyskiem Poincaré D z metryką hiperboliczną o tym samym promieniu.*

Dowód. Jeśli $\Re(w) > 0$ to $\|w - i\| < \|w + i\|$, a więc $f: \mathbb{H} \rightarrow D$. Łatwo też sprawdzić, że jest bijekcją. Pozostaje wykazać, że $Df: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zachowuje iloczyn skalarny, a ponieważ jest to przekształcenie \mathbb{C} -liniowe, wystarczy sprawdzić, że zachowuje normę wektora $1 \in \mathbb{C}$.

$Df_z = \frac{2i}{(z+i)^2}$, a więc

$$\|Df_z 1\|_D^2 = \left\| \frac{2i}{(z+i)^2} \right\|_{f(z)}^2 = \frac{4}{(1 - \|f(z)\|^2)^2} \left\| \frac{2i}{(z+i)^2} \right\|^2 = \frac{4}{(1 - \|f(z)\|^2)^2} \frac{4}{\|(z+i)\|^4} = \frac{1}{\Im(z)^2} = \|1\|_z^2.$$

□

4.4 Zadania

Zad. 27. Niech $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ będzie unormowanym opisem krzywej na powierzchni. Niech $\theta(s)$ oznacza kąt między wektorem $\ddot{c}(s)$ oraz $\mathbf{n}(c(s))$ oraz $\theta(s_0) = 0$. W otoczeniu punktu s_0 zapisać reper Darboux w terminach reperu FS oraz funkcji kąta $\theta(s)$. por. [Wiki](#)

Zad. 28 (M). Wyznaczyć macierze I i II formy podstawowej sfery o promieniu $R > 0$ położonej w przestrzeni \mathbb{E}^3 w parametryzacji zadanej przez rzut stereograficzny. (Seria 1. Zad. 9).

Zad. 29 (M). Niech $S := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$ będzie sferą o promieniu 1. Dla dowolnej liczby $-1 < a < 1$ znaleźć opis parametryczny krzywej na powierzchni S opisanej równaniem $z = a$ oraz wyznaczyć jej reper FS i reper Darboux. Znaleźć współczynniki macierzy Darboux.

Zad. 30. Wykazać nierówność $H^2 \geq K$ gdzie H jest krzywizną średnią, a K krzywizną Gaussa (p. Def. 3.4.2). Równość zachodzi wtedy i tylko gdy punkt jest kulisty.

Zad. 31 (Powierzchnie obrotowe). Niech $c(s) := (c_1(s), 0, c_3(s)) \in \mathbb{R}^3$ będzie opisem unormowanym krzywej takim, że $c_1(s) > 0$ oraz $c: J \rightarrow c(J) \subset \mathbb{R}^3$ jest dyfeomorfizmem.

1. Wykazać, że zbiór powstały przez obrót $c(J)$ wokół osi $x = y = 0$ jest powierzchnią [Przykłady \[Mathematica\]](#); zapisać jej "naturalną" parametryzację;
2. wyznaczyć macierz I formy podstawowej w tej parametryzacji;
3. wyznaczyć odwzorowanie Weingartena w dowolnym punkcie (a zatem II formę podstawową) i wyznaczyć kierunki i krzywizny główne;
4. zauważyć, że proste normalne do powierzchni obrotowej przecinają oś obrotu. Zachodzi tw. odwrotne: jeśli wszystkie normalne przecinają ustaloną prostą, to powierzchnia jest obrotowa.

Zad. 32 (M). Zbadać powierzchnię - zwaną *pseudosferą* otrzymaną przez obrót [traktrisy](#) wokół jej asymptoty. Wykazać, że jej krzywizna Gaussa jest ujemna i stała.

Zad. 33 (Powierzchnie prostokreślne). Powierzchnia $M \subset \mathbb{E}^3$ nazywa się *prostokreślną* (*ruled surface*) jeśli lokalnie posiada parametryzację postaci $r(s, t) = c(s) + t\mathbf{v}(s)$ gdzie $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest opisem krzywej a $\mathbf{v}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ "krzywą wektorów" .

1. Naszkicuj takie powierzchnie dla znanych krzywych jeśli $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ oraz jeśli $c(s) = p_0$. [Inne przykłady. \[Mathematica.\]](#)
2. Wstęga Möbiusa jest powierzchnią prostokreślną. Wyznacz jej krzywiznę Gaussa w każdym punkcie.
3. Zbadaj jakie warunki muszą spełniać c , \mathbf{v} , żeby r było parametryzacją;
4. Przez każdy punkt powierzchni prostokreślnej przechodzi odcinek prostej (zwanej prostą tworzącą) zawarty w tej powierzchni ;

5. Porównaj reper FS i reper Darboux krzywej $c_1(s) := c(s) + \mathbf{v}(1)$ na powierzchni M ;
6. Jeśli $r(s, t) = c(s) + t\dot{c}(s)$ gdzie c jest opisem unormowanym, to współczynniki II formy podstawowej są postaci: $b_{11}(s, t) = \kappa(s)\tau(s)t$, $b_{22} = b_{12} = 0$.
7. Pokaż, że krzywizna Gaussa powierzchni prostokreślnej jest niedodatnia; podaj przykłady kiedy jest zerowa i kiedy jest ujemna;
8. Jeśli $r: J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(s, t) = c(s) + t\mathbf{v}(s)$ jest parametryzacją powierzchni, której krzywizna Gaussa jest niezerowa, to dla każdego s_0 istnieją granice wektorów normalnych $\mathbf{n}_+(s_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{n}(s_0, t)$, $\mathbf{n}_-(s_0) := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{n}(s_0, t)$ oraz $\mathbf{n}_+(s_0) = -\mathbf{n}_-(s_0)$.

Zad. 34. Wykazać, że wstęga Möbiusa nie posiada orientacji. Zauważyć, że krzywizna Gaussa i moduł krzywizny średniej są dobrze zdefiniowanymi funkcjami na dowolnej powierzchni.

Zad. 35 (Tuba wzdłuż krzywej). Niech $c: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ będzie unormowanym opisem krzywej o niezerowej krzywiznie, a \mathbf{n}^c , \mathbf{b}^c odpowiednio jej wektorami normalnymi i binormalnymi oraz $r > 0$. Wykazać, że lokalnie formuła $r(s, \theta) = c(s) + r((\cos \theta)\mathbf{n}^c(s) + (\sin \theta)\mathbf{b}^c(s))$ jest parametryzacją. Naszkicować obraz tej parametryzacji dla wybranych krzywych. Obliczyć wektor normalny oraz niezmienniki tej powierzchni w zależności od krzywizny i torsji krzywej c oraz promienia r . (To jest szczególny przypadek [powierzchni kanałowej](#).)

