

# Topologia Algebraiczna

## Pomocnik studenta

Wersja *in statu nascendi*

Agnieszka Bojanowska      Stefan Jackowski

30 czerwca 2019



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Kategoryjny punkt widzenia</b>	<b>5</b>
1.1	Kategorie, funktory, transformacje naturalne	5
1.2	Funktory reprezentowalne	9
1.3	Kategoria $\Delta$ i obiekty symplecjalne	10
1.4	Funktory sprzężone	11
1.5	Produkty i koprodukty, granice i kogranice	12
1.6	Kategorie morfizmów	15
1.7	Struktury algebraiczne w kategoriach	16
1.8	Kategorie przestrzeni topologicznych	17
1.9	Grupoid podstawowy przestrzeni topologicznej	20
<b>2</b>	<b>Przestrzenie przekształceń ciągłych</b>	<b>25</b>
2.1	Generowanie topologii	25
2.2	Topologia zwarto-otwarta	26
2.3	Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański	28
2.4	Przestrzenie przekształceń przestrzeni punktowanych	31
2.5	Przestrzeń dróg	31
<b>3</b>	<b>Korozwłóknienia i rozwłóknienia</b>	<b>33</b>
3.1	Wstęp	33
3.2	Cylinder i kocylinder	34
3.3	Korozwłóknienia i rozwłóknienia	37
3.3.1	Definicje	37
3.3.2	Jednoznaczność podnoszenia i rozszerzania homotopii	41
3.3.3	Dualność korozwłóknień i rozwłóknień	41
3.4	Kowłóknisty ciąg Puppe przekształcenia	44
3.5	Punktowane i wolne klasy homotopii	45
<b>4</b>	<b>Grupy homotopii</b>	<b>49</b>
4.1	Grupy homotopii przestrzeni punktowanej	49
4.2	Relatywne grupy homotopii	51
4.3	Ciąg dokładny grup homotopii rozwłóknienia	53
<b>5</b>	<b>CW–kompleksy</b>	<b>55</b>
5.1	Relatywne komórki i multikomórki	55
5.2	CW–kompleksy i odwzorowania komórkowe	56
5.3	Twierdzenie J.H.C. Whiteheada	57
5.4	Aproksymacja gładka	59
5.5	Aproksymacja komórkowa	61
5.6	Homotopijne własności CW–kompleksów	62

<b>6</b>	<b>Grupy homotopii CW-kompleksów</b>	<b>65</b>
6.1	Grupy homotopii relatywnych komórek	65
6.2	Stopień odwzorowania $S^n \rightarrow S^n$	69
6.3	Grupy homotopii sfer	70
6.4	Grupy homotopii przestrzeni jednorodnych grup liniowych	72
6.5	Przestrzenie Eilenberga-MacLane'a	72
<b>7</b>	<b>Homologie i kohomologie</b>	<b>75</b>
7.1	Aksjomaty teorii (ko-)homologii	75
7.2	Klasyczne teorie (ko-)homologii	78
7.3	Singularna teoria (ko-)homologii	80
<b>8</b>	<b>Metoda modeli acyklicznych</b>	<b>83</b>
8.1	Funktory wolne	83
8.2	Moduły i algebry z gradacją. Kompleksy łańcuchowe	85
8.3	Twierdzenie o modelach acyklicznych	87
8.4	Aksjomat homotopii	90
8.5	Aksjomat wycinania i ciąg Meyera-Vietorisa	92
8.6	Iloczyn tensorowy kompleksów łańcuchowych	95
8.7	Twierdzenie Eilenberga - Zilbera	95
<b>9</b>	<b>Struktury moltiplikatywne w (ko-)homologiach</b>	<b>97</b>
9.1	Algebry z gradacją	97
9.2	Mnożenia i dzielenia - sytuacja algebraiczna	99
9.3	Produkty w (ko-)homologiach przestrzeni topologicznych	101
9.4	Niezmiennik Hopfa i $\pi_3(S^2 \vee \dots \vee S^2)$	103
<b>10</b>	<b>Homologiczne własności rozmaitości</b>	<b>105</b>
10.1	Topologia rozmaitości	105
10.2	Orientacja rozmaitości	106
10.3	Twierdzenie o dwoistości	107
10.4	Kohomologie o zwartych nośnikach	108
10.5	Interpretacje geometryczno-różniczkowe	109
10.6	Twierdzenie Lefschetza o punktach stałych	111
<b>11</b>	<b>Uzupełnienia</b>	<b>115</b>
11.1	Relatywne homotopijne równoważności	115
11.2	Włókniste homotopijne równoważności	120
11.3	Lokalny opis korozwłóknień	123
11.4	Lokalny opis rozwłóknień	126
11.5	Przestrzenie rzutowe	129

# Rozdział 1

## Kategoryjny punkt widzenia

### 1.1 Kategorie, funktory, transformacje naturalne

**Definicja 1.1.1.** *Kategoria  $\mathcal{C}$  składa się z:*

1. Klasy obiektów  $\text{ob}(\mathcal{C})$ .
2. Zbiorów morfizmów  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  określonych dla dowolnych dwóch obiektów  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , a jeśli  $X = Y$  wraz z wyróżnionym elementem  $\iota_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , zwanym morfizmem identycznościowym.
3. Odwzorowań składania morfizmów

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \ni (f, g) \mapsto gf \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

określonych dla dowolnych trzech obiektów  $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , takie, że:

- dla dowolnych trzech składalnych morfizmów zachodzi równość  $(fg)h = f(gh)$  (tzn. składanie jest łączne),
- dla dowolnego morfizmu  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  zachodzi równość:  $f\iota_X = \iota_Y f = f$  (tzn.  $\iota_X$  jest elementem neutralnym ze względu na składanie).

**Definicja 1.1.2.** *Morfizm  $f: X \rightarrow Y$  w kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy izomorfizmem jeśli istnieje morfizm  $g: Y \rightarrow X$  taki, że  $fg = \text{id}_X$  oraz  $gf = \text{id}_Y$ .*

*Uwaga 1.1.1.* Kategorie oznaczamy na ogół literami  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  a zbiory morfizmów między obiektami  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  oznaczamy także  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**Definicja 1.1.3.** *Podkategorią  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  nazywamy kategorię  $\mathcal{C}'$  taką, że każdy jej obiekt jest obiektem w  $\mathcal{C}$ , dla dowolnych  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  i składanie morfizmów oraz morfizmy neutralne w  $\mathcal{C}'$  pokrywają się z tymi w  $\mathcal{C}$ . Podkategoria  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  nazywa się pełną jeśli dla dowolnych  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C}')$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .*

Pełna podkategoria w  $\mathcal{C}$  jest jednoznacznie zdefiniowana przez podanie klasy jej obiektów.

**Definicja 1.1.4.** *Funktor (kowariantny)  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  między kategoriami  $\mathcal{C}$  i  $\mathcal{D}$  jest zadany przez przyporządkowanie obiektom kategorii  $\mathcal{C}$  obiektów kategorii  $\mathcal{D}$ :  $F: \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$  oraz odwzorowania  $F_{X, Y}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ , określone dla dowolnych obiektów  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , które zachowujące morfizmy identycznościowe tzn.  $F_{X, X}(\iota_X) = \iota_{F(X)}$  oraz złożenie morfizmów tzn.  $F_{X, Z}(gh) = F_{Y, Z}(g)F_{X, Y}(h)$ .*

*Uwaga 1.1.2.* Nie istnieje kategoria wszystkich kategorii i funktorów, bowiem funktory między kategoriami nie muszą być zbiorem, a jedynie klasą.

**Definicja 1.1.5.** Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy

1.  $F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$  jest bijekcją dla dowolnych  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ;
2. każdy obiekt  $Y \in \text{ob}(\mathcal{D})$  jest izomorficzny z obiektem  $F(A)$  dla pewnego  $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ .

**Definicja 1.1.6.** Jeśli dane są dwa funktory  $F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $i = 1, 2$  to ich transformacją naturalną nazywamy przyporządkowanie każdemu obiektowi  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$  morfizmu (w  $\mathcal{D}$ )  $\Phi_X: F_1(X) \rightarrow F_2(X)$  tak, że dla dowolnego morfizmu  $f: X \rightarrow Y$  w  $\mathcal{C}$  następujący diagram w kategorii  $\mathcal{D}$  jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & F_2(X) \\ F_1(f) \downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & F_2(Y) \end{array}$$

Transformacja naturalna  $\Phi$  nazywa się naturalną równoważnością funktorów jeśli dla każdego obiektu  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , morfizm  $\Phi_X$  jest izomorfizmem.

**Definicja 1.1.7.** Dla dowolnej kategorii  $\mathcal{C}$  definiujemy kategorię przeciwną  $\mathcal{C}^{op}$ , czyli taką, że  $\text{ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{ob}(\mathcal{C})$  a dla dowolnych  $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C}^{op})$  definiujemy  $\mathcal{C}^{op}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$ . Funktor kowariantny  $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$  nazywa się funktorem kontrawariantnym na  $\mathcal{C}$ .

*Przykład 1.1.1.* Przykłady kategorii i standardowe oznaczenia:

1.  $\mathcal{S}$  lub  $Set$  – kategoria zbiorów i ich dowolnych przekształceń,
2.  $\mathcal{P}$  lub  $Poset$  – kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych i przekształceń zachowujących porządek,
3.  $\mathcal{S}_*$  lub  $Set_*$  – kategoria zbiorów z wyróżnionym punktem i przekształceń zachowujących te punkty,
4.  $\mathcal{G}$  lub  $\mathcal{G}rp$  – kategoria grup i homomorfizmów;  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$  podkategoria grup abelowych,
5.  $\mathcal{R}$  lub  $Ring$  – kategoria pierścieni z jedyneką i ich homomorfizmów,
6.  $\mathcal{M}_R$  lub  $Mod_R$  – kategoria modułów nad pierścieniem  $R$  ( $R$ -modułów) i ich homomorfizmów,
7.  $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  lub  $Vect_{\mathbb{F}}$  – kategoria przestrzeni liniowych nad ciałem  $\mathbb{F}$  i przekształceń liniowych,
8.  $\mathcal{T}$  lub  $Top$  – kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych,
9.  $\mathcal{T}_*$  lub  $Top_*$  – przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i przekształceń ciągłych zachowujących te punkty,
10.  $\mathcal{T}_h$  lub  $Top_h$  – kategoria homotopii przestrzeni w której obiektami są przestrzenie topologiczne a morfizmami klasy homotopii. Istnieje naturalny funktor ilorazowy  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_h$ ,
11.  $\mathcal{T}_{*h}$  lub  $Top_{*h}$  – kategoria homotopii przestrzeni z wyróżnionym punktem. Obiekty: przestrzenie z wyróżnionym punktem; morfizmy: punktowane klasy punktowanych homotopii przekształceń. Istnieje naturalny funktor ilorazowy  $\mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{T}_{*h}$ .

Kategorie pochodzące od przestrzeni topologicznych omawiamy dokładniej w osobnym rozdziale.

Doskonale wyjaśnienie motywacji tych definicji, a w szczególności transformacji naturalnej znajduje się we wstępie do oryginalnego artykułu [6], w którym zostały wprowadzone do matematyki pojęcia teorii kategorii. Przytoczymy omawiany tam przykład:

*Przykład 1.1.2.* Zdefiniujemy kategorię skończenie wymiarowych, rzeczywistych przestrzeni wektorowych  $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ . Jej obiektami są skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie wektorowe. Dla dowolnych dwóch przestrzeni  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin})$ , morfizmy to odwzorowania liniowe, czyli  $\text{Mor}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ . Złożenie morfizmów to złożenie przekształceń liniowych a element neutralny to przekształcenie identycznościowe. Tak zdefiniowana  $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$  spełnia oczywiście aksjomaty kategorii Def. 1.1.1. Zauważmy przy okazji, że kategoria  $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$  jest równoważna swojej podkategorii, której obiektami są przestrzenie wektorowe  $\mathcal{N} := \{\mathbb{R}^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  a morfizmami wszystkie odwzorowania liniowe. Istotnie, włożenie  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  jest równoważnością kategorii, bo każda przestrzeń skończenie wymiarowa jest izomorficzna z pewną przestrzenią  $\mathbb{R}^n$ .

Na kategorii  $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$  rozpatrzmy dwa funktory, znane dobrze z Algebry Liniowej:

- Funktor kontrawariantny przestrzeni sprzężonej  $*$ :  $(\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin})^{op} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$  przypisujący przestrzeni  $\mathbf{V}$  przestrzeń sprzężoną  $\mathbf{V}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$  oraz odwzorowaniu liniowemu  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  przekształcenie liniowe  $f^*: \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$  zdefiniowane wzorem:  $f^*(\varphi)(\mathbf{v}) := \varphi(f(\mathbf{v}))$ .
- Funktor drugiej przestrzeni sprzężonej, czyli złożenie funktora  $*$  ze sobą. Jest to funktor kowariantny  $**$ :  $\mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ , który przypisuje przestrzeni wektorowej  $\mathbf{V}$  przestrzeń  $\mathbf{V}^{**} := (\mathbf{V}^*)^*$  a homomorfizmowi  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  przekształcenie liniowe  $f^{**}: \mathbf{V}^{**} \rightarrow \mathbf{W}^{**}$ .

Dla każdej przestrzeni liniowej  $\mathbf{V}$  istnieje izomorfizm  $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^*$ , ale do zdefiniowania go konieczny jest pewien wybór np. bazy w  $\mathbf{V}$  lub iloczynu skalarnego w  $\mathbf{V}$ .

Izomorfizm  $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^{**}$ , może być zdefiniowany kanonicznie tzn. wyłącznie w terminach przestrzeni  $\mathbf{V}$ , bez odwoływania się do dodatkowych struktur, jak w poprzednim przypadku. Dla dowolnej przestrzeni  $\mathbf{V}$  zdefiniujmy przekształcenie liniowe  $\Phi_{\mathbf{V}}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^{**}$  wzorem  $\Phi_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})(\varphi) := \varphi(\mathbf{v})$ . Przekształcenie  $\Phi_{\mathbf{V}}$  jest różnowartościowe, a więc dla skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych jest izomorfizmem, bowiem  $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{V}^{**})$ . Znane z Algebry Liniowej określenie  $\Phi_{\mathbf{V}}$  jako *kanonicznego izomorfizmu* znajduje ścisłe sformułowanie w postaci stwierdzenia, że  $\Phi_{\mathbf{V}}$  jest transformacją naturalną (równoważnością) funktora identycznościowego do funktora drugiej przestrzeni sprzężonej. Istotnie, dla dowolnego odwzorowania liniowego  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  diagram przekształceń liniowych:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{V}}} & \mathbf{V}^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ \mathbf{W} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{W}}} & \mathbf{W}^{**} \end{array}$$

jest przemienny.

**Zadanie 1.** Dla dowolnego ciała  $\mathbb{F}$  i ustalonej przestrzeni wektorowej  $\mathbf{V} \in \text{ob}(\mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin})$  definiujemy funktor  $F_{\mathbf{V}}: \mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin} \rightarrow \mathcal{Vect}_{\mathbb{F}}^{fin}$ ,  $F_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}) := \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ , oraz dla dowolnej liczby naturalnej  $n \in \mathbb{N}$  funktor  $F_n(\mathbf{W}) := \mathbf{W} \times \dots \times \mathbf{W}$  ( $n$ -krotny produkt). (Zdefiniować te funktory na morfizmach!) Udowodnić, że dowolna baza  $B$  przestrzeni  $\mathbf{V}$  zdaje naturalną równoważność funktorów  $\Phi_B: F_{\mathbf{V}} \rightarrow F_{\dim(\mathbf{V})}$ .

**Zadanie 2.** Dla dowolnego zbioru  $X$  przez  $\mathcal{P}(X)$  oznaczamy zbiór którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru  $X$ . Zdefiniujemy funktor kontrawariantny  $P^1: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  tak, że  $P^1(X) := \mathcal{P}(X)$  a dla

$f: X \rightarrow Y$  przekształcenie  $P^1(f): \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  wzorem  $P^1(f)(B) := f^{-1}(B)$ . Zdefiniujemy drugi funktor  $F^2: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , zdefiniowany na dowolnym obiekcie  $X$  jako  $F^2(X) = 2^X$  - zbiór przekształceń  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , a na morfizmie  $f: X \rightarrow Y$  jako  $F^2(f)(\phi) := \varphi f$  dla dowolnej funkcji  $\phi \in 2^Y$ . Udowodnić, że istnieje naturalna równoważność funktorów  $P^1 \rightarrow F^2$ .

**Zadanie 3.** Zinterpretuj znaną z Topologii II odpowiedniość przestrzeni nakrywających nad ustaloną lukowo spójną i lokalnie jednospójną przestrzenią  $X$  i  $\pi_1(X, x_0)$ -zbiorów jako równoważność dwóch kategorii: przestrzeni nakrywających nad  $X$  oraz  $\pi_1(X, x_0)$ -zbiorów.

Wiele przykładów kategorii ma podobny charakter do kategorii przestrzeni wektorowych: rozważa się zbiory z pewną dodatkową strukturą (np. działaniem grupowym, działaniami definiującymi strukturę pierścienia, topologią, porządkiem) oraz przekształcenia zachowujące te struktury. Takie podejście pozwala dostrzec analogie między różnymi twierdzeniami i teoriami matematycznymi.<sup>1</sup>

Zauważmy, że dla każdej z kategorii 1.–9. istnieje *funktor zapominania*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  prowadzący do kategorii zbiorów, polegający na przyporządkowaniu zbiorowi ze strukturą samego zbioru, a morfizmom odpowiednich przekształceń zbiorów. Funktor zapominania jest oczywiście różnowartościowy na zbiorach morfizmów, ale na ogół skleja klasy izomorfizmu obiektów np.  $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$  przeprowadza nieizomorficzne grupy  $\mathbb{Z}_4$  i  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  na izomorficzne zbiory czteroelementowe. Kategorie wyposażone w funktor zapominania do kategorii zbiorów (który można opisać aksjomatycznie) nazywają się **kategoriami konkretnymi**. Mówiąc nieformalnie, są to kategorie których obiektami są zbiory z wyróżnioną strukturą (np. porządkiem, działaniem lub topologią) a morfizmami przekształcenia zbiorów zachowujące tę strukturę.

Chociaż powstanie pojęć kategorijskich było motywowane analogiami teorii matematycznych i potrzebą sprecyzowania intuicji "naturalnych równoważności", to w następnych latach okazało się, że ważne jest także rozważanie "małych" kategorii, będących uogólnieniem struktur algebraicznych.

**Definicja 1.1.8.** *Kategorię  $\mathcal{C}$  nazywamy małą jeśli klasa obiektów  $ob(\mathcal{C})$  jest zbiorem.*

Obiekty w małych kategoriach często oznaczamy małymi literami, a więc  $c \in ob(\mathcal{C})$ . Poszczególne grupy, zbiory częściowo uporządkowane możemy rozważać jako kategorie.

*Przykład 1.1.3.* Niech  $G$  będzie grupą (a nawet monoidem, czyli zbiorem z działaniem łącznym i z jednością). Zdefiniujemy kategorię  $\mathcal{C}_G$  jako posiadającą jeden obiekt  $*$ , a zbiór morfizmów  $\mathcal{C}_G(*, *) := G$ . Złożenie morfizmów jest zadane przez działanie grupowe, a morfizmem neutralnym jest element neutralny w grupie. Zauważmy, że funktorom między kategoriami zadanymi przez dwie grupy  $\mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$  odpowiadają dokładnie homomorfizmy grup  $G \rightarrow H$ . Istnieje także równoważność (a nawet izomorfizm) kategorii  $(\mathcal{C}_G)^{op} = \mathcal{C}_G$ .

**Zadanie 4.** Niech  $f_0, f_1: G \rightarrow H$  będą dwoma homomorfizmami grup. Udowodnić, że istnieje bijectja zbioru transformacji naturalnych między wyznaczonymi przez nie funktorami  $F_0, F_1: \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$  a elementami  $h \in H$  takimi, że dla każdego  $g \in G$ ,  $f_1(g) = hf_0(g)h^{-1}$ , czyli  $f_1 = c_h f_0$  gdzie  $c_h: H \rightarrow H$  jest automorfizmem wewnętrznym wyznaczonym przez element  $h \in H$ .

*Przykład 1.1.4.* Niech  $(S, \leq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym (*poset*). Zdefiniujemy kategorię  $\mathcal{C}_S$ , w której  $ob(\mathcal{C}_S) := S$  oraz  $Mor(s_1, s_2) = \begin{cases} (s_2, s_1) & \text{jeśli } s_1 \leq s_2 \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$  Złożenie zdefiniowane jest w oczywisty sposób:  $(s_3, s_2)(s_2, s_1) := (s_3, s_1)$ .

**Zadanie 5.** Niech  $f_0, f_1: S \rightarrow T$  będą dwoma morfizmami posetów (odwzorowaniami zachowującymi porządek). Udowodnić, że istnieje transformacja naturalna (dokładnie jedna) między

<sup>1</sup>Maksyma przypisywana Stefanowi Banachowi: *Matematykiem jest, kto umie znajdować analogie między twierdzeniami, lepszym - kto widzi analogie między dowodami, jeszcze lepszym - kto dostrzega analogie między teoriami, a można wyobrazić sobie i takiego, co widzi analogie między analogiami.* Być może młody Eilenberg usłyszał tę maksymę od Banacha i to stanowiło jedną z motywacji powstania pojęcia kategorii.



definiowanymi przez nie funktorami  $F_0, F_1 : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_T$  wtedy i tylko wtedy gdy  $f_0(s) \leq f_1(s)$  dla każdego  $s \in S$ .

Małe kategorie i funktory między nimi tworzą kategorię (bo funktory między małymi kategoriami tworzą zbiór!) oznaczaną  $\mathbf{CatCat}$ . Ostatnie przykłady oznaczają, że kategoria grup i kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych są równoważne pewnym podkategoriom w  $\mathbf{CatCat}$ . Jedynym wspólnym obiektem obu odpowiednich podkategorii jest zbiór jednopunktowy.

**Zadanie 6.** Mała kategoria  $\mathcal{C}$  w której dla dowolnych dwóch obiektów  $c, c' \in \text{ob}(\mathcal{C})$  istnieje co najwyżej jeden morfizm  $c \rightarrow c'$  jest równoważna (ale nie identyczna!) z kategorią definiowaną przez poset (zbiór częściowo uporządkowany).

**Zadanie 7.** Jeśli w małej kategorii każdy morfizm jest izomorfizmem oraz między każdymi dwoma obiektami istnieje morfizm, to ta kategoria jest równoważna kategorii definiowanej przez grupę. Podaj (nietrywialne) przykłady takich kategorii.

## 1.2 Funktory reprezentowalne

Dowolny obiekt kategorii  $\mathcal{C}$  wyznacza funktor kowariantny i funktor kontrawariantny do kategorii zbiorów.

**Definicja 1.2.1.** Dla  $X \in \text{ob } \mathcal{C}$  definiujemy funktory:

- Funktor kowariantny  $R_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  reprezentowany przez obiekt  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ :
  - $R_X(U) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, U)$  dla  $U \in \text{ob}(\mathcal{C})$
  - $R_X(f)(g) := f \circ g$  dla  $U \xrightarrow{f} V$  i  $X \xrightarrow{g} U$
- Funktor kontrawariantny  $R^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  reprezentowany przez obiekt  $X$ .
  - $R^X(U) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(U, X)$  dla  $U \in \text{ob}(\mathcal{C})$
  - $R^X(f)(g) := g \circ f$  dla  $U \xrightarrow{f} V$  i  $V \xrightarrow{g} X$

**Definicja 1.2.2.** Funktor kontrawariantny  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  nazywamy reprezentowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt  $X \in \mathcal{C}$  oraz naturalna równoważność funktorów  $R^X \rightarrow F$ . Analogicznie dla funktora kowariantnego.

*Przykład 1.2.1.* Funktor  $F_n$  zdefiniowany w Zad. 1 jest reprezentowalny, a obiektem go reprezentującym jest przestrzeń  $\mathbb{R}^n$ .

**Twierdzenie 1.2.1** (Lemat Yonedy). Niech  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  będzie funktorem kontrawariantnym oraz  $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Wówczas istnieje naturalna bijekcja między transformacjami naturalnymi funktorów  $\Phi : R^X \rightarrow F$  a elementami zbioru  $F(X)$  zadana przez przyporządkowanie

$$\text{Nat}_{\mathcal{C}}(R^X, F) \ni \Phi \rightsquigarrow \Phi(X)(id_X) \in F(X).$$

*Dowód.* Zdefiniujemy odwrotne przyporządkowanie: każdemu elementowi  $x \in F(X)$  przyporządkujemy transformację  $\Phi_x : R^X \rightarrow F$  daną wzorem:  $\Phi_x(f) := F(f)(x)$ .  $\square$

**Wniosek 1.2.1.** Dla dowolnych obiektów  $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$  przyporządkowanie  $f \rightsquigarrow \tau_f$ ,  $\tau_f(h) = f \circ h$  definiuje bijekcję między elementami zbioru  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a transformacjami naturalnymi funktorów przez nie reprezentowanych  $R^X \rightarrow R^Y$ .

**Wniosek 1.2.2.** Jeżeli funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  jest reprezentowalny, to obiekt go reprezentujący jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Dla małej kategorii  $\mathcal{C}$  i dowolnej kategorii  $\mathcal{D}$  niech  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  oznacza kategorię, której obiektami są funktory z  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , a morfizmami między funktorami transformacje naturalne. Jako wniosek z Lematu Yonedy 1.2.1 otrzymujemy:

**Wniosek 1.2.3.** *Przyporządkowanie  $X \rightsquigarrow R^X$  definiuje funktor, który jest równoważnością kategorii  $\mathcal{C}$  z pełną podkategorią (p.Def. 1.1.3)  $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S})$  złożoną z funktorów reprezentowalnych.*

Zauważmy, że w przypadku kategorii skończone wymiarowych przestrzeni wektorowych funktory  $R^{\mathbf{V}}$ ,  $R_{\mathbf{V}}$  mają wartości w tej samej kategorii, bo zbiór homomorfizmów sam jest przestrzenią wektorową. Kategorie mające tę własność nazywamy **kategoriami zamkniętymi**. Innym przykładem kategorii zamkniętej jest kategoria grup abelowych (ale nie wszystkich grup!). Nieco delikatniejsza jest kwestia nadania struktury kategorii zamkniętej kategorii przestrzeni topologicznych, bo w zbiorze przekształceń ciągłych można rozpatrywać różne topologie.

### 1.3 Kategoria $\Delta$ i obiekty symplecjalne

Ogromną rolę w topologii odgrywa kategoria skończonych zbiorów dobrze uporządkowanych i przekształceń zachowujących porządek, a dokładniej jej pełna podkategoria  $\Delta$  składająca się z ciągów  $[n] := \underline{n} := \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Geometryczna motywacja wynika stąd, że istnieje funktor  $\Delta \rightarrow \mathcal{T}$  przypisujący zbiorowi  $\underline{n}$  sympleks  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  rozpięty afinicznie na wektorach bazy kanonicznej  $e_0, e_1, \dots, e_n$  (współrzędne numerujemy  $0, \dots, n$ ). Dowolne przekształcenie  $\varphi: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$  indukuje przez afiniczne rozszerzenie przekształcenie ciągłe  $\Delta^n \rightarrow \Delta^m$ .

**Zadanie 8.** Wykaż, że dowolny morfizm w kategorii  $\Delta$  można przedstawić jako złożenie przekształceń ścian (face maps)  $\delta^0, \dots, \delta^n: [n-1] \rightarrow [n]$ , gdzie  $\delta^i$  jest injekcją pomijającą wierzchołek o numerze  $i$  oraz przekształceń degeneracji  $\sigma^0, \dots, \sigma^n: [n+1] \rightarrow [n]$  zdefiniowane jako jedyna surjekcja taka, że  $\sigma_i^{-1}(i) = \{i, i+1\}$ . Przekształcenia  $\delta^i, \sigma^i$  spełniają tożsamości symplecjalne (*simplicial identities*):

1.  $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$  jeśli  $i < j$
2.  $\sigma_j \delta_i = \delta_i \sigma_{j-1}$  jeśli  $i < j$
3.  $\sigma_j \delta_i = id$  jeśli  $i = j$  lub  $i = j+1$
4.  $\sigma_j \delta_i = \delta_{i-1} \sigma_j$  jeśli  $i > j+1$
5.  $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$  jeśli  $i \leq j$ .

**Definicja 1.3.1.** Niech  $\mathcal{C}$  będzie dowolną kategorią. Obiekt symplecjalny w kategorii  $\mathcal{C}$  to funktor  $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ . Wartość funktora  $X: \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  na obiekcie  $[n] \in \Delta$  oznaczamy w skrócie  $X_n$ . Kategorię obiektów symplecjalnych i transformacji naturalnych oznaczamy  $\mathbf{Sp}_{\mathcal{C}} := \text{Funct}(\Delta^{op}, \mathcal{C})$ . Gdy  $\mathcal{C} = \mathcal{S}$  jest kategorią zbiorów kategorię obiektów symplecjalnych w  $\mathcal{S}$ , zwanych zbiorami symplecjalnymi, oznaczamy  $\mathbf{Sp}$ .

Z Zad. 8 wynika, że aby zadać obiekt symplecjalny wystarczy wskazać ciąg obiektów  $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$  oraz morfizmy  $F(\sigma^i) = s_i$  oraz  $F(\delta^i) = d_i$  spełniające warunki wynikające z równości w Zad. 8.

**Definicja 1.3.2.** Symplecjalnym sympleksem  $n$ -wymiarowym nazywamy funktor  $\Delta[n]: \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{S}$  reprezentowany przez  $[n] \in \mathbf{Sp}$ , czyli  $\Delta[n]([m]) := \text{Mor}_{\Delta}([m], [n])$ .

Otrzymujemy szczególny przypadek tzw. zanurzenia Yonedy 1.2.3:

**Wniosek 1.3.1.** *Przyporządkowanie  $[n] \rightsquigarrow \Delta[n]$  definiuje funktor, który jest równoważnością kategorii  $\Delta$  z pełną podkategorią kategorii  $\mathbf{Sp}$ , złożoną z funktorów reprezentowalnych.*

Kategoria zbiorów symplecjalnych  $\mathbf{Sp}$  odgrywa ogromną rolę we współczesnej teorii homotopii. Poglądowe wprowadzenie do teorii zbiorów symplecjalnych zawiera artykuł [8].

## 1.4 Funktory sprzężone

*Adjoint functors arise everywhere.*

*Saunders Mac Lane*

Pojęcie funktorów sprzężonych (dołączonych - *adjoint functors*) nawiązuje do pojęcia przekształcenia sprzężonego, znanego z algebry liniowej. Jeśli  $(\mathbf{V}, \langle -, - \rangle_{\mathbf{V}})$  oraz  $(\mathbf{W}, \langle -, - \rangle_{\mathbf{W}})$  są skończone wymiarowymi rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi wyposażonymi w iloczyn skalarny, to dowolnemu przekształceniu liniowemu  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  można przypisać przekształcenie sprzężone (lub dołączone)  $f^!: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$  takie, że dla dowolnych elementów  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$  zachodzi równość:  $\langle \mathbf{v}, f^!(\mathbf{w}) \rangle_{\mathbf{V}} = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{W}}$ . Puszczając nieco wodze matematycznej fantazji można myśleć o przyporządkowaniu parze obiektów kategorii zbioru morfizmów jako rodzaju "formy dwuliniowej", której wartościami są zbiory. Ten punkt widzenia prowadzi naturalnie do definicji funktorów sprzężonych dołączonych.

**Definicja 1.4.1.** Funktory  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  i  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  nazywamy sprzężonymi gdy istnieje naturalna równoważność funktorów na kategorii  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$  o wartościach w  $\mathcal{S}$

$$\Phi: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, G(\cdot)) \xrightarrow{\simeq} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), \cdot)$$

tzn. dla dowolnej pary morfizmów  $C_2 \xrightarrow{f} C_1$  w  $\mathcal{C}$  oraz  $D_1 \xrightarrow{h} D_2$  w  $\mathcal{D}$  diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C_1, G(D_1)) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{C_1, D_1}} & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C_1), D_1) \\ \downarrow G(h)_! f^! & & \downarrow h_! F(f)^! \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C_2, G(D_2)) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{C_2, D_2}} & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C_2), D_2) \end{array} \quad (1.1)$$

jest przemienny. Mówimy, że funktor  $F$  jest lewo-sprzężony do funktora  $G$ , a  $G$  jest prawo-sprzężony do funktora  $F$ .

Warunek równoważności funktorów można zapisać korzystając z oznaczeń dla funktora reprezentowanego.

$$R^{G(D)}(C) \simeq R_D(F(C))$$

**Przykład 1.4.1.** Zbiór morfizmów w kategorii zbiorów oznaczamy  $\text{Map}(-, -)$ . Dla trzech zbiorów  $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{S})$  istnieje naturalna równoważność funktorów

$$\Phi_{(X, Y, Z)}: \text{Map}(X \times Y, Z) \simeq \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

dana wzorem  $\Phi_{(X, Y, Z)}(f)(x)(y) := f(x, y)$ . Ustalając zbiór  $Y$  otrzymujemy, że funktor  $R_Y(Z) = \text{Map}(Y, Z)$  posiada funktor lewo-dołączony  $F(X) := X \times Y$ .

**Zadanie 9.** Wykazać, że funktory  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  i  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  są sprzężone wtedy i tylko wtedy gdy istnieją transformacje naturalne  $\eta: id_{\mathcal{C}} \rightarrow FG$  oraz  $\varepsilon: GF \rightarrow id_{\mathcal{D}}$  takie, że złożenia  $F \xrightarrow{L\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon G} F$  oraz  $G \xrightarrow{\eta R} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$  są identycznościami.

**Zadanie 10.** Pokazać, że jeżeli funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  jest równoważnością kategorii, to istnieje funktor  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sprzężony do  $F$  zarówno z prawej jak i lewej strony.

**Zadanie 11.** Pokazać, że funktor sprzężony do danego funktora, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do naturalnej równoważności funktorów.

**Zadanie 12.** Niech  $\mathcal{S}_*$  będzie kategorią zbiorów z wyróżnionym punktem. Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora  $R_X^*: \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$ , gdzie punktem wyróżnionym w  $R_X^*(Z) := \text{Map}_*(X, Z)$  jest przekształcenie stałe w punkt wyróżniony w  $Z$ .

**Zadanie 13.** Niech  $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$  będzie kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem  $\mathbb{F}$ . Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora  $R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ ,  $R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{W}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ .

**Zadanie 14.** Niech  $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin}$  będzie kategorią skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem  $\mathbb{F}$ . Skonstruować functor lewo-dołączony do funktora  $R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}^{fin}$ .

Bardzo ważnymi przykładami functorów dołączonych są funktory dołączone do functorów zapominania.

**Zadanie 15.** Skonstruuj funktory lewo-dołączone do functorów zapominania:

1.  $\mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}$ ;
2.  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ , skonstruuj także functor prawo-dołączony;
3.  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$  oraz  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}_*$  (punkt wyróżniony w zbiorze na którym określona jest struktura grupowa to element neutralny);
4.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ , gdzie  $\mathcal{A}$  podkategoria grup abelowych, oraz  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ ;
5. Niech  $G$  będzie grupą, a  $\mathcal{S}_G$  oznacza kategorię, której obiektami są  $G$ -zbiory a morfizmami  $G$ -przekształcenia. Dla dowolnej podgrupy  $H \subset G$  definiujemy functor zapominania (obcięcia działania)  $\mathcal{S}_G \rightarrow \mathcal{S}_H$ .

## 1.5 Produkty i koprodukty, granice i kogranice

**Definicja 1.5.1.** *Produktem (kartezjańskim) obiektów  $X$  i  $Y$  w kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy obiekt  $P$  wraz z morfizmami  $P \xrightarrow{p_X} X$  i  $P \xrightarrow{p_Y} Y$ , który ma następującą własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów  $W \xrightarrow{f} X$  i  $W \xrightarrow{g} Y$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $W \xrightarrow{h} P$ , dla którego  $p_X \circ h = f$  i  $p_Y \circ h = g$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{g} & X \\
 \downarrow f & \searrow h & \uparrow p_X \\
 Y & \xleftarrow{p_Y} & P
 \end{array} \tag{1.2}$$

**Definicja 1.5.2.** *Koproduktem obiektów  $X$  i  $Y$  w kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy obiekt  $S$  wraz z morfizmami  $X \xrightarrow{i_X} S$  i  $Y \xrightarrow{i_Y} S$ , który ma następującą własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów  $X \xrightarrow{f} W$  i  $Y \xrightarrow{g} W$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $S \xrightarrow{h} W$ , dla którego  $h \circ i_X = f$  i  $h \circ i_Y = g$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xleftarrow{i_X} & X \\
 \uparrow i_Y & \searrow h & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{g} & W
 \end{array} \tag{1.3}$$

*Uwaga.* Koprodukt obiektów  $X$  i  $Y$  w kategorii  $\mathcal{C}$  jest produktem w kategorii  $\mathcal{C}^{op}$ .

**Zadanie 16.** Podać definicję produktu i koproduktu dowolnej rodziny obiektów  $\{X_j\}_{j \in J}$ .

**Zadanie 17.** Zbadać istnienie produktów i koproduktów (skończonych i nieskończonych) w znanych kategoriach.

**Zadanie 18.** Dla obiektów  $X$  i  $Y$  kategorii  $\mathcal{C}$  rozpatrujemy funktor  $F(\cdot) = R^X(\cdot) \times R^Y(\cdot)$ , gdzie  $\times$  oznacza produkt kartezjański zbiorów. Funktor  $F$  jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje produkt  $X \times Y$  i jest to obiekt go reprezentujący.

Z lematu Yonedy (Wniosek 1.2.1) wynika, że produkt, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Produkt (odpowiednio koprodukt) rodziny obiektów  $\{X_j\}_{j \in J}$  oznaczamy:

$$\text{Produkt } \prod_{j \in J} X_j \quad \text{Koprodukt } \coprod_{j \in J} X_j$$

Produkt rodziny obiektów nazywamy czasem *produktem kartezjańskim* a koprodukt *sumą prostą*.

Zdefiniujemy teraz ogólniejszą konstrukcję granicy (zwanej też granicą odwrotną) i kogranicy (zwanej też granicą prostą) diagramu modelowanego na małej kategorii.

**Definicja 1.5.3.** Niech  $\mathcal{I}$  będzie małą kategorią. Diagramem w kategorii  $\mathcal{C}$  modelowanym na  $\mathcal{I}$  nazywamy dowolny funktor  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Powiemy, że rodzina morfizmów  $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in \mathcal{I}}$  jest zgodna jeżeli dla każdego  $\alpha_{ij} : i \rightarrow j$  morfizmu w  $\mathcal{I}$ ,  $F(\alpha_{ij}) \circ f_i = f_j$ .

**Definicja 1.5.4.** Granicą (lub granicą odwrotną) diagramu  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  nazywamy obiekt  $L$  w kategorii  $\mathcal{C}$  (oznaczamy go  $\lim_{\mathcal{I}} F$ ) wraz ze zgodną rodziną morfizmów  $\{p_j : L \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$ , który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu  $W$  i zgodnej rodziny  $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $g : W \rightarrow L$ , dla którego  $p_j \circ g = f_j$  dla każdego  $j \in \text{ob } \mathcal{I}$ .

Jeżeli odwrócimy strzałki dostaniemy dualne pojęcie granicy prostej (zwanej też kogranicą) diagramu.

**Definicja 1.5.5.** Kogranicą (lub granicą prostą) diagramu  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  nazywamy obiekt  $C$  w kategorii  $\mathcal{C}$  (oznaczamy go  $\text{colim}_{\mathcal{I}} F$ ) wraz ze zgodną rodziną morfizmów  $\{s_j : F(j) \rightarrow C\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$ , który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu  $W$  i zgodnej rodziny  $\{f_j : F(j) \rightarrow W\}_{j \in \text{ob } \mathcal{I}}$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $g : C \rightarrow W$ , dla którego  $g \circ s_j = f_j$  dla każdego  $j \in \text{ob } \mathcal{I}$ .

**Zadanie 19.** Granica (odp. kogranica) diagramu modelowanego na kategorii dyskretnej (tzn. w której istnieją tylko morfizmy identycznościowe) jest izomorficzna z produktem (odp. koproduktem) rodziny obiektów.

**Zadanie 20.** Jeśli kategoria  $\mathcal{I}$  ma obiekt początkowy  $i_0 \in \text{ob } \mathcal{I}$  (odpowiednio końcowy  $i_\infty \in \text{ob } \mathcal{I}$ ), to dla dowolnego diagramu  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  mamy  $\lim_{\mathcal{I}} F = F(i_0)$  (odpowiednio  $\text{colim}_{\mathcal{I}} F = F(i_\infty)$ ).

*Przykład 1.5.1.* Opiszemy bardzo ważne konstrukcje granicy i kogranicy diagramu zbiorów. Niech  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  będzie diagramem w kategorii zbiorów.

Granica diagramu  $F$  jest podzbiorem zdefiniowanym następująco:

$$\lim_{\mathcal{I}} F := \{ \{x_i\} \in \prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} F(i) \mid \forall \alpha : i \rightarrow j \ F(\alpha)(x_i) = x_j \}$$

Morfizmy  $p_i : \lim_{\mathcal{I}} F \rightarrow F(i)$  to obcięcia rzutowań z iloczynu kartezjańskiego na czynniki.

Kogranicę diagramu definiujemy dualnie, jako zbiór ilorazowy sumy rozłącznej.

$$\text{colim}_{\mathcal{I}} F := \left( \prod_{i \in \text{ob } \mathcal{I}} F(i) \right) / \sim$$

gdzie  $\sim$  jest najmniejszą relacją zawierającą utożsamienia  $(x', i) \sim (x'', j)$  jeśli istnieją morfizmy  $\alpha_i : i \rightarrow k$  oraz  $\alpha_j : j \rightarrow k$  takie, że  $F(\alpha_i)(x') = F(\alpha_j)(x'')$ . Morfizmy  $s_i : F(i) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{I}} F$  są zdefiniowane przez włożenia w koprodukt.

**Zadanie 21.** Opisać konstrukcje produktu i koproduktu w kategorii grup abelowych.

**Stwierdzenie 1.5.1.** Niech  $F: \mathbf{Cat}I \rightarrow \mathbf{Cat}C$  będzie dowolnym diagramem. Obiekt  $C \in \text{ob}(C)$  z morfizmami strukturalnymi  $\{C \rightarrow F(i)\}_{i \in \text{ob}(I)}$  jest granicą odwrotną diagramu  $F$  wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje funktor  $G_F: \mathbf{Cat}C \rightarrow \mathbf{Set}$  dany wzorem  $G_F(X) = \lim_{\mathbf{Cat}C} \text{Mor}_{\mathbf{Cat}} C(X, F(-))$  ( $\lim$  w kategorii  $\mathbf{S}$ ) a morfizmy strukturalne odpowiadają elementowi  $\text{id} \in G_F(C)$ .

**Wniosek 1.5.1.** Granica i kogranica diagramu, o ile istnieje, to tylko jedna z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód. ZADANIE. □

**Definicja 1.5.6.** Niech w kategorii  $C$  będą dane poniższe diagramy morfizmów oznaczonych litymi strzałkami.

Kogranicę diagramu morfizmów, oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} X_{12} & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow \bar{f}_2 \\ X_2 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & X_1 \sqcup_{X_{12}} X_2 \end{array}$$

nazywa się koproduktem kowłóknistym (inaczej push-out).

Granicę diagramu morfizmów, oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times_{X_{12}} X_2 & \xrightarrow{\bar{f}_2} & X_1 \\ \downarrow \bar{f}_1 & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_{12} \end{array}$$

nazywa się produktem włóknistym (inaczej pull-back).