Zad. 36. Wykazać, że inwersja (Seria 1. Zad. 10) zachowuje kąty między krzywymi (tzn. jej pochodna zachowuje kąty między wektorami, takie odwzorowania nazywają się *konformnymi*), a więc przeprowadza sfery na sfery. Sformułować odpowiedni fakt dla inwersji płaszczyzny. Uwaga. Nie każdy dyfeomorfizm podzbiorów płaszczyzny zachowujący kąt zachowuje okręgi!

Zad. 37. Jeśli podrozmaitość w przestrzeni euklidesowej $M \subset \mathbb{R}^n$ zawiera odcinek prostej, to jest on trajektorią geodezyjnej w kierunku wektora stycznego wyznaczonego przez ten odcinek .

Zad. 38. Skonstruuj geodezyjną w kierunku dowolnego wektora stycznego na podrozmaitościach przestrzeni euklidesowych z metryką Riemanna pochodzącą od euklidesowego iloczynu skalarnego:

1. sferze euklidesowej $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
2. Walcu $S^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+2}$
3. Stożku $S := \{(p, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \mid \|p\| = r, r > 0\}$

Zad. 39. W mapie pół-geodezyjnej $M \supset U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$

1. Wskaż przykłady parametryzacji pół-geodezyjnej znanych powierzchni.
2. Pochodna $D\varphi_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachowuje ortogonalność wektorów (taka mapa nazywa się ortogonalna).

3. Współczynniki Christoffela mają postać:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

4. Krzywa $c: J \rightarrow U$ taka, że $\varphi(c(s)) = (s, t_0)$ (czyli jest geodezyjną na płaszczyźnie);

5. $K = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + \left(\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right)^2$

Zad. 40 (Tw. Clairaut). Niech $c: J \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie geodezyjną na powierzchni obrotowej M oraz $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odległości punktu powierzchni od osi obrotu, a $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ kątem między krzywą $c(t)$ a tworzącą przechodzącą przez punkt $c(t)$. Wtedy funkcja $\rho \sin \psi$ jest stała wzdłuż c . Odwrotnie, jeśli funkcja $\rho \sin \psi$ jest stała wzdłuż pewnej drogi $c: J \rightarrow M$ i obraz żadnego pododcinka nie jest zawarty w pewnym południku tej powierzchni, to droga c jest geodezyjną.

Zad. 41. Obliczyć współczynniki Christoffela dla dowolnej 2-wymiarowej metryki konformnej a następnie zastosować otrzymane wzory do płaszczyzny hiperbolicznej oraz dysku Poincaré.

Wsk. Jeśli $g: U \rightarrow M(2, 2)$ jest metryką konforemna zadana przez funkcję $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, to $g_{11} = g_{22} = f$ oraz $g_{12} = g_{21} = 0$, a więc macierz tego iloczynu w bazie standardowej jest diagonalna, a więc także łatwo obliczyć jej odwrotność. Stąd wzory 5.6 znacznie się upraszczają.

Rozdział 5

Abstrakcyjne rozmaitości gładkie

5.1 Mapy i atlasy

Definicja 5.1.1. Niech M będzie zbiorem. Mapą (lub lokalnym układem współrzędnych) na M będziemy nazywali podzbiór $U \subset M$ wraz z injekcją $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ taką, że $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym. Atlasem gładkim na M nazywamy zbiór map $\mathcal{A} = \{(U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^{n_i})\}_{i \in J}$ taki, że

1. Zbiory $\{U_i\}_{i \in J}$ tworzą pokrycie zbioru M tzn. $M = \bigcup_{i \in J} U_i$;
2. Dla dowolnych $i, j \in J$ obrazy przecięć $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{n_i}$ są podzbiorem otwartymi, a odwzorowania przejścia $\varphi_j \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ są dyfeomorfizmami.

Jeśli dla wszystkich $i \in J$, $n_i = n$, to mówimy, że atlas jest n -wymiarowy. Dwa atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ na zbiorze X są zgodne jeśli ich suma $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ też jest atlasem.

Dowolny atlas wyznacza topologię w zbiorze M , określoną jako najmniejszą topologię w której wszystkie mapy są odwzorowaniami ciągłymi. Łatwo zauważyć, że w tej topologii dowolna mapa jest homeomorfizmem $U \simeq \varphi(U)$ oraz zgodne atlasy wyznaczają identyczne topologie.

Definicja 5.1.2.

1. rozmaitością gładką nazywamy zbiór M wraz z wyróżnioną klasą równoważności atlasów (lub równoważnie atlasem maksymalnym ze względu na inkluzję).
2. Przekształceniem gładkim nazywamy odwzorowanie zbiorów $f: M \rightarrow N$ takie, że dla każdego punktu $x \in M$ istnieją mapy $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$ wokół punktu x oraz $V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ wokół punktu $f(x) \in N$ takie, że $f(U) \subset V$ oraz złożenie $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ jest przekształceniem gładkim.
3. Dyfeomorfizmem nazywamy przekształcenie gładkie posiadające przekształcenie odwrotne, które jest również gładkie.

Zauważmy, że klasa rozmaitości gładkich jest zamknięta ze względu na następujące operacje:

1. Jeśli (M, \mathcal{A}) jest rozmaitością, a $U \subset M$ jej podzbiorem otwartym, to $(U, \mathcal{A}|_U)$ też jest rozmaitością a włożenie przekształceniem gładkim;
2. Jeśli $(M, \mathcal{A}_M), (N, \mathcal{A}_N)$ są rozmaitościami, to produkt $(M \times N, \mathcal{A}_{M \times N})$, gdzie $\mathcal{A}_{M \times N} = \{\varphi \times \psi: U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_j} \mid \varphi \in \mathcal{A}_M, \psi \in \mathcal{A}_N\}$ jest rozmaitością a rzutowania na czynniki są przekształceniami gładkimi;
3. Jeśli $\{(M_j, \mathcal{A}_j)\}_{j \in J}$ jest rodziną rozmaitości to ich suma rozłączna (koprodukt) $(\coprod_{j \in J} M_j, \coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j)$ też jest rozmaitością a włożenia składników są przekształceniami gładkimi.

Rozmaitości gładkie i przekształcenia gładkie tworzą kategorię, a powyższe konstrukcje mają charakter kategoriowy.

Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych, zdefiniowane w Rozdziale 1 Def. 1.3.1 posiadają strukturę abstrakcyjnej rozmaitości gładkiej jeśli za atlas przyjąć odwzorowania odwrotne do parametryzacji. Rozmaitości nie będące w oczywisty sposób podrozmaitościami przestrzeni euklidesowych powstają jako przestrzenie orbit spełniających pewne naturalne warunki działań grup na rozmaitościach. (p. Rozdział 5.5)

5.2 Wektory styczne

W przypadku podrozmaitości w \mathbb{R}^n zdefiniowaliśmy wektory styczne jako granice wektorów siecznych, a więc przy pomocy struktury euklidesowej przestrzeni \mathbb{R}^n . Tej definicji nie da się wprost przenieść na rozmaitości abstrakcyjne. Chcemy jednak zdefiniować pojęcie styczności tak, aby w przypadku podrozmaitości pokrywało się z definicją geometryczną. Poniżej podamy kilka interpretacji wektorów stycznych do dowolnej rozmaitości oraz pochodnych przekształceń a następnie pokażemy ich równoważność.