**Zadanie 22.** Sprawdź, że powyższa definicja produktu włóknistego jest równoważna następującej: Produktem włóknistym morfizmów  $X \xrightarrow{f} T$  oraz  $Y \xrightarrow{g} T$  nazywamy obiekt  $Z$  wraz z morfizmami  $Z \xrightarrow{p_X} X$  i  $Z \xrightarrow{p_Y} Y$ , dla których przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_X} & X \\ p_Y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

i który spełnia następujący warunek uniwersalności: dla każdego obiektu  $W$  i morfizmów  $W \xrightarrow{h} X$  i  $W \xrightarrow{k} Y$  takich, że  $f \circ h = g \circ k$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $W \xrightarrow{r} Z$ , taki że  $p_X \circ r = h$  i  $p_Y \circ r = k$ .

**Zadanie 23.** Zbadać istnienie granic i kogranic w znanych kategoriach.

**Definicja 1.5.7.** Granicę diagramu modelowanego na kategorii  $0 \rightrightarrows 1$  (czyli dwóch morfizmów między tymi samymi obiektami) nazywamy ekwalizatorem tych morfizmów (także jądrem różnicowym) i oznaczamy  $\text{Eq}$ , a kogranicę ich koekwalizatorem (także kojąderem różnicowym) i oznaczamy  $\text{Coeq}$ .

*Przykład 1.5.2.* Niech  $f, g: V \rightrightarrows W$  będą dwoma odwzorowaniami liniowymi. Wtedy  $\text{Eq}(f, g) = \ker(f - g)$  a  $\text{Coeq}(f, g) = \text{coker}(f - g)$ . W szczególności jeśli  $g = 0$ , to jądro różnicowe jest po prostu jądrem przekształcenia  $f$ , a kojądro różnicowe, jego kojądrem.

**Zadanie 24.** Opisz ekwalizator i koekwalizator dowolnej pary morfizmów w kategorii zbiorów i innych znanych kategoriach (zbadaj istnienie).

**Stwierdzenie 1.5.2.** *Jeśli w kategorii  $\mathcal{C}$  istnieją ekwalizatory dla dowolnej pary morfizmów (odp. koekwalizatory) oraz produkty (odp. koprodukty) dowolnej (skończonej) rodziny obiektów, to istnieją w niej granice (odp. kogranice) dowolnych (skończonych) diagramów.*

Dowód. ZADANIE. □

**Stwierdzenie 1.5.3.** *Funktor dołączony z lewej (prawej) strony zachowuje kogranice (granice) diagramów. Tzn. jeśli functor  $G : \mathbf{Cat}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}\mathcal{D}$  jest lewo dołączony do pewnego funktora, to dla dowolnego diagramu  $F : \mathbf{Cat}\mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Cat}\mathcal{C}$  to naturalny morfizm  $\text{colim}_{\mathbf{Cat}\mathcal{C}}(G \circ F) \rightarrow G(\text{colim}_{\mathbf{Cat}\mathcal{C}} F)$  jest izomorfizmem.*

Dowód. ZADANIE. □

## 1.6 Kategorie morfizmów

Dla dowolnej kategorii  $\mathcal{C}$  można rozważać kategorię jej morfizmów  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  której obiektami są morfizmy w  $\mathcal{C}$  a morfizmami między dowolnymi dwoma obiektami  $f : X \rightarrow Y$  i  $f' : X' \rightarrow Y'$  (czyli morfizmami w  $\mathcal{C}$ ) są przemienne diagramy morfizmów w  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

czyli pary morfizmów  $(\bar{h}, h)$  w  $\mathcal{C}$ , dla których powyższy diagram jest przemienne.

**Definicja 1.6.1.** *Mówimy, że morfizm  $f : X \rightarrow Y$  jest ortogonalny z lewej strony do  $f' : X' \rightarrow Y'$  jeśli dla każdego morfizmu (diagramu) między nimi istnieje przekątna  $Y \rightarrow X'$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \\ f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

Odpowiednio mówimy, że  $f'$  jest ortogonalny do  $f$  z prawej strony. Jeśli  $\mathcal{M} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  jest klasą obiektów w  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  (tzn. morfizmów w  $\mathcal{C}$ ), to klasę morfizmów do nich ortogonalnych z prawej strony oznaczamy  $\mathcal{M}^\perp$ , a z ortogonalnych z lewej strony  ${}^\perp\mathcal{M}$ .

Zauważmy, że w dowolnej kategorii  $\mathcal{C}$  można mówić o retraktach:

**Definicja 1.6.2.** *Obiekt  $c$  jest retraktem obiektu  $d$  jeśli istnieją morfizmy  $c \rightarrow d \rightarrow c$  których złożenie jest identycznością  $\text{id}_c$ . Morfizm  $d \rightarrow c$  nazywamy retrakcją.*

**Lemat 1.6.1.** *Dla dowolnej klasy morfizmów  $\mathcal{M}$  klasy morfizmów ortogonalnych  ${}^\perp\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}^\perp$  są zamknięte ze względu na retrakcje w kategorii  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ .*

Dla ustalonego obiektu  $A$  możemy rozważać pełną podkategorię  $\mathcal{C}_A$  kategorii morfizmów, której obiektami są morfizmy o wartościach w  $A$ , a morfizmami diagramy w których dolna strzałka jest identycznością. Morfizmy możemy więc utożsamić z trójkątami przemiennymi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & g \searrow & \swarrow h \\ & & A \end{array}$$

Dualnie rozważa się kategorię morfizmów wychodzących z  $A$ , oznaczaną  $\mathcal{C}^A$ , której obiektami są morfizmy  $A \xrightarrow{f} X$  a morfizmami są także diagramy przemienne:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Kategorię  $\mathcal{C}_A$  nazywa się kategorią obiektów *nad*  $A$ , a kategorię  $\mathcal{C}^A$  nazywa się kategorią obiektów *pod*  $A$ .

**Zadanie 25.** Produkt włóknisty morfizmów  $X \xrightarrow{f} T$  oraz  $Y \xrightarrow{g} T$  w kategorii  $\mathcal{C}$  jest izomorficzny z ich produktem w kategorii  $\mathcal{C}_T$ . Odpowiednio koprodukt kowłóknisty morfizmów  $S \xrightarrow{f} X$  oraz  $S \xrightarrow{g} Y$  w kategorii  $\mathcal{C}$  jest izomorficzny z ich koproduktem w kategorii  $\mathcal{C}^S$ .

**Zadanie 26.** Zbadać istnienie produktów włóknistych i koproduktów kowłóknistych w znanych kategoriach.

## 1.7 Struktury algebraiczne w kategoriach

Pokażemy, że o strukturach algebraicznych takich jak monoid i grupa można mówić w dowolnej kategorii. Niech  $\mathcal{M}$  oznacza kategorię łącznych monoidów z jednością, a  $\mathcal{G}$  kategorię grup (grupa to monoid posiadający odwrotność). Zauważmy, że monoid można utożsamiać z kategorią posiadającą jeden obiekt, a grupę z takim monoidem w którym wszystkie morfizmy są odwracalne. Istnieją oczywiste funktory zapominania  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{Z} \mathcal{S}$ .

**Definicja 1.7.1.** *Strukturą grupową (odp. kogrupową) na obiekcie  $Y \in \text{ob } \mathcal{C}$  nazywamy podniesienie funktora kontrawariantnego reprezentowanego przez obiekt  $Y$ ,  $R^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $R^Y(X) := \text{Mor}(X, Y)$  (odp.  $R_X$ ) do kategorii grup i ich homomorfizmów  $\mathcal{M}$  tzn. funktor  $\tilde{R}^Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$  taki, że diagram*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \tilde{R}^Y \nearrow & & \downarrow Z \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{R^Y} & \mathcal{S} \end{array}$$

w którym  $Z : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$  jest funktorem zapominania o strukturze grupy, jest przemienny. Jeśli kategoria grup  $\mathcal{G}$  jest zastąpiona kategorią monoidów  $\mathcal{M}$ , to mówimy o strukturze monoidalnej (odp. komonoidalnej) na obiekcie  $X$ .

Działanie grupowe w zbiorze  $G$  definiuje strukturę grupową na tym zbiorze jako obiekcie kategorii: dla dowolnego zbioru  $X$ , zbiór przekształceń  $\text{Mor}_{\mathcal{S}}(X, G)$  jest oczywiście grupą, a przekształcenia zbiorów  $X \rightarrow Y$  indukują homomorfizmy grup. Natomiast w kategorii zbiorów nie ma obiektów kogrupowych, stąd ich mniejsza popularność, choć z kategoryjnego punktu widzenia definicje są symetryczne. Obiekt grupowy w kategorii  $\mathcal{C}$  staje się obiektem kogrupowym w kategorii  $\mathcal{C}^{op}$  i odwrotnie. Obiekty ko-grupowe odgrywają ważną rolę w teorii homotopii i w teorii algebr Hopfa. Konstrukcje obiektów grupowych i kogrupowych w kategorii homotopii przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem opiszemy w następnym rozdziale.

**Zadanie 27.** Załóżmy, że na obiektach  $X, Y \in \mathcal{C}$  zadane są struktury monoidu. Kiedy morfizm  $f : X \rightarrow Y$  nazwiemy homomorfizmem tych struktur?



**Zadanie 28.** Zbadać związek definicji grupy (topologicznej) z pojęciem obiektu grupowego w kategorii zbiorów (przestrzeni topologicznych) i kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem (przestrzeni z wyróżnionym punktem). Zbadać istnienie struktur ko-monoidu w tych kategoriach.

Jeśli w kategorii istnieją produkty oraz obiekt końcowy, to definicję struktury grupowej na  $X$  można wyrazić równoważnie w postaci bliższej tradycyjnej definicji grupy.

**Zadanie 29.** Zakładamy, że w kategorii  $\mathcal{C}$  istnieją produkty dowolnych obiektów oraz obiekt końcowy  $P$ . Pokazać, że struktury grupowe na  $X$  są w bijekcji z trójkami morfizmów w  $\mathcal{C}$ :

1.  $\mu : X \times X \rightarrow X$  (działanie grupowe),
2.  $^{-1} : X \rightarrow X$  (branie elementu odwrotnego),
3.  $e : P \rightarrow X$  (jedynka).

które spełniają odpowiednie warunki (te warunki proszę wypisać samodzielnie - to nic innego jak aksjomaty grupy napisane przy pomocy przemiennej diagramów). Wykazać analogiczne stwierdzenie dla obiektów kogrupowych.

**Zadanie 30.** Zdefiniować działanie obiektu grupowego na obiekcie w kategorii oraz dualnie kodziałanie obiektu kogrupowego na obiekcie, tak żeby definicja działania w przypadku kategorii zbiorów i przestrzeni topologicznych pokrywała się z dobrze znaną.

**Stwierdzenie 1.7.1.** Załóżmy, że morfizm  $\nu : X \rightarrow X \sqcup X$  zdaje strukturę kogrupową, zaś  $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$  zadaje strukturę grupową w kategorii  $\mathcal{C}$  posiadającej obiekt początkowy  $P$ , będący jednocześnie obiektem końcowym. Wtedy działania wyznaczone w  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  przez  $\nu$  i przez  $\mu$  pokrywają się i działanie jest przemienne.

*Dowód.* Pokrywanie się obu działań i przemienność działania grupowego wynika z następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\nu} & X \sqcup X & \xrightarrow{f \sqcup g} & Y \sqcup Y & & \\
 \downarrow \delta & \searrow \delta & \downarrow j_X & & \downarrow j_Y & \searrow id \sqcup id & \\
 X \times X & \xrightarrow{T} & X \times X & \xrightarrow{f \times g} & Y \times Y & \xrightarrow{\mu} & Y
 \end{array}$$

w którym  $e_X$  jest złożeniem  $X \rightarrow P \rightarrow X$ ,  $j_X := (id_X, e_X) \sqcup (e_X, id_X)$  (odpowiednio  $e_Y$  i  $j_Y$ ),  $\delta := (id, id)$  a  $T := p_2 \times p_1$  jest zamianą współrzędnych.  $\square$

## 1.8 Kategorie przestrzeni topologicznych

Centralną rolę w naszych rozważaniach będzie odgrywała kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych  $\mathcal{T}$  oraz kategorie z niej otrzymane przez rozmaite konstrukcje. Opiszemy bardziej szczegółowo kilka z nich:

### Kategoria par przestrzeni topologicznych $\mathcal{T}_2$

Jest to podkategoria w kategorii morfizmów  $\text{Mor}(\mathcal{T})$  składająca się z morfizmów (czyli przekształceń ciągłych) będących włożeniami podprzestrzeni w przestrzeń  $A \subset X$ . Morfizmami są przemienne

diagramy:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\
 \downarrow c & & \downarrow c \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} \tag{1.4}$$

a więc przekształcenia  $f: X \rightarrow Y$  takie, że  $f(A) \subset B$ . Morfizmy w kategorii par przestrzeni zapisujemy  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

### Kategoria przestrzeni i par przestrzeni z wyróżnionym punktem $\mathcal{T}_*$ .

Podkategorią kategorii par jest kategoria przestrzeni z wyróżnionym punktem: rozpatrujemy pary  $(X, A)$  takie, że  $A = \{x_0\}$  jest zbiorem jednopunktowym. Obiektami w  $\mathcal{T}_*$  są więc pary  $(X, x_0)$  gdzie  $X$  jest przestrzenią, a  $x_0 \in X$ ; morfizmami z  $(X, x_0)$  do  $(Y, y_0)$  przekształcenia  $f: X \rightarrow Y$  takie, że  $f(x_0) = y_0$ , które oznaczamy  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

Zauważmy, że kategorię  $\mathcal{T}_*$  możemy utożsamiać z kategorią morfizmów określonych na zbiorze jednopunktowym  $\{pt\} \rightarrow X$ .

**Zadanie 31.** Zdefiniować kategorię par przestrzeni z wyróżnionym punktem  $\mathcal{T}_{2*}$ .

### Kategoria $\mathcal{T}^A$ - przestrzeni "pod $A$ "

Dla ustalonej przestrzeni  $A$  rozważamy pełną podkategorię  $\mathcal{T}^A$  kategorii przekształceń  $\text{Mor}(\mathcal{T})$ , której obiektami są przekształcenia  $A \xrightarrow{f} X$  a morfizmami są diagramy przemienne:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 i \swarrow & & \searrow j \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

### Kategoria $\mathcal{T}_B$ - przestrzeni "nad $B$ "

Dla ustalonej przestrzeni  $B$  rozważamy pełną podkategorię  $\mathcal{T}_B$  kategorii przekształceń  $\text{Mor}(\mathcal{T})$ , której obiektami są morfizmy o wartościach w  $B$ , a morfizmami przemienne trójkąty przekształceń

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g \searrow & & \swarrow h \\
 & B &
 \end{array}$$

### Kategorie homotopii

Z każdą z powyższych kategorii można związać jej kategorię homotopii. Zaczniemy od podstawowej definicji kategorii homotopii przestrzeni topologicznych  $\mathcal{T}_h$ .

**Definicja 1.8.1.** Homotopią nazywamy dowolne przekształcenie ciągłe  $F: X \times I \rightarrow Y$ , gdzie  $I = [0, 1]$  jest odcinkiem euklidesowym. Przekształcenia  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  nazywamy homotopijnymi jeśli istnieje homotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  taka, że dla każdego  $x \in X$  zachodzą równości  $F(x, 0) = f_0(x)$ ,  $F(x, 1) = f_1(x)$  i oznaczamy  $f_0 \sim f_1$  lub jeśli chcemy pamiętać jaka homotopia je łączy  $f_0 \sim_F f_1$ .

**Stwierdzenie 1.8.1.** *Homotopia  $\sim$  jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń  $\text{Map}(X, Y)$ .*

*Dowód.* Sprawdzimy trzy warunki, które musi spełniać relacja równoważności:

*Zwrotność.* Każde przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  jest homotopijne ze sobą przez homotopię stałą:  $F: X \times I \rightarrow Y$ ,  $F(x, t) := f(x)$ .

*Symetria.* Jeśli  $F: X \times I \rightarrow Y$  jest homotopią między  $f_0$  i  $f_1$ , to  $F': X \times I \rightarrow Y$ ,  $F'(x, t) := F(x, 1 - t)$  jest homotopią między  $f_1$  i  $f_0$ .

*Przechodniość.* Jeśli  $F: X \times I \rightarrow Y$  jest homotopią między  $f_0$  i  $f_1$  a  $G: X \times I \rightarrow Y$  jest homotopią między  $f_1$  i  $f_2$  to  $H: X \times I \rightarrow Y$  zdefiniowane przez  $F$  na dolnej połowie walca i przez  $G$  na górnej połowie:

$$H(x, t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

jest homotopią między  $f_0$  a  $f_2$ . □

*Uwaga 1.8.1.* Zdefiniowaną wyżej homotopię  $H$  będziemy nazywać *konkatenacją* lub złożeniem homotopii  $F$  i  $G$ .

Zbiór klas homotopii oznaczamy  $[X, Y] := \text{Map}(X, Y) / \sim$ . Zauważmy, że  $[\{p\}, X] =: \pi_0(X)$ , gdzie  $\{p\}$  – przestrzeń jednopunktowa, jest zbiorem składowych łukowych przestrzeni  $X$ . Składanie przekształceń zachowuje relację homotopii:

**Stwierdzenie 1.8.2.** *Jeśli  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  oraz  $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$  oraz  $f_0 \sim f_1$  i  $g_0 \sim g_1$ , to ich złożenia są homotopijne:  $g_0 f_0 \sim g_1 f_1$*

*Dowód.* Skonstruujemy homotopie  $g_0 f_0 \sim g_0 f_1 \sim g_1 f_1$  i skorzystamy z przechodniości relacji homotopii. Niech  $F: X \times I \rightarrow Y$  będzie homotopią między  $f_0$  i  $f_1$  a  $G: Y \times I \rightarrow Z$  homotopią między  $g_0$  i  $g_1$ . Wtedy złożenie  $X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g_0} Z$  jest homotopią  $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$  a złożenie  $X \times I \xrightarrow{f_1 \times \text{id}} Y \times I \xrightarrow{G} Z$  jest homotopią  $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ . □

**Definicja 1.8.2.** *Obiektami kategorii homotopii przestrzeni topologicznych  $\mathcal{T}_h$  są przestrzenie topologiczne, a dla dowolnych dwóch przestrzeni  $X, Y$  morfizmy między nimi to klasy homotopii przekształceń, czyli  $\text{Mor}_{\mathcal{T}_h}(X, Y) = [X, Y]$*

W dalszych rozważaniach ważną rolę będą odgrywały funktory reprezentowane przez obiekty tej kategorii:  $R^Y(X) = [X, Y]$  i  $R_X(Y) = [X, Y]$ .

Zauważmy, że homotopię  $F: X \times I \rightarrow Y$  można traktować jako rodzinę przekształceń (morfizmów w  $\mathcal{T}$ ) parametryzowaną punktami odcinka:  $f_t(x) = F(x, t)$ . Ta obserwacja pozwala w uniwersalny sposób zdefiniować kategorie homotopii dla omówionych wyżej kategorii pochodzących od przestrzeni topologicznych. Morfizmy w kategoriach  $\mathcal{T}_2$ ,  $\mathcal{T}_*$ ,  $\mathcal{T}^A$ ,  $\mathcal{T}_B$  to odwzorowania odpowiednich przestrzeni spełniające dodatkowe warunki. Ich homotopią będziemy nazywać taką homotopię  $F: X \times I \rightarrow Y$ , że każde z przekształceń  $f_t$  spełnia te warunki. Homotopie w kategorii  $\mathcal{T}_2$  nazywa się homotopią par, homotopię w kategorii  $\mathcal{T}_*$  – homotopią punktowaną, w kategorii  $\mathcal{T}^A$  nazywa się *homotopią relatywną*  $\text{rel}(A)$ , a w kategorii  $\mathcal{T}_B$  *homotopią nad  $B$*  lub homotopią włóknistą.

## Retrakcje

Jak już zauważyliśmy, pojęcie retrakcji można zdefiniować w dowolnej kategorii  $\mathcal{C}$ . *Retrakcją* morfizmu  $A \xrightarrow{f} X$  nazwiemy morfizm  $X \xrightarrow{r} A$  taki, że złożenie  $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{r} A$  jest identycznością. Rozważymy warianty tego pojęcia w zdefiniowanych wyżej kategoriach pochodzących od przestrzeni topologicznych.

**Zadanie 32.** Jeśli morfizm w kategorii przestrzeni topologicznych  $f: A \rightarrow X$  posiada retrakcję, to  $f$  jest zanurzeniem homeomorficznym  $A$  w  $X$ . Jeśli  $X$  jest przestrzenią Hausdorffa, to podzbiór  $f(A) \subset X$  jest domknięty.

W dalszym ciągu ograniczamy się więc do włożeń podzbiorów.

**Definicja 1.8.3.** Niech  $A \subseteq X$  będzie podprzestrzenią w  $X$  a  $i_A : A \hookrightarrow X$  oznacza włożenie.

1. Przekształcenie  $r : X \rightarrow A$  nazywa się retrakcją  $X$  na  $A$ , jeżeli  $r \circ i_A = id_A$ . Podzbiór  $A$  nazywa się retraktem  $X$ .
2. Retrakcja  $r : X \rightarrow A$  nazywa się retrakcją deformacyjną, jeżeli złożenie  $i_A \circ r$  jest homotopijne z  $id_X$ ; podzbiór  $A \subseteq X$  nazywa się wtedy retraktem deformacyjnym  $X$ .
3. Retrakcja  $r : X \rightarrow A$  nazywa się silną retrakcją deformacyjną, jeżeli złożenie  $i_A \circ r$  jest homotopijne z  $id_X$  względem  $A$  tzn. istnieje homotopia  $H : i_A \circ r \sim id_X$  taka, że  $H(a, t) = a$  dla dowolnych  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Podzbiór  $A \subseteq X$  nazywa się wtedy silnym retraktem deformacyjnym przestrzeni  $X$ .

**Zadanie 33.** Zinterpretować te definicje w języku kategorii  $\mathcal{T}^A$ .

## 1.9 Grupoid podstawowy przestrzeni topologicznej

Ważnym narzędziem badania własności przestrzeni topologicznej jest analiza klas homotopii dróg w tej przestrzeni. Zdefiniujemy i omówimy własności tzw. grupoidu podstawowego przestrzeni topologicznej. Zanim go zdefiniujemy wprowadzimy abstrakcyjną definicję grupoidu i podamy kilka łatwych własności.

**Definicja 1.9.1.** Grupoidem nazywamy małą kategorię w której wszystkie morfizmy są izomorfizmami.

Grupoidy i funktory między nimi tworzą pełną podkategorię kategorii małych kategorii.

**Definicja 1.9.2.** Składową spójną obiektu małej kategorii  $c \in \mathcal{C}$  nazywamy pełną podkategorię, składającą się z obiektów  $c'$  które dają się połączyć łańcuchem morfizmów z obiektem  $c$  tzn. istnieje morfizmy  $c \leftarrow c_1 \rightarrow c_2 \leftarrow \dots \rightarrow c'$ . Kategorię nazywamy spójną jeśli składowa spójna jest równa całej kategorii.

**Stwierdzenie 1.9.1.** Jeśli  $\mathcal{G}$  jest spójnym grupoidem, to jest on równoważny z kategorią wyznaczoną przez grupę  $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(c, c)$ . Dowolny grupoid jest równoważny sumie prostej (w kategorii małych kategorii  $\text{Cat}$ ) kategorii definiowanych przez grupy.

**Stwierdzenie 1.9.2.** Jeśli  $\mathcal{G}$  jest grupoidem to przyporządkowanie  $\mathcal{G} \ni c \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{G}}(c, c)$  oraz dowolnemu morfizmowi  $f : c_1 \rightarrow c_2$  odwzorowania  $f_*(\alpha) := f\alpha f^{-1}$  określa funktor z  $\mathcal{G}$  do kategorii grup.

W grupoidzie podstawowym przestrzeni topologicznej obiektami będą jej punkty a morfizmami klasy homotopii dróg je łączących. Przypomnimy podstawowe definicje.

**Definicja 1.9.3.** Drogą  $\omega$  w przestrzeni topologicznej  $X$  nazywamy przekształcenie  $\omega : I \rightarrow X$ , gdzie  $I := [0, 1]$  jest odcinkiem jednostkowym. Droga  $\omega$  ma początek  $\text{org}(\omega) := \omega(0)$  i koniec  $\text{end}(\omega) := \omega(1)$ .

Dla drogi  $\omega$  definiujemy drogę odwrotną  $\omega^{-1} : \omega^{-1}(t) := \omega(1-t)$ . Zauważmy, że  $\text{org}(\omega^{-1}) = \text{end}(\omega)$  oraz  $(\omega^{-1})^{-1} = \omega$ .

Drogą stałą zaczepioną w punkcie  $x$  i oznaczaną  $\omega_x$  nazywa się przekształcenie stałe  $\omega_x(t) = x$  dla każdego  $t \in I$ .

Drogę dla której  $\text{org}(\omega) = \text{end}(\omega) = x$  nazywa się drogą zamkniętą lub pętlą zaczepioną w punkcie  $x$ .

Zauważmy, że drogę można traktować jako homotopię między dwoma włożeniami zbioru jednopunktowego: na początek i na koniec drogi. Z drugiej strony homotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  to rodzina dróg parametryzowanych punktami przestrzeni  $X$ .

Zbiór wszystkich dróg w  $X$  oznaczajmy symbolem  $P(X)$ .<sup>2</sup> Podzbiór dróg o początku w punkcie  $x \in X$  i końcu w punkcie  $y \in X$  oznaczajmy symbolem  $P(X; x, y)$ . Mamy więc  $P(X) = \bigcup_{(x,y) \in X \times X} P(X; x, y)$ .

W zbiorze  $P(X)$  zdefiniowane jest działanie składania (konkatenacji) dróg, jeśli koniec pierwszej drogi pokrywa się z końcem drugiej. Formalnie, rozważmy pull-back diagram:

$$\begin{array}{ccc} P(X) \times_X P(X) & \longrightarrow & P(X) \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ P(X) & \xrightarrow{p_1} & X \end{array}$$

czyli  $P(X) \times_Y P(X) = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1(1) = \omega_2(0)\} \subset P(X) \times P(X)$ .

**Definicja 1.9.4.** Definiujemy składanie dróg  $*$ :  $P(Y) \times_Y P(Y) \rightarrow P(Y)$  zdefiniowane jest składanie dróg:

$$(\omega_1 * \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Przypisanie przestrzeni topologicznej  $X$  zbioru dróg  $P(X)$  wraz z działaniem składania można rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że dowolne przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  definiuje przekształcenie zbiorów  $f_{\#}: P(X) \rightarrow P(Y)$  polegające na "przeciąganiu" dróg:  $f_{\#}(\omega) := f \circ \omega$ . Przeciąganie dróg przez przekształcenie zachowuje składanie -  $f_{\#}(\omega \star \eta) = f_{\#}(\omega) \star f_{\#}(\eta)$ . Ponadto przyporządkowanie przekształceniu odwzorowania zbiorów dróg spełnia zależność:  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$  oraz  $id_{\#} = id$ .

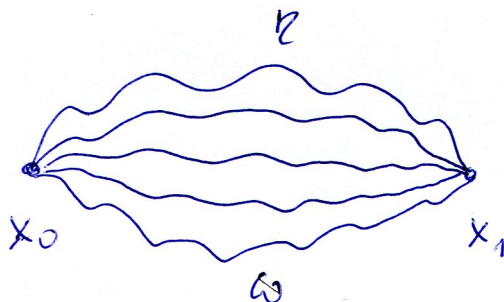
Działanie  $\star$  na zbiorze  $P(X)$ , choć jest naturalne, niestety nie ma dobrych własności algebraicznych - nie jest łączne, pętle stałe nie są elementami neutralnymi a droga odwrotna nie jest odwrotnością. Sytuacja zmienia się drastycznie jeśli podzielimy zbiór  $P(X)$  przez relację równoważności zwaną homotopią.

**Definicja 1.9.5.** Homotopią między drogami  $\omega, \eta: I \rightarrow X$  o wspólnym początku  $x_0$  i końcu  $x_1$  nazywamy przekształcenie  $F: I \times I \rightarrow X$  takie, że dla każdego  $t, s \in I$

$$F(t, 0) = \omega(t), \quad F(0, s) = x_0, \quad F(t, 1) = \eta(t), \quad F(1, s) = x_1$$

Mówimy, że drogi  $\omega$  i  $\eta$  są homotopijne, co oznaczamy  $\omega \sim \eta$  jeżeli istnieje między nimi homotopia, lub  $\omega \sim_F \eta$  jeżeli chcemy pamiętać o ustalonej homotopii.

<sup>2</sup>W następnym rozdziale zdefiniujemy topologię w tym zbiorze.

Rys Homotopia między drogami  $\omega$  i  $\eta$ .**Zadanie 34.**

1. Dowlone dwie drogi leżące w podzbiorze wypukłym w  $\mathbb{R}^n$  są homotopijne.
2. Jeżeli dwie drogi leżące w podzbiorze otwartym  $\mathbb{R}^n$  są dostatecznie bliskie (w metryce sup), to są homotopijne.
3. Dowlona droga podzbiorze otwartym  $\mathbb{R}^n$  jest homotopijna z drogą kawałkami liniowa oraz z drogą gładką.

**Stwierdzenie 1.9.3.** *Homotopia dróg jest relacją równoważności w zbiorze  $P(X)$ .*

*Dowód.* p. Stw. 1.8.1. □

Klasę abstrakcji drogi  $\omega$  oznaczamy symbolem  $[\omega]$ , a zbiór klas homotopii dróg w  $X$  łączących punkt  $x$  z punktem  $y$  oznaczamy  $\pi(X; x, y)$ .

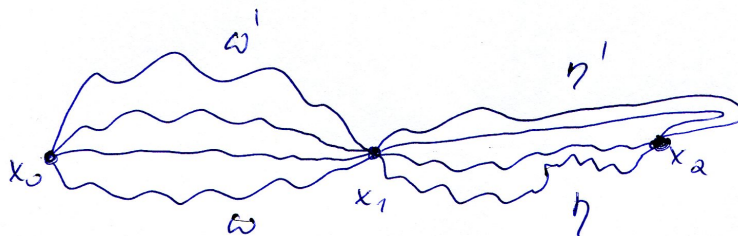
Zbiór klasy równoważności tej relacji będziemy oznaczać  $\Pi(X)$ . Podobnie jak poprzednio zbiór klas homotopii dróg o początku w punkcie  $x \in X$  i końcu w punkcie  $y \in X$  oznaczamy symbolem  $\pi(X; x, y)$  i mamy

$$\Pi(X) = \bigcup_{(x,y) \in X \times X} \pi(X; x, y).$$

Zauważmy, że relacja homotopii zachowuje składanie dróg, to znaczy prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

**Stwierdzenie 1.9.4.** *Jeżeli  $\omega, \omega' \in P(X; x, y)$ ,  $\eta, \eta' \in P(X; y, z)$  oraz  $\omega \sim \omega'$  i  $\eta \sim \eta'$ , to  $\omega \star \eta \sim \omega' \star \eta'$ .*

*Dowód.* Niech  $F$  będzie homotopią między  $\omega$  a  $\eta$ , zaś  $H$  homotopią między  $\omega'$  a  $\eta'$ . Wówczas szukana homotopia między odpowiednimi złożeniami jest dana wzorem  $K(t, s) = (F(\cdot, s) \star H(\cdot, s))(t)$ . □



Rys. Homotopia i składanie dróg.

Możemy zatem zdefiniować składanie klas homotopii dróg, które będziemy oznaczać tym samym symbolem  $\star$  i ma ono następujące własności.

**Stwierdzenie 1.9.5.** *W zbiorze  $\Pi(X)$  składanie klas homotopii dróg*

$$\star : \pi(X; x, y) \times \pi(X; y, z) \rightarrow \pi(X; x, z)$$

*zdefiniowane dla dowolnych punktów  $x, y, z \in X$  ma następujące własności:*

1. *Dla każdej klasy homotopii dróg  $[\omega] \in \pi(X; x, y)$  zachodzą równości:*

$$[\omega] \star [\omega_y] = [\omega], \quad [\omega_x] \star [\omega] = [\omega], \quad [\omega] \star [\omega^{-1}] = [\omega_x], \quad [\omega^{-1}] \star [\omega] = [\omega_y].$$

2. *Dla dowolnych  $[\omega] \in \pi(X; x, y)$ ,  $[\eta] \in \pi(X; y, z)$ ,  $[\zeta] \in \pi(X; z, u)$  zachodzi równość:*

$$([\omega] \star [\eta]) \star [\zeta] = [\omega] \star ([\eta] \star [\zeta]).$$

*Dowód.* a) Udowodnijmy na przykład, że  $[\omega] \star [\omega^{-1}] = [\omega_x]$ . Zanim wypiszemy wzór na homotopię (a takich możliwych homotopii jest oczywiście bardzo wiele) wyobraźmy sobie jak ona wygląda. Dla  $s = 0$  przebiegamy drogę  $\omega$  tam i z powrotem, zaś dla  $s = 1$  "stoimy w miejscu" - zatem jeżeli dla dowolnego  $s$  dojdziemy do punktu  $\omega(1 - s)$  i zawrócimy, to powinniśmy otrzymać szukaną ciągłą rodzinę dróg, czyli homotopię. Jeżeli zapiszemy to wzorem, to otrzymamy:

$$H(t, s) = \begin{cases} \omega(2(1 - s)t) & \text{dla } t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2(s - 1)t + 2(1 - s)) & \text{dla } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b) Żeby udowodnić łączność musimy po prostu zmienić "tempo" przebiegania całej drogi od  $x$  przez  $y$  do  $z$ . Szukany wzór jest następujący:

$$H(t, s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{4}{s+1}t\right) & \text{dla } t \leq \frac{s+1}{4} \\ \eta(4t - (s + 1)) & \text{dla } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \zeta\left(\frac{4}{2-s}t + \frac{2+s}{4}\right) & \text{dla } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

**Definicja 1.9.6.** *Zbiorem obiektów grupoidu podstawowego przestrzeni  $X$ , oznaczanego  $\Pi(X)$ , są punkty przestrzeni  $X$  a morfizmami między punktami  $x, y$  zbiory klas homotopii dróg je łączących  $\pi(X; x, y)$ . Składanie morfizmów jest zdefiniowane przez składanie dróg.*

*Uwaga 1.9.1.* Ponieważ konwencja zapisu kolejności składania dróg jest odwrotna od zapisu kolejności składania przekształceń, więc w celu osiągnięcia kompatybilności grupoid podstawowy definiuje się często jako kategorię  $\Pi(X)^{op}$ . My jednak pozostaniemy przy naturalnej definicji przy której morfizm prowadzi od początku do końca drogi. Zato pewne funktory będą kontrawariantne, a nie kowariantne.

**Definicja 1.9.7.** *Grupą podstawową przestrzeni  $X$  z wyróżnionym punktem  $x \in X$  nazywamy grupę  $\pi_1(X, x) := \pi(X; x, x)$  klas homotopii pętli zaczepionych w punkcie  $x \in X$  z działaniem składania pętli. Przestrzeń nazywa się jednospójna jeżeli jest łukowo spójna i jej grupa podstawowa jest trywialna.*

Zauważmy, że pętle zaczepione w  $x$  można także traktować jako punktowane odwzorowania  $(S^1, 1) \rightarrow (X, x)$  a homotopia dróg odpowiada homotopii punktowanej. Zatem  $\pi_1(X, x) = [S^1, X]_*$ . Stw. 1.9.2 zastosowane do grupoidu podstawowego daje nam:

**Wniosek 1.9.1.** *Dowolna droga  $[\eta] \in \pi(X; , x, y)$  definiuje izomorfizm*

$$h_{[\eta]} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) \quad h_{[\eta]}([\omega]) = [\eta^{-1}] \star [\omega] \star [\eta].$$

*a przyporządkowanie  $\Pi(X) \ni x \mapsto \pi_1(X, x) \in \mathcal{Gr}$  jest funktorem określonym na grupoidzie podstawowym o wartościach w kategorii grup.*

*Dowód.* To jest szczególny przypadek Stw. 1.9.2. □

Przyporządkowanie przestrzeni grupoidu podstawowego możemy rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że jeżeli  $f : X \rightarrow Y$  jest przekształceniem, to przeciągnięcie dróg  $f_{\#} : P(X) \rightarrow P(Y)$  zachowuje relację homotopii, a więc definiuje przekształcenie  $f_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ . Przekształcenie  $f_{\#}$  zachowuje działanie składania dróg:

$$f_{\#}([\omega] \star [\eta]) = f_{\#}([\omega]) \star f_{\#}([\eta])$$

więc przekształcenie  $f_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  jest funktorem. Homomorfizm indukowany przez identyczność na przestrzeni  $X$  jest identycznością na grupoidzie  $\Pi(X)$ . Dla przekształceń  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow Z$  spełnione są zależności:

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} \quad \text{oraz} \quad id_{\#} = id.$$

**Wniosek 1.9.2.** *Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej jej grupoidu podstawowego a przekształceniu ciągłemu homomorfizmu indukowanego określa funktor z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii małych kategorii.*

W szczególności wynika stąd, że przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  indukuje homomorfizm grup podstawowych  $f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ . Homomorfizm indukowany przez identyczność jest identycznością i dla przekształceń  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $g : Y \rightarrow Z$ , zachodzi równość  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Z, gf(x))$ .



## Rozdział 2

# Przestrzenie przekształceń ciągłych

### 2.1 Generowanie topologii

Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem a  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  dowolną rodziną jego podzbiorów.

**Definicja 2.1.1.** Topologią generowaną przez rodzinę  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  nazywamy najmniejszą topologię w  $X$  zawierającą  $\mathcal{U}$  - czyli przecięcie wszystkich topologii zawierających rodzinę  $\mathcal{U}$ . Oznaczamy ją  $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ .

**Zadanie 35.** Jeśli  $\{\mathcal{T}_s\}_{s \in S}$  jest rodziną topologii w zbiorze  $X$ , to ich przecięcie  $\bigcap_{s \in S} \mathcal{T}_s$  też jest topologią.

Konstrukcja topologii  $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ :

1. Dołączamy do rodziny  $\mathcal{U}$  przecięcia skończenie wielu elementów rodziny  $\mathcal{U}$  definiując rodzinę:

$$\mathcal{U}^\cap := \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid U_i \in \mathcal{U}\}.$$

Rodzina  $\mathcal{U}^\cap$  jest już zamknięta ze względu na branie przecięć skończenie wielu zbiorów tzn. jeśli  $V_1, V_2 \in \mathcal{U}^\cap$  to  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^\cap$ .

2. Do rodziny  $\mathcal{U}^\cap$  dołączamy wszystkie sumy zbiorów należących do  $\mathcal{U}^\cap$  definiując rodzinę:

$$(\mathcal{U}^\cap)^\cup := \left\{ \bigcup_{i \in I} V_i \mid V_i \in \mathcal{U}^\cap \right\}.$$

Rodzina  $(\mathcal{U}^\cap)^\cup$  jest zamknięta ze względu na branie sum zbiorów tzn. dla dowolnej rodziny  $\{W_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{U}^\cap)^\cup$  jej suma  $\bigcup_{j \in J} W_j \in (\mathcal{U}^\cap)^\cup$ .

3.  $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}^\cap)^\cup$

**Zadanie 36.** Sprawdzić, że rodzina  $(\mathcal{U}^\cap)^\cup$  jest zamknięta ze względu na skończone przecięcia.

Dla ułatwienia śledzenia konstrukcji topologii, przestrzenie topologiczne będziemy w tym rozdziale zwykle oznaczać jako pary  $(X, \mathcal{T})$ , gdzie  $X$  jest zbiorem a  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  topologią.

**Stwierdzenie 2.1.1.** Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie dowolną przestrzenią topologiczną,  $Y$  będzie zbiorem oraz  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$  rodziną jego podzbiorów. Przekształcenie  $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$  jest ciągle wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru  $V \in \mathcal{V}$  jego przeciwobraz  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ .  $\square$

**Stwierdzenie 2.1.2.** Rodzina  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  jest bazą topologii  $\mathcal{T}(\mathcal{B})$  generowanej przez rodzinę  $\mathcal{B}$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

1. Rodzina  $\mathcal{B}$  jest pokryciem  $X$ ;
2. Dla dowolnych zbiorów  $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$  oraz punktu  $x \in V_1 \cap V_2$  istnieje zbiór  $V \in \mathcal{B}$  taki, że  $x \in V \subset V_1 \cap V_2$ .

□

## 2.2 Topologia zwarto-otwarta

Niech  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  będą przestrzeniami Hausdorffa. Zbiór przekształceń ciągłych  $\text{Map}(X, Y)$  można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego  $\prod_{x \in X} Y_x$  gdzie dla każdego  $x \in X$ ,  $Y_x = Y$ . Zbiór  $\text{Map}(X, Y)$  można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy  $\mathcal{T}_p$  i nazywamy *topologią zbieżności punktowej*. Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w  $Y$ , a topologia w  $X$  określa jedynie jakie funkcje należą do  $\text{Map}(X, Y)$ . W przestrzeniach przekształceń definiuje się więc subtelniejszą topologię, zwaną topologią zwarto-otwartą, lub topologią zbieżności niemal jednostajnej, która zależy od obu topologii.

**Definicja 2.2.1** (Topologia zwarto – otwarta).  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  – przestrzenie Hausdorffa. Topologią zwarto – otwartą - oznaczaną  $\mathcal{T}_{co}$  - nazywamy topologię w zbiorze  $\text{Map}(X, Y)$  generowaną przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \subset Y \text{ otwarty}\},$$

gdzie  $\langle A, W \rangle := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$ .

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci  $\langle A, W \rangle: \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle$  gdzie  $A_i \subset X$  są podzbiarami zwartymi, a  $W_i \subset Y$  podzbiarami otwartymi.

**Stwierdzenie 2.2.1.** Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii  $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$ , a jeśli  $(X, \mathcal{T})$  jest przestrzenią dyskretną, to  $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$ .

*Dowód.* Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. □

**Wniosek 2.2.1.**  $(\text{Map}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$  jest przestrzenią Hausdorffa.

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teorio-mnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci  $\langle A, W \rangle$ .

**Lemat 2.2.1.** Niech  $X, Y$  będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów  $A \subset X, W \subset Y$   $\langle A, W \rangle := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$ . Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:

$$\begin{aligned} 1) \bigcap_{i \in J} \langle A_i, W \rangle &= \langle \bigcup_{i \in J} A_i, W \rangle & 2) \bigcap_{i \in J} \langle A, W_i \rangle &= \langle A, \bigcap_{i \in J} W_i \rangle \\ 3) \bigcap_{i \in J} \langle A_i, W_i \rangle &\subset \langle \bigcup_{i \in J} A_i, \bigcup_{i \in J} W_i \rangle \end{aligned}$$

*Dowód.* Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto-otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , np. z jej bazy.

**Lemat 2.2.2.** Jeśli topologia  $\mathcal{T}_Y$  jest generowana przez rodzinę  $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_Y$  to rodzina  $\{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$  generuje topologię zwarto-otwartą na  $\text{Map}(X, Y)$ .

*Dowód.* Oczywiście rodzina  $\mathcal{F}_{\text{Map}} := \{\langle A, W \rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$  jest zawarta w rodzinie generującej topologię zwarto – otwartą (Def. 2.2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci  $\langle A, W \rangle$  gdzie  $A \subset X$  jest zwarty, a  $W \subset Y$  jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę  $\mathcal{F}_{\text{Map}}$ .

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór  $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny  $\mathcal{F}$ . Zauważmy najpierw, że jeśli  $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$  gdzie  $W_i \in \mathcal{F}$ , to (p.2.2.1)

$$\langle A, W \rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i \rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli  $W = \bigcup_{s \in S} W_s$  oraz dla każdego zwartego podzbioru  $A \subset X$  oraz każdego  $s \in S$ ,  $\langle A, W_s \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$  to  $\langle A, W \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$ . W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego  $f \in \langle A, W \rangle$  istnieje zbiór taki, że  $f \in \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle \subset \langle A, W \rangle$  gdzie  $A_i \subset X$  są podzbiórmi zwartymi oraz  $\langle A_i, W_i \rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{Map}})$ .

Dla dowolnego punktu  $a \in A$  istnieje  $s(a) \in S$  taki, że  $f(a) \in W_{s(a)}$ , a więc z ciągłości  $f$  wynika, że istnieje otoczenie  $a \in \text{cl}_A(V_a) \subset A$  takie, że  $f(\text{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$ . Zbiory  $\{V_a\}_{a \in A}$  tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego  $A$ , można więc wybrać skończone podpokrycie  $V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n} = A$ . Zdefiniujmy zbiór zwarty  $A_a := \text{cl}_A(V_a)$ . Przecięcie zbiorów  $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i} \rangle$  spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1} \rangle \cap \dots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n} \rangle \subset \left( \bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i} \right) \subset \langle A, W \rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

**Lemat 2.2.3.** Niech  $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s \in S}$  będzie rodziną zwartych zbiorów w  $(X, \mathcal{T}_X)$  z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego  $A \subset X$  i otwartego  $U \supset A$  istnieje skończenie wiele  $C_i \in \mathcal{C}$  spełniających  $A \subset \bigcup_{i=1}^n C_i \subset U$ . Niech  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$  będzie pewną bazą. Wtedy rodzina

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W \rangle \mid C \in \mathcal{C}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w  $\text{Map}(X, Y)$ .

*Dowód.* Na mocy Lematu 2.2.2 wiemy, że  $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(\text{All}, \mathcal{B}))$  gdzie  $\text{All}$  oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych, a baza  $\mathcal{B}$  generuje topologię. Ponieważ  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(\text{All}, \mathcal{B}))$  więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla dowolnego zbioru zwartego  $C \subset X$  oraz zbioru otwartego  $W \in \mathcal{B}$  oraz dowolnego elementu  $f \in \langle C, W \rangle$ , istnieją zbiory zwarte  $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$  oraz otwarte  $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{B}$  takie, że  $f \in \langle A_1, W_1 \rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n \rangle \subset \langle C, W \rangle$ . Rozważmy zbiór otwarty  $U := f^{-1}(W) \supset C$ , z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów  $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$  taka, że  $C \subset \bigcup_{i=1}^n C_{s_i} \subset U$ . Przecięcie zbiorów  $\bigcap_{i=1}^n \langle C_{s_i}, W \rangle$  spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle C_{s_i}, W \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n C_{s_i}, W \rangle \subset \langle C, W \rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni  $\text{Map}(X, Y)$  pochodzące od przekształceń  $X \rightarrow X'$  i  $Y \rightarrow Y'$ .

**Stwierdzenie 2.2.2.** Dla dowolnych przekształceń ciągłych  $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (X', \mathcal{T}_{X'})$  oraz  $g: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ , odwzorowania indukowane:

$$f^*: \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y), f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y') g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej, a więc funktory reprezentowane przez dowolną przestrzeń  $Y$  (odp.  $X$ ),  $R^Y$  (odp.  $R_X$ ) mają wartości w kategorii przestrzeni topologicznych.

*Dowód.* Ciągłość wynika łatwo z teorii-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż  $f^*$  jest ciągłe, wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w  $\text{Map}(X, Y)$  zachodzi:  $(f^*)^{-1}(\langle C, W \rangle) = \langle f(C), W \rangle$ , a więc jest zbiorem otwartym w  $\text{Map}(X', Y)$ . Podobnie  $(g_*)^{-1}(\langle C, W' \rangle) = \langle C, g^{-1}(W') \rangle$  jest zbiorem otwartym w  $\text{Map}(X, Y)$ .  $\square$

*Uwaga 2.2.1.* Jeśli  $Y = Y' = \mathbb{R}^n$ , to zbiór odwzorowań jest przestrzenią liniową i dla dowolnego przekształcenia  $f: X \rightarrow X'$  przekształcenie indukowane  $f^*$  jest liniowe. Jeśli  $Y, Y'$  skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i  $g: Y \rightarrow Y'$  jest odwzorowaniem liniowym, to  $g_*$  też jest liniowe.

Zauważmy, że jeśli przekształcenie  $f$ , o którym mowa w Stw. 2.2.2 jest surjekcją, to  $f^*: \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$  jest injekcją; jeśli  $g$  jest injekcją, to  $g_*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y')$  też jest injekcją. Aby były to zanurzenia homeomorficzne odwzorowania muszą spełniać dodatkowe warunki:

**Stwierdzenie 2.2.3.**

1. Jeśli przekształcenie  $f: X \rightarrow X'$  jest zwarcie-nakrywające tzn. dla dowolnego podzbioru zwartego  $K \subset X'$  istnieje podzbiór zwarty  $C \subset X$  taki, że  $f(C) = K$ , to dla dowolnej przestrzeni  $Y$  przekształcenie  $f^*: \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$  jest zanurzeniem homeomorficznym.
2. Jeśli przekształcenie  $g: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y', \mathcal{T}_{Y'})$  jest zanurzeniem homeomorficznym, to dla dowolnej przestrzeni  $X$  przekształcenie  $g_*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y')$  też jest zanurzeniem homeomorficznym.

*Dowód.* ZADANIE  $\square$

## 2.3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański

**Stwierdzenie 2.3.1.** Rzutowania na współrzędne  $p_i: Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_i$ ,  $i = 1, 2$  zadają homeomorfizm:

$$(p_{1*}, p_{2*}): \text{Map}(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\cong} \text{Map}(X, Y_1) \times \text{Map}(X, Y_2)$$

*Dowód.* Ciągłość odwzorowania  $(p_{1*}, p_{2*})$  wynika z Stw. 2.2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 2.2.2 topologia w  $\text{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$  jest generowana przez zbiory postaci  $\langle C, p_i^{-1}(W_i) \rangle$  gdzie  $i = 1, 2$ ,  $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$ ,  $C \subset X$  – zwarty. Dla  $i = 1$  zachodzi równość zbiorów

$$(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1) \rangle) = \langle C, W_1 \rangle \times \text{Map}(X, Y_2)$$

i podobnie dla  $i = 2$ , a więc obrazy zbiorów generujących topologię w  $\text{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$  generują topologię w produkcie  $\text{Map}(X, Y_1) \times \text{Map}(X, Y_2)$ .  $\square$

**Stwierdzenie 2.3.2.** Włózenia  $\iota_k: X_k \rightarrow X_1 \sqcup X_2$ ,  $k = 1, 2$  definiują homeomorfizm

$$(\iota_1^*, \iota_2^*): \text{Map}(X_1 \sqcup X_2, Y) \rightarrow \text{Map}(X_1, Y) \times \text{Map}(X_2, Y).$$

*Dowód.* Dowód, że przekształcenie  $(\iota_1^*, \iota_2^*)$  jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 2.3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w  $\text{Map}(X_1 \sqcup X_2, Y)$  przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 2.2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór  $C \subset X_1 \sqcup X_2$  jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów  $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$ .  $\square$

Interesujące jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych  $f: X \times Y \rightarrow Z$  jako rodziny przekształceń jednej zmiennej  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) := F(x, y)$  parametryzowane w sposób ciągły przestrzenią  $X$ . O przestrzeni  $Y$  musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

**Definicja 2.3.1.** *Przestrzeń Hausdorffa  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt  $y \in Y$  posiada otoczenie  $V \ni y$  takie, że jego domknięcie  $\text{cl}_Y(V)$  jest zbiorem zwartym.*

*Uwaga 2.3.1.* Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych są zbiorami domkniętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

**Twierdzenie 2.3.1.** *Jeśli  $Y$  jest lokalnie zwarta, to przekształcenie*

$$\text{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

*jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni przekształceń z topologią zwarto-otwartą.*

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni  $\text{Map}(X \times Y, Z)$ .

**Lemat 2.3.1.** *Zbiory postaci  $\langle A \times B, W \rangle$  gdzie  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  są podzbiórami zwartymi, a  $W \subset Z$  jest podzbiorem otwartym generują topologię zwarto-otwartą w  $\text{Map}(X \times Y, Z)$ .*

*Dowód.* Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y: A \subset X, B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 2.2.3. Niech  $X \times Y \supset U \supset C$  będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu  $c \in C$  istnieją zbiory otwarte  $U_c \subset X$ ,  $V_c \subset Y$  takie, że  $U_c \times V_c \subset U$ , a ze zwartości  $C$  można wybrać skończone przykrycie otwarte  $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \dots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$ . Ponieważ  $C$  jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisać pokrycie  $C$  zbiorami domkniętymi  $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$ . Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^n p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru  $C$  produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu  $U \supset C$ .  $\square$

*Dowód Twierdzenia 2.3.1.* Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie  $e$  jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego  $f: X \times Y \rightarrow Z$  przyporządkowane mu przekształcenie  $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$  jest odwzorowaniem ciągłym  $X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ . Zauważmy najpierw, że dla każdego  $x \in X$ ,  $\hat{h}(x) \in \text{Map}(Y, Z)$ , jest to bowiem obcięcie  $h$  do poziomu  $\{x\} \times Y$ . Teraz sprawdzimy ciągłość  $\hat{h}: X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ . Załóżmy, że  $\hat{h}(x) \in \langle C, W \rangle$  co oznacza, że  $h(\{x\} \times C) \subset W$ . Z ciągłości  $h$  wynika, że istnieje zbiór otwarty  $G \supset \{x\} \times C$  taki, że  $h(G) \subset W$ , a ze zwartości  $C$  wynika (p.Lemat o tubie), że istnieje otoczenie  $U \ni x$  takie, że  $U \times C \subset G$ , a więc  $\hat{h}(U) \subset \langle C, W \rangle$ . Zauważmy, że dla poprawnego zdefiniowania przekształcenia  $e$  założenie lokalnej zwartości  $Y$  nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie  $h \rightsquigarrow \hat{h}$  jest oczywiście różnowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli przekształcenie  $\hat{h}: X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$  jest ciągłe, to odpowiadające mu przekształcenie  $h(x, y) := \hat{h}(x)(y)$  jest ciągłe. Niech  $h(x_0, y_0) \in W$  tzn.  $\hat{h}(x_0) \in \langle \{y_0\}, W \rangle$ , a z ciągłości  $\hat{h}(x_0)$  i lokalnej zwartości  $Y$  wynika istnienie otoczenia  $V \ni y_0$  takiego, że  $\bar{V}$  jest zbiorem zwartym i  $\hat{h}(x_0) \in \langle \bar{V}, W \rangle$ . Z ciągłości  $\hat{h}$  wynika, że istnieje otoczenie  $U \ni x_0$  dla którego  $\hat{h}(U) \in \langle \bar{V}, W \rangle$ , a więc  $h(U \times V) \subset W$  co kończy dowód, że przyporządkowanie  $h \rightsquigarrow \hat{h}$  jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyć, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w  $\text{Map}(X \times Y, Z)$ , opisany w Lemacie 2.3.1 generuje topologię w  $\text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$ .  $\square$

**Wniosek 2.3.1.** *Dla dowolnych przestrzeni  $X, Z$  oraz lokalnie zwartej przestrzeni  $Y$  przekształcenie  $e$  definiuje bijekcję zbiorów klas homotopii  $[X \times Y, Z] \xrightarrow{e} [X, \text{Map}(Y, Z)]$ .*

*Dowód.* Wniosek wynika z Tw. 2.3.1:  $\text{Map}(X \times Y \times I, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}(X \times I, \text{Map}(Y, Z))$  – homotopie przekształceń  $X \times Y \xrightarrow{f} Z$  odpowiadają homotopiom przekształceń  $X \xrightarrow{e(f)} \text{Map}(Y, Z)$ .  $\square$

## Przekształcenia ilorazowe

Z Tw. 2.3.1 wynika też pewna ważna własność przekształceń ilorazowych. Przypomnimy, że przekształcenie  $q: X \rightarrow Y$  nazywa się ilorazowe jeśli podzbiór  $V \subset Y$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy jego przeciwobraz  $q^{-1}(V) \subset X$  jest otwarty. Najważniejsze przekształcenia ilorazowe to projekcje na przestrzeń warstw relacji równoważności określonych na przestrzeni  $X$ . Zauważmy, że własność ilorazowości przekształcenie  $q$  jest równoważna następującemu warunkowi: przekształcenie  $Z \rightarrow W$  jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy ciągłe jest złożenie  $X \xrightarrow{q} Z \rightarrow W$ .

**Stwierdzenie 2.3.3.** *Jeśli  $q: X \rightarrow Z$  jest odwzorowaniem ilorazowym, a  $Y$  jest przestrzenią lokalnie zwartą, to przekształcenie  $q \times \text{id}: X \times Y \rightarrow Z \times Y$  też jest ilorazowe.*

*Dowód.* Rozważmy następujący przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(Z \times Y, W) & \xrightarrow{(q \times \text{id})^*} & \text{Map}(X \times Y, W) \\ \simeq \downarrow e_Z & & \downarrow e_X \\ \text{Map}(Z, \text{Map}(Y, W)) & \xrightarrow{q^*} & \text{Map}(X, \text{Map}(Y, W)) \end{array}$$

Zauważmy, że diagram ten jest przemienny także jeśli zastąpimy zbiory przekształceń ciągłych  $\text{Map}(-, -)$  przez zbiory wszystkich odwzorowań między zbiorami, przy czym podzbiory odwzorowań ciągłych są zachowywane przez odwzorowania w diagramie. Niech złożenie  $X \times Y \xrightarrow{q} Z \times Y \xrightarrow{f} W$  będzie przekształceniem ciągłym; musimy wywnioskować stąd, że przekształcenie  $f$  jest ciągłe. Zauważmy, że  $f q = (q \times \text{id})^*(f) \in \text{Map}(X \times Y, W)$  a stąd wynika, że  $e_X(f q) = q^* e_Z(f) \in \text{Map}(X, \text{Map}(Y, W))$  jest przekształceniem ciągłym. Ponieważ  $q$  jest ilorazowe, więc wynika, że  $e_Z(f) \in \text{Map}(Z, \text{Map}(Y, W))$  jest ciągłe. A ponieważ  $Y$  jest przestrzenią lokalnie zwartą, więc z Tw. 2.3.1 wynika, że  $f \in \text{Map}(Z \times Y, W)$ , czyli  $f$  jest przekształceniem ciągłym.  $\square$

*Uwaga.* Zainteresowanym polecam notatki N. Stricklanda [19], w których rozpatrywane są *compactly generated weakly Hausdorff spaces*, co pozwala nadać wielu twierdzeniom o przestrzeniach przekształceń bardziej elegancką formę (w szczególności usuwając warunek lokalnej zwartości).

## 2.4 Przestrzenie przekształceń przestrzeni punktowanych

Jeśli  $(X, x_0), (Y, y_0)$  są przestrzeniami z wyróżnionymi punktami to przez  $\text{Map}_*(X, Y) \subset \text{Map}(X, Y)$  zbiór przekształceń  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  z topologią podprzestrzeni. Przypomnijmy, że bukiet  $(X, x_0) \vee (Y, y_0) := (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y, (x_0, y_0))$ , a smash-produkt jest przestrzenią ilorazową  $(X \wedge Y, [x_0, y_0]) := (X \times Y / X \vee Y, [x_0, y_0])$ . Zauważmy następujący wniosek z Twierdzenia 2.3.1:

**Wniosek 2.4.1.** *Jeśli  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$  są przestrzeniami punktowanymi a przestrzeń  $Y$  jest lokalnie zwarta, to przekształcenie  $e$  skonstruowane w Tw. 2.3.1 definiuje ciągłą bijekcję*

$$\text{Map}_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{e} \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z)).$$

*Dowód.* Dowód wynika natychmiast z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_*(X \wedge Y, Z) & \xrightarrow{e} & \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z)) \\ q^* \downarrow & & \downarrow j \\ \text{Map}(X \times Y, Z) & \xrightarrow{\bar{e}} & \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z)) \end{array}$$

w którym pionowe odwzorowania są różnowartościowe a przekształcenie  $\bar{e}$  przekształca obraz odwzorowania  $q^*$  (indukowanego przez przekształcenie ilorazowe  $X \times Y \xrightarrow{q} X \wedge Y$  na obraz włożenia  $j$ ).  $\square$

**Wniosek 2.4.2.** *Dla dowolnych przestrzeni punktowanych  $(X, x_0), (Z, z_0)$  oraz lokalnie zwartej przestrzeni punktowanej  $(Y, y_0)$  przekształcenie  $e$  definiuje bijekcję zbiorów klas homotopii*

$$[X \wedge Y, Z]_* \xrightarrow{e} [X, \text{Map}_*(Y, Z)]_*.$$

*Dowód.* Dowód jest w pełni analogiczny do dowodu Wn. 2.3.1, przy czym należy zastosować Wniosek 2.4.1. Zauważmy jedynie, że punktowane homotopie  $X \times I \rightarrow Y$  są w bijekcji z odwzorowaniami punktowanymi  $X \wedge I^+ \rightarrow Y$ , gdzie  $I^+ := (I \sqcup \{+\}, +)$ .  $\square$

## 2.5 Przestrzeń dróg

Dla dowolnej przestrzeni  $Y$  będziemy rozważać przestrzeń dróg w  $Y$ ,  $P(Y) := Y^I = \text{Map}(I, Y)$  z topologią zwarto-otwartą. Dla dowolnego punktu  $t \in I$  oznaczamy  $p_t: P(Y) \rightarrow Y$  przekształcenie ewaluacji w punkcie  $t$ ,  $p_t(\omega) := \omega(t)$ .

**Stwierdzenie 2.5.1.** *Przekształcenia  $P(Y) \times_Y P(Y) \xrightarrow{*} P(Y)$  definiowane przez składanie dróg oraz przekształcenie  $\text{inv}: P(Y) \rightarrow P(Y)$  przypisujące drodze drogę powrotną są ciągłe.*

*Dowód.* Patrz [17] Tw. 1.5.7.  $\square$

Niech  $y_0 \in Y$  będzie punktem wyróżnionym. W przestrzeni  $P(Y)$  wyróżniamy podzbiór  $\Omega Y = \Omega(Y, y_0) := \{\omega \mid \omega(0) = \omega(1)\}$  składający się z pętli zaczepionych w punkcie  $y_0$  i rozpatrujemy w nim topologię podprzestrzeni oraz punkt wyróżniony - pętlę stałą  $\omega_{y_0}$ . Przestrzeń pętli jest też wygodnie utożsamiać z przestrzenią punktowanych przekształceń okręgu  $(S^1, 1) \rightarrow (Y, y_0)$ , czyli  $\Omega Y = \text{Map}_*(S^1, Y)$ . Przy tym utożsamieniu, danym przez przekształcenie  $\text{exp}: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $\text{exp}(t) := e^{2\pi i t}$  składanie dróg odpowiada działaniu w  $\text{Map}(S^1, Y)$  zdefiniowanemu przez przekształcenie  $\nu: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ ,

$$\nu(z) = \begin{cases} (z^2, 1) & \text{gdy } \text{Im}(z) \geq 0 \\ (1, z^2) & \text{gdy } \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases}.$$

**Zadanie 37.** Sprawdź, że przekształcenie  $\nu$  zadaje strukturę ko-grupy w kategorii  $\mathcal{T}_{*h}$  na okręgu  $S^1$  (zdefiniuj przekształcenia zadające element neutralny i odwrotny).

**Stwierdzenie 2.5.2.** Przekształcenie  $\Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{*} \Omega Y$  definiowane przez składanie pętli wraz z odwzorowaniem  $inv: \Omega Y \rightarrow \Omega Y$  zadaje w przestrzeni  $\Omega Y$  strukturę obiektu grupowego w kategorii homotopii punktowanych przestrzeni topologicznych tzn. dla każdej przestrzeni punktowanej  $X$  zbiór punktowanych klas homotopii  $[X, \Omega Y]_*$  ma strukturę grupy zdefiniowaną wzorem:  
 $(f * g)(x) := f(x) * g(x)$ .

Strukturę kogrupy w kategorii  $\mathcal{T}_{*h}$  posiada zawieszenie dowolnej przestrzeni punktowanej:  $\nu_X := \nu \wedge id: S^1 \wedge X \rightarrow (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge X)$ , oraz z definicji  $S^1 \wedge X = \Sigma X$  jest zawieszeniem przestrzeni punktowanej  $X$ .

**Wniosek 2.5.1.** Przekształcenie  $e: \text{Map}_*(\Sigma X, Z) \cong \text{Map}_*(X, \Omega Z)$  jest morfizmem obiektów grupowych w kategorii  $\mathcal{T}_h$  i definiuje izomorfizm grup

$$[\Sigma X, Z]_* \cong [X, \Omega Z]_*$$

*Dowód.* Wynika natychmiast z powyższych rozważań oraz 2.4.2 i 2.4.1. □

**Wniosek 2.5.2.** Dla dowolnej przestrzeni punktowanej  $X$ ,  $H$ -kogrupa  $\Sigma^2 X$  oraz  $H$ -grupa  $\Omega^2(X)$  są abelowe.

*Dowód.* Mamy izomorfizmy grup  $[\Sigma^2 X, Y]_* \simeq [\Sigma X, \Omega Y]_* \simeq [X, \Omega^2 Y]_*$  a środkowy zbiór z działaniami pochodzącymi od  $\nu_X$  oraz  $*_Y$  spełniają założenia Stw. 1.7.1. □



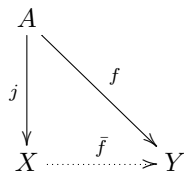
## Rozdział 3

# Korozwłóknienia i rozwłóknienia

### 3.1 Wstęp

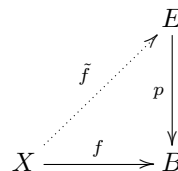
Wiele problemów topologii sprowadza się do następujących pytań o istnienie rozszerzenia lub podniesienia przekształcenia:

*Problem rozszerzania* Niech  $j: A \rightarrow X$  będzie pewnym przekształceniem (zazwyczaj zanurzeniem). Czy dla przekształcenia  $f: A \rightarrow Y$  istnieje rozszerzenie na  $X$ , tzn. przekształcenie  $\tilde{f}: X \rightarrow Y$  takie, że  $\tilde{f}(j(a)) = f(a)$  dla  $a \in A$ ?



*Przykład 3.1.1.* Pytanie czy dowolne odzwornienie  $f: D^n \rightarrow D^n$  ma punkt stały (tw. Brouwera) sprowadza się do pytania czy istnieje retrakcja dysku na sferę, a więc rozszerzenie identyczności  $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  na dysk  $D^n \supset S^{n-1}$ .

*Problem podniesienia* Niech  $p: E \rightarrow B$  będzie pewnym przekształceniem (zazwyczaj surjekcją). Czy dla przekształcenia  $f: X \rightarrow B$  istnieje podniesienie względem  $p$ , czyli przekształcenie  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  takie, że  $p\tilde{f}(x) = f(x)$  dla  $x \in X$ ?



*Przykład 3.1.2.* Pytanie, czy na sferze  $S^n$  istnieje wszędzie nieznikające pole wektorowe sprowadza się do pytania, czy identyczność na sferze posiada podniesienie ze względu na rzutowanie  $TS_0^n := \{(x, \mathbf{v}) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp \mathbf{v}, \mathbf{v} \neq 0\} \xrightarrow{p} S^n$ ,  $p(x, \mathbf{v}) := x$ .

Zauważmy, że oba problemy mogą być oczywiście sformułowane gdy  $j$ ,  $f$  i  $f$ ,  $p$  są morfizmami w dowolnej kategorii, ale my ograniczmy się tu do kategorii przestrzeni topologicznych. Korozwłóknienia (odp. rozwłóknienia) to takie przekształcenia  $j: A \rightarrow X$  (odp.  $p: E \rightarrow B$ ) dla których problem rozszerzenia (odp. podniesienia) jest problemem w kategorii homotopii. Dokładniej, jeśli mamy dwa homotopijne przekształcenia  $f_0 \sim f_1$  i jedno z nich daje się rozszerzyć (odp. podnieść) to i drugie można rozszerzyć (odp. podnieść), co więcej rozszerza się (odp. podnosi) homotopia między tymi przekształceniami. Z tym zjawiskiem czytelnik zapewne zetknął się w [teorii przekształceń nakrywających](#), które stanowią ważny przykład rozwłóknień.

**Definicja 3.1.1.** Przekształcenie  $j : A \rightarrow X$  ma własność rozszerzania homotopii ( $HEP^1$ ) jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow j & & \downarrow j \times id \\
 X \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 & \searrow f_0 & \nearrow F \\
 & & Y
 \end{array}$$

istnieje rozszerzenie (przerwana strzałka)  $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$  tzn. dwa trójkątne diagramy są przemiennie.

**Definicja 3.1.2.** Przekształcenie  $p : E \rightarrow B$  ma własność podnoszenia homotopii ( $HLP^2$ ) jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\
 \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

istnieje podniesienie, (przerwana strzałka)  $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$  tzn. dwa trójkątne diagramy są przemiennie.

Zauważmy, że przekształcenia  $j : A \rightarrow X$  mające własność HEP to dokładnie te przekształcenia względem których problem rozszerzenia jest problemem w kategorii homotopii; odpowiednio przekształcenia  $p : E \rightarrow B$  mające własność HLP to dokładnie te przekształcenia względem których problem podniesienia jest problemem w kategorii homotopii.

W kategorii przestrzeni topologicznych wyróżnia się trzy więc trzy ważne klasy przekształceń: homotopijne równoważności, rozwłóknienia, i korozwłóknienia. Przekonamy się, że te klasy przekształceń generują wszystkie przekształcenia tzn. dowolne przekształcenie można przedstawić jako superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności, a także homotopijnej równoważności i rozwłóknienia.

Choć definicje rozwłóknienia i korozwłóknienia na pierwszy rzut oka wyglądają bardzo abstrakcyjnie, to wzajemna interakcja tych klas przekształceń pozwala identyfikować typ homotopijny konkretnych przestrzeni. Z drugiej strony pojęcia te posiadają pewne własności, które mogą być przeniesione do dowolnych kategorii, pozwalając budować analogiczne teorie homotopii m.in. w kategoriach algebraicznych. Kategorie w których wyróżnia się tak nazwane klasy morfizmów, spełniające pewne warunki analogiczne do tych, o których będzie mowa poniżej nazywa się *closed model categories*.

## 3.2 Cylinder i kocylinder

Przypomnijmy, że funktor mnożenia kartezjańskiego przestrzeni przez odcinek  $X \mapsto X \times I$  posiada funktor dołączony:  $\text{Map}(X \times I, Y) \simeq \text{Map}(X, P(Y))$  gdzie  $P(Y) := \text{Map}(I, Y)$  jest przestrzenią dróg w  $Y$ . Homotopię  $F : X \times I \rightarrow Y$  między przekształceniami  $f_0 \sim f_1$  można więc traktować jako przekształcenie  $\hat{F} : X \rightarrow P(Y)$  a warunek iż  $F i_k = f_k$ ,  $k = 0, 1$  gdzie  $i_k : X \rightarrow X \times I$  jest włożeniem odpowiednio na dolną i górną podstawę, odpowiada warunkom  $p_k \hat{F} = f_k$  gdzie  $p_k : P(Y) \rightarrow Y$  jest ewaluacją  $p_k(\omega) := \omega(k)$ . Te rozważania motywują definicje cylindra i kocylindra - dla podkreślenia dwoistości tych pojęć umieszczamy je obok siebie:

**Definicja 3.2.1.** Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną.

Cylindrem (lub walcem) o podstawie $X$ nazywamy włożenie $X \xrightarrow{i_0} X \times I$ , $i_0(x) := (x, 0)$ .	Kocylindelem (lub kowalcelem) nad $X$ nazywamy projekcję $P(X) \xrightarrow{p_0} X$ gdzie $P(X) := X^I = \text{Map}(I, X)$ , $p_0(\omega) := \omega(0)$ .
--	---

Konstrukcje cylindra i kocyindra zadają funktory z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii morfizmów w kategorii przestrzeni topologicznych tzn. dowolne przekształcenie  $X \xrightarrow{f} Y$  definiuje diagramy przemienne:

$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{f \times id} & Y \times I \end{array}$	$\begin{array}{ccc} P(X) & \xrightarrow{\bar{f}} & P(Y) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$
--	--

oraz  $\text{Map}(X \times I, Y) \simeq \text{Map}(X, P(Y))$ , czyli funktory cylindra i kocyindra  $- \times I, P: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  są sprzężone.

**Stwierdzenie 3.2.1.** Dla dowolnej przestrzeni  $X$  odwzorowania cylindra  $X \xrightarrow{i_0} X \times I$  i kocyindra  $P(X) \xrightarrow{p_0} X$  są homotopijnymi równoważnościami.

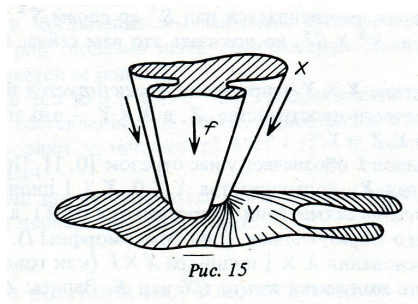
*Dowód.* ZADANIE □

**Definicja 3.2.2.** Niech  $f: X \rightarrow Y$  będzie dowolnym przekształceniem.

Cylindrem (lub walcem) przekształcenia $f$ nazywa się przestrzeń $Z(f)$ z włożeniem $i_0: Y \hookrightarrow Z(f)$ zdefiniowanym jako push-out diagramu:	Kocylindelem (lub kowalcelem) przekształcenia $f$ , nazywa się przestrzeń $P(f)$ wraz z projekcją $P(f) \xrightarrow{p_0} X$ zdefiniowane jako pull-back diagramu:
---	--

$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} P(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & P(Y) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$
--	--

**Zadanie 38.** Wypisać *explicite* definicje cylindra i kocyindra przekształcenia  $f$ .



Puc. 15

Rys. Wizualizacja cylindra przekształcenia [9]

Konstrukcje cylindra i kocyndra przekształcenia są funktorialne ze względu na morfizmy przekształceń. Dowolny diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

indukuje odwzorowania  $Z(f) \rightarrow Z(f')$  oraz  $P(f) \rightarrow P(f')$  dla których odpowiednie diagramy są przemienne.

**Zadanie 39.** Narysuj te diagramy.

**Zadanie 40.** Sprawdzić, że funktory  $Z: \text{Mor}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{T})$  i  $P: \text{Mor}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{T})$  definiowane przez konstrukcję cylindra i kocyndra są sprzężone, tzn. istnieje naturalna bijekcja między diagramami:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X' \\ \downarrow i_0 & & \downarrow f' \\ Z(f) & \xrightarrow{\varphi} & Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & P(f') \\ \downarrow f & & \downarrow p'_0 \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X' \end{array}$$

gdzie  $\hat{\varphi}(x) := (\tilde{\varphi}(f(x)), \varphi(x, -))$ .

**Stwierdzenie 3.2.2.** Jeżeli  $X$  jest przestrzenią lokalnie zwartą,  $Z$  dowolną przestrzenią

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

jest diagramem definiującym cylinder przekształcenia  $f: X \rightarrow Z$ . Wtedy diagram otrzymany przez zastosowanie do niego funktora  $\text{Map}(-, Z)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(Z(f), Z) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & \text{Map}(X \times I, Z) \\ \downarrow i_0^* & & \downarrow i_0^* \\ \text{Map}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Map}(X, Z) \end{array}$$

jest diagramem definiującym kocyndra przekształcenia  $f^*: \text{Map}(Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, Z)$ , a zatem kostożek  $P(f^*)$  jest homeomorficzny z przestrzenią  $\text{Map}(Z(f), Z)$ .

*Dowód.* Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} P(\bar{f}^*) & \xleftarrow{\cong} & \text{Map}(Z(f), Z) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & \text{Map}(X \times I, Z) & \xrightarrow{\cong} & P(\text{Map}(X, Z)) \\ & \searrow \bar{p}_0 & \downarrow i_0^* & & \downarrow i_0^* & \swarrow p_0 & \\ & & \text{Map}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Map}(X, Z) & & \end{array}$$

Kwadrat to dokładnie diagram powstający z diagramu definiującego cylinder (pierwszy diagram) po zastosowaniu funktora  $\text{Map}(-, Z)$ . Łatwo sprawdzić, że skoro ten wyjściowy był push-outem, to ten jest pull-backiem. Trójkąty to homeomorfizmy przestrzeni z górnego wiersza z przestrzeniami występującymi w definicji kocyndra.  $\square$

### 3.3 Koroszłóknienia i rozszłóknienia

#### 3.3.1 Definicje

**Twierdzenie 3.3.1.** Dla przekształceń  $j : A \rightarrow X$  i odpowiednio  $p : E \rightarrow B$  następujące warunki są równoważne:

- Dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{F} & P(Y) \\
 \downarrow j & \nearrow \bar{F} & \downarrow p_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} \quad (3.1)$$

istnieje przekształcenie  $\bar{F} : X \rightarrow P(Y)$  takie, że  $p_0\bar{F} = F$  oraz  $\bar{F}j = f$ .

- Dla przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow j & \searrow j \times id & \downarrow F \\
 X \times \{0\} & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 & \searrow f_0 & \downarrow \bar{F} \\
 & & Y
 \end{array} \quad (3.2)$$

istnieje przekształcenie  $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$  takie, że  $\bar{F}i_0 = f_0$ ,  $\bar{F}(j \times id) = F$ .

- Przekształcenie  $\bar{j} : Z(j) \rightarrow Z(id) = X \times I$  indukowane przez morfizm przekształceń:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{j} & X \\
 \downarrow j & & \downarrow id \\
 X & \xrightarrow{id} & X
 \end{array} \quad (3.3)$$

posiada lewą odwrotność  $r : X \times I \rightarrow Z(j)$ , czyli  $Z(j)$  jest retraktem walca  $X \times I$  - przekształcenie  $r$  nazywa się funkcją retrahującą koroszłóknienia  $j$ .

- Dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\
 \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \quad (3.4)$$

istnieje przekształcenie  $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$  takie, że  $p\tilde{F} = F$  i  $\tilde{F}i_0 = \tilde{f}_0$ .

- Dla przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & & & & \\
 \downarrow \tilde{F} & \searrow f & & & \\
 P(E) & \xrightarrow{p_0} & E & & \\
 \downarrow P(p) & & \downarrow p & & \\
 P(B) & \xrightarrow{p_0} & B & & 
 \end{array} \quad (3.5)$$

istnieje przekształcenie  $\tilde{F} : Y \rightarrow P(E)$  takie, że  $p_{\#}\tilde{F} = F$  oraz  $p_0\tilde{F} = f$ .

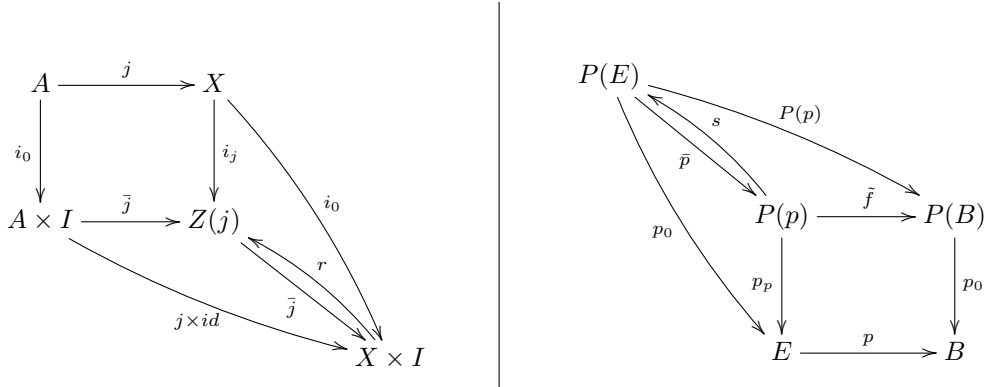
- Przekształcenie  $\bar{p} : P(E) \rightarrow P(p)$  indukowane przez morfizm przekształceń:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{id} & E \\
 id \downarrow & & \downarrow p \\
 E & \xrightarrow{p} & B
 \end{array} \quad (3.6)$$

ma prawą odwrotność tzn.  $s : P(p) \rightarrow P(E)$  takie, że  $\bar{p} \circ s = id_{P(p)}$  - przekształcenie  $s$  nazywa się funkcją podnoszącą drogi rozszłóknienia  $p$ .

*Uwaga 3.3.1.* Zauważmy, że:

1. Warunki nr (3.3) i (3.6) w definicjach korozwłóknienia i rozwłóknienia są wewnętrzne w tym sensie, że nie odwołują się do trzecich przestrzeni i przekształceń.
2. Warunki nr (3.3) i (3.6) oznaczają, że występujące w nich odwzorowania  $r$  i  $s$  wpisują się w następujące diagramy przemienne:



3. Warunek (3.2) dla korozwłóknienia oznacza, że kwadratowy diagram (3.2) jest słabym push-out'em" - przekształcenie  $\tilde{F}$  nie jest bowiem jednoznacznie wyznaczone. Warunek 2 dla rozwłóknienia oznacza, że kwadratowy diagram (3.5) jest słabym pull-back'iem", bo przekształcenie  $\tilde{F}$  nie jest jednoznacznie wyznaczone.
4. Warunki (3.1) i (3.2) w prawej kolumnie są tożsame z Def. 3.1.1, zaś warunek (3.4) jest tożsamy z warunkiem istnienia podniesienia homotopii Def. 3.1.2.
5. W warunku (3.2) homotopię  $F: A \times I \rightarrow Y$  będziemy nazywali żozszerzaną homotopią", odwzorowanie  $f_0: X \times \{0\} \rightarrow Y$  warunkiem początkowym, a homotopię  $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$  rozszerzeniem  $F$  z warunkiem początkowym  $f_0$ .
6. Analogicznie, w warunku (3.4) będziemy nazywać  $F$  podnoszoną homotopią,  $\tilde{f}_0$  warunkiem początkowym a  $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow E$  podniesieniem  $F$  z warunkiem początkowym  $\tilde{f}_0$ .

**Definicja 3.3.1.** Przekształcenie  $A \xrightarrow{j} X$  mające własność rozszerzania homotopii nazywamy korozwłóknieniem.

Korozwłóknienie  $A \xrightarrow{j} X$  nazywamy acyklicznym jeśli  $j$  jest jednocześnie homotopijną równoważnością.

**Definicja 3.3.2.** Przekształcenie  $E \xrightarrow{p} B$  mające własność podnoszenia homotopii nazywamy rozwłóknieniem.

Rozwłóknienie  $E \xrightarrow{p} B$  nazywamy acyklicznym jeśli  $p$  jest jednocześnie homotopijną równoważnością.

Od nazwisk twórców tych pojęć rozwłóknienia *rozwłóknieniami Hurewicza*<sup>3</sup>, a pary przestrzeni  $(X, A)$ , gdzie  $A \subset X$  jest podzbiorem domkniętym i włożenie korozwłóknieniem nazywają się *parami Borsuka*<sup>4</sup>.

**Zadanie 41.** Dowolny homeomorfizm jest zarówno korozwłóknieniem jak i rozwłóknieniem.

<sup>3</sup>Witold Hurewicz (Łódź 1904 – 1956 Uxmal, Mexico)

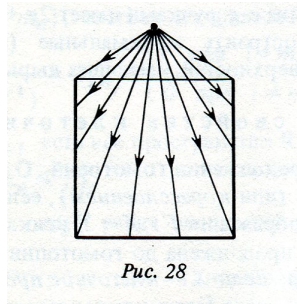
<sup>4</sup>Karol Borsuk (Warszawa 1905 – 1982 Warszawa)

**Stwierdzenie 3.3.1.**

1. Cylinder przestrzeni  $i_0: X \rightarrow X \times I$  jest korowłóknieniem, a kocylinder  $p_0: P(X) \rightarrow X$  jest rozwłóknieniem.
2. Dla dowolnych przestrzeni projekcja  $B \times F \rightarrow B$  jest rozwłóknieniem, a włożenie  $X \subset X \sqcup Y$  jest korowłóknieniem.
3. Dla  $n > 0$  włożenie  $n - 1$ -wymiarowej sfery na brzeg  $n$ -wymiarowego dysku  $S^{n-1} \subset D^n$  jest korowłóknieniem.

*Dowód.* Ad 1,2 – ZADANIE.

Ad 3 - poniższy rysunek.



Rys. Retrakcja walca na podstawę i powierzchnię boczną [9]

□

**Stwierdzenie 3.3.2.** Niech  $j: A \rightarrow X$  będzie korowłóknieniem. Wtedy

1. Przekształcenie  $j: A \rightarrow j(A)$  jest homeomorfizmem na obraz, a więc  $j$  jest różnowartościowe.
2. Jeśli  $X$  jest przestrzenią Hausdorffa to podzbiór  $j(A) \subset X$  jest domknięty.
3. Dowolne korowłóknienie  $A \xrightarrow{j} X$  jest złożeniem homeomorfizmu  $A \simeq j(A)$  i zanurzenia  $j(A) \subset X$ , przy czym oba te odwzorowania są korowłóknieniami.

*Dowód.* Ad 1. Odwzorowanie odwrotne do  $j$  jest zadane przez obcięcie funkcji retrahującej  $X \times I \xrightarrow{r} Z(j)$  do górnego denka  $X \times \{1\}$ ; z jej definicji wynika, że  $r(j(A) \times \{1\}) = A \times \{1\}$ .

Ad 2. Rozważmy dwa przekształcenia:  $id, \bar{j}r: X \times I \rightarrow X \times I$  i zauważmy, że skoro  $X$  jest przestrzenią Hausdorffa  $A \times \{1\} = \{(x, 1) \mid id(x, 1) = \bar{j}r(x, 1)\}$ , jest podzbiorem domkniętym.

Ad 3. Wynika natychmiast z 1. i 2. □

**Stwierdzenie 3.3.3.** Dla podzbioru domkniętego  $A \subset X$  następujące warunki są równoważne:

1.  $(X, A)$  jest parą Borsuka;
2. Podzbiór  $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$  jest retraktem;
3. Podzbiór  $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$  jest silnym retraktem deformacyjnym.

*Dowód.* [1.  $\iff$  2.] Wynika bezpośrednio z Tw. 11.3.1 pkt. 3.3, bo jeśli  $j: A \subset X$  jest domkniętym podzbiorem, to cylinder  $Z(j) = X \times \{0\} \cup A \times I$ .

[2.  $\iff$  3.] Niech  $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ ,  $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$  będzie retrakcją. Zdefiniujmy  $G: X \times I \times I \rightarrow X \times I$  wzorem:

$$G((x, t), s) = (r_1(x, (1-s)t), (1-s)r_2(x, t) + st).$$

Łatwo widać, że  $G$  jest homotopią pomiędzy retrakcją  $r$  a  $id$  i ponadto dla  $a \in A$  i dowolnego  $s, t \in I$ ,  $G((x, t), s) = (x, (1-s)t + st) = (x, t)$ . W drugą stronę implikacja jest oczywista. □

**Zadanie 42.** Jeśli  $p: E \rightarrow B$  jest rozwłóknieniem, to  $p(E)$  jest sumą pewnych składowych łukowej spójności  $B$ .

**Twierdzenie 3.3.2.** Następujące konstrukcje zachowują klasy (ko-)rozwłóknień:

1. Przekształcenie izomorficzne w kategorii  $\text{Mor}(\mathcal{T})$  z (ko-)rozwłóknieniem jest (ko-)rozwłóknieniem;
2. Złożenie (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem;
3. Pull-back (push-out) rozwłóknienia (ko-rozwłóknienia) jest rozwłóknieniem (ko-rozwłóknieniem);
4. Retrakt (ko-)rozwłóknienia w kategorii  $\text{Mor}(\mathcal{T})$  jest (ko-)rozwłóknieniem;
5. Koproduct i produkt (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem.