Definicja geometryczna

We Wniosku 1.3.3 zauważyliśmy, że wektory styczne do podrozmaitości są reprezentowane przez krzywe. Skorzystamy teraz z tej interpretacji do definicji wektora stycznego. Będziemy używać słowa "wektor", choć w odpowiednim zbiorze dopiero wprowadzimy strukturę liniową.

Definicja 5.2.1. Niech $x_0 \in M$ będzie punktem rozmaitości gładkiej M , a $c_k: (-\varepsilon_k, \varepsilon_k) \rightarrow M$, $k = 1, 2$, $\varepsilon_k > 0$ będą dwoma odwzorowaniami gładkimi takimi, że $c_1(0) = c_2(0) =: x_0$. Powiemy, że są one styczne w punkcie 0 jeśli dla dowolnej mapy $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ wokół punktu x_0 zachodzi równość pochodnych $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$. Klasę równoważności tej relacji nazywamy wektorem stycznym do M w punkcie x_0 a ich zbiór oznaczamy $TM_{x_0}^{geom}$.

Strukturę przestrzeni wektorowej w $TM_{x_0}^{geom}$ definiujemy przy pomocy dowolnej mapy φ . Z definicji wynika, że odwzorowanie $TM_{x_0}^{geom} \ni [c] \mapsto (\varphi \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n$ jest bijekcją, a zatem definiuje strukturę przestrzeni liniowej w zbiorze $TM_{x_0}^{geom}$. Pozostaje tylko sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru mapy [CZYTELNIK].

Motywacja wynikająca z przypadku podrozmaitości pozwala też zdefiniować pochodną w punkcie dowolnego odwzorowania gładkiego $f: M \rightarrow N$: $Df_{x_0}: TM_{x_0}^{geom} \rightarrow TN_{y_0}^{geom}$,

gdzie $y_0 = f(x_0)$. Kładziemy $Df_{x_0}([c]) := [f \circ c]$. Trzeba sprawdzić, że pochodna jest dobrze zdefiniowana tzn. nie zależy od wyboru krzywej z klasy równoważności oraz, że jest przekształceniem liniowym [CZYTELNIK].

Definicja fizyczna

Jeśli M traktować jako zbiór zjawisk fizycznych, to o każdej mapie można myśleć jako o obserwatorze dokonującym pomiarów. Wektory styczne określimy więc za pośrednictwem tego jak "widzą" je różni obserwatorzy.

Definicja 5.2.2. Niech $x_0 \in M$ będzie punktem rozmaitości gładkiej (M, \mathcal{A}) . Rozważmy zbiór trójek $\{(U, \varphi, \mathbf{v})\}$ gdzie (U, φ) jest mapą wokół punktu x_0 , a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ pewnym wektorem i relację równoważności między nimi:

$$(U, \varphi, \mathbf{v}) \sim (V, \psi, \mathbf{w}) \iff D(\psi\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Klasę równoważności tej relacji nazywamy wektorem stycznym do M w punkcie x_0 a ich zbiór oznaczamy $TM_{x_0}^{fiz}$.

Podobnie jak przy definicji geometrycznej, zauważmy że dowolna mapa $V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ wokół x_0 wyznacza bijekcję $\psi_*: TM_{x_0}^{fiz} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zadaną wzorem: $\psi_*([U, \varphi, \mathbf{v}]) := D(\psi\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(\mathbf{v})$. Odwzorowanie ψ_* wyznacza strukturę przestrzeni liniowej w zbiorze $TM_{x_0}^{fiz}$, tę samą dla dowolnej mapy $V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$. [CZYTELNIK]

Także przy pomocy map definiujemy pochodną w punkcie dowolnego odwzorowania gładkiego $f: M \rightarrow N$:

$$Df_{x_0}([U, \varphi, \mathbf{v}]) := [V, \psi, D(\psi \circ f\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(\mathbf{v})] \quad \text{gdzie} \quad f(U) \subset V.$$

[CZYTELNIK] sprawdzi, że definicja nie zależy od wyboru reprezentantów i przekształcenie jest liniowe.

Definicja różniczkowa

Niech $x_0 \in M$ będzie punktem rozmaitości gładkiej (M, \mathcal{A}) . Przez $C^\infty(M, x_0)$ oznaczmy zbiór funkcji gładkich $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanych na pewnym otoczeniu $x_0 \in M$. Zbiór ten tworzy przestrzeń wektorową: suma dwóch odwzorowań jest określona na przecięciu ich dziedzin.

Definicja 5.2.3. Różniczkowaniem w punkcie $x_0 \in M$ nazywamy homomorfizm przestrzeni wektorowych $X: C^\infty(M, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniający wzór Leibniza tj. $X(fg) = f(x_0)X(g) + g(x_0)X(f)$. Zbiór wszystkich różniczkowań w punkcie $x_0 \in M$ nazywamy przestrzenią styczną do M w punkcie x_0 i oznaczamy $TM_{x_0}^{dif}$.

Lemat 5.2.1. Dla dowolnych dwóch funkcji gładkich $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oraz różniczkowania $X \in TM_{x_0}^{dif}$, zachodzi równość $X(fg) = 0$. Dla dowolnej funkcji gładkiej $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ wartość różniczkowania $X(f)$ zależy tylko od wartości funkcji w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0 .

Zbiór $TM_{x_0}^{dif}$ ma oczywistą strukturę przestrzeni liniowej: kombinacja liniowa różniczkowań jest również różniczkowaniem. Pochodną w punkcie x_0 odwzorowania gładkiego $f: M \rightarrow N$ definiujemy wzorem: $Df_{x_0}(X)(g) := X(g \circ f)$, gdzie $X \in TM_{x_0}^{dif}$ oraz $g \in C^\infty(N, f(x_0))$.

Stwierdzenie 5.2.1. *Dowolna mapa $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ wokół punktu x_0 wyznacza izomorfizm przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n \rightarrow TM_{x_0}^{dif}$: dowolnemu wektorowi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ przypisujemy różniczkowanie $X_{\mathbf{v}}(f) := D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(\mathbf{v})$.*

Wektory styczne odpowiadające przy powyższym izomorfizmie wektorom bazy kanonicznej $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ lub żeby zaznaczyć mapę przy pomocy której są zdefiniowane $\frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}$, a czasem krócej ∂_i^φ lub ∂_i . Podamy szczegółowy dowód tego jak wyrażają się przez siebie nawzajem wektory wyznaczone przez dwie mapy wokół tego samego punktu.