**Zadanie 43.** Udowodnij ostatnie stwierdzenie, używając do poszczególnych tez najodpowiedniejszego z równoważnych warunków definiujących (ko-)rozwłóknienie.

Następujący nietrudny wniosek z definicji korozwłóknienia jest bardzo silnym narzędziem przy badaniu homotopijnej równoważności przestrzeni.

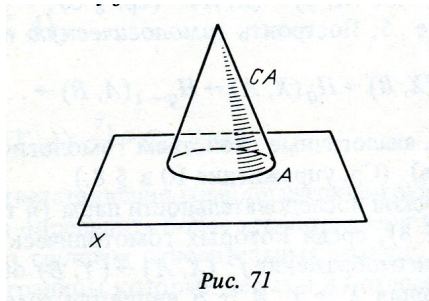
**Stwierdzenie 3.3.4.** Załóżmy, że włożenie podzbioru domkniętego  $A \hookrightarrow X$  jest korozwłóknieniem.

1. Jeśli podzbiór  $A$  jest ściągalny to przekształcenie ilorazowe  $q: (X, A) \rightarrow (X/A, [a_0])$  jest homotopijną równoważnością par przestrzeni.
2. Przekształcenie  $q: (X \cup_A c(A), c(A)) \rightarrow (X/A, [a_0])$ , gdzie  $c(A)$  jest stożkiem nad  $A$ , jest homotopijną równoważnością par.

*Dowód.*

*Ad 1.* Skonstruujemy przekształcenie odwrotne do  $q: (X, A) \rightarrow (X/A, [A])$ . Niech  $F: A \times I \rightarrow A$  będzie ściąganiem  $A$  do punktu  $a_0 \in A$ , czyli  $F(-, 0) = id$ ,  $F(-, 1) = a_0$ . Rozszerzmy  $F$  do odwzorowania  $F: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X$ , kładąc  $F(x, 0) := x$ . Jest to przekształcenie ciągłe, ponieważ zbiór  $A$  jest domknięty. Z definicji korozwłóknienia wynika, że istnieje rozszerzenie  $\bar{F}: X \times I \rightarrow X$ . Zauważmy, że  $\bar{F}(a, 1) = a_0$  a więc obcięcie do górnej podstawy walca  $\bar{F}|X \times \{1\}$  wyznacza przekształcenie par  $f_1: (X/A, [a_0]) \rightarrow (X, A)$  a homotopia  $\bar{F}: id_X \sim f_1 q$ . Homotopia  $q f_1 \sim id_{X/A}$  jest wyznaczona przez złożenie przekształceń  $X \times I \xrightarrow{\bar{F}} X \rightarrow X/A$ , ponieważ  $\bar{F}(a, t) \in A$  dla dowolnych  $(a, t) \in A \times I$  a przekształcenie  $X \times I \xrightarrow{q \times id} X/A \times I$  jest ilorazowe (p. Stw 2.3.3). Zatem odwzorowania  $q, f_1$  są wzajemnie homotopijnie odwrotne.

*Ad 2.* Dla dowolnego podzbioru z faktu, że  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem wynika, że  $c(A) \subset X \cup c(A)$  jest korozwłóknieniem (p. 3.3.2 pkt. 3). Ponieważ stożek jest ściągalny, więc teza wynika z pkt. 1.  $\square$



Puc. 71

Rys. Wizualizacja doklejenia stożka nad podzbiorem. [9]

**Zadanie 44.** Jeśli włożenie domkniętego podzbioru  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem a przestrzeń  $X$  jest ściągalna, to przestrzeń ilorazowa  $X/A$  jest homotopijnie równoważna z zawieszeniem  $\Sigma A$ .



### 3.3.2 Jednoznaczność podnoszenia i rozszerzania homotopii

**Twierdzenie 3.3.3.** Niech  $p: E \rightarrow B$  będzie rozwłóknieniem a  $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1: X \times I \rightarrow E$  dwoma homotopiami takimi, że istnieją homotopia  $H: p\tilde{F}_0 \sim p\tilde{F}_1$  oraz homotopia  $\tilde{G}: \tilde{F}_0|_{X \times \{0\}} \sim \tilde{F}_1|_{X \times \{0\}}$  takie, że  $H(x, 0, t) = p\tilde{G}(x, 0, t)$  tzn. diagram litych strzałek:

$$\begin{array}{ccc} X \times \sqcup & \xrightarrow{\tilde{H}_\sqcup} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

w którym  $\sqcup = I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I$  oraz

$$\tilde{H}_\sqcup(x, t, s) = \begin{cases} \tilde{F}_0(x, t) & \text{gdy } s = 0 \\ \tilde{G}(x, 0, s) & \text{gdy } t = 0 \\ \tilde{F}_1(x, t) & \text{gdy } s = 1 \end{cases}$$

jest przemienny. Wtedy istnieje podniesienie  $\tilde{H}: X \times I \times I \rightarrow E$ , czyli homotopia  $\tilde{H}: \tilde{F}_0 \sim \tilde{F}_1$  będąca rozszerzeniem  $\tilde{G}$ .

*Dowód.* Podniesienie istnieje ponieważ pary  $(I^2, \sqcup) \simeq (I^2, I \times \{0\})$  są homeomorficzne.  $\square$

Przypomnijmy, że jeśli  $(X, A)$  jest parą przestrzeni to skrótowo oznaczamy  $X_A := X \times \{0\} \cup A \times I$ .

**Twierdzenie 3.3.4.** Jeśli  $(X, A)$  jest parą Borsuka  $\bar{F}_0, \bar{F}_1: X \times I \rightarrow Y$  dwoma homotopiami dla których istnieje homotopia  $G: X_A \times I \rightarrow Y$  taka, że  $G: \bar{F}_0|_{X_A \times \{0\}} \sim \bar{F}_1|_{X_A \times \{0\}}$ . Wtedy istnieje homotopia  $\tilde{G}: X \times I \times I \rightarrow Y$  będąca rozszerzeniem homotopii  $G$ .

*Dowód.* Na mocy Wn. 11.3.4 produkt par Borsuka  $(X, A) \times (I, \partial I) = (X \times I, X \times 0 \cup A \times I \cup X \times 1)$  jest parą Borsuka. Wynika stąd, że przekształcenie:

$$F(x, t, s) := \begin{cases} F_0(x, t) & \text{gdy } s = 0 \\ G(x, t, s) & \text{gdy } a \in A \text{ lub } t = 0 \\ F_1(x, t) & \text{gdy } s = 1 \end{cases}$$

rozszerza się do  $\tilde{G}: X \times I \times I \rightarrow Y$ .  $\square$

### 3.3.3 Dualność korozwłóknień i rozwłóknień

Dualność między korozwłóknieniami i rozwłóknieniami odzwierciedla następujące ważne twierdzenie:

**Twierdzenie 3.3.5** (K. Borsuk). Jeśli przestrzeń  $X$  jest lokalnie zwarta a  $j: A \hookrightarrow X$  jest parą Borsuka, to przekształcenie obcięcia  $j^*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(A, Y)$  jest rozwłóknieniem. Jeśli korozwłóknienie  $j$  jest homotopijną równoważnością, to rozwłóknienie  $j^*$  jest homotopijną równoważnością.

*Dowód.* Zauważmy przede wszystkim, że przestrzeń  $A$  jest lokalnie zwarta, bowiem jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni lokalnie zwartej, a  $Z(j) = X_A = X \times \{0\} \cup A \times I$ .

Do złożenia przekształceń  $Z(j) \xrightarrow{\tilde{j}} X \times I \xrightarrow{\tau} Z(j)$  opisanych w tw. 3.3.1 pkt. 2, które jest identycznością stosujemy functor  $\text{Map}(-, Y)$  otrzymując złożenie, które także jest identycznością

(górny wiersz diagramu 3.7). Korzystając z tw. 2.3.1 otrzymujemy przemienny diagram w którym pionowe strzałki są homeomorfizmami (p. Stw. 3.2.2):

$$\begin{array}{ccccc} \text{Map}(Z(j), Y) & \xleftarrow{\bar{j}^*} & \text{Map}(X \times I, Y) & \xleftarrow{r^*} & \text{Map}(Z(j), Y) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ P(\bar{j}^*) & \xleftarrow{j^*} & P(\text{Map}(X, Y)) & \xleftarrow{r^*} & P(\bar{j}^*) \end{array} \quad (3.7)$$

Przekształcenie  $r^*$  jest więc prawą odwrotnością  $\bar{j}^*$ , o której mowa w 3.3.1 pkt.3, czyli funkcją podnoszącą drogi dla przekształcenia  $j^*$ . Stąd wynika że  $j^*: \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(A, Y)$  jest rozwłóknieniem. Funktor  $\text{Map}(-, Y)$  zachowuje relację homotopii (sprawdź), a więc homotopijne równoważności.  $\square$

*Przykład 3.3.1.* Przekształcenia obcięcia  $\text{Map}(D^n, Y) \rightarrow \text{Map}(S^{n-1}, Y)$  są rozwłóknieniami. Jeśli włożenie punktu  $\{x_0\} \hookrightarrow X$  jest korozwłóknieniem, to ewaluacja  $ev: \text{Map}(X, Y) \rightarrow Y$ ,  $ev(f) := f(x_0)$  jest rozwłóknieniem.

Następne twierdzenie powiada, że każde przekształcenie można rozłożyć na superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności lub homotopijnej równoważności i rozwłóknienia, czyli kosztem zamiany przestrzeni wartości lub argumentów, z homotopijnego punktu widzenia każde przekształcenie można zamienić zarówno na rozwłóknienie jak i korozwłóknienie.

**Twierdzenie 3.3.6.** *Dla dowolnego przekształcenia  $f: X \rightarrow Y$  istnieje przemienny diagram, functorialnie zależący od przekształcenia  $f$  (tzn. morfizm przekształceń indukuje morfizm diagramów):*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \end{array}$$

w którym:

- Przekształcenia  $s_0(x) := (\omega_{f(x)}, x)$  oraz  $r_0(y) := \begin{cases} y & \text{dla } y \in Y \\ f(x) & \text{dla } (x, t) \in X \times I \end{cases}$  są homotopijnymi równoważnościami;
- Przekształcenie  $i_f(x) := [x, 1]$  jest korozwłóknieniem;
- Przekształcenie  $p_f(x, \omega) := \omega(1)$  jest rozwłóknieniem.

*Dowód.* Wykażemy, że przekształcenie  $i_f$  jest korozwłóknieniem. Ponieważ  $\partial I \subset I$  jest korozwłóknieniem, więc  $X \times \partial I \subset X \times I$  jest korozwłóknieniem. Mamy push-out diagram, w którym utożsamiamy  $X \times \partial I = X \sqcup X$

$$\begin{array}{ccc} X \times \partial I & \xrightarrow{f \sqcup id} & Y \sqcup X \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i}_f \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

Przekształcenie  $i_f$  jest złożeniem  $X \hookrightarrow Y \sqcup X \rightarrow Z(f)$ .

Dualnie, dowiedzimy że  $p_f$  jest rozwłóknieniem: Ponieważ  $\partial I \subset I$  jest korowłóknieniem, więc na mocy twierdzenia Borsuka przekształcenie  $P(Y) = \text{Map}(I, Y) \rightarrow \text{Map}(\partial I, Y) = Y \times Y$  jest rozwłóknieniem. Rozpatrzmy pull-back diagram:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\widetilde{f \times id}} & P(Y) \\ \bar{p}_{0,1} \downarrow & & \downarrow p_{0,1} \\ X \times Y & \xrightarrow{f \times id} & Y \times Y \end{array}$$

i zauważmy, że  $W = \{(x, y, \omega) \mid \omega(0) = f(x), \omega(1) = y\} = \{(x, \omega) \mid \omega(0) = f(x)\} = P(f)$ ; złożenie  $P(f) \rightarrow Y \times X \rightarrow Y$  jest więc rozwłóknieniem.  $\square$

**Zadanie 45.** Sprawdzić, że przekształcenia  $s_0$  oraz  $r_0$  są homotopijnymi równoważnościami.

**Definicja 3.3.3.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie dowolnym odwzorowaniem.

Homotopijnym kowłóknem $f$ lub stożkiem $f$ nazywamy przestrzeń ilorazową $C(f) := Z(f)/i_f(X)$ .		Homotopijnym włóknem (lub kostożkiem) $f$ nad punktem $y_0 \in Y$ nazywamy przeciwobraz $F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0) = \{(x, \omega) \mid f(x) = \omega(0), \omega(1) = y_0\}$ .
---	--	---

Włókno i kowłókno homotopijne wpisują się w diagram:

$$\begin{array}{ccc} & & F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0) \\ & & \downarrow \hookrightarrow \\ X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \\ \downarrow q & & \\ C(f) := Z(f)/i_f(X) & & \end{array}$$

Zauważmy, że homotopijne włókno  $F(f)$  można też zdefiniować jako pull-back:

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(B, b_0) & \xrightarrow{p_0} & B \end{array}$$

gdzie  $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(1) = b_0\}$  oraz  $p_0(\omega) := \omega(0)$ .

*Uwaga 3.3.2.* Często definiuje się przestrzeń  $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(0) = b_0\}$ , ale powyższa definicja zapewnia zgodność z podaną wcześniej definicją homotopijnego włókna.

### 3.4 Kowłóknisty ciąg Puppe przekształcenia

Przypomnijmy, w kontekście punktowanym, definicje walca kowalca przekształcenia oraz homotopijnego kowłóknia i homotopijnego włókna znane z Rozdziału 3.3.

**Definicja 3.4.1.** Ciąg przekształceń przestrzeni punktowanych  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  nazywamy homotopijnie kowłóknistym jeśli jest homotopijnie równoważny z ciągiem  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C(f)$  gdzie  $C(f)$  jest stożkiem przekształcenia  $f$ , a  $j: B \subset C(f)$  jest włożeniem na podstawę. tzn. istnieje homotopijnie przemienny diagram w  $\mathcal{T}_{*h}$ :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array} \quad (3.8)$$

w którym pionowe przekształcenia są punktowanymi homotopijnymi równoważnościami.

Ciąg przekształceń punktowanych  $\dots \rightarrow X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \dots$  nazwiemy (ko-) włóknistym jeśli każde kolejne dwa przekształcenia  $X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}$  są ciągiem (ko-) włóknistym.

*Przykład 3.4.1.* Jeśli  $(X, A)$  jest parą Borsuka, to ciąg  $A \rightarrow X \rightarrow X/A$  jest kowłóknisty.

**Zadanie 46.** Opisać naturalne homeomorfizmy  $C(\Sigma f) \simeq \Sigma C(f)$  i pokazać, że zadają one naturalne transformacje funktorów określonych na kategorii przekształceń (w przypadku punktowanym i bez punktu wyróżnionego).

**Lemat 3.4.1.** Jeśli ciąg  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  jest kowłóknisty, to ciąg  $\Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$  też jest kowłóknisty.

*Dowód.* ZADANIE. □

**Twierdzenie 3.4.1.** [D. Puppe<sup>5</sup>] Dla dowolnego punktowanego odwzorowania  $f: A \rightarrow B$  istnieje przekształcenie  $C(f) \xrightarrow{\delta_f} \Sigma A$ , zadające transformację naturalną odpowiednich funktorów na kategorii punktowanych przekształceń takie, że ciąg przekształceń

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta_f} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \delta} \Sigma C(f) \rightarrow \dots$$

zwany prawym ciągiem Puppe odwzorowania  $f$ , jest kowłóknisty.

*Dowód.* Przekształcenie  $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$  jest zdefiniowane jako złożenie projekcji  $C(f) \rightarrow C(f)/B$  i homeomorfizmu  $C(f)/B \simeq \Sigma A$ . Na mocy Lematu 3.4.1 wystarczy pokazać, że kowłókniste są krótkie ciągi rozpoczynające się do  $A, B, C(f)$ .

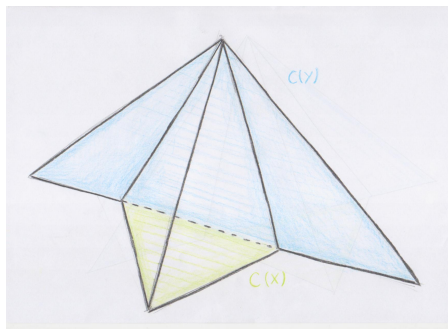
- Ciąg  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f)$  jest kowłóknisty z definicji.
- Ciąg  $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$  jest homotopijnie równoważny  $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} C(i)$  bowiem  $i$  jest włożeniem  $B$  na podstawę stożka  $C(f)$ , czyli korozwłóknieniem, a więc  $C(i) \simeq C(f)/i(B) \simeq \Sigma A$ .
- Rozważmy ciąg  $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B$  i zauważmy, że istnieje homeomorfizm stożka

$$\Sigma A \hookrightarrow C(\delta) = C(C(f)) \cup_{\delta} \Sigma A$$

z walcem  $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$ . Poniższe rysunki<sup>6</sup> pokazują stożek  $C(C(f))$ , który doklejamy przy pomocy  $\delta$  do  $\Sigma A$ :

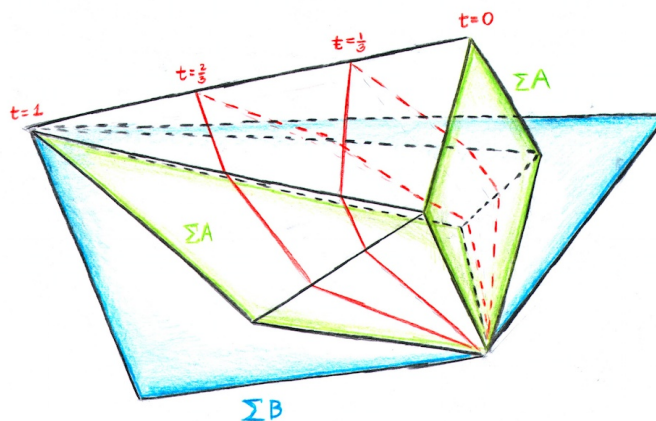
<sup>5</sup>Dieter Puppe (Łódź 1930 – 2005 Heidelberg)

<sup>6</sup>rys. Paweł Ciosmak



Rys. Przestrzeń  $C(C(f))$  gdzie  $f$  jest włożeniem odcinków  $A = X = [-1, 1] \subset [-2, 2] = Y = B$ .  
 (Uwaga: na poniższym rysunku powinno być  $X = A, Y = B$ )  
 oraz efekt tego przyklejenia, czyli przestrzeń homotopijnie równoważną z walcem

$$Z(\Sigma f) = (C(\Sigma f) \times I) \cup_{\Sigma f} \Sigma B :$$



Rys. Przestrzeń  $C(\delta)$  jest homotopijnie równoważna z  $\Sigma B$ .

Składając włożenie  $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$  z retrakcją deformacyjną  $Z(\Sigma f) \xrightarrow{r} \Sigma B$  otrzymujemy przemienny diagram, w którym pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A \xrightarrow{i} C(\delta) \simeq Z(\Sigma f) \\ & & & & \downarrow id & & \downarrow id \\ & & & & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \\ & & & & & & \downarrow r \end{array}$$

□

### 3.5 Punktowane i wolne klasy homotopii

W praktyce geometrycznej interesują nas homotopijne równoważności przestrzeni, a wyróżnianie punktu ma charakter techniczny, ułatwiając wprowadzanie pomocniczych struktur algebraicznych. W tym rozdziale zbadamy relacje między zbiorami klas homotopii przy różnych wyborach punktu wyróżnionego oraz zbiorem punktowanych klas homotopii i wolnych klas homotopii. Niech  $(X, x_0)$  będzie ustaloną przestrzenią dobrze punktowaną (tzn. włożenie  $\{x_0\} \hookrightarrow X$  jest korozwłóknieniem), a  $(Y, y_0)$  dowolną przestrzenią punktowaną.

**Stwierdzenie 3.5.1.** *Przyporządkowanie  $\Pi(Y) \ni y \rightsquigarrow [(X, x_0), (Y, y)] \in \mathcal{S}_*$  wyznacza funktor z grupoidu podstawowego do kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem. Jeśli  $(X, x_0)$  jest homotopijną kogrupą, to ma on wartości w kategorii grup.*

*Dowód.* Punktem wyróżnionym w zbiorze  $[(X, x_0), (Y, y)]$  jest klasa przekształcenia stałego w  $y \in Y$ . Dla dowolnej drogi  $\omega : I \rightarrow X$  łączącej  $y_0$  z  $y_1$  zdefiniujemy przekształcenie

$$h_{[\omega]} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)].$$

Mając dane  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  zdefiniujemy  $F : X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow Y$  wzorem:  $F(x, 0) := f(x)$  oraz  $F(x_0, t) := \omega(t)$ . Korzystając z tego, że przestrzeń jest dobrze punktowana możemy rozszerzyć  $F$  do homotopii  $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$ . Definiujemy  $h_{[\omega]}[f] := [\bar{F}]X \times 1$ . Pozostaje sprawdzić, że definicja  $h_{[\omega]}$  nie zależy od dokonanych wyborów (p. Tw. 3.3.4), że  $h_{[\omega]}$  jest homomorfizmem grup oraz  $h_{[\omega * \eta]} = h_{[\eta]} \circ h_{[\omega]}$ .  $\square$

**Wniosek 3.5.1.** *Dla dowolnej drogi  $\omega$  w  $Y$  przekształcenie  $h_{[\omega]} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)]$  jest bijekcją, w szczególności zadaje izomorfizm grup homotopii  $h_{[\omega]} : \pi_q(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, y_1)$ .*

**Stwierdzenie 3.5.2.** *Niech  $(Z, z_0)$  będzie przestrzenią punktowaną i  $F : Z \times I \rightarrow Y$  będzie homotopią. Oznaczmy  $\omega(t) := F(z_0, t)$  oraz  $\omega(0) = y_0$  i  $\omega(1) = y_1$ . Następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} & [(X, x_0), (Y, y_0)] & \\ & \nearrow f_{\#} & \downarrow h_{[\omega]} \\ [(X, x_0), (Z, z_0)] & \xrightarrow{f_{\#}} & [(X, x_0), (Y, y_1)] \end{array}$$

**Wniosek 3.5.2.** *Jeśli  $f : Y \rightarrow Y'$  jest homotopijną równoważnością (niepunktowaną!), to przekształcenie indukowane  $f_{\#} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y', f(y_0))]$  jest bijekcją, w szczególności grupy homotopii łukowo spójnych przestrzeni homotopijnie równoważnych są izomorficzne (niezależnie od wyboru punktów wyróżnionych).*

Następny wniosek jest pożytecznym kryterium trywialności elementu w grupach homotopii, który warto też udowodnić bezpośrednio nie odwołując się do powyższych twierdzeń.

**Wniosek 3.5.3.** *Dla odwzorowania  $\alpha : (S^q, 1) \rightarrow (X, x_0)$  następujące warunki są równoważne:*

1.  $[\alpha] = 0$  w  $\pi_q(X, x_0)$ ;
2.  $\alpha \sim c_{x_0} \text{ rel}(1)$  ( $c_{x_0}$  oznacza przekształcenie stałe w  $x_0$ );
3.  $\alpha \sim c_{x_0}$ ;
4.  $\alpha$  rozszerza się na dysk tzn. istnieje  $\bar{\alpha} : D^{q+1} \rightarrow X$  takie, że  $\bar{\alpha}|S^q = \alpha$ .

Ustalmy teraz punkt wyróżniony  $y_0 \in Y$ . Przekształcenia  $h_{[\omega]}$  zadają działanie grupy  $\pi_1(Y, y_0)$  na zbiorze klas homotopii  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ :

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)].$$

**Zadanie 47.** Jeśli  $(X, x_0) = (S^1, 1)$  to powyższe działanie jest działaniem grupy  $\pi_1(Y, y_0)$  na niej samej przez automorfizmy wewnętrzne.

**Zadanie 48.** Zauważyć, że powyższe działanie jest indukowane przez kodziaływanie  $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$  kogrupy  $S^1$  na przestrzeni  $X$  skonstruowane w następujący sposób: Definiujemy przekształcenie  $X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow X \vee S^1$  jako identyczność na  $X \times 0$  i nawinięcie odcinka  $x_0 \times I$  na okrąg. Ponieważ  $(X, x_0)$  jest dobrze punktowana więc to przekształcenie rozszerza się do  $X \times I \rightarrow X \vee S^1$ , którego obcięcie do górnej podstawy  $X \times 1$  jest kodziaływaniami  $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$ .

**Stwierdzenie 3.5.3.** *Jeśli przestrzeń  $Y$  jest łukowo spójna, to zapominanie o punkcie wyróżnionym zadaje bijekcję:*

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]/\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} [X, Y].$$

**Stwierdzenie 3.5.4.** *Jeśli  $(Y, y_0)$  jest  $H$ -przestrzenią, to dla dowolnej przestrzeni  $(X, x_0)$  działanie  $\pi_1(Y, y_0)$  na zbiorze  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  jest trywialne.*

*Dowód.* Niech  $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$  będzie (homotopijnym) mnożeniem w  $Y$  oraz  $[f] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$  a  $[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Wzór  $H(x, t) := \mu(f(x), \omega(t))$  definiuje homotopię między  $f$  a  $f$ , która na tworzącej  $\{x_0\} \times I$  jest drogą  $[\omega]$ . Wynika stąd, że  $h_{[\omega]}[f] = [f]$ .  $\square$





## Rozdział 4

# Grupy homotopii

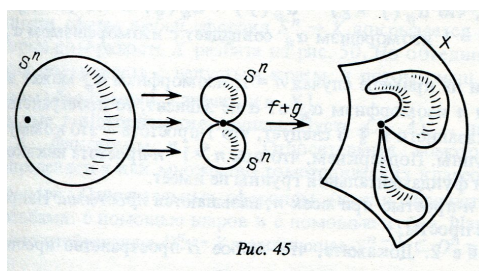
### 4.1 Grupy homotopii przestrzeni punktowanej

W badaniu zbiorów klas homotopii  $[X, Y]_*$  i homotopijnych równoważności szczególną rolę odgrywają funktory kowariantne na kategorii homotopii punktowanych przestrzeni topologicznych  $\mathcal{T}_{*h}$ , reprezentowane przez sfery  $(S^n, 1)$  dla  $n = 1, 2, \dots$  zwane funktorami grup homotopii. Dla  $n > 0$  sfery są bowiem obiektami ko-grupowymi w kategorii  $\mathcal{T}_{*h}$ , a więc zbiory  $[S^q, X]_*$  posiadają strukturę grupową.

**Definicja 4.1.1.** Dla  $n = 0, 1, 2, \dots$  na kategorii  $\mathcal{T}_{*h}$  funktor kowariantny reprezentowany przez sferę  $(S^n, 1)$  oznaczamy  $\pi_q(X, x_0) := [(S^q, 1), (X, x_0)]_*$  i dla  $n > 0$  nazywamy  $n$ -tą grupą homotopii przestrzeni punktowanej  $(X, x_0)$ , (dla  $n = 1$  także grupą podstawową.) Zbiór  $\pi_0(X, x_0)$  jest zbiorem z wyróżnionym punktem.

**Stwierdzenie 4.1.1.** Dla  $n > 0$  funktory  $\pi_n$  mają wartości kategorii grup, a dla  $n \geq 2$  w kategorii grup abelowych.

*Dowód.* Dowód wynika natychmiast z Stw. 1.7.1 oraz Wn. 2.5.1. □



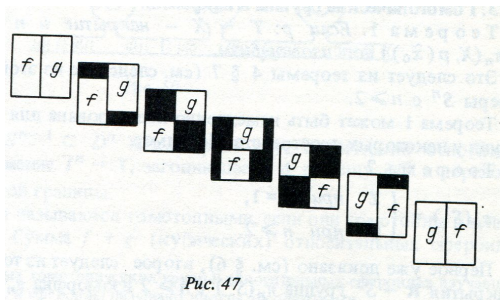
Rys. Wizualizacja działania w grupach homotopii  $(f, g: (S^n, 1) \rightarrow (X, x_0))$ .

Trzy strzałki między sferą a bukietem sfer pokazują działanie odwzorowania  $\nu$ . [9]

Ze Stw. 2.5.1 wynika natychmiast, że istnieje naturalny izomorfizm  $\pi_q(X, x_0) \simeq \pi_{q-1}(\Omega(X, x_0), \omega_{s_0})$ .

Ponieważ istnieje homeomorfizm  $S^q \simeq D^q/S^q$  więc elementy  $\pi_q(X, x_0)$  można utożsamiać z klasami homotopii odwzorowań par  $[(D^q, S^{q-1}), (X, x_0)]$ , czyli odwzorowaniami z dysku stałymi na sferze, lub dzięki homeomorfizmowi  $(I^q, \partial I^q) \simeq (D^q, S^{q-1})$  z  $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$ , czyli odwzorowaniami określonymi na kostce, stałymi na jej brzegu.

**Zadanie 49.** Zdefiniować wprost działanie w zbiorze  $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$  i zdefiniować izomorfizm grup  $\pi_q(X, x_0) \simeq [(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$ . Pokazać wprost, że to działanie dla  $q \geq 2$  jest przemienne.



Puc. 47

Rys. Wizualizacja przemienności działania w grupach homotopii  $f, g: (I^2/\partial I^2, *) \rightarrow (X, x_0)$ . [9]

**Stwierdzenie 4.1.2.** Dla dowolnych punktowanych przestrzeni  $(X, x_0), (Y, y_0)$  rzutowania na współrzędne  $Y \leftarrow X \times Y \rightarrow X$  zadają izomorfizm grup

$$\pi_q(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_q(X, x_0) \times \pi_q(Y, y_0).$$

*Dowód.* ZADANIE. Opisać izomorfizm odwrotny. □

**Zadanie 50.** Rzutowania zadają izomorfizm kategorii  $\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y)$ .

Pokażemy jak rozszerzyć przyporządkowanie  $X \ni x \mapsto \pi_n(X, x)$  do funktora na grupoidzie podstawowym  $\Pi(X)$ , uogólniając konstrukcję podaną w Stw. 1.9.1. Niech  $[\omega] \in \Pi(X)$  będzie dowolną drogą a  $[\varphi] \in \pi_q(X, x_0)$  gdzie  $\varphi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  oraz  $x_0 = \omega(0)$ . Zdefiniujemy odwzorowanie  $h_\omega(\varphi): (D^n, 1) \rightarrow (X, x_1)$  gdzie  $x_1 = \omega(1)$  następująco:

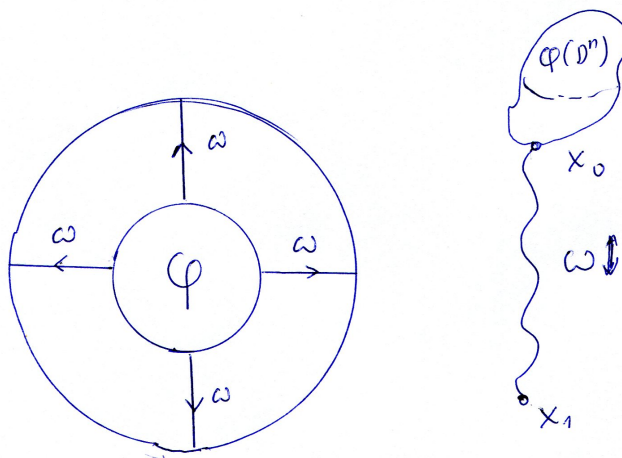
$$h_\omega(\varphi)(t\mathbf{v}) = \begin{cases} \varphi(2t\mathbf{v}) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \mathbf{v} \in S^{n-1} \\ \omega(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \mathbf{v} \in S^{n-1} \end{cases}$$

Dla  $n = 1$  otrzymujemy funktor opisany w Stw. 1.9.1.

**Stwierdzenie 4.1.3.** Powyższa konstrukcja ma następujące własności.

1.  $h_{\omega*\eta}(\varphi) \sim h_\omega(h_\eta(\varphi))$ ,
2. klasa homotopii  $[h_\omega(\varphi)]$  zależy tylko od klas homotopii  $[\omega]$  i  $[\varphi]$ ,
3. odwzorowania  $h_\omega: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$  są homomorfizmami.

*Dowód.* ZADANIE. □



Rys. Działanie grupy podstawowej na grupach homotopii.

**Wniosek 4.1.1.** Przyporządkowanie  $\Pi(X) \ni x \mapsto \pi_n(X, x)$  oraz  $\Pi(X) \ni [\omega] \mapsto h_{[\omega]}$  jest funktorem z grupoidu podstawowego przestrzeni  $X$  do kategorii grup. Dowlone przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  definiuje transformację naturalną funktorów  $\pi_n(X, -) \rightarrow \pi_n(Y, -) f_{\#}$ , gdzie  $f_{\#}: \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  jest funktorem indukowanym przez przekształcenie  $f$ .

**Zadanie 51.** Niech  $G$  będzie obiektem grupowym w kategorii  $T_{*h}$  (w szczególności grupą topologiczną), Podać bezpośredni dowód następujących faktów wynikającego z Stw. 1.7.1:

1. Mnożenie  $G \times G \rightarrow G$  zadaje działanie grupowe w zbiorach  $[S^q, G]_* = \pi_q(G, e)$  identyczne z działaniem zdefiniowanym przez strukturę kogrupową na sferze;
2. Grupa podstawowa  $\pi_1(G, e)$  jest przemienna.

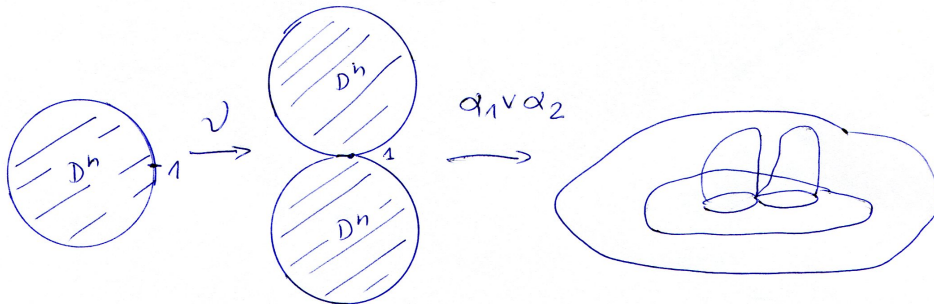
Wykazać, że działanie grupy podstawowej  $\pi_1(G, e)$  na grupach  $\pi_q(G, e)$  jest trywialnie.

**Zadanie 52.** Jeśli przestrzeń  $X$  jest ściągalna, to dla dowolnego punktu  $x_0 \in X$  i  $q > 0$ ,  $\pi_q(X, x_0) = 0$ .

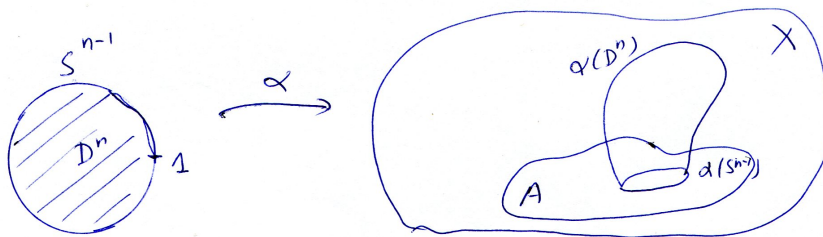
## 4.2 Relatywne grupy homotopii

Niech  $(X, A, a_0)$  będzie punktowaną parą tzn  $a_0 \in A \subset X$ . Rozważmy zbiór klas homotopii przekształceń trójek  $(D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ , który oznaczamy  $[(D^q, S^{q-1}), (X, A)]_*$ . W zbiorze tym można wprowadzić działanie przedłużając kompozycję  $S^{q-1} \xrightarrow{\nu} S^{q-1} \vee S^{q-1}$  do przekształcenia punktowanych par:

$$(D^q, S^{q-1}, 1) \xrightarrow{\bar{\nu}} (D^q \vee D^q, S^{q-1} \vee S^{q-1}, 1).$$



Rys. Działanie grupowe w zbiorze  $[(D^q, S^{q-1}), (X, A, a_0)]_*$ .



Rys. Element relatywnej grupy homotopii.

Z definicji relatywnej grupy homotopii natychmiast wynika, że  $\pi_q(X, a_0, a_0) \simeq \pi_q(X, a_0)$

**Stwierdzenie 4.2.1.** *Element  $[\alpha : (D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)] \in \pi_q(X, A, a_0)$  jest trywialny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homotopia  $H : (D^q, S^{q-1}) \times I \rightarrow (X, A)$  taka, że dla każdego  $H(p, 0) = \alpha(p)$  oraz  $p \in D^q$ ,  $H(p, 1) \in A$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $[\alpha] = 0$  w grupie  $\pi_n(X, A, a_0)$ . Wtedy istnieje homotopia  $H : (D^n, S^{n-1}, 1) \times I \rightarrow (X, A, a_0)$  taka, że  $H(z, 0) = \alpha(z)$  oraz  $H(z, 1) = x_0$ . Definiujemy homotopię:

$$H'(z, t) := \begin{cases} H(\frac{z}{1-\frac{t}{2}}, t) & \text{dla } 0 \leq \|z\| \leq 1 - \frac{t}{2} \\ H(\frac{z}{\|z\|}, 2 - 2\|z\|) & \text{dla } 1 - \frac{t}{2} \leq \|z\| \leq 1 \end{cases}$$

Jeśli taka homotopia istnieje, można ściągnąć odwzorowanie ściągnając dysk do punktu, czyli  $[\alpha] = 0$ .  $\square$

**Zadanie 53.** Opisać strukturę grupową w zbiorze klas homotopii przekształceń  $[(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)]$  gdzie  $I^q$  jest kostka  $q$ -wymiarową a  $\partial_1 I^q := \partial I^q \setminus \text{Int}(I^{q-1}) \times \{1\}$  [RYSUNEK] tak, aby zachodził izomorfizm grup

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)].$$

Relatywne grupy homotopii są funktorem zdefiniowanym na kategorii punktowanych par przestrzeni topologicznych. Projekcja na przestrzeń ilorazową  $X \rightarrow X/A$  zadaje naturalną transformację funktorów  $\pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X/A, [a_0])$ , która jednak na ogół nie jest izomorfizmem (nawet dla par Borsuka!).

Podobnie jak w przypadku absolutnym, omówimy zależność relatywnych grup homotopii  $\pi_q(X, A, a)$  od wyboru punktu wyróżnionego  $a \in A$ . Dla dowolnej drogi  $\omega : I \rightarrow A$  można zdefiniować homomorfizm  $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$ .

Dla drogi  $\omega : I \rightarrow A$  i sferoidu  $\alpha : (D^k, S^{k-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$  definiujemy przekształcenie  $H : S^{n-1} \times \{0\} \cup I \times I \rightarrow A$ ,  $H(x, 0) := \alpha(x)$ ,  $H(1, t) := \omega(t)$ , które rozszerzamy do  $\bar{H} : S^{n-1} \times I \rightarrow A$ , a następnie definiujemy przekształcenie  $H' : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow X$  wzorem  $H'(x, 0) := \alpha(x)$ ,  $H'(x, t) := \bar{H}(x, t)$  dla  $x \in S^{n-1}$ , które rozszerzamy do  $H'' : (D^n, S^{n-1}) \times I \rightarrow (X, A)$ . Definiujemy  $h_{[\omega]}([\alpha]) := [H''(-, 1)]$ . Homotopijna jednoznaczność podanych definicji oraz następujące stwierdzenie wynikają z Tw. 3.3.4:

**Stwierdzenie 4.2.2.** *Jeśli  $F : (D^n, S^{n-1}) \times I \rightarrow (X, A)$  jest homotopią taką, że  $F(1, 0) = a_0$ ,  $F(1, 1) = a_1$ , to  $[F(-, 1)] = h_{[\omega]}([F(-, 0)])$  gdzie  $\omega(t) := F(1, t)$ .*

$\square$

Zachodzi Stwierdzenie analogiczne do 4.1.1.

**Stwierdzenie 4.2.3.** *Przyporządkowanie  $\Pi(A) \ni a \mapsto \pi_n(X, A, a)$  oraz  $\Pi(A) \ni [\omega] \mapsto h_{[\omega]}$  jest funktorem z grupoidu podstawowego przestrzeni  $A$  do kategorii grup. Dowolne przekształcenie par  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  definiuje transformację naturalną funktorów  $\pi_n(X, A, -) \rightarrow \pi_n(Y, B, -) f_{\#}$ .*

Z ostatniego stwierdzenia wynika natychmiast, że homomorfizmy  $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$  są izomorfizmami oraz grupa  $\pi_1(A, a_0)$  działa na grupach  $\pi_q(X, A, a_0)$ .

**Twierdzenie 4.2.1** (Ciąg dokładny pary). *Dla dowolnej punktowanej pary  $X \supset A \ni a_0$  istnieje długi ciąg homotopii*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \dots$$

gdzie  $(A, a_0) \xrightarrow{i} (X, a_0) \xrightarrow{j} (X, A, a_0)$ . Przyporządkowanie punktowanej parze ciągu dokładnego grup homotopii jest funktorialne.

*Dowód.* Wynika natychmiast z definicji grup relatywnych  $\square$

Podobnie jak w przypadku ciągu homotopii rozwłóknienia, homomorfizm  $\pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0)$  łatwo jest opisać geometrycznie. Jeśli  $f: (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ , to definiujemy  $\partial([f]) := [f|_{S^{n-1}}]$ . Ta definicja oczywiście nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy homotopii  $[f]$ , a łatwo jest sprawdzić, że ciąg w Tw. 4.2.1 jest dokładny.

**Wniosek 4.2.1.** *Homomorfizm brzegu w ciągu dokładnym homotopii pary  $(D^n, S^{n-1}, 1)$ ,  $\partial: \pi_q(D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow \pi_{q-1}(S^{n-1}, 1)$  jest izomorfizmem dla  $q > 1$ .*

Zauważmy, że włożenie punktowanych par  $(D^n, S^{n-1}, 1) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1)$  jest homotopijną równoważnością, w więc  $\pi_q(D^n, S^{n-1}, 1) \simeq \pi_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1)$ .

Z ciągu dokładnego pary możemy skonstruować ciąg dokładny dla punktowanej trójki przestrzeni  $(X, A, B, b_0)$  będzie punktowaną trójką przestrzeni tzn. gdy  $b_0 \in B \subset A \subset X$ .

**Twierdzenie 4.2.2** (Ciąg dokładny trójki). *Dla dowolnej punktowanej trójki  $(X, A, B, b_0)$  istnieje długi ciąg homotopii*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, b_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(X, B, b_0) \xrightarrow{j\#} \pi_n(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, b_0) \xrightarrow{i\#} \dots$$

gdzie  $(A, B, b_0) \xrightarrow{i} (X, B, b_0) \xrightarrow{j} (X, A, b_0)$  są inkluzjami par. Przyporządkowanie punktowanej trójce ciągu dokładnego grup homotopii jest funktorialne.

*Dowód.* Homomorfizm brzegu  $\pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, b_0)$  definiujemy jako złożenie

$$\pi_{n+1}(X, A, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, b_0) \rightarrow \pi_n(A, B, b_0),$$

gdzie  $\partial$  jest homomorfizmem brzegu w ciągu punktowanej pary  $(X, A, b_0)$  a drugi homomorfizm jest indukowany przez włożenie  $A \subset B$ . Sprawdzenie dokładności pozostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

### 4.3 Ciąg dokładny grup homotopii rozwłóknienia

**Twierdzenie 4.3.1** (Ciąg dokładny rozwłóknienia). *Dla rozwłóknienia  $(F, e_0) \subset (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$  istnieje długi ciąg dokładny:*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(E) \xrightarrow{p\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \dots \\ \dots \xrightarrow{p\#} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p\#} \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

Grupa  $\pi_1(B, b_0)$  działa na zbiorze  $\pi_0(F, e_0)$  a przekształcenie  $\pi_0(F, e_0)/\pi_1(F, e_0) \xrightarrow{i\#} \pi_0(E, e_0)$  jest różnowartościowe. Przyporządkowanie rozwłóknieniu ciągu dokładnego grup homotopii jest funktorialne.



## Rozdział 5

# CW–kompleksy

### 5.1 Relatywne komórki i multikomórki

Przestrzeń powstałą przez doklejenie dysku wzdłuż brzegu (sfery) do innej przestrzeni będziemy nazywali relatywną komórką. Dysk jest oczywiście relatywną komórką, bo powstaje przez doklejenie dysku do sfery; także sfera jest relatywną komórką, bo powstaje przez doklejenie dysku do punktu. Dokładniej:

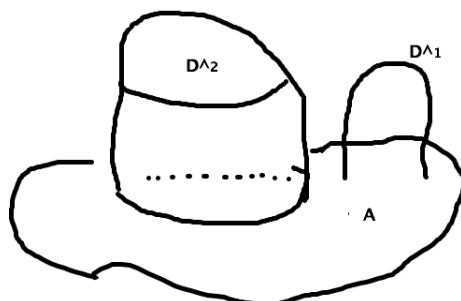
**Definicja 5.1.1.** *Relatywną  $n$ -wymiarową komórką nazywamy parę przestrzeni (Hausdorffa)  $(X, A)$  taką, że istnieje przekształcenie  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow A$  oraz homeomorfizm par rel  $A$ ,  $(X, A) \simeq (D^n \cup_{\varphi} A, A)$ .*

Zauważmy, że para  $(D^n \cup_{\varphi} A, A)$  jest homeomorficzna rel  $A$  z parą  $(C(\varphi), A)$ , gdzie  $C(\varphi)$  jest stożkiem odwzorowania  $\varphi$ . Możemy nieco uogólnić pojęcie relatywnej komórki, rozważając relatywne multikomórki.

**Definicja 5.1.2.** *Relatywną multikomórką nazywamy parę przestrzeni  $(X, A)$  taką, że istnieje rodzina przekształceń  $\{\varphi_j: S_j^{n_j-1} \rightarrow A\}_{j \in J}$  oraz homeomorfizm par rel  $A$ :*

$$(X, A) \simeq ((\coprod_{j \in J} D_j^{n_j}) \cup_{\sqcup \varphi_j} A, A).$$

*Relatywną multikomórkę nazywamy  $n$ -wymiarową jeśli dla każdego  $j \in J$ ,  $n_j = n$ .*



Rys. Relatywna multikomórka, przestrzeń  $A$  z dwoma doklejonymi komórkami, 1- i 2-wymiarową.

Jeśli doklejamy więcej niż jeden dysk, to multikomórka nie jest stożkiem odwzorowania  $\varphi = \sqcup \phi_j$ , bo wnętrza doklejanych dysków pozostają rozłączne!

Zauważmy, że jeśli  $(X, A)$  jest  $n$ -wymiarową relatywną multikomórką, to każde odwzorowanie  $\varphi_j$  rozszerza się do odwzorowania par  $\bar{\varphi}_j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$ , które jest homeomorfizmem na wnętrzu dysku  $\mathring{D}^n = D^n \setminus S^{n-1}$ . Odwzorowanie  $\varphi_j$  nazywamy *odwzorowaniem doklejającym* komórkę, a jego rozszerzenie  $\bar{\varphi}_j$  *odwzorowaniem charakterystycznym* komórki. Podprzestrzeń  $X \setminus A$  jest więc sumą rozłączną podzbiorów  $\coprod_{j \in J_n} C_j$  gdzie każda składowa  $C_j$  jest homeomorficzna z wnętrzem  $n$ -wymiarowego dysku. Domknięcia zbiorów  $C_j$  w  $X$  też łatwo opisać w terminach przekształcenia charakterystycznego:  $\text{cl}(C_j) = \text{cl}(\varphi(\mathring{D}^n)) = \varphi_j(D^n)$ . Zbiory  $\varphi_j(D^n)$  będziemy nazywali komórkami lub "bąblami", a zbiory  $\varphi(\mathring{D}^n)$  wnętrzem komórek lub bąbli (są to wnętrza w sensie topologicznym).

Jeśli  $(X, A)$  jest dowolną multikomórką, to po usunięciu jednego punktu  $x_j \in \varphi(\mathring{D}^{n_j})$  z wnętrza każdego bąbla istnieje retrakcja deformacyjna  $(X \setminus \{x_j\}_{j \in J}, A) \rightarrow (A, A) \subset (X, A)$ , bowiem dla dowolnego dysku i jego punktu  $p \in \mathring{D}^n$  istnieje retrakcja deformacyjna  $(D^n \setminus \{p\}, S^{n-1}) \rightarrow (S^{n-1}, S^{n-1}) \subset (D^n, S^n)$ .

**Stwierdzenie 5.1.1.** *Jeśli  $(X, A)$  jest relatywną multikomórką, to jest parą Borsuka (tzn. włożenie  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem).*

*Dowód.* Dowód wynika natychmiast z faktu, że włożenie  $S^{n-1} \subset D^n$  jest korozwłóknieniem (3.3.1), oraz Tw. 3.3.2 pkt. 4, 3.  $\square$

## 5.2 CW-kompleksy i odwzorowania komórkowe

**Definicja 5.2.1.** *Relatywny CW-kompleks to para  $(X, A)$  gdzie  $A \subset X$  jest domkniętą podprzestrzenią oraz wyróżniony jest wstępujący ciąg podprzestrzeni domkniętych, zwanych szkieletami:  $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots$  taki, że  $i X = \bigcup X^{(n)}$  oraz spełnione są warunki:*

1.  $X^{(0)} = A \sqcup V$ , gdzie  $V$  jest przestrzenią dyskretną (wierzchołki CW-kompleksu  $(X, A)$ )
2. Pary  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  są  $n$ -wymiarowymi relatywnymi multikomórkami;
3. Topologia w  $X$  jest słaba ze względu na podprzestrzenie  $X^{(n)}$  tzn. zbiór  $B \subset X$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $n \geq 0$  zbiór  $B \cap X^{(n)}$  jest domknięty.

Jeśli  $A = \emptyset$  to mówimy po prostu, że  $X$  jest CW-kompleksem.

Składowe spójne zbioru  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  nazywają się  $n$ -wymiarowymi komórkami kompleksu  $X$ . CW-kompleks  $X$  jest  $n$ -wymiarowy jeśli  $n$  jest najmniejszą liczbą taką, że w  $X$  nie ma komórek  $m$ -wymiarowych dla  $m > n$ .

Jeśli  $(X, A), (Y, B)$  są CW-kompleksami to przekształcenie par  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  nazywamy komórkowym jeśli dla każdego  $n$ ,  $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ .

*Przykład 5.2.1.* Dowolna relatywna multikomórka  $(X, A)$  jest relatywnym CW-kompleksem. Jeśli  $A \subset X$  jest podkompleksem CW-kompleksu  $X$ , to para  $(X, A)$  jest relatywnym CW-kompleksem, dla której  $X^{(n)} = X^{(n)} \cup A$ .

**Zadanie 54.** Jeśli CW-kompleks jest przestrzenią spójną, to jest także łukowo spójną.

Z warunku, że topologia CW-kompleksu jest słaba ze względu na filtrację szkieletami wynika, że jeśli  $X$  jest CW-kompleksem, to przekształcenie  $f: X \rightarrow Y$  jest ciągle wtedy i tylko wtedy gdy jego obcięcie do dowolnego szkieletu  $f: X^{(n)} \rightarrow Y$  jest ciągle.

**Definicja 5.2.2.** *Podkompleksem relatywnego CW-kompleksu  $(X, A)$  nazywamy domkniętą parę  $(Z, A) \subset (X, A)$  taką, że filtracja  $Z^{(0)} \subset Z^{(1)} \subset \dots \subset Z^{(n)} \subset \dots$  gdzie  $Z^{(n)} := Z \cap X^{(n)}$  spełnia warunki definicji relatywnego CW-kompleksu.*



*Przykład 5.2.2.* Szkielety są podkompleksami w  $X$ .

*Uwaga 5.2.1.* Z definicji podkompleksu wynika, że  $A^{(n)} \setminus A^{(n-1)} = (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}) \cap A$  jest sumą pewnej rodziny  $n$ -wymiarowych komórek w  $X^{(n)}$ .

**Zadanie 55.** Jeśli  $A \subset X$  jest podkompleksem, to przestrzeń ilorazowa ma naturalną strukturę CW-kompleksu, taką że odwzorowanie  $q: X \rightarrow X/A$  jest komórkowe.

**Twierdzenie 5.2.1.** *Włożenie podkompleksu w CW-kompleks jest parą Borsuka.*

*Dowód.* Niech  $A \subset X$  będzie podkompleksem. Dla każdego  $n$  para  $(X^{(n)}, A^{(n)})$  jest relatywną  $n$ -wymiarową multikomórką, a więc na mocy Stw. 5.1.1 jest parą Borsuka. Pozostaje wykazać, że  $(X, A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X^{(n)}, A^{(n)})$  jest parą Borsuka.  $\square$

Zachodzi ważne twierdzenie o aproksymacji komórkowej 5.5.1 mówiące, że dowolne odwzorowanie między CW-kompleksami jest homotopijne z odwzorowaniem komórkowym.

Na zakończenie wspomnimy o nietrudnym, ale pożytecznym pojęciu *relatywnego CW-kompleksu*, będące uogólnieniem pojęcia multikomórki (Def. 5.1.2).

**Zadanie 56.** Opisz szczegółowo strukturę CW-kompleksu powierzchni dwuwymiarowych (sfera, torus, precle, płaszczyzna rzutowa, butelka Kleina...).

## 5.3 Twierdzenie J.H.C. Whiteheada

Definicję relatywnych grup homotopii można przenieść na dowolne przekształcenia punktowane, niekoniecznie inkluzje podzbioru. Niech  $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$  będzie przekształceniem punktowanych przestrzeni. Rozpatrzmy jego walec  $Z_f := (A \wedge I^+) \cup_f B$  oraz podprzestrzeń  $A = A \times \{1\} \subset Z_f$ . Definiujemy grupę homotopii przekształcenia  $f$  jako  $\pi_q(f, a_0) := \pi_q(Z_f, X, a_0)$ . Mamy oczywiście długi ciąg dokładny:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(f, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(f, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \dots$$

z którego wynika następujące

**Stwierdzenie 5.3.1.** *Niech  $f: A \rightarrow B$  będzie przekształceniem, a  $n$  będzie liczbą naturalną. Następujące warunki są równoważne:*

1. dla każdego punktu  $a_0 \in A$  odwzorowanie  $f_{\#}: \pi_q(A, a_0) \rightarrow \pi_q(B, f(a_0))$  jest bijekcją dla  $q < n$  i surjekcją dla  $q = n$ ;
2. dla każdego punktu  $a \in A$ ,  $\pi_q(f, a_0) = 0$  dla  $q \leq n$ .

**Definicja 5.3.1.**

1. Przekształcenie spełniające warunki Stw. 5.3.1 nazywamy  $n$ -równoważnością;
2.  $\infty$ -równoważność nazywamy słabą homotopijną równoważnością;
3. Przestrzeń punktowana nazywa się  $n$ -spójna, jeśli włożenie punktu wyróżnionego jest  $n$ -równoważnością.

**Lemat 5.3.1.** *Jeśli  $(X, A, a_0)$  jest punktowanym relatywnym CW-kompleksem, a  $(Y, B, b_0)$  punktowaną parą przestrzeni taką, że  $\pi_q(Y, B, b_0) = 0$  dla wszystkich  $q$  takich, że w  $(X, A)$  występują komórki  $q$ -wymiarowe. Wtedy dowolne przekształcenie  $f: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, B, b_0)$  jest homotopijne rel  $A$  z przekształceniem  $g: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, B, b_0)$  takim, że  $g(X) \subset B$ .*

*Dowód.* Dowód przebiega przez indukcję po wymiarach szkieletów, czyli budujemy przekształcenie  $g$  szkielet po szkielecie, a na każdym szkielecie komórka po komórce. Zaczynamy od szkieletu  $X^{(0)} = A \sqcup V$ . Ponieważ  $Y$  jest przestrzenią łukowo spójną, więc obraz dowolnego wierzchołka  $f(v) \in Y$  można połączyć drogą  $\omega_v: I \rightarrow Y$  z punktem  $b_0$ . Definiujemy homotopię  $H_0: X_A := X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$

$$H_0(x, t) := \begin{cases} f(x) & \text{dla } (x, 0) \in X \times \{0\} \text{ oraz } (x, t) \in A \times I \\ \omega_x(t) & \text{dla } x \in V \end{cases}$$

Ponieważ włożenie  $X^{(0)} \subset X$  jest korozwłóknieniem, więc homotopia  $H_0$  rozszerza się do homotopii  $\bar{H}_0: X \times I \rightarrow Y$ . Kładąc  $g_0(x) := \bar{H}_0(x, 1)$  otrzymujemy odwzorowanie  $g_0: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takie, że  $g_0 \sim_A f$  oraz  $g_0(X^{(0)}) \subset B$ .

Założmy, że dla  $q < n$  skonstruowaliśmy przekształcenie  $g_q: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takie, że  $g_q \sim_A f$  oraz  $g_q(X^{(q)}) \subset B$ . Skonstruujemy odwzorowanie  $g_{q+1}$  w analogiczny sposób jak  $g_0$ , definiując najpierw homotopię  $H_{q+1}: X \times \{0\} \cup X^{(q+1)} \times I \rightarrow Y$ . Z definicji szkieletu istnieje homeomorfizm par rel  $X^{(q)}$

$$(X^{(q+1)}, X^{(q)}) \simeq \left( \left( \prod_{j \in J} D_j^{q+1} \right) \cup_{\sqcup \varphi_j} X^{(q)}, X^{(q)} \right).$$

Ponieważ  $\pi_q(Y, B, b_0) = 0$  dla  $q \leq n$ , więc dla każdej komórki  $D_j$  złożenie odwzorowania charakterystycznego  $\bar{\varphi}_j: (D^{q+1}, S^q) \rightarrow (X^{(q+1)}, X^{(q)})$  z odwzorowaniem  $g_q: (X, X^{(q)}) \rightarrow (Y, B)$  może być zdefiniowane rel  $S^q$  do odwzorowania, którego obraz jest zawarty w  $B$ , czyli istnieje homotopia:  $\bar{F}_j: (D^{q+1}, S^q, 1) \rightarrow (Y, B, b_0)$  taka, że  $\bar{F}_j(p, t) = g_q \bar{\varphi}_j(p)$  jeśli  $t = 0$  lub  $p \in S^q$ . Homotopie  $\bar{F}_j$  pozwalają zbudować homotopię rel  $X^{(q)}$ ,  $H_{q+1}: X \times \{0\} \cup X^{(q+1)} \times I \rightarrow Y$ , którą rozszerzamy na cylinder  $X \times I$  i na górnej podstawie otrzymujemy odwzorowanie  $g_{q+1}(x) := H_{q+1}(x, 1)$  homotopijne rel  $X^{(q)}$  z  $g_q$ , a więc także rel  $A$  z  $f$  i spełniające warunek  $g_{q+1}(X^{(q)}) \subset B$ .

Jeśli CW-kompleks  $(X, A)$  jest wymiaru  $n < \infty$ , otrzymujemy homotopię między  $f$  a  $g_n$  dzieląc odcinek na  $n$  części i składając homotopie  $H_q: H := H_0 * H_1 * \dots * H_n$ . Taką samą operację można wykonać gdy  $n = \infty$ , bowiem z definicji homotopie  $H_q$  są zgodne tzn.  $H_{q+1}|_{X^{(q)} \times I} = H_q$ .  $\square$

**Wniosek 5.3.1.** *Jeśli  $(X, A)$  jest relatywnym CW-kompleksem takim, że  $\pi_q(X, A, a_0) = 0$  dla wszystkich  $q$  takich, że w  $(X, A)$  występują komórki  $q$ -wymiarowe, to podzbiór  $A$  jest retraktem deformacyjnym przestrzeni  $X$ , w szczególności włożenie  $A \subset X$  jest homotopijną równoważnością.*

*Dowód.* Rozpatrujemy identyczność  $id: (X, A, a_0) \rightarrow (X, A, a_0)$  i stosujemy do niej lemat o kompresji 5.3.1.  $\square$

**Twierdzenie 5.3.1** (J.H.C. Whitehead<sup>1</sup>). *Niech  $f: Y \rightarrow Z$  będzie  $n$ -równoważnością (Def. 5.3.1) ( $1 \leq n \leq \infty$ ). Wtedy dla dowolnego CW-kompleksu  $X$  przekształcenie indukowane*

$$f_{\#}: [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$$

*jest surjekcją jeśli  $\dim X \leq n$  oraz jest injekcją jeśli  $\dim X < n$ . Jeśli przekształcenie  $f$  jest słabą homotopijną równoważnością (Def. 5.3.1), to dla dowolnego CW-kompleksu  $X$  odwzorowanie  $f_{\#}: [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$  jest bijekcją.*

*Uwaga 5.3.1.* Zauważmy, że jeśli  $n \geq 2$ , to również odwzorowania zbiorów niepunktowanych klas homotopii  $f_{\#}: [X, Y] \rightarrow [X, Z]$  są bijekcjami.

*Dowód.* J Przypomnijmy, że dowolne przekształcenie  $f: Y \rightarrow Z$  można rozłożyć na superpozycję  $X \subset Z_f \rightarrow Y$ , gdzie  $Z_f$  jest walcem przekształcenia  $f$ , włożenie jest korozwłóknieniem, a projekcja jest homotopijną równoważnością. Wystarczy więc pokazać, że włożenie  $X \subset Z_f$  indukuje bijekcję

<sup>1</sup>John Henry Constantine Whitehead (Chennai (Indie) 1904 – 1960 Princeton (USA))

zbiorów klas homotopii  $[X, Y]_* \rightarrow [X, Z_f]_*$ . Wynika to natychmiast z lematu o kompresji 5.3.1 zastosowanego do pary  $(Z_f, X)$  oraz CW-kompleksu  $X$  (dla stwierdzenia, że jest surjekcją gdy  $\dim X \leq n$ ) oraz relatywnego CW-kompleksu  $(X \times I, X \times \{0, 1\})$  dla stwierdzenia, że jest injekcją gdy  $\dim X < n$ .  $\square$

**Wniosek 5.3.2.** *Jeśli  $f: Y \rightarrow Z$  jest odwzorowaniem CW-kompleksów takim, że dla dowolnego  $x \in X$  i  $q \geq 0$  przekształcenie indukowane  $f_\# : \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$  jest bijekcją, to  $f$  jest homotopijną równoważnością.*

## 5.4 Aproksymacja gładka

Dowód twierdzenia o aproksymacji komórkowej 5.5.1 opiera się na wariacie twierdzenia Sarda, być może znanego Czytelnikowi z Analizy Matematycznej, które zastosujemy do odwzorowań relatywnych komórek.

**Definicja 5.4.1.** *Odwzorowanie relatywnych komórek  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  nazywa się regularne jeśli przy pewnym wyborze odwzorowań charakterystycznych złożenie odwzorowań (oznaczone  $\hat{f}$ )*

$$\hat{G} := \chi_X^{-1}(G) \xrightarrow{\chi_X} X \setminus A \xrightarrow{f} Y \setminus B \xrightarrow{\chi_Y^{-1}} \hat{D}^m$$

ma wartość regularną tzn. istnieje  $y_0 \in D^m$  taki, że dla pewnego otoczenia  $U \supset \hat{f}^{-1}(y_0)$  odwzorowanie  $\hat{f}|_U$  jest gładkie oraz pochodna jest epimorfizmem.

Przypomnijmy, że jeśli  $f: M \rightarrow N$  odwzorowaniem gładkim między rozmaitościami, to punkt  $x \in M$  nazywamy krytycznym jeśli  $Df_x: TM_x \rightarrow TN_x$  nie jest epimorfizmem. Punkt  $y \in N$  nazywa się wartością regularną jeśli dla każdego  $x \in f^{-1}(y)$ ,  $Df_x: TM_x \rightarrow TN_x$  jest epimorfizmem. Zauważmy, że jeżeli  $\dim M < \dim N$ , to  $y \in N$  jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{-1}(y)$  jest zbiorem pustym.

**Twierdzenie 5.4.1** (Twierdzenie o aproksymacji gładkiej). *Dla dowolnego odwzorowanie relatywnych komórek  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  istnieje odwzorowanie regularne  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takie, że  $f \sim g \text{ rel } (A)$ .*

Dowód (p. [15]Lekcja 2 opiera się na tw. Weierstrassa i tw. Sarda i przebiega metodą "koncentrycznych dysków". [RYSUNEK].

**Twierdzenie 5.4.2** (Twierdzenie Weierstrassa). *Dla każdego przekształcenia ciągłego  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  określonego na otwartym podzbiórze  $U \subset \mathbb{R}^n$ , podzbioru zwanego  $K \subset U$  oraz  $\varepsilon > 0$  istnieje odwzorowanie gładkie  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  takie, że  $|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$  dla  $x \in K$ .*  $\square$

*Dowód Tw. 5.4.1.* Zdefiniujemy funkcję odstepu punktu od brzegu zbioru  $\hat{G}: \rho := d(\cdot, \partial\hat{G}): \hat{D}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $D_{1/2}^m \subset D^m$  będzie koncentrycznym dyskiem o średnicy  $1 > r > 0$ . Podzbiór  $\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m) \subset \hat{G} \subset \hat{D}^n$  jest zwarty, bo  $\chi_A(\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)) = f^{-1}(\chi_B(D_{1/2}^m))$  jest podzbiorem domkniętym w  $X$  i zawartym w  $X \setminus A$ . Stąd funkcja  $\rho$  jest ograniczona z dołu przez pewną liczbę dodatnią:  $\rho(x) \geq 2\delta$  dla  $x \in \hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)$ . Między zbiór  $\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m)$  a  $\hat{G}$  można wpisać dwa zbiory zwarte

$$\hat{f}^{-1}(D_{1/2}^m) \subset \hat{K}_{2\delta} \subset K_{2\delta} \subset \hat{K}_\delta \subset K_\delta \subset \hat{G}$$

gdzie  $K_\lambda := \{x \in \hat{G}: d(x, \partial\hat{G}) \geq \lambda\}$ .

Ponieważ  $K_\delta$  jest zbiorem zwartym, więc istnieje  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  takie, że  $\varepsilon$ -otoczenie zbioru  $\hat{f}(K_\delta)$  jest zawarte w  $\hat{D}^m$ .

Zastosujemy twierdzenie Weierstrassa do  $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \hat{D}^m$ . Istnieje funkcja gładka  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  taka, że dla  $x \in K_\delta$  zachodzi nierówność  $|\bar{f}(x) - \hat{f}(x)| < \varepsilon$ .

Zdefiniujemy homotopię  $\hat{F}: \hat{G} \times I \rightarrow \hat{D}^m$ :

$$\hat{F}(x, t) := \begin{cases} \hat{f}(x) & \text{dla } x \in \hat{G} \setminus K_\delta \\ (1 - t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta}) \hat{f}(x) + t \frac{\rho(x) - \delta}{\delta} \bar{f}(x) & \text{dla } x \in K_\delta \setminus K_{2\delta} \\ (1 - t) \hat{f}(x) + t \bar{f}(x) & \text{dla } x \in K_{2\delta} \end{cases}$$

Oznaczmy  $\hat{f}_t(x) := \hat{F}(x, t)$ . Zauważmy, że

1.  $\hat{f}_0(x) = \hat{f}(x)$
2.  $|\hat{f}_1(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon < \frac{1}{4}$  dla  $x \in \hat{G}$
3.  $\hat{f}_1(x) = \bar{f}(x)$  dla  $x \in K_{2\delta}$ , a więc  $\hat{f}_1$  jest gładkie na  $\hat{K}_{2\delta} \supset \hat{f}^{-1}(D_r^m)$
4.  $\hat{f}_1(x) = \hat{f}(x)$  dla  $x \in \hat{G} \setminus K_\delta$
5.  $\hat{f}_1^{-1}(D_{1/4}^m) \subset K_{2\delta}$  oraz  $\bar{f}^{-1}(D_{1/4}^m) \subset K_{2\delta}$

Zauważmy, że z punktów 3 i 5 wynika, że dla dowolnego punktu  $y \in D_{1/4}^m$  zachodzi równość:  $\hat{f}_1^{-1}(y) = \bar{f}^{-1}(y)$ . Ponieważ przekształcenie  $\bar{f}$  jest gładkie, więc  $\hat{f}_1$  jest także gładkie na  $\hat{K}_{2\delta}$  a więc na mocy tw. Sarda posiada wartość regularną  $y_0 \in D_{1/4}^m$ , co czyni przekształcenie  $\hat{f}_1$  regularnym.

Przy pomocy homotopii  $\hat{F}$  zdefiniujemy homotopię  $F: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$

$$F(x, t) := \begin{cases} \chi_B(\hat{F}(\chi_A^{-1}(x), t)) & \text{dla } x \in G \\ f(x) & \text{dla } x \in X \setminus \chi_A(K_\delta) \end{cases}$$

Homotopia  $F$  ma następujące własności:

- 1)  $F(a, t) = f(a)$ , a więc  $F$  jest homotopią rel  $A$ .
- 2)  $F(x, 0) = f(x)$
- 3) Dla

$$f_1(x) := F(x, 1) = \begin{cases} \chi_B(\hat{f}_1(\chi_A^{-1}(x))) & \text{dla } x \in G \\ f(x) & \text{dla } x \in X \setminus \chi_A(K_\delta) \end{cases}$$

$f_1^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$  oraz  $\chi_B^{-1} \circ f_1 \circ \chi_A = \hat{f}_1$  na  $\hat{G}$  a więc przekształcenie  $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  jest regularne.

□

*Uwaga 5.4.1.* Ostatnie twierdzenie zachodzi także dla odwzorowań  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  gdzie  $(X, A)$  jest relatywną komórką,  $(Y, B)$  jest relatywną multikomórką a odwzorowanie regularne definiujemy tak, że we wnętrzu każdej komórki  $(Y, B)$  ma istnieć wartość regularna.

**Wniosek 5.4.1.** *Jeśli  $(X, A)$  jest relatywną komórką, a  $(Y, B)$  jest relatywną multikomórką oraz  $\dim(X \setminus A) < \dim(Y \setminus B)$  to dowolne odwzorowanie  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  jest homotopijne rel  $A$  z odwzorowaniem  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takim, że  $g(X) \subset B$ .*

*Dowód.* Na mocy tw. o aproksymacji gładkiej 5.4.1 każde odwzorowanie jest homotopijne z odwzorowaniem regularnym, możemy więc zakładać, że  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  jest odwzorowaniem regularnym. Wobec nierówności wymiarów oznacza to, że w każdej komórce istnieje punkt  $y_i \in Y \setminus B$  taki, że  $y_i \notin f(X)$ . Relatywną multikomórkę po usunięciu punktu z każdego "bąbla" można deformacyjnie zretrahować na  $(B, B)$ . □

**Wniosek 5.4.2.** *Jeśli  $(Y, B, b_0)$  jest punktowym relatywnym CW-kompleksem, a  $(X, A, a_0)$   $k$ -wymiarową punktową relatywną komórką, to dowolne przekształcenie  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  jest homotopijne rel  $A$  z odwzorowaniem  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takim, że  $g(X) \subset Y_B^{(k)}$ . W szczególności znikają relatywne grupy homotopii  $\pi_k(Y, Y^{(n)}, b_0) = 0$  dla  $0 < k \leq n$  (tzn. para  $(Y, B, b_0)$  jest  $n$ -spójna).*

*Dowód.* Niech  $\alpha: (X, A, a_0) \rightarrow (Y, Y_B^{(n)}, b_0)$ . Ponieważ dysk  $D^k$  jest przestrzenią zwartą, więc obraz  $\alpha(\mathring{D}^k)$  jest zawarty w pewnym skończonym podkompleksie, a więc możemy zakładać, że  $Y$  jest skończonym kompleksem wymiaru  $m > k$ . Pokażemy indukcyjnie, że

$$\alpha \sim \alpha_i: (X, A, a_0) \rightarrow (Y_B^{(m-i)}, Y_B^{(n)}, b_0)$$

dla  $i = 1, \dots, m-n$ . Wynika to natychmiast z poprzedniego wniosku zastosowanego do odwzorowań  $\alpha_i: (X, A, a_0) \rightarrow (Y_B^{(m-i)}, Y_B^{(m-i-1)}, b_0)$ .  $\square$

**Wniosek 5.4.3.** *Dla dowolnego CW-kompleksu i dowolnego  $n \geq 0$  homomorfizm indukowany przez włożenie  $X^{(n)} \subset X$  indukuje izomorfizm  $\pi_q(X^{(n)}, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_q(X, x_0)$  dla  $q < n$  i epimorfizm dla  $q = n$ .*  $\square$

*Uwaga 5.4.2.* Ostatnie tw. zachodzi też dla relatywnych CW-kompleksów, tylko trzeba skorzystać z ciągu dokładnego homotopii trójki przestrzeni.

**Wniosek 5.4.4.** *Dla dowolnego przekształcenie relatywnych komórek  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takich, że  $\dim X \setminus A < \dim Y \setminus B$  istnieje homotopia rel  $A$ ,  $F: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  taka, że  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) \in B$ .*

## 5.5 Aproksymacja komórkowa

Korzystając z Lematu o kompresji 5.3.1 oraz Wnioski 5.4.2 podamy dowód twierdzenia o homotopijnej aproksymacji komórkowej przekształceń między CW-kompleksami.

**Twierdzenie 5.5.1.** *Jeśli  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  jest odwzorowaniem relatywnych CW-kompleksów, to istnieje komórkowe przekształcenie  $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takie, że  $f \sim g$  rel  $A$ .*

*Dowód.* Dowód przeprowadzamy indukcyjnie, konstruując dla każdego  $q$  przekształcenie  $g_q: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  takie, że  $g_q(X^{(q)}) \subset Y^{(q)}$  oraz  $f \sim g_q$  rel  $A$ , dbając jednocześnie o zgodność homotopii.

Ponieważ  $\pi_0(Y, Y^{(0)}) = 0$ , bowiem w każdej składowej łukowej musi znajdować się wierzchołek, więc z Lematu o kompresji 5.3.1 wynika, że istnieje  $g_0: (X, A) \rightarrow (Y, B) \subset (Y, Y^{(0)})$  takie, że  $g_0(X^{(0)}) \subset Y^{(0)}$  oraz istnieje homotopia  $H_0: f \sim g_0$  rel  $A$ .

Załóżmy, że skonstruowane jest odwzorowanie  $g_q: (X, X^{(q)}, A) \rightarrow (Y, Y^{(q)}, B)$  oraz homotopia  $H_q: f \sim g_q$  rel  $A$ . Z Wniosku 5.4.2 wiemy, że  $\pi_k((Y, Y^{(q)})) = 0$ . Z Lematu o kompresji 5.3.1 wynika, że istnieje homotopia  $H_{q+1}: f \sim g_{q+1}$  rel  $X^{(q)}$ , taka że  $g_{q+1}(X^{(q+1)}) \subset Y^{(q+1)}$ . Składając te homotopie, tak jak w dowodzie Lematu o kompresji 5.3.1 otrzymujemy żądane przekształcenie i homotopię.  $\square$

Jeśli  $(X, A)$  jest relatywnym CW-kompleksem to w walcu  $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$  rozpatrujemy produktową strukturę komórkową zadaną przez wyjściową strukturę na  $(X, A)$  oraz strukturę na odcinku zadaną przez dwa końce i odcinek je łączący.

**Wniosek 5.5.1.** *Jeśli dwa przekształcenia komórkowe relatywnych CW-kompleksów  $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  są homotopijne, to istnieje homotopia między nimi  $F: (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$  będąca przekształceniem komórkowym.*  $\square$

**Wniosek 5.5.2.** Dla dowolnego relatywnego CW-kompleksu i liczby  $n \geq 0$  włożenie  $(X^{(n)}, A) \subset (X, A)$  jest  $n$ -równoważnością tzn. indukuje bijekcję  $\pi_q(X^{(n)}, A) \rightarrow \pi_q(X, A)$  dla  $q < n$  oraz surjekcję dla  $q = n$ .

□

## 5.6 Homotopijne własności CW-kompleksów

Udowodnimy ważne twierdzenie o własnościach homotopijnych CW-kompleksów, będące wnioskiem z twierdzenia o aproksymacji komórkowej.

**Twierdzenie 5.6.1.** Niech  $(X, A)$  będzie  $n$ -spójnym relatywnym CW-kompleksem (tzn.  $\pi_q(X, A, a) = 0$  dla dowolnego  $a \in A$  i  $q \leq n$ ). Wtedy istnieje relatywny CW-kompleks  $(Y, B)$  taki, że  $Y^{(n)} \subset B$  oraz włożenie  $(X, A) \subset (Y, B)$ , które jest homotopijną równoważnością.

*Dowód.* Dowód poprowadzimy przez indukcję ze względu na  $n$ , poczynając od  $n = 0$ . Założenie oznacza wtedy, że w każdej składowej łukowej przestrzeni  $X$  leży pewien punkt  $a \in A$ . Założymy więc, że  $X$  jest przestrzenią łukowo spójną i wybierzmy punkt  $a_0 \in A$ . Dowolny wierzchołek  $v \in X^{(0)} \setminus A =: V$  możemy połączyć drogą  $\omega_v: I \rightarrow X$  z  $a_0$ . Dzięki twierdzeniu o aproksymacji komórkowej 5.5.1 możemy założyć, że droga ta leży w 1-szkielecie. Rozważmy dysk  $D^2$  i jego rozbić komórkowe na dwa bieguny, dwa łuki  $S_+^1, S_-^1$  i jedną komórkę 2-wymiarową. Zdefiniujemy relatywny kompleks  $(Y, B)$  przyklejając dla każdego wierzchołka  $v$  dysk  $D_v^2$  do  $X$  wzdłuż dolnego łuku, przy pomocy odwzorowania  $\omega_v: Y := \coprod_{v \in V} D_v^2 \cup_{\omega_v} X$  i definiując  $B = A \cup \bigcup_{v \in V} S_{+,v}^1$ . Zauważmy,

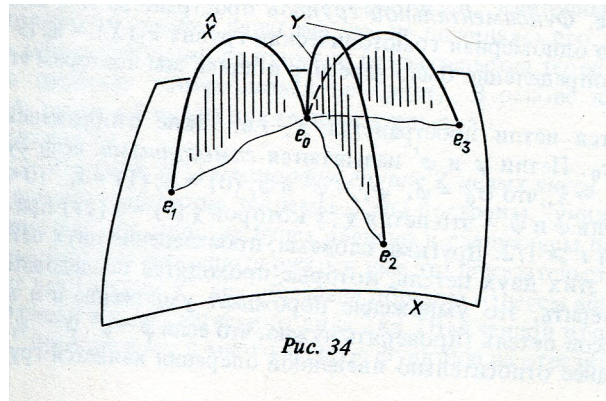
że  $(Y, B)$  jest relatywnym CW-kompleksem, który powstał przez dodanie dla każdego wierzchołka  $v \in V$  jednej komórki 1-wymiarowej i jednej komórki 2-wymiarowej. Do  $B$  zaliczyliśmy obok punktów z  $A$  wszystkie wierzchołki  $v \in V$  oraz górne łuki  $S_{-,v}^1$  łączące punkt  $a_0 \in A$  z wierzchołkami. Jest jasne, że  $Y^{(0)} = B$  oraz włożenie  $(X, A) \subset (Y, B)$  jest homotopijną równoważnością.

Założmy, że twierdzenie zachodzi dla  $n - 1$  i udowodnimy, że stąd wynika dla  $n$ . Niech  $(X, A)$  będzie  $n$ -spójną parą. Na mocy założenia indukcyjnego możemy założyć, że  $X^{(n-1)} \subset A$ , a więc komórki  $n$ -wymiarowe są doklejone do  $A$  oraz  $\pi_n(X, A, a_0) = 0$ . Powtarzamy procedurę z przypadku  $n = 0$ . Dla dowolnej  $n$ -wymiarowej komórki jej odwzorowania charakterystyczne  $\bar{\alpha}_i: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  jest homotopijne rel  $A$  z odwzorowaniem  $\bar{\alpha}'_i$  takim, że  $\bar{\alpha}'_i(D^n) \subset A$ . Homotopię można traktować jako odwzorowanie  $H_i: (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X, A)$  które na górnej półsfery jest odwzorowaniem  $\bar{\alpha}_i$  a na dolnej  $\bar{\alpha}'_i$ . Homotopię tę możemy traktować jako odwzorowanie  $H_i: D^{n+1} \rightarrow X$ , które na dolnej półsfery  $S_-^n$  jest odwzorowaniem  $\alpha'_i$  a na górnej  $S_+^n$  jest odwzorowaniem  $\alpha_i$ . Utożsamiając dysk  $D^{n+1}$  z południową półsfery sfer  $S^{n+1}$  ograniczającej dysk  $D^{n+2}$  doklejamy ten dysk do przestrzeni  $X$  odwzorowaniem  $H_i$ . Rozbijając dysk  $D^{n+2}$  na cztery komórki: jedną 0-wymiarową, jedną  $n$ -wymiarową, dwie  $n + 1$ -wymiarowe i jedną  $n + 2$ -wymiarową otrzymujemy rozbić  $X$  na CW-kompleks - do kompleksu  $X$  dodaliśmy dwie komórki:  $n + 1$ -wymiarową i  $n + 2$ -wymiarową. Wykonując tę operację dla każdej komórki  $n$ -wymiarowej otrzymujemy relatywny CW-kompleks  $Y := \coprod D^{n+2} \cup_{H_i} X$ ,  $B := \coprod H_i(S_-^{n+1}) \cup A$ . Łatwo zauważyć, że włożenie  $(X, A) \subset (Y, B)$  jest homotopijną równoważnością (a nawet  $(X, A)$  jest retraktem deformacyjnym  $(Y, B)$ ). □

**Wniosek 5.6.1.** Niech  $X$  będzie  $n$ -spójnym CW-kompleksem (tzn.  $\pi_q(X, x_0) = 0$  dla  $q \leq n$ ). Wtedy  $X$  jest homotopijnie równoważny z CW-kompleksem  $Z$  takim, że  $Z^{(n)} = \{x_0\}$ .

*Dowód.* Z twierdzenia 5.6.1 wynika istnienie relatywnego CW-kompleksu  $(Y, B)$  oraz włożenia  $(X, x_0) \subset (Y, B)$  będącego homotopijną równoważnością co oznacza w szczególności, że podzbiór  $B \subset Y$  jest ściągalny i  $Y^{(n)} \subset B$ . Zdefiniujemy przestrzeń  $Z := Y/B$  jest to oczywiście CW-kompleks homotopijnie równoważny z  $Z$ , a więc także z  $X$  taki, że  $Z^{(n)} = pt.$ . □





Puc. 34

Rys. Doklejanie komórek 1-wymiarowych w celu ściągnięcia 0-szkieletu do punktu. [9]





## Rozdział 6

# Grupy homotopii CW-kompleksów

CW-kompleks powstaje przez sukcesywne doklejanie komórek. Jeżeli chcemy policzyć jego grupy homotopii, to naturalnym jest pytanie, jak zmieniają się one po doklejeniu jednej komórki. Zaczniemy od odpowiedzi na nie.

### 6.1 Grupy homotopii relatywnych komórek

Niech  $(X, A, a_0)$  będzie  $n$ -wymiarową relatywną komórką z wyróżnionym punktem. Zbadamy grupy homotopii  $\pi_k(X, A, a_0)$  dla  $k \leq n$ . Przypomnijmy, że elementy tej grupy mogą być interpretowane jako klasy homotopii przekształceń  $(D^k, S^{k-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$  a dowolna droga  $\omega: I \rightarrow A$  taka, że  $\omega(0) = a_0, \omega(1) = a_1$  wyznacza izomorfizm  $h_{[\omega]}: \pi_k(X, A, a_0) \rightarrow \pi_k(X, A, a_1)$  (p. Wn. 4.2.3), a więc grupa podstawowa  $\pi_1(A, a_0)$  działa na grupie relatywnej  $\pi_k(X, A, a_0)$ . Jeśli  $k > 2$  to grupa relatywna  $\pi_k(X, A, a_0)$  jest abelowa, a więc działanie  $\pi_1(A, a_0)$  rozszerza się do struktury modułu nad pierścieniem grupowym  $\mathbb{Z}[\pi_1(A, a_0)]$ .

**Zadanie 57.** Opisz zbiór  $\pi_1(X, A, a_0) = 0$  jeśli  $(X, A, a_0)$  jest 1-wymiarową relatywną komórką.

**Twierdzenie 6.1.1.** Niech  $(X, A, a_0)$  będzie  $n$ -wymiarową ( $n \geq 2$ ) punkowaną relatywną komórką a  $\bar{\chi}: (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$  jej odzworowaniem charakterystycznym. Wtedy

1. Grupa  $\pi_k(X, A, a_0) = 0$  dla  $k < n$ .
2. Grupa  $\pi_n(X, A, a_0)$  jest generowana przez elementy  $\pi_1(A, a_0)$ -orbity klasy homotopii  $[\bar{\chi}]$

W następnym rozdziale wzmocnimy pkt. 2 wykazując, że dla  $n > 2$  grupa  $\pi_n(X, A, a_0)$  jest wolnym  $\mathbb{Z}[\pi_1(A, a_0)]$ -modułem generowanym przez klasę homotopii  $[\bar{\chi}]$ , a w przypadku  $n = 2$ , gdy  $\pi_2(X, A, a_0)$  może być nieabelowa, homomorfizm brzegu w ciągu dokładnym pary  $\partial: \pi_2(X, A, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$  zadaje strukturę wolnego **crossed module**. Zauważmy, że w przypadku  $n = 2$  z twierdzenia van Kampena wynika opis obrazu homomorfizmu brzegu w ciągu dokładnym pary

$$\pi_2(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0) \rightarrow 0.$$

Znikanie grup homotopii relatywnej  $n$ -komórki w wymiarach  $< n$  (pkt.1) wynika natychmiast z twierdzenia o aproksymacji przekształceń komórek przekształceniem regularnym p. Wniosek 5.4.4 oraz Zad 4.2.1.

Dowód Tw. 6.1.1 pkt. 2 poprzedzimy lematami opisującymi grupy homotopii przekłutych dysków.

**Lemat 6.1.1.** Niech  $n > 2$  oraz  $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathring{D}^n \subset D^n$  będzie skończonym podzbiorem wnętrza dysku. Włożenia  $(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$  i dla  $q \leq n$  indukują izomorfizm grup homotopii

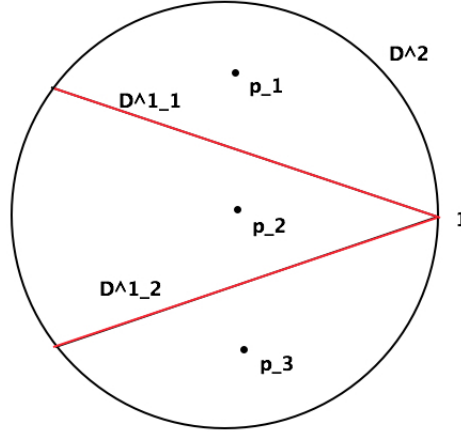
$$\pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \rightarrow \prod_{i=1}^k \pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) = \bigoplus_{i=1}^k \pi_q(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

przy czym element  $[(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)] \in \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$  jest obrazem elementu  $[(D^n, S^{n-1}, 1) \xrightarrow{\iota_i} (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)] \in \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$  będącego przeciągnięciem afinicznego zanurzenia  $(D^n, S^{n-1}, 1) \xrightarrow{\iota_i} (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$  na dysk o środku w punkcie  $p_i$ , nie zawierający żadnego innego punktu  $p_j$ , przez drogę łączącą w  $D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  punkt 1 z  $\iota_i(1)$ .

W dowodzie lematu 6.1.1 skorzystamy z własności jednorodności przestrzeni euklidesowej, opisaną w następującym zadaniu.