Stwierdzenie 5.2.2. *Niech $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą dwoma mapami $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ oraz $\psi(p) = (y^1(p), \dots, y^n(p))$ a odwzorowanie przejścia zapiszmy w postaci: $\psi\varphi^{-1} = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$. Wtedy*

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dowód. Dla pewnych funkcji gładkich $\alpha_i^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzą równości: $\frac{\partial}{\partial y^i} = \alpha_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Wyznamy współczynniki α_i^k .

$$\frac{\partial^k x}{\partial y^i} \mathbf{e}_k = D(\varphi\psi^{-1})(\mathbf{e}_i) = D\varphi D\psi^{-1}(\mathbf{e}_i) = D\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \alpha_i^k D\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \alpha_i^k \mathbf{e}_k$$

a stąd $\alpha_i^k = \frac{\partial^k x}{\partial y^i}$. □

Bazę dualną przestrzeni funkcjonałów TM_x^* oznaczamy dx^1, \dots, dx^n .

Definicja algebraiczna

W pierścieniu $C^\infty(M, x_0)$ rozważmy ideał $\mathfrak{m}_{x_0} = \{f \in C^\infty(M, x_0) \mid f(x_0) = 0\}$ oraz jego kwadrat $\mathfrak{m}_{x_0}^2 = \mathfrak{m}_{x_0} \cdot \mathfrak{m}_{x_0}$ czyli ideał generowany przez iloczyny funkcji z \mathfrak{m}_{x_0} . Oczywiście $\mathfrak{m}_{x_0}^2 \subset \mathfrak{m}_{x_0}$, a więc $\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2$ jest przestrzenią wektorową. Definiujemy $TM_{x_0}^{alg} := (\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2)^*$, czyli przestrzeń funkcjonałów liniowych na $\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2$. Dowolne odwzorowanie $f: M \rightarrow N$ indukuje odwzorowanie $f^*: C^\infty(N, f(x_0)) \rightarrow C^\infty(M, x_0)$, zachowujące ideał \mathfrak{m}_{x_0} , a więc definiujące odwzorowanie liniowe $Df_{x_0}: TM_{x_0}^{alg} \rightarrow TN_{f(x_0)}^{alg}$.

Równoważność definicji

Pokażemy, że powyższe definicje prowadzą do naturalnie izomorficznych przestrzeni tzn. istnieją izomorfizmy zgodne z definicją pochodnej.

Twierdzenie 5.2.1. Dla dowolnej rozmaitości M i jej punktu $x \in M$ istnieją izomorfizmy

$$TM_x^{geo} \xrightarrow{\Phi_{gf}} TM_x^{fiz} \xrightarrow{\Phi_{fd}} TM_x^{dif} \xrightarrow{\Phi_{da}} TM_x^{alg}$$

takie, że dla dowolnego przekształcenia gładkiego $f: M \rightarrow N$ następujący diagram jest przemienny (tzn. są przemiennie wszystkie trzy prostokąty):

$$\begin{array}{ccc} TM_x^{geo} & \xrightarrow{Df_x} & TN_x^{geo} \\ \Phi_{gf} \downarrow & & \downarrow \Phi_{gf} \\ TM_x^{fiz} & \xrightarrow{Df_x} & TN_x^{fiz} \\ \Phi_{fd} \downarrow & & \downarrow \Phi_{fd} \\ TM_x^{dif} & \xrightarrow{Df_x} & TN_x^{dif} \\ \Phi_{da} \downarrow & & \downarrow \Phi_{da} \\ TM_x^{alg} & \xrightarrow{Df_x} & TN_x^{alg} \end{array} \quad (5.1)$$

Dowód. Podamy definicję trzech homomorfizmów. Sprawdzenie, że są dobrze zdefiniowane, że są izomorfizmami oraz że odpowiednie diagramy są przemiennie pozostawiam CZYTELNIKowi. Niech (U, φ) będzie dowolną mapą wokół punktu $x \in M$.

$$\Phi_{gf}([c]) := [U, \varphi, (\varphi \circ c)'(0)]$$

$$\Phi_{fd}([U, \varphi, \mathbf{v}])(g) := D(g \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(\mathbf{v})$$

$$\Phi_{da}(X)([g]) := X(g).$$

□

Mając na uwadze naturalne utożsamienia czterech definicji, w dalszym ciągu przestrzeni wektorów stycznych do rozmaitości M w punkcie $x \in M$ będziemy oznaczali po prostu TM_x .

5.3 Wiązka styczna do rozmaitości abstrakcyjnej

Podobnie jak w przypadku prodrozmaitości w \mathbb{R}^n można "zorganizować" wektory styczne w różnych punktach w jedną wiązkę wektorów stycznych. Zdefiniujemy zbiór

$$TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times TM_x \quad \text{oraz projekcję na pierwszą współrzędną} \quad p: TM \rightarrow M$$

W zbiorze TM określimy atlas przy pomocy atlasu $\mathcal{A} = \{(U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^{n_i})\}_{i \in J}$ rozmaitości M . Dla dowolnej mapy $U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^{n_i}$ definiujemy odwzorowanie $D\varphi$ dla którego poniższy diagram

jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{D\varphi} & \varphi(U_i) \times \mathbb{R}^{n_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U_i) \end{array} \quad (5.2)$$

gdzie dla $x \in U_i$ oraz $\mathbf{v} \in TM_x$, $D\varphi(x, \mathbf{v}) := (\varphi(x), D\varphi_x(\mathbf{v}))$.

Twierdzenie 5.3.1. *Jeśli $\mathcal{A} = \{(U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^{n_i})\}_{i \in J}$ jest atlasem gładkim na M , to $T\mathcal{A} := \{(p^{-1}(U_i) \xrightarrow{D\varphi_i} \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i})\}_{i \in J}$ jest atlasem gładkim na zbiorze TM . Przekształcenie $p: TM \rightarrow M$ jest gładką wiązką wektorową. Dla dowolnego przekształcenia gładkiego jego pochodna $Df: TM \rightarrow TN$ jest przekształceniem gładkim.*

Podobnie można zdefiniować wiązkę kostyczną $p: TM^* \rightarrow M$, której włóknami będą przestrzenie funkcjonałów TM_x^* .

Polem wektorowym na rozmaitości M nazywamy gładki przekrój wiązki stycznej, czyli przekształcenie gładkie $s: M \rightarrow TM$ takie, że $p \circ s = id_M$, czyli $s(x) \in \{x\} \times TM_x$. Jeśli $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ jest dowolną mapą, to dla $x \in U$ przekrój $s(x)$ można zapisać jako kombinację liniową: $s(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}(x)$. Odwzorowanie s jest gładkie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej mapy funkcje $\sigma_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkie.