**Zadanie 58.** Jeśli  $n > 1$  to dla dowolnych dwóch ciągów różnych punktów  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$  oraz  $p'_1, \dots, p'_k \in \mathbb{R}^n$  istnieje homeomorfizm  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taki, że dla każdego  $1 \leq i \leq k$ ,  $h(p_i) = p'_i$ . Co więcej można wybrać homeomorfizm  $h$  o zwartym nośniku (tzn. taki, że poza pewnym zbiorem zwartym jest identycznością.).

*Dowód.* Korzystając z Zad.58 możemy założyć, że  $p_i = (0, -1 + \frac{i}{k+1}, \dots, 0)$ . Mając tak wygodnie rozmieszczone punkty rozpatrzmy bukiet  $B := D_1^{n-1} \vee \dots \vee D_{k-1}^{n-1}$  złożony z  $k-1$  dysków  $n-1$  wymiarowych zaczepionych w punkcie 1 i dzielących dysk  $D^n$  na  $k$  podzbiorów, z których każdy zawiera dokładnie jeden punkt  $p_i$ . Na rysunku pokazano taki podział dla  $n=2$  i  $k=3$ . Podział dysku  $D^2$  dla większej  $k$  punktów uzyskujemy rozkładając je na osi pionowej i wprowadzając  $k-1$  siecznych, a w wyższych wymiarach przez zawieszenie dysku 2-wymiarowego z wyróżnionymi siecznymi.



Rys. Podział dysku  $D^2$  na sektory zawierające po jednym punkcie  $p_i$ .  $B = D_1^1 \vee D_2^2$

Włożenie bukietu jest korozwłóknieniem, bukiet jest ściągalny a więc odwzorowanie ilorazowe

$$(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \xrightarrow{p_B} (D^n/B, D^n \setminus \{p_i\}/B, 1) = \bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

jest homotopijną równoważnością. Mamy więc dla  $n > 2$  izomorfizm

$$\pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \xrightarrow{\cong} \pi_n\left(\bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)\right) = \bigoplus_{i=1}^k \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1).$$

Ostatni izomorfizm wynika z twierdzenia o aproksymacji komórkowej p. dowód Tw. 6.3.2, ponieważ

$$\pi_n\left(\bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)\right) \simeq \pi_{n-1}\left(\bigvee_{i=1}^k (S^{n-1}, 1)\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \pi_{n-1}(S^{n-1}, 1) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1).$$

(Znajomość grupy  $\pi_{n-1}(S^{n-1}, 1)$  nie jest konieczna!)

Rozpatrzmy teraz element w  $\pi_n(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$  zadany przez włożenie  $(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$ . Odwzorowanie to jest swobodnie homotopijne z włożeniem  $\iota'_i : (D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$  na dowolny dysk o środku w punkcie  $p_i$ . Zatem element  $[(D^n, S^{n-1}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)] = h_{\omega'_i}[\iota'_i]$  dla pewnej drogi  $\omega'_i$  (p. Stw. 4.2.2). Odwzorowania  $\iota_i : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, \iota_i(1))$  i droga  $\omega_i$  takie, że  $p_B \circ \iota_i = \iota'_i$  i  $p_B \circ \omega_i = \omega'_i$  spełniają tezę. Zauważmy także, że złożenie

$$(D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \xrightarrow{p_B} (D^n/B, D^n \setminus \{p_i\}/B, 1) = \bigvee_{i=1}^k (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1) \rightarrow (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$$

jest oczywiście homotopijne z włożeniem  $(D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \subset (D^n, D^n \setminus \{p_i\}, 1)$ .  $\square$

*Uwaga 6.1.1.* Dla  $n = 2$ :  $\pi_2(D^2, D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \simeq \pi_1(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1)$  jest grupą wolną nieabelową o  $k$ -generatorach.

**Wniosek 6.1.1.** Niech  $\alpha : (D^n, 1) \rightarrow (X, x_0)$  będzie odwzorowaniem takim, że przeciwobraz pewnego punktu  $y \in X$ ,  $y \neq x_0$  jest zbiorem skończonym, zawartym we wnętrzu dysku tzn.  $\alpha^{-1}(y) = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathring{D}^n$ . Jeśli  $n > 2$ , to sferoid

$$[\alpha : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, X \setminus \{y\}, x_0)] \in \pi_n(X, X \setminus \{y\}, x_0)$$

jest postaci  $\pm h_{[\omega_1]}([\alpha_1]) \pm \dots \pm h_{[\omega_k]}([\alpha_k])$  gdzie  $D_i^n \subset \mathring{D}^n$  jest dyskiem o środku w  $p_i$ , nie zawierającym żadnego punktu  $p_j$  dla  $i \neq j$ ,  $\alpha_i = \alpha|_{(D_i^n, D_i^n \setminus \{p_i\})}$ , a  $[\omega_i]$  jest drogą w  $X \setminus \{y\}$  łączącą punkt  $\alpha(1_i)$  z  $x_0$ .

*Dowód.* Wynika z Lematu 6.1.1  $\square$

**Lemat 6.1.2.** Niech  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  oraz  $f : (U, U \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  będzie dyfeomorfizmem. Wtedy istnieje otoczenie  $U' \ni 0$  takie, że  $f \sim Df_0 : (U', U' \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

*Dowód.* Zdefiniujemy homotopię  $H : Df_0 \sim f$  na dowolnym dysku  $U' \subset U$  o środku w  $0 \in U'$  przy pomocy ilorazu różnicowego:

$$H(v, t) := \begin{cases} f(tv)/t & \text{dla } t > 0 \\ Df_0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

$\square$

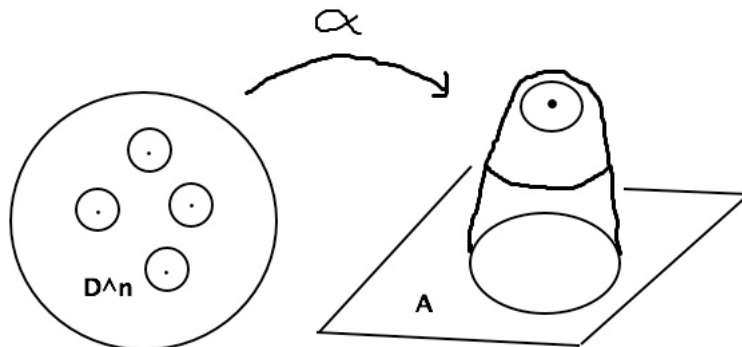
**Lemat 6.1.3.** Dowolny izomorfizm liniowy  $A : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  jest homotopijny z identycznością  $I : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  lub odbiciem w hiperpowierzchni  $R : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

*Dowód.* Wystarczy przypomnieć (zad. lub p. [2]), że grupa liniowa  $GL(n, \mathbb{R})$  ma dwie składowe lukowej spójności składające się odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym.  $\square$

*Dowód Tw. 6.1.1 pkt. 2.* Niech  $(X, A, a_0) = (D^n \cup_X A, A, 1_X)$  będzie  $n$ -wymiarową relatywną komórką z punktem wyróżnionym  $1_X := [1]$ . Dla dowolnego punktu  $z \in \mathring{D}^n$  włożenie  $(X, A, a_0) \subset (X, X \setminus \{z\}, a_0)$  jest homotopijną równoważnością.

Niech  $\alpha : (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$  będzie dowolnym sferoidem. Na mocy Tw. 5.4.1 możemy zakładać, że odwzorowanie  $\alpha$  posiada wartość regularną. Dla wygody możemy założyć, że jest

to środek dołączonego dysku  $0_X \in X \setminus A$  oraz oznaczyć  $\alpha^{-1}(0_X) = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathring{D}^n$ . W każdym punkcie  $p_i$  zdefiniowana jest pochodna  $D\alpha_{p_i}$  i jest ona izomorfizmem, a więc  $\alpha$  jest dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu  $\mathring{D}^n \supset U_i \ni p_i$  (p. rysunek poniżej).



Rys. Działanie przekształcenia  $\alpha$  wokół punktów regularnych.

Zastosujemy Stw. 6.1.1 do odwzorowania

$$\alpha: (D^n, D^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \rightarrow (X, X \setminus \{y\}, x_0).$$

Dla każdego punktu  $p_i$  wybierzmy mały dysk  $D_i \ni p_i$  o środku w  $p_i$ , taki że

$$\alpha_i := \alpha|_{D_i}: (D_i, D_i \setminus \{p_i\}) \rightarrow (X, X \setminus \{0_X\})$$

jest dyfeomorfizmem na obraz. Pozostając w klasie homotopii można zmienić  $\alpha_i$  tak, żeby  $\alpha_i(1_i) = 1_X$ . Na mocy Lematów 6.1.2 i 6.1.3 odwzorowanie to jest homotopijne z włożeniem małego dysku lub z odbiciem, a więc odwzorowaniem  $\pm \bar{\chi}$  gdzie

$$\bar{\chi}: (D^n, D^n \setminus \{0\}) \rightarrow (X, X \setminus \{0_X\})$$

odwzorowaniem charakterystycznym komórki. Z Lematu 6.1.1 otrzymujemy, że

$$[\alpha] = \pm h_{[\omega_1]}([\bar{\chi}]) \pm \dots \pm h_{[\omega_k]}([\bar{\chi}])$$

gdzie  $[\omega_i] \in \pi_1(X \setminus \{0_X\}, 1_X) \simeq \pi_1(A, 1_X)$ . Udowodniliśmy w ten sposób, że  $\pi_n(X, A, a_0)$  jest  $\pi_1(A, 1_X)$ -modułem z jednym generatorem (co wystarcza nam do wykazania twierdzenia o dołączaniu komórki Tw. 6.1.2). Żeby pokazać, że jest to moduł wolny, trzeba skorzystać z teorii nakryć.  $\square$

**Twierdzenie 6.1.2.** Niech  $(X, A)$  będzie  $n+1$ -wymiarową relatywną komórką ( $n > 1$ ), a  $\chi: (S^n, 1) \rightarrow (A, a_0)$  odwzorowaniem dołączającym. Włożenie  $j: A \hookrightarrow X$  jest  $n$ -równoważnością, przy czym  $\ker\{j_{\#}: \pi_n(A, a_0) \rightarrow \pi_n(X, a_0)\}$  jest  $\pi_1(A, a_0)$ -modułem generowanym przez klasę  $[\chi]$

*Uwaga 6.1.2.* W przypadku  $n = 1$ ,  $\ker\{\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_1(X, a_0)\}$  jest podgrupą normalną generowaną przez klasę  $[\alpha]$ . Poniższy dowód obejmuje też tę sytuację; inny dowód opiera się na tw. Seiferta - van Kampena [TOPOLOGIA II]

*Dowód Tw. 6.1.2.* Rozpatrzmy ciąg dokładny grup homotopii pary  $(X, A, a_0)$ :

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, a_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \dots$$

który jest ciągiem  $\pi_1(A, a_0)$ -modułów. Z Tw. 6.1.1 pkt. 1 wiemy, że  $\pi_i(X, A, a_0) = 0$  dla  $i \leq n$ , a więc  $j_{\#}: \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)$  jest izomorfizmem dla  $i < n$  i epimorfizmem dla  $i = n$ .

Z dokładności ciągu pary wynika, że

$$\ker\{\pi_n(A, a_0) \xrightarrow{j\#} \pi_n(X, a_0)\} = \text{im}\{\pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, a_0)\}.$$

Teza wynika więc natychmiast z Lematu 6.1.1, bowiem  $\partial[\bar{\chi}] = [\chi]$ .  $\square$

## 6.2 Stopień odwzorowania $S^n \rightarrow S^n$

Każdemu odwzorowaniu  $f: S^n \rightarrow S^n$  można przypisać liczbę całkowitą  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$  w taki sposób, że definiuje ona homomorfizm  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Jest kilka metod konstrukcji stopnia: przy pomocy topologii różniczkowej (p. [14] lub homologii (p. [10]). Stopień można zdefiniować w ogólniejszej sytuacji, odwzorowań dowolnych rozmaitości zorientowanych  $f: M \rightarrow N$  tego samego wymiaru, zakładając, że  $N$  jest spójna. Odsyłając czytelnika do odpowiednich źródeł, podsumujemy tutaj własności stopnia:

**Twierdzenie 6.2.1.** *Niech  $f: S^n \rightarrow S^n$ . Przyporządkowanie  $f \rightsquigarrow \deg(f)$  ma następujące własności:*

1. Jest homotopijnym niezmiennikiem, więc definiuje odwzorowanie  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$
2. Odwzorowania  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  jest homomorfizmem,
3.  $\deg(\text{id}: S^n \rightarrow S^n) = 1$ , a więc  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  jest epimorfizmem.

**Wniosek 6.2.1.** *Homomorfizm  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  jest izomorfizmem.*

**Zadanie 59.** Dla danego  $d \in \mathbb{Z}$  wskaż odwzorowanie stopnia  $d$ .

Zauważmy, że stopień odwzorowania można określić dla dowolnego odwzorowania  $n$ -wymiarowych relatywnych komórek, mając wybrane (klasy homotopii) odwzorowań charakterystycznych. Dowlone odwzorowanie  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  wyznacza przekształcenie przestrzeni ilorazowych (strzałki pionowe są odwzorowaniami ilorazowymi)

$$\begin{array}{ccccccc} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\bar{\chi}} & (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) & \xleftarrow{\bar{\chi}'} & (D^n, S^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (S^n, 1) & \xrightarrow{\bar{\chi}} & (X/A, *) & \xrightarrow{\bar{f}} & (Y/B, *) & \xleftarrow{\bar{\chi}'} & (S^n, 1) \end{array} \quad (6.1)$$

Definiujemy  $\deg(f)$  jako stopień złożenia przekształceń przestrzeni ilorazowych (dolny wiersz). Dla dowolnej  $n$ -wymiarowej komórki  $(X, A)$ ,  $n > 1$  stopień wyznacza homomorfizm  $\deg: \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  - zauważmy, że jest to złożenie homomorfizmów  $\pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{q\#} \pi_n(S^n, 1) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$ , gdzie  $q: (X, A, a_0) \rightarrow (S^n, 1, 1)$  jest odwzorowaniem ilorazowym.

**Stwierdzenie 6.2.1.** *Dla dowolnej  $n$ -wymiarowej komórki  $n > 1$  homomorfizm  $\deg: \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  jest epimorfizmem. Jeśli przestrzeń  $(A, a_0)$  jest jednospójna, to jest to izomorfizm.*

*Dowód.* Stopień odwzorowania charakterystycznego komórki  $\chi: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$  jest równy 1, bo odwzorowanie ilorazowe definiowane przez  $\chi$  jest identycznością. Jeśli przestrzeń  $A$  jest jednospójna, to na mocy Tw. 6.1.1 grupa  $\pi_n(X, A, a_0)$  jest cykliczna, a więc  $\deg$  jest izomorfizmem.  $\square$

**Twierdzenie 6.2.2.** *Niech  $(X, A, a_0)$  będzie  $n$ -wymiarową ( $n \geq 2$ ) punktowaną relatywną komórką a  $\bar{\chi}: (D^n, S^{n-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$  jej odwzorowaniem charakterystycznym. Wtedy*

1. Gdy  $n > 2$  grupa  $\pi_n(X, A, a_0)$  jest wolnym  $\mathbb{Z}[\pi_1(A, a_0)]$ -modułem generowanym przez klasę homotopii  $[\bar{\chi}]$ .
2. Dla  $n = 2$  grupa  $\pi_2(X, A, a_0)$  homomorfizm  $\partial: \pi_2(X, A, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$  zadaje strukturę wolnego crossed module.

*Dowód.* Rozważyć nakrycie uniwersalne relatywnej komórki  $(X, A)$  [do uzupełnienia]. □

### 6.3 Grupy homotopii sfer

Grupy homotopii sfer  $\pi_k(S^n, 1)$  stanowią jedną z największych zagadek topologii. Znanych jest wiele szczegółowych wyliczeń dla "bliskich" wartości  $k, n$  a także kilka fundamentalnych twierdzeń o zachowaniu wszystkich grup homotopii np. twierdzenie J. P. Serre'a mówiące, że dla każdego  $k > 0$  i dostatecznie dużych  $n$  grupy  $\pi_{n+k}(S^n, 1)$  są skończone. Więcej informacji można znaleźć w [Wikipedii](#) a znacznie bardziej zaawansowany przegląd wyników i metod [tutaj](#).

W tym rozdziale zajmiemy się grupami homotopii w "początkowych" wymiarach. Wyniki poprzednich rozdziałów pozwalają udowodnić następujące:

**Twierdzenie 6.3.1.** *Niech  $(S^n, 1)$  będzie sferą euklidesową.*

$$\pi_k(S^n, 1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1, k > 1 \\ 0 & \text{dla } k < n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } k = n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } k = 3, n = 2 \end{cases}$$

Generatorem grupy  $\pi_n(S^n, 1)$  jest klasa identyczności  $id: (S^n, 1) \rightarrow (S^n, 1)$ , a grupy  $\pi_3(S^2, 1)$  klasa rozwłóknienia Hopfa  $p: (S^3, 1) \rightarrow (S^2, 1)$ .

Zaciekawionego czytelnika poinformujemy, że grupy  $\pi_4(S^3, 1) \simeq \pi_5(S^4, 1) \simeq \dots \simeq \pi_{n+1}(S^n, 1) \simeq \mathbb{Z}_2$  - zgodnie ze wspomnianym twierdzeniem Serre'a jest to grupa skończona. Dowód niestety wykracza poza narzędzia omówione w tym skrypcie.

*Dowód Tw. 6.3.1.* Dla  $n = 1$  teza wynika z teorii nakryć - badamy nakrycie uniwersalne  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Sfera  $S^n$  jest oczywiście relatywną komórką - powstaje przez doklejenie dysku do punktu. Punkt 1 wynika więc natychmiast z Tw. 6.1.1 pkt. 1. Z punktu 2 tego samego twierdzenia wynika, że grupa  $\pi_n(S^n, 1)$  jest grupą cykliczną generowaną przez identyczność, nie wiemy jednak czy jest wolna. Będzie to wynikało z istnienia nietrywialnego homomorfizmu  $\deg: \pi_n(S^n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ , czyli stopnia odwzorowania, który omawiamy w następnym podrozdziale.

Obliczenie  $\pi_3(S^2, 1)$  jest możliwe korzystając z rozwłóknienia Hopfa. Analizując początkowe wyrazy ciągu dokładnego homotopii tego rozwłóknienia otrzymujemy, że homomorfizmy:  $\pi_3(S^3) \xrightarrow{p\#} \pi_3(S^2)$  oraz  $\pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$  są izomorfizmami. Zauważmy, że przy okazji obliczyliśmy innym sposobem grupę  $\pi_2(S^2)$ . □

Ważne przykłady nietrywialnych przekształceń sfer są definiowane przy pomocy struktur mnożliwych (mnożenia) na przestrzeniach kartezjańskich. Okazuje się, że dwuliniowe mnożenie  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  można sensownie zdefiniować tylko w przypadkach, gdy  $n = 1, 2, 4, 8$ . To twierdzenie jest jednym ze spektakularnych osiągnięć topologii algebraicznej. poniżej fragment z materiałów do wykładu z Topologii Algebraicznej I w języku angielskim:

A structure of a normed associative and commutative  $\mathbb{R}$ -algebra (i.e. a sensible multiplication) can be defined only on the cartesian spaces  $\mathbb{R}^n$  for  $n = 1, 2$  where  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  - real numbers,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  - complex numbers (pairs of real numbers.) A structure of

an associative but not commutative  $\mathbb{R}$ -algebra can be defined for  $n = 4$  on pairs of complex numbers  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  - quaternions. Further, if we omit the associativity assumption, then a  $\mathbb{R}$ -bilinear multiplication can be defined for  $n = 8$  on pairs of quaternions  $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ -octonions. Moreover, we have inclusions of  $\mathbb{R}$ -algebras  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$  and a conjugation on  $\mathbb{O}$  restricts to the usual conjugation of quaternions and complex numbers. A norm on  $\mathbb{O}$  is defined as usual  $\|o\|^2 = oo^*$  thus  $\|oo'\| = \|o\|\|o'\|$ . If  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  then any cartesian space  $\mathbb{F}^n$  carries a structure of an  $\mathbb{F}$ -module (vector space) via multiplications of coordinates and an  $\mathbb{F}$ -valued (hermitian) scalar product is defined in the usual way:  $(v, w) := \sum v_i w_i^*$ , where  $*$  denotes conjugation. Vectors of length 1 constitute a group for  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  and an  $H$ -space for  $\mathbb{F} = \mathbb{O}$  (i.e. multiplication is not associative, but associative up to homotopy).

Niech  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  i oznaczmy  $d_{\mathbb{F}} := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$ . Jednopunktowe uzwarzenie  $\mathbb{F}$  będziemy utożsamiać ze sferą  $S^{d_{\mathbb{F}}}$ . Definiujemy odwzorowania  $S^{2d_{\mathbb{F}}-1} \xrightarrow{p_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} \cup \{\infty\} \simeq S^{d_{\mathbb{F}}}$  zadane przez dzielenie par elementów odpowiedniego ciała:  $p_{\mathbb{F}}(x_1, x_2) := x_1/x_2$ . Przeciwobrazy punktów przy odwzorowaniach  $p_{\mathbb{F}}$  są homeomorficzne ze sferami  $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$ . Przekształcenia  $p_{\mathbb{F}}$  są nazywane *wiązkami Hopfa*<sup>1</sup>.

**Zadanie 60.** Przekształcenie  $p_{\mathbb{R}}$  jest homeomorficzne (w kategorii  $\mathcal{T}^{S^1}$  z dwukrotnym nakryciem  $p_2 : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $p_2(z) = z^2$ , a przekształcenie  $p_{\mathbb{C}}$  jest homeomorficzne (w kategorii  $\mathcal{T}^{S^3}$  z rozwłóknieniem Hopfa  $p : S^3 \rightarrow S^2$ ).

**Stwierdzenie 6.3.1.** *Wiązki Hopfa są lokalnie trywialne, a więc są rozwłóknieniami.*

*Dowód.* Na podzbiornie otwartym  $\mathbb{F} \subset S^{d_{\mathbb{F}}}$  definiujemy przekrój  $s_0 : \mathbb{F} \rightarrow S^{2d_{\mathbb{F}}-1}$  wzorem  $s_0(y) := \|(y, 1)\|^{-1}(y, 1)$  i odpowiednio  $s_{\infty} : (\mathbb{F} \setminus 0) \cup \{\infty\} \rightarrow S^{2d_{\mathbb{F}}-1}$ . Przekroje zadają trywializację np.

$$h_0 : \mathbb{F} \times p_{\mathbb{F}}^{-1}(1) \rightarrow p_{\mathbb{F}}^{-1}(\mathbb{F})$$

daną wzorem:  $h_0(y, x) := s_0(y)x$ . □

**Zadanie 61.** Korzystając z ciągu dokładnego rozwłóknienia dla wiązek Hopfa i Stwierdzenia ?? wykaż następujące izomorfizmy grup homotopii sfer:

- $\pi_i(S^4) \simeq \pi_i(S^7) \oplus \pi_{i-1}(S^3)$  dla  $i \geq 2$ ,
- $\pi_i(S^8) \simeq \pi_i(S^{15}) \oplus \pi_{i-1}(S^7)$  dla  $i \geq 2$ .

Wynioskować stąd, że wiązki Hopfa nie są homotopijne z odwzorowaniami stałymi.

Twierdzenie 6.3.1 oraz twierdzenie o aproksymacji komórkowej 5.5.1 pozwolą nam obliczyć grupy homotopii produktu i bukietu sfer. Niech  $\bigvee_{i \in J} S^n$  będzie bukietem sfer  $n$ -wymiarowych, indeksowanym pewnym zbiorem  $J$ .

**Twierdzenie 6.3.2.**

$$\pi_n\left(\bigvee_{i \in J} S^n, 1\right) \simeq \begin{cases} F(J) & \text{dla } n = 1 \\ F_{ab}(J) & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

gdzie  $F(J)$  (odp.  $F_{ab}(J)$ ) oznacza grupę wolną (odp. wolną abelową) generowaną przez zbiór  $J$ . Generatory są zadane przez włożenia sfer w bukiet.

*Dowód.* Zauważmy, że dla każdego  $n$  wystarczy udowodnić twierdzenie dla skończonych zbiorów wskaźników, bowiem  $\bigvee_{i \in J} S^n = \text{colim}_{J' \subset J} \bigvee_{i \in J'} S^n$  gdzie  $J' \subset J$  przebiega podzbiory skończone w  $J$ .

Ponieważ sfera a także jej iloczyn przez odcinek są przestrzeniami zwartymi, więc obraz dowolnego sferoidu a także homotopii między sferoidami mieści się w pewnym skończonym bukiecie.

<sup>1</sup>Heinz Hopf (Gräbchen k/Wrocławia 1894 – 1971 Zollikon k/Zurichu)



Dla  $n = 1$  teza wynika z twierdzenia van Kampena, które może być wykazane przy pomocy teorii nakryć.

Dla  $n > 1$  i zbioru skończonego  $J'$  rozpatrzmy grupę homotopii produktu

$$\pi_n\left(\prod_{J'} S^n, 1\right) \simeq \prod_{J'} \pi_n(S^n, 1) \simeq \bigoplus_{J'} \mathbb{Z} \simeq F_{ab}(J')$$

Rozważmy rozbitcie produktu sfer na CW-kompleks wyznaczone przez rozbitcie sfery na dwie komórki. Wtedy szkielety  $(S^n \times \dots \times S^n)^{(n)} = \dots = (S^n \vee \dots \vee S^n)^{(2n-1)} = S^n \vee \dots \vee S^n$ . Wynika stąd, że dla  $n > 1$  włożenie bukietu w produkt indukuje izomorfizm grup homotopii w wymiarach  $\leq 2n - 2$ .  $\square$

## 6.4 Grupy homotopii przestrzeni jednorodnych grup liniowych

Dla ciał  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  grupa multiplikatywna  $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$  działa wolno na przestrzeni  $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$  przez mnożenie przez skalar na każdej współrzędnej. Definiujemy  $n$ -wymiarową przestrzeń rzutową nad ciałem  $\mathbb{F}$  jako przestrzeń orbit tego działania:  $\mathbb{F}P(n) := (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^\times$ . Zauważmy, że  $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^\times$  jest podgrupą, mnożenie przez elementy ze sfery  $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^\times$  zachowuje normę, mamy więc  $S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1}/S^{d_{\mathbb{F}}-1} = \mathbb{F}P(n)$ .

**Zadanie 62.** Rzutowanie na przestrzeń orbit  $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$  jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a więc rozwłóknieniem.

*Dowód.* Wystarczy wskazać przekroje nad zbiorami z kanonicznego atlasu przestrzeni rzutowej, czyli zbiorach postaci  $U_k := \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_k \neq 0\}$ .

$$s_k(x) = \left\| \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right) \right\|^{-1} \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right).$$

Mając przekroje konstruujemy trywializację tak jak w przypadku wiązek Hopfa (p. Stw. 6.3.1).  $\square$

Rozwłóknienia  $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$ , których włóknami są sfery  $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$  pozwalają powiązać grupy homotopii sfer z grupami homotopii przestrzeni rzutowych.

**Zadanie 63.** Oblicz  $\pi_i(\mathbb{F}P(n))$  dla ciał  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  i małych  $i$ .

**Zadanie 64.** Udowodnij, że  $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3 \times CP(\infty))$  dla każdego  $n$ . Udowodnij, że  $S^2$  nie jest homotopijnie równoważne  $S^3 \times CP(\infty)$ . Jak pogodzić ten przykład z twierdzeniem Whiteheada?

Dla ciał  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oznaczamy  $GL(n, \mathbb{F})$  grupę macierzy odwracalnych a  $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$  jej podgrupę składającą się z przekształceń zachowujących normę (a więc iloczyn skalarny na  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  i iloczyn hermitowski dla  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ).

**Zadanie 65.**  $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$  jest zwarta oraz jest silnym retraktem deformacyjnym. Wsk. przekształcenie odwrotne  $GL(n, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$  jest dane przez ortonormalizację Grama-Schmidta.

Definiujemy odwzorowania  $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$ ,  $ev(A) := A(1, 0, \dots, 0)$ . Istnieje homeomorfizm  $O(n, \mathbb{F})/O(n-1, \mathbb{F}) \simeq S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$  przy którym projekcja ilorazowa odpowiada odwzorowaniu  $ev$ .

**Zadanie 66.** przekształcenie  $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$  jest lokalnie trywialne, a zatem jest rozwłóknieniem. Wsk. Aby skonstruować trywializację wystarczy znaleźć przekrój  $ev$  nad  $S^{nd_{\mathbb{F}}-1} \setminus \{v\}$ .

**Zadanie 67.** Grupa liniowa  $GL(n, \mathbb{C})$  jest spójna, a  $GL(n, \mathbb{R})$  ma dokładnie dwie składowe spójne.

**Zadanie 68.** Niech  $i : O(n-1, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$  będzie zanurzeniem grup zdefiniowanym przez naturalną inkluzję  $\mathbb{F}^{n-1} \subset \mathbb{F}^n$ . Wykaż, że  $i$  jest  $(nd_{\mathbb{F}} - 2)$ -równoważnością. Zauważ, że dla danej liczby  $i > 0$  i dostatecznie dużej liczby  $n$  grupy  $\pi_i(O(n, \mathbb{F}))$  nie zależą od  $n$ . Oblicz je dla małych  $i$ .



## 6.5 Przestrzenie Eilenberga-MacLane'a

Przestrzeniami Eilenberga<sup>2</sup>-MacLane'a<sup>3</sup> nazywamy łukowo spójne przestrzenie, których tylko jedna grupa homotopii jest różna od zera. Dokładniej:

**Definicja 6.5.1.** Niech  $\pi$  będzie grupą a  $n$  liczbą naturalną. Łukowo spójna przestrzeń  $X$  jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) typu  $K(\pi, n)$  jeśli

$$\pi_q(X, x_0) \simeq \begin{cases} \pi & \text{dla } q = n \\ 0 & \text{dla } q \neq n. \end{cases}$$

Mówimy, że łukowo spójna przestrzeń  $X$  jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) w wymiarze  $n$  jeśli  $X$  jest typu  $K(\pi, n)$  dla pewnej grupy  $\pi$ .

Ponieważ grupy homotopii w wymiarze  $> 1$  są przemienne, więc przestrzenie EM typu  $K(\pi, n)$  dla  $n > 1$  mogą istnieć tylko jeśli  $\pi$  jest abelowa.

**Twierdzenie 6.5.1.** Dla dowolnej grupy  $\pi$  istnieje CW-kompleks typu  $K(\pi, 1)$ . Dla dowolnej grupy abelowej  $\pi$  i liczby  $n > 1$  istnieje CW-kompleks typu  $K(\pi, n)$ .

*Dowód.* Dowód opiera się na znajomości grup homotopii bukieatów sfer 6.3.2 oraz twierdzeniu o doklejaniu komórki 6.1.2.

Dla  $n = 1$  rozpatrzmy prezentację grupy  $\pi$  jako iloraz grupy wolnej (nieabelowej)  $\pi = F/N$ . Konstruujemy kolejno szkielety szukanej przestrzeni zaczynając od  $X^{(1)} = \bigvee S^1$  - bukieatu okręgów takiego, że  $\pi_1(X^{(1)}, x_0) = F$ . Następnie wybieramy generatory podgrupy normalnej  $N$  (mogą to być wszystkie jej elementy, choć to wybór nieekonomiczny) i doklejamy do 1-szkieletu dyski  $D^2$ , otrzymując kompleks  $X^{(2)}$ . Na mocy twierdzenia van Kampena (czyli Tw. 6.1.2 dla  $n = 1$ ) otrzymujemy, że  $\pi_1(X^{(2)}, x_0) = \pi$ . Przestrzeń  $X^{(2)}$  może posiadać nietrywialne elementy w grupie  $\pi_3(X^{(2)}, x_0)$ , które "zabijamy" doklejając komórki 3-wymiarowe. Postępując tak w kolejnych wymiarach otrzymujemy CW-kompleks  $X$  typu  $K(\pi, 1)$ .

W przypadku gdy  $n > 1$ , grupa  $\pi$  musi być abelowa, więc przedstawiamy ją w postaci ilorazu  $\pi = F_{ab}/N$ , gdzie  $F_{ab}$  jest wolną grupą abelową. Zaczynamy konstrukcję od szkieletu  $X^{(n)} = \bigvee S^n$  - bukieatu sfer  $n$ -wymiarowych takiego, że  $\pi_n(X^{(n)}, x_0) = F_{ab}$ . "Zabijamy" elementy w kolejnych wyższych grupach homotopii tak jak w przypadku  $n = 1$ , otrzymując przestrzeń  $X$  typu  $K(\pi, n)$ .  $\square$

Dla dowolnej grupy  $\pi$  można skonstruować przestrzeń typu  $K(\pi, 1)$  inną metodą, korzystając z homotopijnych własności przestrzeni nakrywających. Wystarczy w tym celu znaleźć przestrzeń ściągającą  $E\pi$  na której grupa  $\pi$  działa tak, aby projekcja na przestrzeń orbit  $E\pi \rightarrow (E\pi)/\pi =: B\pi$  była nakryciem (a więc rozwłóknieniem). Stąd  $\pi_1(B\pi) \simeq \pi$  oraz  $\pi_q(B\pi) = 0$  dla  $q > 1$ . Dla konkretnych grup można często wskazać taką przestrzeń analizując geometryczną interpretację grupy np. jako grupy izometrii przestrzeni euklidesowej. Dla dowolnej grupy  $\pi$ , przestrzeń  $E\pi$  można zbudować jako połączenie (*join*) przeliczalnie wielu egzemplarzy grupy  $\pi$  rozpatrywanej z topologią dyskretną. Jest to szczególnie i łatwiejszy przypadek tzw. konstrukcji Milnora, przy pomocy której dla dowolnej grupy topologicznej  $G$  buduje się przestrzeń ściągającą  $EG$  z wolnym działaniem grupy  $G$ , takim że projekcja  $EG \rightarrow EG/G =: BG$  jest odwzorowaniem lokalnie trywialnym ([11]).

*Przykład 6.5.1.* Przykłady poznanych przestrzeni EM:

- Okrąg  $S^1$  jest przestrzenią typu  $K(\mathbb{Z}, 1)$ ;
- Rzeczywista  $\infty$ -wymiarowa przestrzeń rzutowa  $\mathbb{R}P(\infty)$  jest przestrzenią typu  $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ ;

<sup>2</sup>Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York)

<sup>3</sup>Saunders MacLane (Taftville, CN, USA 1909 – 2005 San Francisco)

- Zespolona  $\infty$ -wymiarowa przestrzeń rzutowa  $CP(\infty)$  jest przestrzenią typu  $K(\mathbb{Z}, 2)$ ;
- Jeśli  $X$  jest przestrzenią typu  $K(\pi, n)$  to przestrzeń pętli  $\Omega X$  jest przestrzenią typu  $K(\pi, n - 1)$ .

*Uwaga.* Kwaternionowa przestrzeń rzutowa  $\mathbb{H}P(\infty)$  nie jest przestrzenią EM. Dlaczego?

**Zadanie 69.** Jeśli  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  jest nakryciem między lukowo spójnymi przestrzeniami i jedna z nich jest przestrzenią EM w wymiarze 1, to druga też jest. W szczególności dowolna powierzchnia  $M^2$  (orientowalna lub nieorientowalna), poza sferą i płaszczyzną rzutową, jest przestrzenią typu  $K(\pi_1(M), 1)$ .

Jeśli dwa CW-kompleksy są typu  $K(\pi, n)$  to są homotopijnie równoważne. W tym celu wykazemy ogólniejsze twierdzenie świetnie ilustrujące konstruowanie przekształceń z CW-kompleksów metodą "szkielet po szkielecie".

**Twierdzenie 6.5.2.** Niech  $(X, x_0)$  będzie spójnym punktowym CW-kompleksem, a  $(Y, y_0)$  przestrzenią punktową. Niech  $n > 0$  będzie taką liczbą, że  $\pi_i(X, x_0) = 0$  dla  $i < n$  oraz  $\pi_i(Y, y_0) = 0$  dla  $i > n$ . Wtedy przyporządkowanie

$$[X, Y]_* \ni f \rightsquigarrow f_{\#} \in \text{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$$

jest bijekcją.

*Dowód.* Na mocy Tw. 5.6.1 możemy założyć, że szkielet  $X^{(n-1)} = pt$ , a zatem szkielet  $X^{(n)} = \bigvee S_i^n$  jest bukieciem sfer. Pokażemy najpierw, że przyporządkowanie  $f \rightsquigarrow f_{\#}$  jest surjekcją, konstruując dla danego homomorfizmu  $\phi : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  odwzorowanie  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  takie, że  $f_{\#} = \phi$ . Przekształcenie  $f$  konstruujemy indukcyjnie:  $f^{(n-1)}(x_0) := y_0$ . Grupa  $\pi_n(X, x_0)$  jest generowana przez włożenia sfer  $\sigma_i : S^n \rightarrow X^{(n)}$ . Definiujemy  $f^{(n)} := \bigvee \phi(\sigma_i)$ . Ponieważ w grupie  $\pi_n(X, x_0)$  odwzorowania doklejające komórki  $(n + 1)$ -wymiarowe są trywialne, więc  $f^{(n)}$  rozszerza się do  $f^{(n+1)} : X^{(n+1)} \rightarrow Y$ , a na kolejne szkielety dzięki znikaniu wyższych grup homotopii  $\pi_k(Y, y_0)$ . Podobnie konstruujemy homotopię między dwoma przekształceniami takimi, że  $f_{0\#} = f_{1\#}$ , rozszerzając odwzorowanie z  $(X \times \{0, 1\}) \cup \{x_0\} \times I$  na  $X \times I$ . □

**Wniosek 6.5.1.** Jeśli  $X$  jest CW-kompleksem typu  $K(G, n)$ , a  $Y$  jest CW-kompleksem typu  $K(H, m)$ . Wtedy

$$[X, Y]_* = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n > m \\ \text{Hom}(G, H) & \text{jeśli } n = m. \end{cases}$$

Jeśli  $n = m$  oraz grupy  $G, H$  są izomorficzne, to CW-kompleksy  $X, Y$  są homotopijnie równoważne.

*Dowód.* Dowód wynika natychmiast z Tw. 6.5.2. □

Jeśli  $m > 1$  to oczywiście  $[X, Y]_* = [X, Y]$ . Zauważmy, że opis klas homotopii  $[X, Y]_*$  w przypadku gdy  $n < m$  jest bardzo trudny.

Będziemy przyjmować, że rozpatrywane przestrzenie Eilenberga-MacLane'a są CW-kompleksami i przez  $K(\pi, n)$  będziemy oznaczać dowolną przestrzeń typu  $K(\pi, n)$ . Jeśli  $G$  jest grupą abelową to działanie grupowe  $G \times G \rightarrow G$  jest homomorfizmem grup, a więc dla każdego  $n \geq 0$  wyznacza klasę homotopii odwzorowania  $K(G \times G, n) \rightarrow K(G, n)$  (dla  $n = 0$  przyjmujemy  $K(G, 0) = G$ ). Ze Stw. 4.1.2 wynika, że  $K(G \times G, n) \simeq K(G, n) \times K(G, n)$ , a więc działanie grupowe definiuje działanie  $K(G, n) \times K(G, n) \rightarrow K(G, n)$ , które zadaje na  $K(G, n)$  strukturę obiektu grupowego w kategorii homotopii (H-grupy). Funktory kontrawariantne na kategorii homotopii przestrzeni punktowanych reprezentowana przez przestrzenie Eilenberga-MacLane'a  $[-, K(G, n)]_*$  odgrywają bardzo ważną rolę w topologii. Okazuje się, że dla CW-kompleksu  $X$ , grupa  $[X, K(G, n)]_*$  jest naturalnie izomorficzna z  $n$ -tą singularną grupą kohomologii  $X$  o współczynnikach w  $G$ . Grupy te są łatwiej obliczalne niż grupy homotopii i mają wiele ważnych interpretacji i zastosowań geometrycznych, o czym będzie mowa w ramach przedmiotu Topologia Algebraiczna II.

# Rozdział 7

## Homologie i kohomologie

### 7.1 Aksjomaty teorii (ko-)homologii

**Definicja 7.1.1** (Teoria kohomologii). Ciąg funktorów kontrawariantnych  $\tilde{h}^n : \mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  określonych na kategorii (dobrze) punktowanych przestrzeni (lub jej podkategorii) o wartościach w kategorii grup abelowych oraz transformacji naturalnych  $\sigma_n : \tilde{h}^n \rightarrow \tilde{h}^{n+1} \circ \Sigma$ , gdzie  $\Sigma : \mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{T}_*$  jest funktorem zawieszenia, nazywa się teorią kohomologii jeśli spełnia następujące warunki:

1. [Aksjomat homotopii] Funktory  $h^n$  są dobrze określone na kategorii homotopii  $\mathcal{T}_{*h}$ .
2. [Aksjomat (pół-)dokładności] Dla dowolnego  $n \in \mathbb{Z}$  i ciągu kowłóknistego  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f)$ , ciąg grup abelowych

$$\tilde{h}^n(C(f)) \xrightarrow{j^*} \tilde{h}^n(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{h}^n(X)$$

jest dokładny,

3. [Aksjomat zawieszenia] Naturalne transformacje  $\sigma_n : \tilde{h}^n \rightarrow \tilde{h}^{n+1} \circ \Sigma$  są równoważnościami (tzn. izomorfizmami grup).

Grupę z gradacją  $\tilde{h}^*(S^0)$  nazywamy współczynnikami teorii  $\tilde{h}^*$  i oznaczamy często  $h^*$ .

**Definicja 7.1.2** (Teoria homologii). Ciąg funktorów kowariantnych  $\tilde{h}_n : \mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  i transformacji naturalnych  $\sigma_n : \tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}_{n+1} \circ \Sigma$  nazywa się teorią homologii jeśli spełnia następujące warunki:

1. [Aksjomat homotopii] Funktory  $h_n$  są dobrze określone na kategorii homotopii  $\mathcal{T}_{*h}$ .
2. [Aksjomat (pół-)dokładności] Dla dowolnego  $n \in \mathbb{Z}$  i ciągu kowłóknistego  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f)$  ciąg

$$\tilde{h}_n(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{h}_n(Y) \xrightarrow{j_*} \tilde{h}_n(C(f))$$

jest dokładny.

3. [Aksjomat zawieszenia] Naturalne transformacje  $\sigma_n : \tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}_{n+1} \circ \Sigma$  są równoważnościami.

Grupę z gradacją  $\tilde{h}_*(S^0)$  nazywamy współczynnikami teorii  $\tilde{h}_*$  i oznaczamy często  $h_*$ .

*Uwaga 7.1.1.* Ciąg funktorów grup homotopii  $\pi_n(\ )$  nie jest teorią homologii! Nie jest spełniony ani aksjomat Dokładności, ani Zawieszenia.

*Przykład 7.1.1.* Dla danej dyskretnej grupy abelowej  $M$  niech dany będzie ciąg przestrzeni  $\{K(M, n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  takich, że  $K(M, n) = \{pt\}$  dla  $n < 0$ ,  $K(M, 0) = M$  oraz dane są homotopijne równoważności  $\sigma_n: K(M, n) \rightarrow \Omega K(M, n+1)$ . Taki ciąg przestrzeni i homotopijnych równoważności nazywa się *spektrum Eilenberga-MacLane'a*. Ciąg funktorów

$$\tilde{H}^n(X; M) := [X, K(M, n)]_*$$

jest teorią kohomologii.

Aksjomaty dokładności i zawieszenia wraz z ciągiem Puppe Tw. 3.4.1 prowadzą do długiego ciągu dokładnego homologii i kohomologii dla dowolnego odwzorowania  $f: X \rightarrow Y$ :

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{h}_n(Y) \xrightarrow{j_*} \tilde{h}_n(C(f)) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{h}_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} \dots \\ \dots &\xleftarrow{\delta_n} \tilde{h}^n(X) \xleftarrow{f^*} \tilde{h}^n(Y) \xleftarrow{j^*} \tilde{h}^n(C(f)) \xleftarrow{\delta_{n-1}} \tilde{h}^{n-1}(X) \xleftarrow{f^*} \dots \end{aligned}$$

Jeśli rozważamy teorie (ko-)homologii na podkategorii zamkniętej na nieskończone sumy proste, to do powyższych aksjomatów dołącza się aksjomat addytywności.

**Definicja 7.1.3** (Addytywność). *Teoria (ko-)homologii  $(\tilde{h}^*)$  odpowiednio homologii  $\tilde{h}_*$  nazywa się addytywna jeśli dla dowolnej rodziny punktowanych przestrzeni  $\{(X_i, x_i)\}_{i \in J}$ , naturalne włożenia w bukiet indukują izomorfizmy  $\tilde{h}^*(\bigvee X_i) \simeq \prod_{i \in J} \tilde{h}^*(X_i)$  i odpowiednio  $\bigoplus_{i \in J} \tilde{h}_*(X_i) \simeq \tilde{h}_*(\bigvee X_i)$ .*

**Zadanie 70.** Jeśli  $J$  jest zbiorem skończonym, to addytywność wynika z aksjomatu dokładności.

Funktor określony na kategorii przestrzeni z wyróżnionym punktem wyznacza funktor na kategorii przestrzeni bez wyróżnionego punktu przez złożenie z funktorem "dodawania punktu"  $\mathcal{T} \ni X \mapsto X_+ := X \sqcup \{pt\} \in \mathcal{T}_*$ , który jest lewo-dołączony do funktora zapominania o punkcie wyróżnionym. Dla przestrzeni bez wyróżnionego punktu oznaczamy  $h^*(X) := \tilde{h}^*(X_+)$  i  $h_*(X) := \tilde{h}_*(X_+)$ .

Rozpatrzmy ważny przypadek, gdy  $(X, A)$  jest parą Borsuka. Wtedy oczywiście włożenie  $\iota: A_+ \subset X_+$  też jest korozwłóknieniem oraz  $C(\iota) \simeq X_+/A_+ = X/A$ . Dla pary Borsuka  $(X, A)$  definiujemy grupy relatywne jako grupy przestrzeni  $X$  z utożsamionym do punktu podzbiorem  $A$ :  $h^n(X, A) := \tilde{h}^n(X/A)$ . (Gdy  $A = \emptyset$ , to  $X/A = X_+$ .) Otrzymujemy więc ciąg dokładny homologii pary:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} h_n(A) \xrightarrow{L_*} h_n(X) \xrightarrow{j_*} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(A) \xrightarrow{L_*} \dots$$

i podobnie, odwracając strzałki, dla kohomologii. Zauważmy, że klasyczne aksjomaty Eilenberga-Steenroda zostały sformułowane dla funktorów określonych na kategorii par. Omówimy je w następnym podrozdziale i pokażemy równoważność tych podejść na kategorii par Borsuka.

Innym ważnym ciągiem dokładnym, pozwalającym obliczać (ko-)homologie całej przestrzeni punktowanej znając (ko-)homologie jej podzbiorów jest tzw. *ciąg Meyera-Vietorisa*. Niech  $X = X_1 \cup X_2$ , przy czym pary  $(X_i, X_1 \cap X_2)$  oraz  $(X, X_i)$  są parami Borsuka. Oczywiście zakładamy, że punkt wyróżniony  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Rozważmy ciąg kowłóknisty

$$X_1 \vee X_2 \xrightarrow{i_1 \vee i_2} X \xrightarrow{j} C(i_1 \vee i_2) \simeq \Sigma(X_1 \cap X_2)$$

gdzie  $\simeq$  oznacza homotopijną równoważność przestrzeni. Odpowiedni ciąg dokładny homologii, zwany ciągiem Meyera-Vietorisa ma postać:

$$\dots \rightarrow \tilde{h}_n(X_1) \oplus \tilde{h}_n(X_2) \xrightarrow{i_{1*} + i_{2*}} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{h}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_{1*}, j_{2*}} \tilde{h}_{n-1}(X_1) \oplus \tilde{h}_{n-1}(X_2) \rightarrow \dots$$

Zauważmy, że istnienie ciągu Meyera-Vietorisa można byłoby przyjąć za aksjomat i wynikałyby zeń aksjomaty dokładności i zawieszenia.

Na koniec odnotujmy ważne twierdzenie o transformacjach naturalnych teorii (ko-)homologii. Transformacją naturalną teorii (ko-)homologii nazywamy ciąg transformacji naturalnych funktorów  $T_n: h^n \rightarrow k^n$  które są przemienne z transformacjami naturalnymi zawieszenia odpowiednio w teorii  $h^n$  i  $k^n$ .

**Twierdzenie 7.1.1.** *Jeśli  $T_n : h^n \rightarrow k^n$  jest transformacją naturalną teorii kohomologii taką, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $T_n(S^0) : h^n(S^0) \rightarrow k^n(S^0)$  jest izomorfizmem, to  $T_n(X)$  jest izomorfizmem dla każdego zwartego CW-kompleksu  $X$  i każdego  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Dowód.* Dowód wynika bezpośrednio z lematu o 5-izomorfizmach.  $\square$

**Zadanie 71.**  $\diamond$  Niech  $X$  i  $Y$  będą dobrze punktowanymi przestrzeniami (tzn. włożenie punktu wyróżnionego jest korozwłóknieniem). Dla dowolnego  $q$  istnieje krótki ciąg dokładny

$$0 \rightarrow \tilde{h}_q(X) \oplus \tilde{h}_q(Y) \rightarrow \tilde{h}_q(X \times Y) \rightarrow \tilde{h}_q(X \wedge Y) \rightarrow 0.$$

Analogicznie dla kohomologii.

**Zadanie 72.**  $\diamond$  Dla dowolnej teorii homologii (odp. kohomologii), przekształcenia  $f : (S^n, *) \rightarrow (S^n, *)$  i punktowanej przestrzeni  $X$  homomorfizm indukowany  $f : \tilde{h}_*(S^n \wedge X) \rightarrow \tilde{h}_*(S^n \wedge X)$  jest mnożeniem przez  $\deg(f)$  - stopień przekształcenia  $f$ .

## Teorie homologii określone na parach przestrzeni

**Definicja 7.1.4** (Aksjomaty Eilenberga-Steenroda). *Teorią homologii określoną na kategorii par przestrzeni (lub pewnej jej podkategorii)  $\mathcal{T}_2$  nazywamy ciąg funktorów  $h_q : \mathcal{T}_2 \rightarrow Ab$  oraz transformacji naturalnych*

$$\partial_q : h_q(X, A) \rightarrow h_{q-1}(A)$$

(oznaczamy  $h_q(A, \emptyset) =: h_q(A)$ ) takich, że:

1. Aksjomat homotopii. *Jeśli  $f \sim g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , to  $h_q(f) = h_q(g) : h_q(X, A) \rightarrow h_q(Y, B)$ .*
2. Aksjomat dokładności *Dla dowolnej pary  $(X, A)$  ciąg*

$$\dots \rightarrow h_q(A) \rightarrow h_q(X) \rightarrow h_q(X, A) \rightarrow h_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

*jest dokładny.*

3. Aksjomat wycinania *Dla dowolnej pary  $(X, A)$  i podzbioru otwartego  $U \subset A$  takiego, że  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$  i dowolnego  $q \in \mathbb{Z}$  włożenie par indukuje izomorfizm  $h_q(X \setminus U, A \setminus U) \simeq h_q(X, A)$ .*

**Stwierdzenie 7.1.1.** *Jeśli  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem, to projekcja  $p : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$  indukuje izomorfizm w dowolnej teorii (ko-)homologii.*

*Dowód.* Dla dowolnej teorii homologii  $h_*$  z aksjomatu wycinając górną połowę stożka, z aksjomatu wycinania wynika, że

$$h_*(X, A) \simeq h_*(X \cup c(A), c(A)),$$

a z aksjomatu homotopii wynika, że projekcja

$$p : (X \cup c(A), c(A)) \rightarrow ((X \cup c(A))/c(A), [a_0]) = (X/A, [a_0])$$

będąca homotopijną równoważnością (p. Stw. 3.3.4) indukuje izomorfizm homologii.  $\square$

Wynika stąd, że istnieje wzajemna odpowiedniość między teoriami zredukowanymi  $\tilde{h}_*$  określonymi na dobrze punktowanych przestrzeniach, a teoriami spełniającymi aksjomaty Eilenberga-Steenroda, zdefiniowanymi na podkategorii parach  $(X, A)$  takich, że  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem.

## 7.2 Klasyczne teorie (ko-)homologii

Szczególną rolę odgrywają teorie (ko-)homologii spełniające dodatkowo *aksjomat wymiaru*:

**Definicja 7.2.1** (Aksjomat wymiaru). *Teoria (ko-)homologii  $\tilde{h}_n$  (odp.  $\tilde{h}^n$ ) spełnia aksjomat wymiaru jeśli  $\tilde{h}_n(S^0) = 0$  (odp.  $\tilde{h}^n(S^0) = 0$ ) dla  $n \neq 0$ . Teorie spełniające aksjomat wymiaru nazywają się klasycznymi.*

Pokażemy, że dowolne dwie klasyczne teorie (ko-)homologii o tych samych współczynnikach są naturalnie równoważne na kategorii zwartych CW-kompleksów, a jeśli spełniają aksjomat wymiaru, na kategorii wszystkich CW-kompleksów.

**Twierdzenie 7.2.1.** *Jeśli  $\tilde{h}_*$  (odp.  $\tilde{h}^*$ ) jest klasyczną teorią homologii (odp. kohomologii) oraz  $\tilde{h}_0(S^0) = \tilde{h}^0(S^0) =: A$ , to teorie  $\tilde{h}_*$  (odp.  $\tilde{h}^*$ ) na kategorii zwartych CW-kompleksów są naturalnie równoważne z teoriami homologii i kohomologii wyznaczonymi przez spektrum Eilenberga-MacLane'a  $\mathbb{K}(A)$ .*

Udowodnimy następujące twierdzenie o rozszerzaniu transformacji naturalnych.

**Twierdzenie 7.2.2.** *Jeśli  $\tilde{h}_n$  i  $\tilde{k}_n$  są klasycznymi teoriami homologii na kategorii zwartych CW-kompleksów. Dowolny homomorfizm  $\tau : \tilde{h}_0(S^0) \rightarrow \tilde{k}_0(S^0)$  rozszerza się do transformacji naturalnej teorii homologii tzn. istnieje transformacja naturalna teorii homologii  $\Theta : \tilde{h}_0(X) \rightarrow \tilde{k}_0(X)$  taka że  $\Theta(S^0) = \theta$ .*

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla klasycznych teorii kohomologii.

**Lemat 7.2.1.** *Homomorfizm  $\tau : \tilde{h}_0(S^0) \rightarrow \tilde{k}_0(S^0)$  jednoznacznie rozszerza się do transformacji naturalnej na kategorii CW-kompleksów homeomorficznych ze skończonymi bukietami sfer (tego samego wymiaru).*

Wykażemy najpierw, że jeśli  $h_*$  jest klasyczną teorią homologii to grupy  $\tilde{h}_n(X)$  są izomorficzne z grupami homologii pewnego kompleksu łańcuchowego zwanego kompleksem łańcuchów komórkowych  $X$  o współczynnikach w  $h_*$ . Dla dowolnego  $n \in \mathbb{Z}$  definiujemy

$$C_n(X; h_*) := h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) := \tilde{h}_n(X^{(n)}/X^{(n-1)}) \simeq \tilde{h}_n\left(\bigvee_{i \in I_n} S_i^n\right) \simeq \bigoplus_{i \in I_n} h_0(S_i^0).$$

Zdefiniujemy homomorfizmy brzegu  $\partial_n : C_n(X; h_*) \rightarrow C_{n-1}(X; h_*)$  jako homomorfizmy brzegu w ciągu trójki  $(X^{(n)}, X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  (czyli pary  $(X^{(n)}/X^{(n-2)}, X^{(n-1)}/X^{(n-2)})$ .

$$\dots h_n(X^{(n)}, X^{(n-2)}) \rightarrow h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \rightarrow h_{n-1}(X^{(n)}, X^{(n-2)}) \rightarrow \dots$$

**Lemat 7.2.2.**  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .

*Dowód.* Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccc} h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\ & \searrow \partial_{n+1} & \nearrow j_n & \searrow \partial_n^{pair} & \nearrow j_{n-1} \\ & & h_n(X^{(n)}) & & h_{n-1}(X^{(n-1)}) \end{array}$$

w którym złożenie dwóch kolejnych homomorfizmów w ciągu pary  $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ , a mianowicie  $\partial_n^{pair} j_n = 0$ , a zatem  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .  $\square$

**Definicja 7.2.2.** Grupami homologii komórkowych CW-kompleksu  $X$  o współczynnikach w teorii  $\tilde{h}_*$  nazywamy grupy homologii kompleksu  $\{C_n(X; \tilde{h}_*), \partial_n\}$ :

$$H_n(X; \tilde{h}^*) := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$$

Odwzorowaniom komórkowym  $f : X \rightarrow Y$  odpowiadają funktorialnie homomorfizmy  $f_* : H_n(X; \tilde{h}_*) \rightarrow H_n(Y; \tilde{h}_*)$ .

**Twierdzenie 7.2.3.** Jeśli  $\tilde{h}^*$  jest klasyczną teorią kohomologii, to na kategorii zwartych CW-kompleksów i odwzorowań komórkowych istnieje naturalna równoważność  $\tilde{h}^n(X) \simeq H_n(X; \tilde{h}^*)$  tzn. klasyczna teoria homologii jest jednoznacznie wyznaczona przez grupę współczynników  $\tilde{h}^0(S^0)$ .

Dowód polega na "polowaniu po diagramach", od tej chwili będziemy milcząco zakładać, że  $\tilde{h}^*$  jest klasyczną teorią homologii, a  $X$  jest skończonym CW-kompleksem. Podstawową rolę odgrywa następujący lemat:

**Lemat 7.2.3.** Włożenie  $j : X^{(n+1)} \hookrightarrow X$  indukuje naturalne izomorfizmy

$$h_n(X^{(n+1)}, X^{(n-2)}) \simeq h_n(X^{(n+1)}) \xrightarrow{\cong} h_n(X).$$

*Dowód.* Udowodnimy najpierw, że  $h_n(X^{(n+1)}) \xrightarrow{\cong} h_n(X)$  rozważając ciąg dokładny pary  $(X, X^{(n+1)})$  pokazując przez indukcję, że znikają grupy homologii  $h_q(X^{(n+k+1)}, X^{(n+1)}) = 0$  dla  $q \leq n+1$ . Podobnie pokazujemy, że  $h_n(X^{(n+1)}, X^{(n-2)}) \simeq h_n(X^{(n+1)})$ . □

**Lemat 7.2.4.** Istnieje naturalny izomorfizm  $h_n(X^{(n+1)}, X^{(n-2)}) \simeq H_n(X; \tilde{h}^*)$

*Dowód.* Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 = h_n(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ h_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\partial} & h_n(X^{(n)}, X^{(n-2)}) & \longrightarrow & h_n(X^{(n+1)}, X^{(n-2)}) & \longrightarrow & h_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}) = 0 \\ & \searrow \partial_{n+1} & \downarrow & & \uparrow \simeq & & \\ & & h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & & h_n(X^{(n+1)}) & & \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \simeq & & \\ & & h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & & h_n(X) & & \end{array}$$

□

Obliczymy operatory brzegu w komórkowym kompleksie łańcuchowym korzystając z odwzorowań charakterystycznych komórek. Niech odwzorowania  $\coprod_{j \in J_q} (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (X^{(q)}, X^{(q-1)})$  będą zadane przez odwzorowania charakterystyczne komórek. Indukują one naturalny izomorfizm grup

$$\bigoplus_{j \in J_q} h_q(D^q, S^{q-1}) \xrightarrow{\cong} h_q(X^{(q)}, X^{(q-1)})$$

Dla dowolnej  $n$ -wymiarowej komórki mamy więc przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccc} h_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(X^{(n-1)}) & \longrightarrow & h_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \simeq \bigoplus_{j \in J_{n-1}} \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \uparrow (\bar{\alpha}, \alpha)_* & & \uparrow \alpha_* & \nearrow & \\ h_n(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\simeq]{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

a stąd

**Wniosek 7.2.1.**

$$\partial_n((\bar{\alpha}, \alpha)_*(z)) = \sum_{j \in J_{n-1}} [\alpha, \beta_j](\bar{\beta}_j, \beta_j)_*(\partial z) \quad \text{gdzie } [\alpha, \beta_j] \in \mathbb{Z}.$$

*Przykład 7.2.1.* Niech  $\tilde{h}_*$  będzie klasyczną teorią homologii i oznaczmy  $\tilde{h}_0(S^0) = M$ . Jeśli  $X$  jest CW-kompleksem w którym komórki występują jedynie w wymiarach parzystych tzn. dla każdego  $n \geq 0$   $X^{(2n)} = X^{(2n+1)}$ . Niech  $J_q$  oznacza zbiór komórek  $q$ -wymiarowych. Wtedy

$$h_q(X) = \begin{cases} \bigoplus_{j \in J_q} M & \text{jeśli } q = 2k \\ 0 & \text{jeśli } q = 2k + 1 \end{cases}$$

Ważny przykład takiego kompleksu to zespolona przestrzeń rzutowa  $\mathbb{C}P(n)$ , która posiada rozkład na CW-kompleks z jedną komórką w każdym wymiarze  $2k$  dla  $k \leq n$ .

*Przykład 7.2.2.* Rzeczywista przestrzeń rzutowa  $\mathbb{R}P(n)$  ma rozkład na komórki taki, że w każdym wymiarze  $\leq n$  występuje dokładnie jedna komórka. Rozkład ten otrzymujemy z CW-rozkładu sfery  $S^n$  na dwie antypodyczne komórki w każdym wymiarze  $\leq n$ . Stąd kompleks komórkowy  $C_*(\mathbb{R}P(n))$  ma postać:

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

gdzie  $\partial_{2k} = 0$  oraz  $\partial_{2k+1}(z) = 2z$ .

### 7.3 Singularna teoria (ko-)homologii

W Przykładzie 7.1.1 stwierdziliśmy, że dla dowolnej grupy abelowej  $M$  spektrum przestrzeni Eilenberga-MacLane'a  $\{K(M, n)\}$  definiuje klasyczną teorię (ko-)homologii, której współczynniki są izomorficzne z grupą  $M$ . W tym rozdziale podamy inną definicję klasycznych teorii, która nie odwołuje się do konstrukcji przestrzeni Eilenberga-MacLane'a, lecz jest oparta na pojęciu sympleksu singularnego.

Niech  $v_0, v_1, \dots$  będzie ustalonym ciągiem różnych punktów, które posłużą za wierzchołki sympleksów, a dla każdego  $q \geq 0$ ,  $\Delta^q$  oznacza sympleks rozpięty na wierzchołkach  $v_0, v_1, \dots, v_q$ . Dla dowolnego  $0 \leq i \leq q$  określmy odwzorowanie afiniczne włożenia ścian  $e_q^i: \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$  zadane na wierzchołkach  $\{v_0, \dots, v_{q-1}\}$  wzorem

$$e_q^i(v_j) := \begin{cases} v_j & \text{dla } j < i \\ v_{j+1} & \text{dla } j \geq i \end{cases} \quad \text{dla } 0 \leq j < i \leq q \quad \text{spełniającym równość } e_{q+1}^i e_q^j = e_{q+1}^j e_q^{i-1}.$$

Jeśli  $X$  jest przestrzenią topologiczną to  $q$ -wymiarowym sympleksem singularnym nazywamy odwzorowanie  $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ , a jego  $i$ -tą ścianą złożenie  $\sigma^{(i)} := \sigma \circ e_q^i: \Delta^{q-1} \rightarrow X$ . Przez  $\Delta_q(X)$  oznaczamy grupę wolną abelową generowaną przez zbiór  $q$ -wymiarowych sympleksów singularnych w  $X$ . Operacja obcięcia do ścian wyznaczają tzw. homomorfizmy brzegu  $\partial_q: \Delta_q(X) \rightarrow \Delta_{q-1}(X)$  dane wzorem:

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Z równości  $(\sigma^{(i)})^{(j)} = (\sigma^{(j)})^{(i-1)}$  wynika, że  $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ , a więc otrzymujemy nieujemny kompleks łańcuchowy  $\{\Delta_q(X), \partial_q\}$ . Dowolne odwzorowanie ciągłe  $f: X \rightarrow Y$  pozwala przeciągać sympleksy singularne z  $X$  do  $Y$  a więc definiuje homomorfizm kompleksów łańcuchowych  $f_*: \{\Delta_q(X), \partial_q\} \rightarrow \{\Delta_q(Y), \partial_q\}$ .



Otrzymujemy więc funktor z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii nieujemnych kompleksów łańcuchowych. Funktor ten możemy rozszerzyć na kategorię par w następujący sposób: dla pary przestrzeni  $(X, A)$  definiujemy kompleks łańcuchowy  $\{\Delta_q(X, A), \partial_q\} := \{\Delta_q(X)/\Delta_q(A), \partial_q\}$ . Oczywiście odwzorowanie par  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  indukuje homomorfizm kompleksów relatywnych. Dla dowolnej grupy abelowej  $M$  definiujemy kompleks łańcuchów singularnych o współczynnikach w  $M$ :

$$\Delta_*(X, A; M) := \Delta_*(X, A) \otimes M \quad \text{oraz kołańcuchów singularnych} \quad \Delta^*(X, A; M) := \text{Hom}(\Delta_*(X, A), M).$$

Homologie tych kompleksów nazywamy odpowiednio grupami homologii singularnych pary  $(X, A)$  i oznaczamy  $H_*(X, A; M)$  oraz kohomologii singularnych,  $H^*(X, A; M)$ . Są to oczywiście funktory z kategorii par do kategorii grup abelowych z gradacją. Gdy  $A = \emptyset$  to pomijamy go w oznaczeniach, podobnie jeśli  $M = \mathbb{Z}$  jest grupą liczb całkowitych.

Do definicji teorii (ko-)homologii brakuje nam operatora brzegu  $\partial_q: H_q(X, A; M) \rightarrow H_{q-1}(A; M)$ . Jest on zadany przez krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych:

$$0 \rightarrow \Delta_*(A; M) \rightarrow \Delta_*(X; M) \rightarrow \Delta_*(X, A; M) \rightarrow 0$$

który prowadzi do długiego ciągu dokładnego grup homologii (analogicznie kohomologii):

$$\cdots \rightarrow H_q(A; M) \rightarrow H_q(X; M) \rightarrow H_q(X, A; M) \rightarrow H_{q-1}(A; M) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X; M) \rightarrow H_0(X, A; M) \rightarrow 0$$

czyli funktory  $H_q(-, -; M)$  oraz transformacja naturalna  $\partial: H_q(X, A; M) \rightarrow H_q(A; M)$  spełniają aksjomat ciągu dokładnego z Definicji 7.1.4. Spełnienie aksjomatu wymiaru jest oczywiste. Żeby wykazać aksjomat homotopii oraz aksjomat wycinania zastosujemy opisaną w następnym rozdziale *metodę modeli acyklicznych*, będącą abstrakcyjnym narzędziem dowodzenia rozmaitych równoważności łańcuchowych.



## Rozdział 8

# Metoda modeli acyklicznych

### 8.1 Funktory wolne

Niech  $J: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  będzie funktorem (często włożeniem podkategorii, stąd oznaczenie) oraz  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{A}$  pewnym funktorem. Nie zawsze istnieje rozszerzenie funktora  $F$  na kategorię  $\mathcal{C}$  tzn. funktor  $\tilde{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  taki, że  $F = J\tilde{F}$ . Istnieje jednak inne ważne pojęcie rozszerzenia, zwane (lewym) rozszerzeniem Kana, które można skonstruować w wielu sytuacjach.

**Definicja 8.1.1.** (Lewym) rozszerzeniem Kana funktora  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{A}$  wzdłuż funktora  $J: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  nazywamy funktor  $\tilde{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  wraz z naturalną transformacją  $\iota: F \rightarrow \tilde{F} \circ J$  spełniającą następujący warunek uniwersalności: Dla dowolnego funktora  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  i transformacji naturalnej  $\Phi: F \rightarrow G \circ J$  istnieje dokładnie jedna transformacja  $\Gamma: \tilde{F} \rightarrow G$  taka, że  $\Phi = \iota \circ \Gamma_J$ , gdzie  $\Gamma_F(\mathcal{C}') := \Gamma(J(\mathcal{C}'))$  (dodać diagramy)

W dualny sposób definiuje się *prawe rozszerzenie Kana*. Ponieważ będziemy korzystać tylko z lewego rozszerzenia, będziemy je krócej nazywać *rozszerzeniem Kana*.

*Przykład 8.1.1.* Niech  $\mathcal{C}' = H \subset G = \mathcal{C}$  będzie włożeniem podgrupy w grupę, traktowanym jako funktor między małymi kategoriami definiowanymi przez grupy,

- Niech  $X$ , będzie lewym  $H$ -zbiorem, a więc funktorem  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathbf{Set}$ . Lewym rozszerzeniem Kana jest lewy  $G$ -zbiór  $G \times_H X$ . Funktor  $\iota: X \rightarrow G \times_H X$  to włożenie  $\iota(x) := [e, x]$ . Dla dowolnego lewego  $G$ -zbiory  $Y$  i odwzorowania  $H$ -ekwiwariantnego  $\Phi: X \rightarrow Y$  (czyli transformacji naturalnej funktorów na  $\mathcal{C}'$ ) istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $G$ -ekwiwariantne  $\Gamma: G \times_H X \rightarrow Y$  (a więc transformacja funktorów określonych na  $\mathcal{C}$ ) takie, że  $\Phi = \iota \circ \Gamma$ .
- Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z jednością, a  $M$  będzie  $R[H]$ -modułem, czyli funktorem  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ . Lewym rozszerzeniem Kana jest lewy  $R[G]$ -zbiór  $R[G] \times_{R[H]} M$ . Funktor  $\iota: M \rightarrow R[G] \times_{R[H]} M$  to włożenie  $\iota(m) := 1 \otimes m$ . Dla dowolnego  $R[G]$ -modułu  $N$  i odwzorowania  $R[H]$ -modułów  $\Phi: M \rightarrow N$  (czyli transformacji naturalnej funktorów na  $\mathcal{C}'$ ) istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $R[G]$ -modułów  $\Gamma: R[G] \times_{R[H]} M \rightarrow N$  (a więc transformacja funktorów określonych na  $\mathcal{C}$ ) takie, że  $\Phi = \iota \circ \Gamma$ .

*Przykład 8.1.2.* Niech  $J: \mathcal{C}' = \{C\} \subset \mathcal{C}$  będzie dowolnym obiektem kategorii, traktowanym jako podkategoria z jednym morfizmem  $id: C \rightarrow C$ .

- Niech  $F: \{C'\} \rightarrow \mathbf{Set}$  będzie funktorem przyporządkowującym obiektowi  $C$  zbiór jednopunktowy. Wtedy rozszerzeniem Kana funktora  $F$  jest funktor kowariantny reprezentowany przez obiekt  $\mathcal{C}'$ :  $R_{\mathcal{C}'}(D) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', D)$ . Transformacja  $F \rightarrow R_{\mathcal{C}} \circ J$  przypisuje identyczności w  $\{C\}$  morfizm identycznościowy w  $R_{\mathcal{C}'}(C') = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C')$ . Spełnienie warunku uniwersalności pozostawiamy jako ćwiczenie na zastosowanie lematu Yonedy.

- Niech  $F: \{C\} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  będzie funktorem przyporządkowującym obiektowi  $C'$   $R$ -moduł wolny z jednym generatorem (przyjmijmy  $R$ ). Wtedy rozszerzeniem Kana funktora  $F$  jest funktor kowariantny reprezentowany przez obiekt  $C'$ , złożony z funktorem przyporządkowującym zbiorowi  $R$ -moduł wolny przezeń generowany  $R_{C'}^R(D) := R[\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', D)]$ . Transformacja  $F \rightarrow R_{C'}^R \circ J$  przypisuje identyczności w  $1 \in R$  element  $1 \cdot id_{C'} \in R[\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C')]$ . Spełnienie warunku uniwersalności pozostawiamy jako ćwiczenie.

**Stwierdzenie 8.1.1.** *Jeśli funktor  $\tilde{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  jest rozszerzeniem Kana funktora  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{A}$  wzdłuż funktora  $J: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ , to dla dowolnego funktora  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość transformacji naturalnych:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{F}, G) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F, G \circ J).$$

*Dowód.* Wynika bezpośrednio z definicji rozszerzenia Kana. Transformacji naturalnej  $\Phi: F \rightarrow G \circ J$  przypisujemy transformację  $\Gamma: \tilde{F} \rightarrow G$ , a transformacji  $\tilde{F} \rightarrow G$  przypisujemy złożenie transformacji  $F \xrightarrow{\iota} F \circ J \xrightarrow{\Gamma} G \circ J$ . Z jednoznaczności wynika, że przyporządkowania są wzajemnie odwrotne.  $\square$

Ostatnie stwierdzenie i przykłady uzasadniają wprowadzenie notacji nawiązującej do teorii reprezentacji liniowych grup. Złożenie funktorów  $G \circ J$  będziemy oznaczać  $\text{res}_J G$ , a (lewe) rozszerzenie Kana funktora  $F$  przez  $\text{ind}^J F$ . W przypadku gdy  $J$  jest włożeniem podkategorii  $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$ , piszemy też  $\text{res}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} G$  oraz  $\text{ind}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} F$ . Gdy kategorie  $\mathcal{C}' < \mathcal{C}$  są ustalone, czasem pomijamy je w oznaczeniach obciążenia funktora i rozszerzenia Kana. W tych oznaczeniach teza Stw. 8.1.1 ma postać:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{ind}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} F, G) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F, \text{res}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} G).$$

nawiązującą do definiującej własności reprezentacji indukowanej (p. Przykład 8.1.1, druga kropka).

**Stwierdzenie 8.1.2.** *Niech  $\mathcal{C}$  będzie dowolną kategorią, natomiast  $\mathcal{A}$  kategorią w której istnieją granice proste dowolnych diagramów. Niech  $J: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  będzie małą podkategorią (tzn. obiekty tworzą zbiór). Wtedy dowolny funktor  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{A}$  posiada rozszerzenie Kana.*

*Dowód.* Dla dowolnego obiektu  $C \in \text{ob } \mathcal{C}$  definiujemy kategorię  $J/C$  której obiektami są pary  $(C', J(C') \rightarrow C)$  gdzie  $C' \in \text{ob } (\mathcal{C}')$  oraz  $J(C') \rightarrow C \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Morfizmami w kategorii  $J/C$  są morfizmy w  $\mathcal{C}'$ , dla których odpowiednie diagramy są przemienne. Istnieje oczywisty funktor zapominania, projekcja na pierwszy czynnik:  $\Pi: J/C \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $\Pi((C', J(C') \rightarrow C)) := C'$ .

Dla funktora  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{A}$  definiujemy funktor  $\text{ind } F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ :

$$\text{ind}^J F(C) := \text{colim}_{J/C} \Pi \circ F$$

Transformacja naturalna  $\epsilon: F \rightarrow (\text{ind}^J F) \circ J = \text{res}_J(\text{ind}^J F)$ , której mowa w definicji rozszerzenia Kana 8.1.1, dla dowolnego obiektu  $C' \in \text{ob } (\mathcal{C}')$  jest morfizmem  $F(C') \rightarrow ((\text{ind}^J F) \circ J)(C')$  z definicji granicy prostej odpowiadającym obiektowi  $(id: J(C') \rightarrow J(C')) \in \text{ob } J/C$ . Spełnienie warunku z Definicji 8.1.1 wynika z własności uniwersalności granicy prostej.  $\square$

W przypadku ważnym dla dalszych zastosowań konstrukcja istnienia lewego rozszerzenia Kana wygląda znacznie prościej. Będziemy rozważać sytuację w której  $\mathcal{M}$  jest dyskretną małą podkategorią, a więc taką w której jedynymi morfizmami są identyczności, czyli po prostu podzbiór w klasie obiektów. Wtedy dla dowolnego obiektu  $C \in \text{ob } \mathcal{C}$  kategoria  $\mathcal{M}/C$  jest dyskretna, a więc:

$$\text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} F(C) := \prod_{C' \rightarrow C} F(C'). \quad (8.1)$$

Ta równość to proste uogólnienie Przykładów 8.1.2. Zauważmy, że gdy  $\mathcal{A} = \mathbf{Set}$ , a  $F$  jest funktorem przypisującym każdemu obiektowi  $M \in \mathcal{M}$  zbiór jednopunktowy, to  $\text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} F(C) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C)$ .

Natomiast, gdy  $\mathcal{A} = \mathbf{Mod}_R$ , a  $F$  przypisuje każdemu obiektowi  $M \in \mathcal{M}$   $R$ -moduł wolny o jednym generatorze  $R$ , to  $\text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} F(C) = R[\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C)]$  -  $R$ -moduł wolny generowany przez zbiór  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C)$ .

W dalszym ciągu będziemy rozważać funktory o wartościach w kategorii  $R$ -modułów.

**Definicja 8.1.2.** *Jeśli  $\mathcal{M} < \mathcal{C}$  jest dyskretną podkategorią, to funktor  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  nazywamy wolnym (odp. projektywnym), modelowanym na  $\mathcal{M}$  jeśli istnieje funktor  $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  taki, że dla każdego  $C \in \mathcal{M}$   $R$ -moduł  $S(C)$  jest wolny (odp. projektywny) oraz naturalna równoważność  $\text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S \simeq G$ .*

*Uwaga 8.1.1.* Jeśli  $\mathcal{C}$  jest małą kategorią, to funktor projektywny modelowany na  $\mathcal{M} < \text{ob } \mathcal{C}$  jest obiektem projektywnym w kategorii funktorów  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ . Założenie, że  $\mathcal{C}$  jest mała potrzebne jest aby funktory  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  i ich transformacje naturalne tworzyły kategorię. W zastosowaniach często przemilcza się ten problem i mówi o kategorii funktorów między dowolnymi kategoriami, ale nie jest to całkiem uprawnione.

Zauważmy następujące własności klasy funktorów wolnych.

**Stwierdzenie 8.1.3.**

- a) *Jeśli funktor  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  jest wolny, modelowany na  $\mathcal{M}$ , to jest on modelowany na dowolnej dyskretniej podkategorii  $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ .*  
b) *Jeśli  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  i  $G': \mathcal{C}' \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  są funktorami wolnymi, modelowanymi odpowiednio na  $\mathcal{M} < \mathcal{C}$  i  $\mathcal{M}' < \mathcal{C}'$ , to funktor  $G \hat{\otimes} G': \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  dany wzorem*

$$(G \hat{\otimes} G')(C, C') := G(C) \otimes G'(C')$$

*jest funktorem wolnym, modelowanym na  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ .*

*Dowód.*

Ad a). Jeśli  $G = \text{ind } S$ , to rozszerzamy  $S$  na  $\mathcal{M}'$  kładąc  $S(M') = 0$  dla  $M' \in \mathcal{M}' \setminus \mathcal{M}$ .

Ad b). Niech  $K: \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  będzie dowolnym funktorem. Dla dowolnego obiektu  $C \in \mathcal{C}$  definiujemy funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(G', K): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  jako  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(G', K)(C) := \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(G', K(C, -))$ . Z własności iloczynu tensorowego oraz definicji modeli wynika następujący ciąg naturalnych izomorfizmów

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}(G \hat{\otimes} G', K) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(G', K)) = \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{M}}(S, \text{Hom}_{\mathcal{M}'}(S', \text{res } K)) = \text{Hom}_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}'}(S \hat{\otimes} S', \text{res } K). \end{aligned}$$

□

## 8.2 Moduły i algebry z gradacją. Kompleksy łańcuchowe

Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z jednością; na ogół dziedziną ideałów głównych (PID).

**Definicja 8.2.1** (Moduł z gradacją).  *$R$ -modułem (krótko modułem) z  $\mathbb{Z}$ -gradacją (krótko gradacją) nazywamy ciąg  $R$ -modułów  $M_i$  gdzie  $i \in \mathbb{Z}$  lub - równoważnie - moduł  $M_*$  wraz z rodziną podmodułów  $M_i \subset M_*$  takich, że  $\bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} M_q \simeq M_*$ . Element  $a \in M_*$  nazywa się jednorodny, jeśli  $a \in M_n$  dla pewnego  $n =: \text{deg}(a)$ . Homomorfizmem modułów z gradacją stopnia  $n \in \mathbb{Z}$  nazywamy rodzinę homomorfizmów  $f_i: M_i \rightarrow M_{i+n}$ . Kategorię  $R$ -modułów z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 oznaczamy  $\mathbf{Mod}_R^*$ .*

**Definicja 8.2.2.** *Dla modułów z gradacją definiujemy iloczyn tensorowy  $M_*, N_*$*

$$(M_* \otimes N_*)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$$

**Zad. 1.** Sprawdzić, że tak zdefiniowany iloczyn tensorowy jest lewym funktorem dołączonym do funktora  $\text{Hom}(M_*, -)$  na  $\mathcal{M}_R$ . Pokazać, że zachodzi również naturalny izomorfizm

$$\text{Hom}_*(M_* \otimes N_*, K_*) \simeq \text{Hom}_*(M_*, \text{Hom}_*(N_*, K_*)).$$

**Definicja 8.2.3** (Algebra z gradacją). *R*-algebrą przemienną z  $\mathbb{Z}$ -gradacją (krótko z gradacją) nazywamy *R*-moduł z gradacją  $A_* = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} A_q$  wyposażony w homomorfizm stopnia 0

$$\mu : A_* \otimes_R A_* \rightarrow A_*$$

spełniający aksjomaty mnożenia w algebrze oraz taki, że dla  $a \in A_p, b \in B_q$  zachodzi  $ab = (-1)^{pa}ba$ . Kategorię *R*-algebr z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 zachowujących mnożenie oznaczamy  $\text{Alg}_R^*$ .

**Definicja 8.2.4** (Moduł z gradacją nad algebrą z gradacją). Niech  $A_*$  będzie *R*-algebrą z gradacją.  $A_*$ -modułem z gradacją nazywamy *R*-moduł z gradacją wyposażony w mnożenie  $A_* \otimes M_* \rightarrow M_*$ , spełniające warunki z definicji modułu.

**Zad. 2.** Dla algebry z gradacją  $A_*$  i ideału  $I < A_*$  generowanego przez elementy jednorodne algebra ilorazowa  $A_*/I$  jest algebrą z gradacją i jednocześnie  $A_*$ -modułem.

**Definicja 8.2.5.** *R*-modułem z różniczką nazywa się moduł  $M$  wraz z homomorfizmem  $\partial : M \rightarrow M$  takim, że  $\partial^2 = 0$ . Moduł  $H(M, \partial) := \ker \partial / \text{im } \partial$  nazywamy modułem homologii. Kategorię *R*-modułów z różniczkowaniem oznaczmy  $\mathcal{DM}_R$ .

**Zad. 3.** Zauważ, że kategoria *R*-modułów z różniczką jest równoważna kategorii modułów nad pierścieniem  $S := R[t]/(t^2)$ . Znajdź funktory dołączone do funktora zapominania  $\mathcal{DM}_R \rightarrow \mathcal{M}_R$ .

**Definicja 8.2.6** (DGA). Różniczkowaniem w algebrze z gradacją  $A_*$  nazywamy endomorfizm modułu z gradacją  $d : A_* \rightarrow A_*$  stopnia +1 taki, że  $d(ab) = d(a) \cdot b + (-1)^{pa} \cdot d(b)$  dla  $a \in A_p, b \in B_q$ . Algebrę z gradacją i różniczką nazywa się DGA ("Differential Graded Algebra").

**Definicja 8.2.7.** Moduł z gradacją i różniczką stopnia -1 nazywa się kompleksem łańcuchowym, a z różniczką stopnia +1 kompleksem kołańcuchowym. Moduły homologii kompleksu łańcuchowego są modułami z gradacją. Moduły homologii kompleksu kołańcuchowego nazywają się modułami kohomologii. Kategorię kompleksów łańcuchowych *R*-modułów i homomorfizmów stopnia 0 oznaczamy  $\mathcal{CC}_R$ .

**Zad. 4.** Zauważ, że kategoria  $\mathcal{CC}_R$  jest równoważna kategorii  $S_*$ -modułów z gradacją, gdzie  $S_* := R[t]/(t^2)$  w którym  $\deg(t) = -1$ . Analogicznie kategoria kompleksów kołańcuchowych jest równoważna z kategorią  $S_*$ -modułów z gradacją, gdzie  $S_* := R[t]/(t^2)$  w którym  $\deg(t) = +1$ .

**Definicja 8.2.8.** Uzupełnieniem kompleksu łańcuchowego *R*-modułów  $C_*$  nazywamy epimorfizm  $\epsilon : C_0 \rightarrow R$  taki, że  $\epsilon \partial = 0$  (czyli homomorfizm  $C_* \rightarrow R$ , gdzie  $R$  traktujemy jako kompleks skoncentrowany w wymiarze 0). Kompleks łańcuchowy uzupełniony to nieujemny kompleks ( $C_n = 0$  dla  $n < 0$ ) wraz z uzupełnieniem  $\epsilon : C_* \rightarrow R$ . Jeśli  $C_*$  jest uzupełniony, to kompleksem zredukowanym  $\tilde{C}_*$  nazywamy kompleks łańcuchowy określony następująco:  $\tilde{C}_n = C_n$  dla  $n \neq 0$  oraz  $\tilde{C}_0 = \ker \epsilon$ .