Podobnie definiujemy 1-formę jako gładki przekrój wiązki kostycznej, tradycyjnie oznaczany literami greckimi $\omega: M \rightarrow TM^*$. Jeśli $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ jest dowolną mapą, to dla $x \in U$ przekrój $\omega(x)$ można zapisać jako kombinację liniową: $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i^\varphi(x)$, gdzie formy $dx_i^\varphi(x)$ są bazą dualną do $\frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}(x)$, czyli równoważnie pochodnymi funkcji współrzędnych $\phi(x) = (x_1^\varphi, \dots, x_n^\varphi)$. Odwzorowanie ω jest gładkie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej mapy funkcje $\omega_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkie.

5.4 Metryka Riemanna

Definicja 5.4.1. *Metrykę Riemanna na rozmaitości (M, \mathcal{A}) nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $x \in M$ iloczynu skalarnego $\langle -, - \rangle_x: TM_x \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$ w taki sposób, że dla dowolnej mapy $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ odwzorowania*

$$g_{ij}(x) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}(x), \frac{\partial}{\partial x_j^\varphi}(x) \right\rangle_x$$

są gładkie. Rozmaitość z metryką Riemanna nazywa się rozmaitością Riemanna.

Jeśli $M \subset \mathbb{E}^k$ jest podrozmaitością, to przestrzenie styczne są w naturalny sposób podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej $TM_x \subset \mathbb{R}^n$ a więc obcięcie iloczynu skalarnego do tych podprzestrzeni definiuje metrykę Riemanna. W przypadku powierzchni w \mathbb{R}^3 tak określoną metrykę Riemanna nazywaliśmy I formą podstawową (p. Podrozdz. 3.2.1). W dalszym ciągu poznamy inne przykłady metryki Riemanna.

Abstrakcyjna rozmaitość z metryką Riemanna jest "sklejona" z lokalnych rozmaitości Riemanna, omówionych w rozdziale 4. Własności i definicje podane w podrozdziale 4.1 przenoszą się *verbatim*.

Stwierdzenie 5.4.1. Niech $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą dwoma mapami a odwzorowanie przejścia zapiszmy w postaci: $\psi\varphi^{-1} = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, (y^n(x^1, \dots, x^n))$. Wtedy

$$g_{ij}^{\psi} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}^{\phi} \quad \text{czyli} \quad [g_{ij}^{\psi}] = \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]^T [g_{ij}^{\phi}] \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right].$$

Dowód.

$$g_{ij}^{\psi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}^{\phi}.$$

□

Na rozmaitości Riemanna można przenieść wiele pojęć znanych z ogólnej teorii podrozmaitości oraz geometrii powierzchni. Dla dowolnego wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_x$ można określić jego normę $\|\mathbf{v}\|_g^2 := \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_g$, a dla dwóch niezerowych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ kąt między nimi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_g = \|\mathbf{v}\|_g \|\mathbf{w}\|_g \cos \theta$.

Metryka Riemanna na rozmaitości pozwala nam obliczać długość krzywych. Podobnie jak w przypadku euklidesowym dla drogi $c: J \rightarrow M$ definiujemy jej długość

$$L(c) := \int_J \|\dot{c}(t)\|_{c(t)} dt \quad (5.3)$$

gdzie dla wektora $\mathbf{v} \in TM_x$, $\|\mathbf{v}\|_x^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_x$. Jeśli droga leży w mapie $(x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ to możemy obliczyć długość drogi w terminach pochodnych współrzędnych oraz współczynników metryki.

$$\|\dot{c}\|^2 = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \sum_{i,j} \left\langle \frac{dc^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{dc^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt} g_{ij} \quad (5.4)$$

Możemy także zdefiniować miarę dowolnego podzbioru borelowskiego położonego w mapie $A \subset U$, a zatem także całkę z funkcji po takim zbiorze:

$$\text{vol}(A) := \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda \quad (5.5)$$

gdzie $d\lambda$ jest miarą Lebesgue'a. Sprawdzając, że ta definicja nie zależy od wyboru mapy można rozszerzyć ją (przez addytywność) na dowolny zbiór borelowski zawarty w tej rozmaitości.

Stwierdzenie 5.4.2. Jeśli $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ są dwoma mapami oraz $A \subset U$ jest podzbiorem borelowskim, to

$$\int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi})} d\lambda = \int_{\psi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi})} d\lambda.$$

Dowód. Z Stw. 5.4.1 mamy

$$[g_{ij}^{\psi}] = \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]^T [g_{ij}^{\varphi}] \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right]$$

a więc $\det[g_{ij}^{\psi}] = \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right]^2 \det[g_{ij}^{\varphi}]$ oraz $\sqrt{\det[g_{ij}^{\psi}]} = \sqrt{\det[g_{ij}^{\varphi}]} \left| \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right] \right|$. Teza wynika z twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a.

$$\int_{\psi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^{\psi}]} d\lambda = \int_{\psi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^{\varphi}]} \left| \det\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right] \right| d\lambda = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det[g_{ij}^{\varphi}]} d\lambda.$$

□

W ustalonej mapie $M \supset U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ można także zdefiniować symbole Christoffela metryki g :

$$\Gamma_{ij}^p := \frac{1}{2} \sum_k g^{pk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_k} \right) \quad (5.6)$$

gdzie $[g^{pk}]$ jest macierzą odwrotną do macierzy formy $[g_{ij}]$. Wzór zawarty w *theorem egregium* Tw. 3.8.1 do zdefiniowania krzywizny Gaussa 2-wymiarowej rozmaitości Riemanna (M, g) w punkcie $x \in M$:

$$K_x := -\frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right). \quad (5.7)$$

Wymaga sprawdzenia, że powyższa definicja nie zależy od wyboru mapy. Wzory na symbole Christoffela można wykorzystać do zdefiniowania krzywej geodezyjnej $c: J \rightarrow M$ jako krzywej spełniającej w dowolnej (równoważnie w pewnej) mapie równanie:

$$\ddot{c}_p + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^p \dot{c}_i \dot{c}_j = 0, \quad p = 1, 2 \quad (5.8)$$

Definicja 5.4.2. *Odwzorowanie gładkie między rozmaitościami Riemanna $f: M \rightarrow N$ nazywa się lokalną izometrią jeśli dla każdego punktu $x \in M$ pochodna $Df_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ jest izometrią. Jeśli f jest dyfeomorfizmem, to nazywa się izometrią.*

Zauważmy, że jeśli izometria jest dyfeomorfizmem (co najmniej na obraz) to zachowuje długości krzywych, objętości (w szczególności pola powierzchni) podzbiorów oraz krzywe geodezyjne.

5.5 Rozmaitości orbit

Zacniemy od definicji topologicznej własności działań.

Definicja 5.5.1. *Mówimy, że działanie grupy dyskretnej G na przestrzeni topologicznej M jest właściwie dyskretne jeżeli dla każdego punktu $x \in M$ istnieje jego otoczenia $U \ni x$ takie, że dla dowolnego elementu grupy $g \neq e$, $U \cap Ug = \emptyset$.*

Uwaga 5.5.1. Jeżeli grupa G jest skończona to działanie na przestrzeni Hausdorffa jest właściwie dyskretne wtedy i tylko wtedy, gdy jest wolne tzn. grupa izotropii każdego punktu jest trywialna.

Zauważmy, że jeśli U jest podzbiorem o jakim mowa w Def. 5.5.1 oraz $q: M \rightarrow M/G$ jest rzutowaniem na przestrzeń orbit to $q^{-1}q(U) = \bigcup_{g \in G} Ug$, jest sumą rozłączną zbiorów Ug a odwzorowanie $q_g := q|Ug: Ug \rightarrow q(U)$ jest homeomorfizmem.

Przykład 5.5.1 (Rozmaitość orbit). Załóżmy teraz, że przestrzeń na której działa grupa G właściwie dyskretne jest rozmaitością gładką (M, \mathcal{A}) a odwzorowanie działania $M \times G \rightarrow M$ jest gładkie (ponieważ grupa jest dyskretna, oznacza to, że każde odwzorowanie $\cdot g: M \rightarrow M$ jest gładkie. Zdefiniujemy atlas gładki na przestrzeni orbit w następujących dwóch krokach:

1. Wybierzmy atlas $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ taki, że dla dowolnej mapy $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$ zbiór U spełnia warunek z Definicji 5.5.1 oraz dla dowolnego $g \in G$, $(Ug, \varphi \circ g^{-1}) \in \mathcal{A}'$
2. Atlas \mathcal{A}'_G składa się z pokrycia zbiorami $\{q(U)\}_{U \in \mathcal{A}'}$ oraz odwzorowań $q(U) \xrightarrow{q_g^{-1}} Ug \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ gdzie $(Ug, \varphi) \in \mathcal{A}'$.

Na tym etapie pozostawiam Czytelnikowi sprawdzenie, że tak zdefiniowana kolekcja map tworzy atlas a przekształcenie $q: M \rightarrow M/G$ jest gładkie, a nawet jest lokalnym dyfeomorfizmem. Ważne przykłady zastosowania tej konstrukcji to działania podgrup grupy izometrii na płaszczyźnie euklidesowej lub na sferze. Otrzymujemy w ten sposób strukturę gładką np. na powierzchniach nieorientowalnych takich jak płaszczyzna rzutowa i butelka Kleina.

Jeśli rozmaitość M wyposażona jest w metrykę Riemanna a grupa G działa przez izometrię tzn. dla każdego $g \in G$ dyfeomorfizm $g: M \rightarrow M$ jest izometrią. Jeśli $q: M \rightarrow M/G$ jest projekcją, to definiujemy iloczyn skalarny w przestrzeni $T(M/G)_{[x]}$ za pośrednictwem izomorfizmu $Dq_x: TM_x \rightarrow T(M/G)_{[x]}$ Definicja ta nie zależy od wyboru punktu $x \in [x]$, bo jeśli $x_1, x_2 \in [x]$ to $x_2 = x_1g$ oraz $Dq_{x_2} = Dq_{x_2}Dg_{x_1}$, a Dg_{x_1} jest izometrią.

Przykład 5.5.2 (Podgrupy grupy izometrii płaszczyzny euklidesowej).

1. G_1 - grupa generowana przez $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Przestrzeń orbit jest homeomorficzna ze wstęgą Möbiusa.
2. G_2 - grupa generowana przez $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ oraz $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$. Przestrzeń orbit jest homeomorficzna z torusem.
3. G_3 - grupa generowana przez $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ oraz $(x, y) \mapsto (x, -y + 1)$. Przestrzeń orbit jest homeomorficzna z butelką Kleina.

Przykład 5.5.3 (Podgrupy grupy izometrii sfery euklidesowej). Grupa wszystkich izometrii sfery $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to grupa ortogonalna $O(n)$. Na dowolnej sferze S^n grupa \mathbb{Z}_2 działa właściwie dyskretnie jako antypodyzm. Przestrzeń orbit jest homeomorficzna z przestrzenią rzutową $\mathbb{R}P(n)$. Jeśli $n = 2k + 1$ to $S^{2k+1} \subset \mathbb{C}^{k+1}$, czyli punkty sfery możemy traktować jako ciągi liczb zespolonych (z_1, \dots, z_{k+1}) a więc dowolna podgrupa cykliczna składająca się z pierwiastków z jednościami $\mathbb{Z}_n \subset S^1$ działa na S^{2k+1} przez mnożenie współrzędnych. Rozmaitości ilorazowe nazywają się przestrzeniami soczewkowymi.

5.6 Koneksja afiniczna

Koneksja afiniczna (zwana też pochodną kowariantną) to dodatkowa struktura na rozmaitości gładkiej, pozwalająca różniczkować pola wektorowe w kierunku wektorów stycznych, podobnie jak to czynimy z funkcjami. Wartością pochodnej pola w kierunku wektora będzie inny wektor styczny w tym samym punkcie. Motywacja wprowadzenia pojęcia koneksji bierze się z konstrukcji opisanej w rozdziale 3.10. Podane tam własności pochodnej kowariantnej i przeniesienia równoległego pozwalają przenieść je jako definicje w kategorii abstrakcyjnych rozmaitości gładkich.

Niech $\mathfrak{X}(M)$ oznacza zbiór wszystkich pól wektorowych na rozmaitości M ; jest to przestrzeń wektorowa, a nawet moduł nad algebrą funkcji gładkich $C^\infty(M)$.

Definicja 5.6.1. *Koneksją afiniczną na rozmaitości M nazywamy \mathbb{R} -dwuliniowe odwzorowanie: $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ takie, że dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$*

- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
- $\nabla_XfY = X(f)Y + f\nabla_XY$ (formuła Leibniza)

Odnotujmy, bez dowodu, że dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subset M$ koneksja ∇ wyznacza zgodną koneksję $\nabla^U: \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$, czyli taką, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathfrak{X}(M) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} \\ \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\nabla^U} & \mathfrak{X}(U) \end{array} \quad (5.9)$$

Oznacza to, że koneksja jest operatorem lokalnym. Co więcej jeśli dla pewnego punktu $p \in M$ $X_1(p) = X_2(p)$ to dla dowolnego pola Y zachodzi równość $(\nabla_{X_1}Y)(p) = (\nabla_{X_2}Y)(p)$.

Definicja 5.6.2 (Symbole Christoffela koneksji). *Niech $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną mapą, a $\partial_1, \dots, \partial_n$ wyznaczonymi przez nią polami wektorowymi na U . Wtedy*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$$

(stosujemy konwencję sumacyjną), gdzie $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi, zwanymi symbolami Christoffela.

Powyższa definicja w przypadku koneksji na podrozmaitości przestrzeni euklidesowej pokrywa się z podaną w Rozdziale 3.8. Jednak w odróżnieniu od koneksji pochodzącej od metryki euklidesowej symbole Christoffela dowolnej koneksji nie muszą być symetryczne.

Stwierdzenie 5.6.1. *Niech $\varphi, \psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą dwoma mapami a odwzorowanie przejścia zapiszmy w postaci: $\psi\varphi^{-1} = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, (y^n(x^1, \dots, x^n))$.*

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^r} \Gamma_{pq}^r + \frac{\partial y^k}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^i \partial y^j}$$

gdzie $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ to współczynniki koneksji w mapie ψ , a Γ_{ij}^k w mapie φ .

Dowód. Do wzorów definiujących symbole Christoffela podstawiamy formuły zmiany bazy Stw. 5.2.2. \square

Definicja 5.6.3. *Koneksję ∇ nazywamy symetryczną jeśli dla dowolnej mapy $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$ lub równoważnie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.*

Uwaga. Ze Stw. 5.6.1 wynika, że wystarczy sprawdzić te równości dla map z jednego atlasu.

Pokażemy teraz jak koneksja na M wyznacza pochodną kowariantną pól wzdłuż dróg leżących na M , spełniającą warunki Stw. 3.10.2. Niech $c: J \rightarrow M$ będzie dowolnym odwzorowaniem gładkim, a $X: J \rightarrow TM$ polem wzdłuż c tzn. $X(t) \in TM_{c(t)}$. Wybierzmy mapę $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ wokół punktu $c(t_0)$ oraz zapiszmy $X(u) = x^i\partial_i$ i $\dot{c} = \dot{c}^j\partial_j$.

$$\frac{\nabla X}{dt} = \nabla(x^i\partial_i) = \dot{x}^i\partial_i + x^i\nabla_{\dot{c}(t)}\partial_i = \dot{x}^i\partial_i + x^i\dot{c}^j\nabla_{\partial_j}\partial_i = \dot{x}^i\partial_i + x^i\dot{c}^j\Gamma_{ji}^k\partial_k = (\dot{x}^k + x^i\dot{c}^j\Gamma_{ji}^k)\partial_k$$

Uwaga. Trzeba sprawdzić, że ta definicja nie zależy od wyboru mapy wokół $c(t_0)$!

Definicja pola równoległego Def. 3.10.1 przenosi się dosłownie. Zachodzi Tw. 3.10.1 z tym, że przeniesienie równoległe jest tylko izomorfizmem przestrzeni stycznych, bowiem definicja koneksji nie wymaga istnienia metryki.

Drogą geodezyjną na rozmaitości M wyposażonej w koneksję ∇ nazywamy taką drogę $c: J \rightarrow M$, że jej pole prędkości $\dot{c}(t)$ jest równoległe. Droga c jest więc geodezyjna jeśli w dowolnej mapie zawierającej punkty $c(t)$ i dla każdego $k = 1, \dots, n$ spełnione jest równanie różniczkowe drugiego rzędu.

$$\ddot{c}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{c}^i\dot{c}^j = 0 \quad (5.10)$$

Odwrotnie, dla każdego punktu $p \in M$ oraz wektora stycznego $\mathbf{v} \in TM_p$ definiując warunki początkowe $c(0) = p$ oraz $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$ można znaleźć dokładnie jedną drogę geodezyjną $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ spełniającą te warunki.

5.7 Koneksja riemannowska

Zajmiemy się teraz sytuacją koneksji na rozmaitości riemannowskiej, a więc wyposażonej w tensor metryczny.

Stwierdzenie 5.7.1. *Niech M będzie rozmaitością wyposażoną w metrykę Riemanna $\langle -, - \rangle_p: TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$ oraz ∇ koneksją na M . Następujące warunki są równoważne dla dowolnej drogi $c: J \rightarrow M$:*

1. *Dla dowolnych pól $X, Y \in \mathfrak{X}(c)$ zachodzi równość*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla Y}{dt} \right\rangle$$

(por. Stw. 3.10.3).

2. *Dla dowolnych punktów $t_2 \geq t_1$ przeniesienie równoległe $\parallel_c: TM_{c(t_0)} \rightarrow TM_{c(t)}$ jest izometrią (por. Stw. 3.10.1).*

Jeśli warunki z Stw. 5.7.1 są spełnione, to mówimy, że koneksja ∇ jest zgodna z metryką Riemanna. Zachodzi fundamentalne twierdzenie geometrii riemannowskiej.

Twierdzenie 5.7.1. *Dla dowolnej rozmaitości wyposażonej w metrykę Riemanna istnieje dokładnie jedna zgodna z nią koneksja symetryczna, zwana koneksją riemannowską.*

Współczynniki Christoffela koneksji riemannowskiej wyrażają się przez współczynniki tensora metrycznego wzorami znanymi nam z przypadku powierzchni w \mathbb{R}^3 .

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (5.11)$$

5.8 Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Twierdzenia Gaussa-Bonneta 3.12.2 i 3.12.3 przenoszą się na abstrakcyjne 2-wymiarowe rozmaitości Riemanna. Dowody przenoszą się bezpośrednio.¹

5.9 Powierzchnie zwarte stałej krzywizny Gaussa

Zajmiemy się poszukiwaniem zwartych powierzchni z metryką Riemanna o stałej krzywiznie Gaussa. Będziemy rozważać trzy przypadki: $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$. Ten pierwszy jest najłatwiejszy, bowiem sfera o środku w dowolnym punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^3$ i promieniu $r > 0$ ma krzywiznę gaussa równą $\frac{1}{r^2}$.

Twierdzenie 5.9.1. *Jeśli $M \subset \mathbb{E}^3$ jest zwartą zorientowaną podrozmaitością dodatniej krzywizny Gaussa, to orientacja $\mathbf{n}: M \rightarrow S^2$ jest dyfeomorfizmem.*

Dowód. Skoro $K > 0$, to w dowolnym punkcie pochodna odwzorowania orientacji $D\mathbf{n}_p: TM_p \rightarrow TS_{\mathbf{n}(p)}^2$ jest izomorfizmem, a więc lokalnym dyfeomorfizmem między zwartymi rozmaitościami. Takie przekształcenie musi być nakryciem. Ponieważ sfera jest jednospójna, więc jedynym jej spójnym nakryciem jest homeomorfizm. \square

Twierdzenie 5.9.2. *Jeśli $M \subset \mathbb{E}^3$ jest podrozmaitością zwartą to zawiera ona punkty o dodatniej krzywiznie.*

Dowód. Ponieważ M jest zwarta, więc funkcja $\|-\|^2: M \rightarrow \mathbb{R}$ przybiera maksimum w pewnym punkcie. Dokonując obrotu możemy dla wygody założyć, że jest to punkt postaci $p_0 = (0, 0, c)$. Wtedy oczywiście ten punkt jest także maksimum dla funkcji wysokości, czyli $p^3(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Zauważmy, że TM_{p_0} jest prostopadła do osi $(0, 0, x_3)$ ponieważ $Dp_3|TM_{p_0} = p_3 = 0$. Dokonując odpowiedniego obrotu możemy założyć, że wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ są wektorami własnymi odwzorowania Weingartena. Niech $r: U \rightarrow M$ będzie parametryzacją postaci $r(u_1, u_2) = (u_1, u_2, c + f(u_1, u_2))$, gdzie $f(0, 0) = 0$ oraz pochodne cząstkowe $f^{(1)}(0, 0) = f^{(2)}(0, 0) = 0$, a więc $r(0, 0) = \mathbf{e}_i$ dla $i = 1, 2$. Odwzorowanie Weingartena w punkcie p_0 ma więc macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \end{bmatrix}.$$

¹Patrz M. P. do Carmo "Differential Geometry of Curves and Surfaces" Rozdział 4-5. The Gauss-Bonnet Theorem and Its Applications.

Rozpatrzmy sferę $S^2(r)$ o środku w punkcie $0 \in \mathbb{R}^3$ i promieniu $|c|$. Oczywiście $TS_{p_0}^2 = TM_{p_0}$. Wykażemy, że $K^M(p_0) \geq K^{S^2(r)}(p_0) = \frac{1}{r^2} > 0$.

Funkcja $h(u_1, u_2) := \|r(u_1, u_2)\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + (c + f(u_1, u_2))^2$ ma oczywiście maksimum w punkcie $(0, 0)$, a więc jej obie drugie pochodne cząstkowe są w tym punkcie niedodatnie.

$$0 \geq \frac{\partial^2 h}{\partial u_i^2} \Big|_0 = 2 + 2c \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} \Big|_0 \quad \text{dla } i = 1, 2,$$

a stąd $\frac{\partial^2 h}{\partial u_i^2} \Big|_0 \leq -\frac{1}{c}$, a stąd $K^M(p_0) = \det D\mathbf{n}_{p_0} \geq \frac{1}{c^2} > 0$.

□

Wniosek 5.9.1. *Zwarta spójna powierzchnia o stałej krzywiznie położona w przestrzeni \mathbb{E}^3 jest homeomorficzna ze sferą S^2*

Wniosek 5.9.2. *Płaski torus nie zanurza się izometrycznie w \mathbb{R}^3 .*

Twierdzenie 5.9.3. *Dowolna zwarta spójna powierzchnia w \mathbb{E}^3 , która nie jest homeomorficzna ze sferą zawiera punkty o krzywiznie ujemnej, zerowej i dodatniej.*

Dowód. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią. Skorzystamy z twierdzenia Gaussa-Bonneta wg którego $2\pi \int_M K dM = \chi(M)$ gdzie $\chi(M)$ jest charakterystyką Eulera. Z topologii wiadomo, że powierzchnia zanurzona w \mathbb{R}^3 musi być orientowalna oraz jeśli jest różna od sfery, to $\chi(M) \leq 0$. Ponieważ na powierzchni muszą istnieć punkty o krzywiznie dodatniej, więc żeby cała była niedodatnia muszą istnieć punkty o krzywiznie ujemnej. Ponieważ krzywizna jest funkcją ciągłą, więc istnieją punkty o krzywiznie zerowej. □

5.10 Zadania

Zad. 42. Oblicz współczynniki Christoffela euklidesowej koneksji na płaszczyźnie w mapie zadanej przez współrzędne biegunowe.

Zad. 43 (Płaszczyzna hiperboliczna).

1. Obliczyć długość odcinka prostej $c(t) := z_0 + tz_1$ na półpłaszczyźnie \mathbb{H}_R .
2. Płaszczyzna hiperboliczna \mathbb{H}_R jest jednorodna tzn. dla dowolnych dwóch punktów $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ istnieje izometria $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ taka, że $f(z_0) = z_1$.
3. Grupa rzutowa płaszczyzny $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/diag$ działa tranzytywnie przez izometrię na \mathbb{H}_R , a grupa izotropii dowolnego punktu jest izomorficzna z grupą obrotów $SO(2)$. Grupa $PSL(2, \mathbb{R})$ jest pełną grupą izometrii płaszczyzny hiperbolicznej tj. każda izometria jest takiej postaci.
4. Wyznaczyć współczynniki Christoffela na \mathbb{H}_R .
5. Obliczyć krzywiznę Gaussa \mathbb{H}_R .
6. Niech $\mathbf{v}_0 := (0, 1) \in T\mathbb{H}_i$ będzie wektorem stycznym a $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ krzywą $c(t) := t + i$. Znaleźć pole przenoszące równolegle wektor v_0 wzdłuż drogi c do dowolnego punktu $c(t)$. Wykonać rysunek.

7. Wykazać, że łuki okręgów prostopadłych do osi rzeczywistej i proste prostopadłe do osi rzeczywistej są geodezyjnymi.

Zad. 44 (Dysk Poincaré).

1. Obliczyć pole powierzchni hiperbolicznej dysku o środku w $0 \in D$ i promieniu $r < 1$ i porównać z polem euklidesowym πr^2 .
2. Wykazać, że łuki okręgów prostopadłych do brzegu dysku oraz średnice są geodezyjnymi.

Zad. 45 (Płaszczyzna hiperboliczna w czasoprzestrzeni). Rozpatrzmy półprzestrzeń $\{(p, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mid p \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$ wyposażoną w metrykę Minkowskiego określoną na przestrzeni stycznej w dowolnym punkcie $\mu((x_1, x_2, t), (y_1, y_2, s)) := x_1 y_1 + x_2 y_2 - ts$ oraz jej podprzestrzeń (hiperboloidea obrotowa) $H := \{p, t \mid \|p\|^2 - t^2 = -1\}$.

1. Sprawdzić, że metryka Minkowskiego obcięta do dowolnej przestrzeni stycznej $TH_{(p,t)}$ jest iloczynem skalarnym.
2. Obrazem rzutu stereograficznego z punktu $(0, 0, -1)$ hiperboloidy na płaszczyznę $t = 0$ jest (euklidesowy) dysk jednostkowy z metryką Poincaré.

Zad. 46 (Pseudosfera). Wykazać, że płaszczyzna hiperboliczna jest lokalnie izometryczna z [pseudosferą](#) tzn. powierzchnią obrotową otrzymaną przez obrót traktrisy wokół jej asymptoty. Lokalna izometria dana jest wzorem $p(z) := (c_1(\operatorname{arccosh} y) \cos x, c_1(\operatorname{arccosh} y) \sin x, c_2(\operatorname{arccosh} y))$ gdzie $z = x + yi$ a $c_1(t) = t - \tanh t$, $c_2 = \operatorname{sech} t$ jest parametryzacją [traktrisy](#).