### 8.3 Twierdzenie o modelach acyklicznych

**Twierdzenie 8.3.1** (S. Eilenberg, S. MacLane [7]). *Niech  $G, G': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CC}_R$  będą funktorami z kategorii  $\mathcal{C}$  do kategorii kompleksów łańcuchowych nad pierścieniem  $R$ . Niech  $\mathcal{M} < \mathcal{C}$  będzie dyskretną podkategorią, taką że:*

1. *Dla każdego  $q \in \mathbb{Z}$  funktor  $G_q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  jest wolny, modelowany na  $\mathcal{M}$ , oraz  $G_q = 0$  dla  $q < 0$ .*
2. *Funktor  $G': \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{CC}_R$  jest acykliczny w wymiarach dodatnich tzn.  $H_q(G'(M)) = 0$  dla  $M \in \mathcal{M}, q > 0$ .*

*Wtedy dowolna transformacja naturalna  $\tau: H_0(G) \rightarrow H_0(G')$  jest indukowana przez transformację naturalną funktorów  $T: G \rightarrow G'$  i dowolne dwie transformacje takie, że  $H_0(T) = H_0(T')$  są naturalnie łańcuchowo homotopijne.*

*Dowód.* Oznaczmy przez  $S_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  funktory o wartościach w wolnych  $R$ -modułach takie, że  $G_i = \text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S_i$ . Skonstruujemy indukcyjnie transformację  $T_i: G_i \rightarrow G'_i$  rozpoczynając od  $i = 0$ . Dla dowolnego  $M \in \mathcal{M}$  rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 S_0(M) & & & & \\
 \downarrow \iota_M & \nearrow \tilde{\tau}_M & & & \\
 G_0(M) & & Z_0(G'(M)) & \xrightarrow{\subset} & G'_0(M) \\
 \downarrow p_M & & \downarrow p'_M & & \\
 H_0(G(M)) & \xrightarrow{\tau_M} & H_0(G'(M)) & & 
 \end{array}$$

w którym transformacja  $\iota: S_0 \rightarrow G_0$  na  $\mathcal{M}$  jest transformacją z definicji rozszerzenia Kana, a  $Z_i(-) := \ker \partial_i$  oznacza moduł cykli  $i$ -wymiarowych. Ponieważ moduły  $S_0(M)$  są wolne, a  $p'_M$  jest epimorfizmem, to istnieje homomorfizm  $\tilde{\tau}: S_0(M) \rightarrow Z_0(G'(M))$ , a więc transformacja naturalna funktorów określonych na  $\mathcal{M}$ ,  $\tilde{\tau}: S_0 \rightarrow G'_0$ . Ponieważ  $G_0 = \text{ind}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}} S_0$ , a więc  $\tilde{\tau}$  wyznacza dokładnie jedną transformację naturalną  $T_0: G_0 \rightarrow G'_0$  na  $\mathcal{C}$  dla której diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0(C) & \xrightarrow{T_0} & Z_0(G'(C)) & \xrightarrow{\subset} & G'_0(C) \\
 \downarrow p & & \downarrow p' & & \\
 H_0(G(C)) & \xrightarrow{\tau_M} & H_0(G'(C)) & & 
 \end{array}$$

jest przemienny dla każdego  $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ , bowiem z definicji jest przemienny dla każdego obiektu  $M \in \mathcal{M}$ . Załóżmy teraz, że skonstruowane są transformacje  $T_i: G_i \rightarrow G'_i$  dla  $i < q$ . Aby skonstruować

$T_q: G_q \rightarrow G'_q$  rozważmy dla każdego  $M \in \mathcal{M}$  diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 S_q(M) & & \\
 \downarrow \iota & \searrow \tilde{\tau}_q & \\
 G_q(M) & \xrightarrow{T_q} & G'_q(M) \\
 \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial'_q \\
 G_{q-1}(M) & \xrightarrow{T_{q-1}} & G'_{q-1}(M) \\
 \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial'_{q-1} \\
 G_{q-2}(M) & \xrightarrow{T_{q-2}} & G'_{q-2}(M)
 \end{array}$$

w którym konstruujemy homomorfizm  $\tilde{\tau}_q: S_q(M) \rightarrow G'_q(M)$  jak następuje: dla dowolnego  $s \in S_q(M)$  element  $T_{q-1}(\partial_q(j(s))) \in G'_{q-1}(M)$  jest cyklem, a zatem z acykliczności kompleksu  $G'(M)$  wynika istnienie elementu  $g'_s \in G'_q(M)$  takiego, że  $\partial_q(g'_s) = T_{q-1}(\partial_q(j(s)))$ . Ponieważ  $S_q(M)$  jest wolnym  $R$ -module, więc przyporządkowując w ten sposób wolnym generatorom  $S_q(M)$  elementy w  $G'_q(M)$  otrzymujemy homomorfizm  $\tilde{\tau}_q: S_q(M) \rightarrow G'_q(M)$ , który jak poprzednio definiuje transformację  $T_q: G_q \rightarrow G'_q$ .

Analogicznie, indukcyjnie konstruujemy naturalną homotopię łańcuchową między transformacjami  $T, T': G \rightarrow G'$  takimi, że  $H_0(T) = H_0(T')$ . Zaczynamy od skonstruowania transformacji  $D_0: G_0 \rightarrow G'_1$  takiej, że  $T_0 - T'_0 = \partial'_1 D_0$  rozpatrując diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 S_0(M) & \xrightarrow{d_0} & G'_1(M) & & \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \partial'_1 & & \\
 G_0(M) & \xrightarrow{T_0 - T'_0} & Z_0(G'(M)) & \xrightarrow{\subset} & G'_0(M) \\
 \downarrow p & & \downarrow p' & & \\
 H_0(G(M)) & \xrightarrow{H_0(T) - H_0(T')} & H_0(G'(M)) & & 
 \end{array}$$

Dla dowolnego  $s \in S_0(M)$  zachodzi równość  $p'(T_0 - T'_0)(j(s)) = 0$ , a więc z definicji homologii istnieje element  $g' \in G'_1(M)$  taki, że  $\partial'_1(g') = (T_0 - T'_0)(j(s))$ . W ten sposób definiujemy  $d_0: S_0(M) \rightarrow G'_1(M)$ , a zatem transformację naturalną  $D_0: G_0 \rightarrow G'_1$  taką, że  $T_0 - T'_0 = \partial'_1 D_0$ . Załóżmy, że skonstruowane są naturalne homomorfizmy  $D_i: G_i \rightarrow G'_{i+1}$  dla  $i < q$  i rozważmy



diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 G_{q+1}(M) & \xrightarrow[T'_{q+1}]{T_{q+1}} & G'_{q+1}(M) & & \\
 \downarrow \partial_{q+1} & \nearrow D_q & \downarrow \partial'_{q+1} & & \\
 S_q(M) \xrightarrow{\iota} G_q(M) & \xrightarrow[T'_q]{T_q} & G'_q(M) & & \\
 \downarrow \partial_q & \nearrow D_{q-1} & \downarrow \partial'_q & & \\
 G_{q-1}(M) & \xrightarrow[T'_{q-1}]{T_{q-1}} & G'_{q-1}(M) & & \\
 \downarrow \partial_{q-1} & \nearrow D_{q-2} & \downarrow \partial'_{q-1} & & \\
 G_{q-2}(M) & \xrightarrow[T'_{q-2}]{T_{q-2}} & G'_{q-2}(M) & & 
 \end{array}$$

Dla  $s \in S_q(M)$  rozpatrzmy element  $(T_q - T'_q - D_{q-1}\partial_q)(j(s)) \in G'_q(M)$ . Zauważmy, że jest on cyklem, bowiem

$$\begin{aligned}
 \partial'_q(T_q - T'_q - D_{q-1}\partial_q) &= \partial'_q T_q - \partial'_q T'_q - \partial'_q D_{q-1}\partial_q = T_{q-1}\partial_q - T'_{q-1}q\partial_q - \partial'_q D_{q-1}\partial_q = \\
 &= (T_{q-1} - T'_{q-1} - \partial'_q D_{q-1})\partial_q = D_{q-2}\partial_{q-1}\partial_q = 0.
 \end{aligned}$$

Ponieważ kompleks  $G'(M)$  jest acykliczny w wymiarach dodatnich, więc korzystając jak poprzednio z wolności  $S_q(M)$  konstruujemy transformację  $D_q: G_q \rightarrow G'_{q+1}$ .  $\square$

*Uwaga 8.3.1.* Założenie 1. Tw. 8.3.1 (i odpowiednio kolejnych twierdzeń o modelach acyklicznych) można nieco osłabić wymagając jedynie, aby funktor  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CC}_R$  był składnikiem prostym funktora wolnego  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CC}_R$  modelowanego na  $\mathcal{M}$ .

Sformułujemy obecnie wariant twierdzenia o modelach acyklicznych dla funktorów o wartościach w kategorii uzupełnionych (*augmented*) kompleksów łańcuchowych. W dalszym ciągu przez  $R$  oznaczają będziemy także kompleks łańcuchowy  $C_*$  taki, że  $C_0 = R$  oraz  $C_q = 0$  dla  $q \neq 0$ .

**Definicja 8.3.1.** *Kompleksem łańcuchowym uzupełnionym nazywamy nieujemny kompleks  $R$ -modułów  $C_*$  wyposażony w epimorfizm  $\varepsilon: C_* \rightarrow R$ , który nazywamy uzupełnieniem kompleksu  $C_*$ . Morfizmem kompleksów uzupełnionych nazywamy homomorfizm  $\phi: C_* \rightarrow C'_*$  taki, że  $\varepsilon = \varepsilon'\phi$ . Kategorię kompleksów uzupełnionych oznaczamy  $\mathcal{CC}_R^+$ . Kompleks uzupełniony nazywamy acyklicznym, jeśli  $\varepsilon: H_*(C_*) \simeq R$ .*

*Uwaga 8.3.2.* Wolny moduł o jednym generatorze  $R$  można zastąpić dowolnym  $R$ -modulem.

**Twierdzenie 8.3.2.** *Niech  $G, G': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CC}_R^+$  będą dwoma funktorami z kategorii  $\mathcal{C}$  do kategorii uzupełnionych kompleksów łańcuchowych oraz  $\mathcal{M} < \mathcal{C}$  jest dyskretną podkategorią. Załóżmy ponadto, że:*

1. Dla każdego  $q \in \mathbb{Z}$  funktor  $G_q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  jest wolny, modelowany na  $\mathcal{M}$ ;
2. Funktor  $G': \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{CC}_R^+$  jest acykliczny tzn.  $\varepsilon_M: H_*(G'(M)) \simeq R$ .

Wtedy istnieje transformacja naturalna  $T: G \rightarrow G'$  oraz dowolne dwie takie są naturalnie łańcuchowo homotopijne.

*Dowód.* Wykażemy, że są spełnione założenia twierdzenia o modelach acyklicznych, a dokładniej, że istnieje dokładnie jedna transformacja naturalna  $\tau: H_0(G) \rightarrow H_0(G')$  zachowująca uzupełnienie, czyli taka że  $\varepsilon_C = \varepsilon'_C \tau_C$ . Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 S_1(M) & \xrightarrow{\iota} & G_1(M) \\
 & & \downarrow \partial_1 \\
 S_0(M) & \xrightarrow{\iota} & G_0(M) \\
 & & \downarrow p \\
 & & H_0(G(M)) \xrightarrow{\tau_M} H_0(G'(M)) \\
 & & \downarrow \varepsilon \qquad \qquad \downarrow \varepsilon' \\
 & & R \xrightarrow{=} R
 \end{array}$$

Zauważymy, że transformacja  $\varepsilon'^{-1}\varepsilon: H_0(G(M)) \rightarrow H_0(G'(M))$ , zdefiniowana na  $\mathcal{M}$ , rozszerza się jednoznacznie do transformacji  $H_0(G) \rightarrow H_0(G')$ . Istotnie, korzystając z wolności funktora  $G_0$  rozszerzamy ją do transformacji  $G_0 \rightarrow H_0(G')$ . Ponieważ także funktor  $G_1$  jest wolny, a więc skoro złożenie  $G_1(M) \xrightarrow{\partial_1} G_0(M) \xrightarrow{\tau_M} H_0(G'(M))$  jest zerowe, to dla dowolnego  $C$  złożenie  $G_1(C) \xrightarrow{\partial_1} G_0(C) \xrightarrow{\tau_M} H_0(G'(C))$  jest zerowe, a więc transformacja  $\tilde{\tau}_M$  wyznacza dokładnie jedną transformację  $\tau: H_0(G) \rightarrow H_0(G')$  zachowującą uzupełnienia.  $\square$

**Wniosek 8.3.1.** Niech  $G, G': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CC}_R^+$  będą dwoma funktorami z kategorii  $\mathcal{C}$  do kategorii uzupełnionych kompleksów łańcuchowych oraz  $\mathcal{M} < \mathcal{C}$  jest dyskretną podkategorią. Załóżmy ponadto, że:

1. Dla każdego  $q \in \mathbb{Z}$  funktory  $G_q, G'_q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  są wolne, modelowane na  $\mathcal{M}$ ;
2. Oba funktory  $G, G': \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{CC}_R^+$  są acykliczne.

Wtedy istnieje naturalna łańcuchowa równoważność  $T: G \rightarrow G'$  oraz dowolne dwie takie naturalne łańcuchowe równoważności są naturalnie łańcuchowo homotopijne.  $\square$

*Uwaga 8.3.3.* Dowód ostatniego twierdzenia, przechodzi bez zmian dla kompleksów wzbogaconych o odwzorowanie w dowolny  $R$ -moduł  $A$  oraz zakładając, że funktory  $G_q$  są projektywne. Otrzymujemy w ten sposób dowód znanych własności rezolwent projektywnych.

## 8.4 Aksjomat homotopii

Zastosujemy metodę modeli acyklicznych do sprawdzenia, że singularna teoria homologii spełnia aksjomat homotopii 7.1.4. 1. Na kategorii przestrzeni topologicznych rozważmy dwa funktory do kategorii uzupełnionych kompleksów łańcuchowych: łańcuchów singularnych  $\Delta_*(X)$  oraz łańcuchów singularnych przestrzeni pomnożonej kartezyjańsko przez odcinek  $\Delta_*^I(X) := \Delta_*(X \times I)$ . Włożenia na dolną i górną podstawę walca  $i_0, i_1: X \rightarrow X \times I$  indukują transformacje naturalne tych funktorów  $i_{0*}, i_{1*}: \Delta_*(X) \rightarrow \Delta_*^I(X)$ . Korzystając z metody modeli acyklicznych wykażemy, następujący lemat, skąd łatwo wywnioskujemy aksjomat homotopii.

**Lemat 8.4.1.** Transformacje  $i_{0*}, i_{1*}: \Delta_*(X) \rightarrow \Delta_*^I(X)$  są naturalnie łańcuchowo homotopijne (a nawet są naturalnymi łańcuchowymi homotopijnymi równoważnościami)

*Dowód.* Sprawdzimy, że transformacje  $i_{0*}, i_{1*}$  spełniają założenia Wniosku 8.3.2. Zauważmy, że każdy funktor  $\Delta_q$  i  $\Delta_q^I$  jest wolny, modelowany na sympleksie  $\Delta^q$ . Z równości 8.1 wynika, że:

- $\Delta_q(X) = \text{ind}_{\Delta^q}^{\mathcal{T}}(\mathbb{Z})(X)$
- $\Delta_q^I(X) = \Delta_q(X \times I) = \text{ind}_{\Delta^q}^{\mathcal{T}}(\Delta_n(I))(X)$

Wykazanie acykliczności obu funktorów na modelach sprowadza się do wykazania, że znikają homologie uzupełnionego kompleksu singularnego dowolnego sympleksu  $\Delta_*(\Delta^q) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Istotnie, produkt  $\Delta^q \times I$  jest homeomorficzny z  $\Delta^{q+1}$ , a kompleksy łańcuchów singularnych są oczywiście niezmiennikiem homeomorfizmów, co jest treścią następnego lematu.  $\square$

**Lemat 8.4.1.** *Uzupełniony kompleks singularny dowolnego sympleksu  $\Delta_*(\Delta^q) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  jest ciągiem dokładnym tzn. jego grupy homologii znikają.*

*Dowód.* Skonstruujemy homotopię łańcuchową między odwzorowaniem identycznościowym a zerowym kompleksu  $\Delta_*(\Delta^q) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , czyli ciąg homomorfizmów  $D_q: \Delta_q(\Delta^n) \rightarrow \Delta_{q+1}(\Delta^n)$  takich, że  $\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = id$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & \Delta_{q+1}(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & \Delta_q(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_q} & \Delta_{q-1}(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & \dots & (8.2) \\
 & & & & \downarrow id & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & \Delta_{q+1}(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & \Delta_q(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_q} & \Delta_{q-1}(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & \dots \\
 & & \swarrow D_q & & \downarrow id & & \swarrow D_{q-1} & & \\
 & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Niech sympleks  $\Delta^q$  ma wierzchołki  $p_0, \dots, p_n$ . Rozpatrzmy ściągnięcie  $F: \Delta^q \times I \rightarrow \Delta^q$  zadane wzorem  $F(p, t) := p_0 + (1-t)(p - p_0)$ . Dla dowolnego sympleksu singularnego  $\sigma: \Delta^q \rightarrow \Delta^n$  definiujemy sympleks  $q+1$ -wymiarowy  $D(\sigma)(tp_0 + (1-t)p) := p_0 + (1-t)(\sigma(p) - p_0)$  - punkty w sympleksie  $q+1$ -wymiarowym zapisaliśmy jako kombinację wypukłą punktu  $p_0$  oraz punktu  $p$  leżącego na ścianie naprzeciw wierzchołka  $p_0$ , którą utożsamiamy z sympleksem  $q$ -wymiarowym przez włożenie  $e_{q+1}^0: \Delta^q \rightarrow \Delta^{q+1}$ . Dla dowolnego sympleksu  $\sigma: \Delta^q \rightarrow \Delta^n$  sprawdzimy równość:  $\partial_{q+1}D_q(\sigma) + D_{q-1}\partial_q(\sigma) = \sigma$  analizując oba składniki:

$$\partial_{q+1}D_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i D_q(\sigma)^{(i)}, \quad D_{q-1}\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i D_{q-1}(\sigma)^{(i)}$$

Z definicji homomorfizmów  $D_q$  oraz operacji ściany wynika, że dla  $q > 0$ ,

$$D_q(\sigma)^{(i)} = \begin{cases} \sigma & \text{dla } i = 0 \\ D_{q-1}(\sigma^{(i-1)}) & \text{dla } 1 \leq i \leq q+1 \end{cases}$$

stąd dla  $q \geq 1$  i dowolnego łańcucha  $c \in \Delta_q(\Delta^n)$  zachodzi równość  $\partial_{q+1}D_q(c) + D_{q-1}\partial_q(c) = c$ . Rozważymy teraz początek kompleksu

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Delta_2(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_2} & \Delta_1(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_1} & \Delta_0(\Delta^n) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & (8.3) \\
 \downarrow id & & \swarrow D_1 & & \downarrow id & & \swarrow D_0 & & \downarrow id & \\
 \Delta_2(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_2} & \Delta_1(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_1} & \Delta_0(\Delta^n) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow id & & \swarrow D_{-1} & & \downarrow id & & \swarrow D_{-2} & \\
 & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Definiujemy homomorfizm  $D_{-1}(1) := \sigma_{p_0}$ . Łatwo sprawdzić, że równość  $\partial_{q+1}D_q + D_{q-1}\partial_q = id$  zachodzi dla  $q = -1, 0$ , co kończy dowód.  $\square$

*Uwaga 8.4.1.* Korzystając z tego, że  $\Delta_*(X)$  jest funktorem wolnym, można łatwo jawnie skonstruować homotopię łańcuchową między transformacjami  $i_{0*}, i_{1*}: \Delta_*(X) \rightarrow \Delta_*(X \times I)$ , p. [10].

## 8.5 Aksjomat wycinania i ciąg Meyera-Vietorisa

W ślad za [16] zastosujemy metodą modeli acyklicznych do wykazania "zasady małych sympleksów" 8.5.1, z której wynika aksjomat wycinania 7.1.4. 3.

Rozpatrujemy kategorię przestrzeni topologicznych z wyróżnionym pokryciem  $\mathcal{TC}$  której obiektami są pary  $(X, \mathfrak{A})$ , gdzie  $\mathfrak{A}$  jest rodziną zbiorów, których wnętrza pokrywają przestrzeń  $X$ . Takie pokrycia będziemy nazywać *dopuszczalnymi*. Symbolem  $(X, \{X\})$  będziemy oznaczać parę, dla której pokrycie składa się tylko z jednego elementu - całej przestrzeni. Morfizmami w kategorii  $\mathcal{TC}$ ,  $f: (X, \mathfrak{A}) \rightarrow (Y, \mathfrak{B})$  są takie przekształcenia ciągłe  $f: X \rightarrow Y$ , że dla każdego podzbioru  $U \in \mathfrak{A}$  istnieje podzbiór  $V \in \mathfrak{B}$  taki, że  $f(U) \subseteq V$ . Mamy oczywisty funktor zapominania  $\mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{Top}$  przypisujący dowolnej parze  $(X, \mathfrak{A})$  przestrzeń  $X$  za pośrednictwem którego możemy rozważać kompleks łańcuchów singularnych jako funktor na kategorii  $\mathcal{TC}$ :  $\Delta_*: \mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{CC}^+$ .

Dla dowolnej przestrzeni z wyróżnionym pokryciem dopuszczalnym  $(X, \mathfrak{A})$  będziemy nazywali  $\mathfrak{A}$ -małym sympleksem singularnym morfizm  $\sigma: (\Delta^n, \{\Delta^n\}) \rightarrow (X, \mathfrak{A})$ , a więc taki sympleks singularny, którego obraz mieści się w jednym ze zbiorów  $A \in \mathfrak{A}$ . Przez  $\Delta_n(X, \mathfrak{A}) \subset \Delta_n(X)$  będziemy oznaczali podgrupę generowaną przez  $\mathfrak{A}$ -małe sympleksy singularne. Oczywiście tworzą one podkompleks w  $\Delta_*(X)$  i podfunktor funktora  $\Delta_*: \mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{CC}^+$ , który jednak nie faktoryzuje się przez funktor zapominania. W dalszym ciągu funktor  $\Delta_*(-, -): \mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{CC}^+$  będziemy oznaczać  $\Delta'_*$ .

**Twierdzenie 8.5.1** (Zasada małych sympleksów). *Włożenie  $\Delta_*(X, \mathfrak{A}) \subseteq \Delta_*(X)$  jest naturalną łańcuchową równoważnością funktorów  $\mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{CC}_\mathbb{Z}^+$ .*

Do dowodu Tw. 8.5.1 wykorzystamy metodę modeli acyklicznych, a dokładniej Wniosek 8.3.1. Zauważmy najpierw, że oba funktory  $\Delta'_*$  i  $\Delta_*$  posiadają uzupełnienie  $\Delta'_* \subset \Delta_* \rightarrow \mathbb{Z}$ . Trzeba więc wskazać zbiór modeli  $\mathcal{M}' \subset \text{ob } \mathcal{TC}$  dla obu funktorów i wykazać, że są acykliczne na tych modelach oraz projektywne tzn. są składnikami prostymi funktora wolnego z modelami  $\mathcal{M}'$ .

Zdefiniujemy zbiór obiektów

$$\mathcal{M}' := \{(\Delta^n, \mathfrak{B}) \mid n \geq 0, \mathfrak{B} \in \text{Cov}(\Delta^n)\}.$$

- Każdy funktor  $\Delta'_q: \mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{Ab}$  jest wolny, z modelem  $(\Delta^q, \{\Delta^q\})$ , a więc na mocy Stw. 8.1.3, także na zbiorze  $\mathcal{M}'$ .
- Funktor  $\Delta_q: \mathcal{TC} \rightarrow \mathcal{Ab}$  niestety nie jest wolny na zbiorze  $\mathcal{M}'$ , jest jednak składnikiem prostym funktora wolnego. Zdefiniujemy funktor wolny

$$F_q := \text{ind}_{\mathcal{M}'_q}^{\mathcal{TC}} \mathbb{Z} \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{M}'_q := \{(\Delta^q, \mathfrak{B}) \mid \mathfrak{B} \in \text{Cov}(\Delta^q)\} \subset \mathcal{M}'.$$

$$F_q(X, \mathfrak{A}) = \bigoplus_{\mathfrak{B} \in \text{Cov}(\Delta^q)} \mathbb{Z}\{\sigma: (\Delta^q, \mathfrak{B}) \rightarrow (X, \mathfrak{A})\} \quad (8.4)$$

a zatem funktory  $F_q$  tworzą kompleks łańcuchowy. Zdefiniujemy transformację naturalną funktorów na na kategorii  $j: \mathcal{TC}: \Delta_q(X) \rightarrow F_q(X, \mathfrak{A})$  przypisując sympleksowi singularnemu  $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ , element  $\sigma: (\Delta^q, \sigma^{-1}(\mathfrak{A})) \rightarrow (X, \mathfrak{A})$ . Transformacja  $r: F_q(X, \mathfrak{A}) \rightarrow \Delta_q(X, \mathfrak{A})$  zdefiniowana przez zapominanie o pokryciu jest retrakcją tzn  $r \circ j = \text{id}$ , a więc funktor  $\Delta_q$  jest składnikiem prostym funktora wolnego.

Pozostaje sprawdzić, że oba funktory do kategorii kompleksów łańcuchowych są acykliczne na  $\mathcal{M}'$ . W przypadku funktora  $\Delta_*$  wynika to natychmiast z Lematu 8.4.1. Acykliczność funktora  $\Delta'_*$  oznacza nieco więcej - resztę tego podrozdziału poświęcimy dowodowi stwierdzenia:

**Stwierdzenie 8.5.1.** *Dla dowolnego sympleksu  $\Delta^n$  i jego pokrycia  $\mathfrak{A}$ , para  $(\Delta^n, \mathfrak{A})$  jest ściągalna w  $\mathcal{TC}$ , a więc  $H_*(\Delta^n, \mathfrak{A}) = H_*(\Delta^n, \{*\})$ .*

Definiujemy homotopię między morfizmami  $f, g: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A})$  jako homotopię  $F: X \times I \rightarrow Y$ , która definiuje morfizm  $F: (X \times I, \mathfrak{B} \times \{I\}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A})$ , gdzie rodzina  $\mathfrak{B} \times \{I\} = \{U \times I: U \in \mathfrak{B}\}$ . Zauważmy, że tak zdefiniowana relacja w zbiorze morfizmów  $\text{Mor}_{\mathcal{TC}}((X, \mathfrak{B}), (Y, \mathfrak{A}))$  jest oczywiście zwrotna i symetryczna, lecz nie jest przechodnia. Domykamy ją do relacji przechodniej definiując relację homotopii między  $f$  i  $g$  jako ciąg morfizmów  $f_i: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A})$ ,  $i = 0, \dots, k$  taki, że  $f_0 = f$ ,  $f_k = g$  oraz między każdymi sąsiednimi przekształceniami  $f_i, f_{i+1}$  istnieje homotopia  $F_i$ .

**Lemat 8.5.1.** *Jeżeli  $f, g: (X, \mathfrak{B}) \rightarrow (Y, \mathfrak{A})$  są homotopijne w  $\mathcal{TC}$ , to indukowane homomorfizmy  $f_*, g_*: \Delta_*(X, \mathfrak{B}) \rightarrow \Delta_*(Y, \mathfrak{A})$  są łańcuchowo homotopijne. W szczególności jeżeli  $(X, \mathfrak{A})$  jest parą ściągającą w  $\mathcal{TC}$ , to kompleks łańcuchowy  $\Delta_*(X, \mathfrak{A})$  jest acykliczny.*

*Dowód.* Włożenia na dolną i górną podstawę definiują morfizmy  $i_0, i_1: (X, \mathfrak{A}) \rightarrow (X, \mathfrak{A}) \times I$ . Ponieważ homotopia łańcuchowa indukowanych homomorfizmów  $i_{0*}, i_{1*}: \Delta_*(X) \rightarrow \Delta_*(X \times I)$  jest transformacją naturalną, wyznacza więc homotopię łańcuchową między homomorfizmami  $i_{0*}, i_{1*}: \Delta_*(X, \mathfrak{A}) \rightarrow \Delta_*(X \times I, \mathfrak{A} \times I)$ .  $\square$

*Dowód Stw. 8.5.1.* Pokażemy, że dla dowolnego pokrycia sympleksu istnieje homotopijna równoważność  $(\Delta^n, \mathfrak{A}) \simeq (*, \{*\})$ . Argument jest wygodniej opisać dla homeomorficznej z sympleksem kostki  $(I^n, \mathfrak{A})$ . Dzielimy kostkę na tak małe kosteczki, by ich przekątna była mniejsza od liczby Lebesgue'a pokrycia  $\mathfrak{A}$ . Poczynając od rogu zgniatamy kolejne kosteczki, tak jak pokazano to na rysunku zaczerpniętym z pracy [16]:

ROLF SCHÖN

1	2	3	4	5
6	7	...		
				k

Każde takie zgnicenie jest retrakcją deformacyjną w  $\mathcal{TC}$ , a więc homotopijną równoważnością.  $\square$

Jako wniosek z Zasady małych sympleksów 8.5.1 otrzymamy aksjomat wycinania dla singularnej teorii (ko-)homologii. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną, zaś  $U \subset X$  i  $A \subset X$  takimi podzbiórmi, że  $\mathfrak{A} = \{A, X \setminus U\}$  jest pokryciem należącym do  $\mathcal{TopCov}$ , co jest równoważne warunkowi, że  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ . Wykażemy, że aksjomat wycinania, czyli że włożenie włożenie par indukuje izomorfizm homologii singularnych  $H_*(X \setminus U, A \setminus U) \simeq H_*(X, A)$ . Z definicji wynika, że  $\Delta_*(X, \mathfrak{A}) = \Delta_*(A) + \Delta_*(X \setminus U)$  a z zasady małych sympleksów 8.5.1 otrzymujemy, że włożenie  $\Delta_*(A) + \Delta_*(X \setminus U) \subseteq \Delta_*(X)$  jest naturalną łańcuchową równoważnością. Stąd, dzieląc oba kompleksy przez  $\Delta_*(A)$  otrzymujemy, że włożenie

$$(\Delta_*(A) + \Delta_*(X \setminus U))/\Delta_*(A) \subseteq \Delta_*(X)/\Delta_*(A)$$

jest naturalną łańcuchową równoważnością. Ponieważ  $\Delta_*(A) \cap \Delta_*(X \setminus U) = \Delta_*(A \setminus U)$ , więc otrzymujemy stąd aksjomat wycinania.

Nieco inną ważną formę aksjomatu wycinania otrzymujemy rozważając dowolne dwa podzbiory otwarte  $U, V \subset X$ . Wtedy włożenie  $\Delta_*(U) + \Delta_*(V) \subseteq \Delta_*(U \cup V)$  jest łańcuchową równoważnością, a więc także  $(\Delta_*(U) + \Delta_*(V))/\Delta_*(V) = \Delta_*(U)/\Delta_*(U \cap V) \subseteq \Delta_*(U \cup V)/\Delta_*(V)$  jest równoważnością. Stąd włożenie zbiorów indukuje izomorfizm:

$$H_*(U, U \cap V) \simeq H_*(U \cup V, V). \quad (8.5)$$

Innym ważnym wnioskiem z zasady małych sympleksów jest dokładność ciągu Mayera-Vietorisa<sup>1</sup>, przy pomocy którego można "sklejać" klasy (ko-)homologii.

**Twierdzenie 8.5.2.** *Niech  $A_1, A_2 \subset X$  będą podzbiórami takimi, że ich wnętrza pokrywają przestrzeń  $X$ . Wtedy istnieje naturalny ze względu na przekształcenia zachowujące odpowiednie podzbiory ciąg dokładny:*

$$\cdots \rightarrow H_q(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(j_{1*}, j_{2*})} H_q(A_1) \oplus H_q(A_2) \xrightarrow{i_{1*} - i_{2*}} H_q(X) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(j_{1*}, j_{2*})} \cdots$$

*Dowód.* Istnienie długiego ciągu dokładnego wynika z krótkiego ciągu dokładnego kompleksów łańcuchowych, w którym homomorfizmy są indukowane przez odpowiednie włożenia podzbiorów:

$$0 \rightarrow \Delta_*(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(j_{1*}, j_{2*})} \Delta_*(A_1) \oplus \Delta_*(A_2) \xrightarrow{i_{1*} - i_{2*}} \Delta_*(A_1) + \Delta_*(A_2) \rightarrow 0$$

oraz z zasady małych sympleksów 8.5.1 dzięki której  $H_*(\Delta_*(A_1) + \Delta_*(A_2)) = H_*(X)$ .  $\square$

**Twierdzenie 8.5.3.** *Niech  $(X_1, A_1), (X_2, A_2)$  będą parami podzbiorów w przestrzeni  $X$  takimi, że włożenia  $\Delta(A_1) + \Delta(A_2) \subset \Delta(A_1 \cup A_2)$  oraz  $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$  indukują izomorfizm grup homologii. Wtedy istnieje naturalny ze względu na przekształcenia zachowujące odpowiednie podzbiory ciąg dokładny:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2) & \longrightarrow & H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \\ & & & & & & \downarrow \partial_q \\ & & & & \cdots & \longleftarrow & H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \end{array}$$

*Dowód.* Rozważmy diagram kompleksów singularnych:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta_*(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \Delta_*(X_1) \oplus \Delta_*(X_2) & \longrightarrow & \Delta_*(X_1) + \Delta_*(X_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_*(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & \Delta_*(A_1) \oplus \Delta_*(A_2) & \longrightarrow & \Delta_*(A_1) + \Delta_*(A_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

w którym pionowe strzałki oznaczają włożenia. Kompleksy ilorazowe tworzą także ciąg dokładny:

$$0 \longrightarrow \frac{\Delta_*(X_1 \cap X_2)}{\Delta_*(A_1 \cap A_2)} \longrightarrow \frac{\Delta_*(X_1)}{\Delta_*(A_1)} \oplus \frac{\Delta_*(X_2)}{\Delta_*(A_2)} \longrightarrow \frac{\Delta_*(X_1) + \Delta_*(X_2)}{\Delta_*(A_1) + \Delta_*(A_2)} \longrightarrow 0$$

Ciąg dokładny homologii definiowany przez ten krótki ciąg dokładny kompleksów jest szukanym ciągiem, bo z założenia, że włożenia  $\Delta(A_1) + \Delta(A_2) \subset \Delta(A_1 \cup A_2)$  oraz  $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \subset \Delta(X_1 \cup X_2)$  indukują izomorfizm grup homologii wynika, że  $H_*\left(\frac{\Delta_*(X_1) + \Delta_*(X_2)}{\Delta_*(A_1) + \Delta_*(A_2)}\right) \simeq H_*(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ .  $\square$

Odpowiednie ciągi Mayera-Vietorisa istnieją oczywiście dla teorii homologii i kohomologii singularnych z dowolnymi współczynnikami.

**Definicja 8.5.1.** *Jeśli  $H^*$  jest singularną teorią kohomologii (z dowolnymi współczynnikami, które pomijamy) to definiujemy singularne kohomologie przestrzeni ze zwartymi nośnikami:*

$$H_c^q(X) := \operatorname{colim} H^q(X, X \setminus K)$$

gdzie granica odwrotna jest brana po zbiorze częściowo uporządkowanym zwartych podzbiorów  $K \subset X$ .

**Zadanie 73.**  $\diamond$  Kohomologie ze zwartymi nośnikami są funktorem kowariantnym na kategorii otwartych podzbiorów ustalonej przestrzeni  $X$  i ich inkluzji. Dla dowolnych podzbiorów otwartych  $U_1, U_2 \subset X$  takich, że  $X = U_1 \cup U_2$  istnieje (kowariantny) ciąg Mayera-Vietorisa:

$$\cdots \rightarrow H_c^q(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^q(U_1) \oplus H_c^q(U_2) \rightarrow H_c^q(X) \rightarrow H_c^{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \cdots$$

<sup>1</sup>Leopold Vietoris (Radkersburg 1891 – 2002 Innsbruck)

## 8.6 Iloczyn tensorowy kompleksów łańcuchowych

Rozpatrujemy moduły nad pierścieniem przemiennym  $R$ .

**Definicja 8.6.1.** Dla  $R$ -modułów z gradacją  $M_*$ ,  $N_*$  oznaczmy:

1.  $\text{Hom}_*(M_*, N_*)$  moduł z gradacją taki, że  $\text{Hom}_d(M, N)$  jest zbiorem homomorfizmów  $M_* \rightarrow N_*$  stopnia  $d$ .
2.  $M_* \otimes N_*$  moduł z gradacją (iloczyn tensorowy) taki, że  $(M_* \otimes N_*)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q$ .

**Stwierdzenie 8.6.1.**  $\text{Hom}_*(L_* \otimes M_*, N_*) \simeq \text{Hom}_*(L_*, \text{Hom}_*(M_*, N_*))$ .

Jeśli  $(C', \partial')$ ,  $(C'', \partial'')$  są kompleksami łańcuchowymi to:

1. W module z gradacją  $\text{Hom}_*(C', C'')$  definiujemy różniczkę:

$$\partial_{\text{Hom}}(\varphi) = \varphi \partial' - (-1)^d \partial'' \varphi \quad \text{gdzie } d = \deg(\varphi).$$

2. W iloczynie tensorowym  $C_* \otimes C'_*$  definiujemy operatory brzegu

$$\partial_{\otimes}(c \otimes c') = \partial(c) \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'(c') \quad \text{gdzie } c \in C_p, c' \in C'_q.$$

**Zadanie 74.** Sprawdzić, że  $\text{Hom}_*(C'_*, C''_*)$  i  $C_* \otimes C'_*$  są kompleksami łańcuchowymi oraz zachodzi izomorfizm kompleksów łańcuchowych

$$\text{Hom}_*(C_* \otimes C'_*, C''_*) \simeq \text{Hom}_*(C_*, \text{Hom}_*(C'_*, C''_*)).$$

**Zadanie 75.** Wykazać, że  $H_0(\text{Hom}_*(C_*, C'_*)) = \text{Hom}_0(C_*, C'_*) / \text{Hom}_{\text{null}}(C_*, C'_*) = [C_*, C'_*]$  gdzie  $\text{Hom}_{\text{null}}(C_*, C'_*)$  oznacza podmoduł homomorfizmów łańcuchowo homotopijnych z 0 a  $[C_*, C'_*]$  moduł klas homotopii łańcuchowej homomorfizmów (stopnia 0) kompleksów.

## 8.7 Twierdzenie Eilenberga - Zilbera

Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami topologicznymi. Rozważmy kompleksy łańcuchowe  $\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y)$  oraz  $\Delta_*(X \times Y)$ . Są to oczywiście nieujemne kompleksy uzupełnione - w przypadku produktu tensorowego przez homomorfizm  $\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ . Zauważmy, że istnieje oczywisty izomorfizm  $\Delta_0(X) \otimes \Delta_0(Y) \rightarrow \Delta_0(X \times Y)$  polegający na przypisaniu produktowi tensorowemu 0-wymiarowych sympleksów singularnych (punktów) i  $x \times y$  sympleksu singularnego  $(x, y) \in X \times Y$ . Metodą modeli acyklicznych pokażemy, że ten izomorfizm rozszerza się do jednoznacznie z dokładnością do homotopii naturalnej równoważności całych kompleksów łańcuchowych. Zauważmy, że oba kompleksy rozszerzają się do funktorów  $\Delta_*(-) \otimes \Delta_*(-)$ ,  $\Delta_*(- \times -): \mathcal{T}op \times \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{CC}_{\mathbb{Z}}^+$  z kategorii dwójek przestrzeni topologicznych do kategorii uzupełnionych, nieujemnych kompleksów łańcuchowych.

**Twierdzenie 8.7.1** (S. Eilenberg, A. Zilber). *Istnieje dokładnie jedna z dokładnością do łańcuchowej homotopii naturalna łańcuchowo homotopijna równoważność funktorów  $\mathcal{T}op \times \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{CC}_{\mathbb{Z}}^+$*

$$ez_{X,Y}: \Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) \xrightarrow{\simeq} \Delta_*(X \times Y).$$

*Dowód.* Dowód polega na sprawdzeniu, że oba funktory spełniają założenia Wniosku 8.3.1. Jako podkategorię modeli wybieramy dyskretną podkategorię  $\mathcal{T}op \times \mathcal{T}op$  składającą się z par sympleksów  $\Delta \times \Delta = \{(\Delta^p, \Delta^q) \mid p, q \geq 0\}$ .



Każdy iloczyn tensorowy  $\Delta_p(-) \otimes \Delta_q(-)$  na mocy Wniosku 8.1.3 pkt.2 jest wolny z modelem  $(\Delta^p, \Delta^q) \in \Delta \times \Delta$ . Każdy z funktorów  $\Delta_n(X \times Y)$  jest wolny z modelem  $(\Delta^n, \Delta^n) \in \Delta \times \Delta$ .

Oba funktory są acykliczne na modelach. Produkt tensorowy łańcuchowy równoważności  $\Delta_*(\Delta^p) \otimes \Delta_*(\Delta^q) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$  jest łańcuchową równoważnością. Produkt kartezjański sympleksów jest przestrzenią ściągającą, zatem kompleks  $\Delta_*(\Delta^p \times \Delta^q)$  jest acykliczny.  $\square$

Homotopijna jednoznaczność transformacji Eilenberga - Zilbera implikuje jej wiele topologicznie ważnych własności.

**Twierdzenie 8.7.2** (Łączność). *Dla dowolnych przestrzeni  $X, Y, Z$  następujący diagram jest przemienny z dokładnością do naturalnej łańcuchowej równoważności:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_*((X \times Y) \times Z) & \xrightarrow{\simeq} & \Delta_*(X \times (Y \times Z)) \\ \downarrow \text{ez}_{X \times Y, Z} & & \downarrow \text{ez}_{X, Y \times Z} \\ [\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y)] \otimes \Delta_*(Z) & \xrightarrow{\simeq} & \Delta_*(X) \otimes [\Delta_*(Y) \otimes \Delta_*(Z)] \end{array} \quad (8.6)$$

$\square$

**Twierdzenie 8.7.3** (Przemiennność). *Dla dowolnych przestrzeni  $X, Y$  następujący diagram jest przemienny z dokładnością do naturalnej łańcuchowej równoważności:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_*(X \times Y) & \xrightarrow{T_*} & \Delta_*(Y \times X) \\ \downarrow \text{ez}_{X, Y} & & \downarrow \text{ez}_{Y, X} \\ \Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) & \xrightarrow{\tau} & \Delta_*(Y) \otimes \Delta_*(X) \end{array} \quad (8.7)$$

gdzie  $T(x, y) := (y, x)$  oraz  $\tau(c \otimes c') := (-1)^{\deg c \deg c'} c' \otimes c$ .  $\square$

Odnajmy jeszcze relatywną wersję twierdzenia Eilenberga-Zilbera dla par przestrzeni topologicznych. Produkt par definiujemy:  $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ . Uwaga: to nie jest produkt kartezjański w kategorii par - raczej produkt tensorowy!

**Twierdzenie 8.7.4.** *Na podkategorii kategorii  $Top_2 \times Top_2$  składającej się z par wycinających  $((X, A), (Y, B))$  tzn. takich, że włożenie  $\Delta_*(X \times B) + \Delta_*(A \times Y) \subset \Delta_*(X \times B \cup A \times Y)$  jest łańcuchową równoważnością istnieje naturalna łańcuchowa równoważność funktorów*

$$\text{ez}_{(X,A),(Y,B)}: \Delta_*(X, A) \otimes \Delta_*(Y, B) \xrightarrow{\simeq} \Delta_*((X, A) \times (Y, B)).$$

*Dowód.* Z naturalności równoważności Eilenberga-Zilbera otrzymujemy łańcuchową równoważność

$$(\Delta_*(X)/\Delta_*(A)) \otimes (\Delta_*(Y)/\Delta_*(B)) \simeq (\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y))/(\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(B) + \Delta_*(A) \otimes \Delta_*(Y))$$

Z założenia, że włożenie  $\Delta_*(X \times B) + \Delta_*(A \times Y) \subset \Delta_*(X \times B \cup A \times Y)$  jest łańcuchową równoważnością wynika łańcuchowa równoważność:

$$(\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y))/(\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(B) + \Delta_*(A) \otimes \Delta_*(Y)) \simeq (\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y))/\Delta_*(X \times B \cup A \times Y).$$

$\square$



## Rozdział 9

# Struktury mnożeniowe w (ko-)homologiach

### 9.1 Algebry z gradacją

Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym. Zanim przystąpimy do omawiania algebr z gradacją sformułujemy ważną własność iloczynu tensorowego dwóch  $R$ -algebr z jednością (niekoniecznie przemiennych). Dla  $R$ -algebr  $A, B$  iloczyn tensorowy  $A \otimes_R B$  jest  $R$ -modułem wyposażonym w działanie  $(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$  i naturalne włożenia algebr  $A \ni a \mapsto a \otimes 1 \in A \otimes_R B$  oraz odpowiednio dla  $B \rightarrow A \otimes_R B$ . Iloczyn tensorowy posiada następującą własność uniwersalności:

**Stwierdzenie 9.1.1.** *Niech  $A, B$  będą  $R$ -algebrami. Produkt tensorowy  $A \otimes_R B$  wraz z włożeniami  $A \rightarrow A \otimes_R B \leftarrow B$  posiada następującą własność uniwersalności: dla dowolnych homomorfizmów  $R$ -algebr  $A \xrightarrow{\varphi} D \xleftarrow{\psi} B$  takich, że dla dowolnych elementów  $a \in A, b \in B$  ich obrazy  $\varphi(a), \psi(b) \in D$  są przemiennie, istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr  $\gamma: A \otimes_R B \rightarrow D$  taki, że poniższy diagram jest przemienny.*

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes_R B & \longleftarrow & B \\
 \uparrow & \searrow \gamma & \downarrow \psi \\
 A & \xrightarrow{\varphi} & D
 \end{array} \tag{9.1}$$

Jeśli rozpatrujemy jedynie przemiennie  $R$ -algebry, to iloczyn tensorowy jest koproduktem w tej kategorii - warunek przemienności o którym mowa w Stw. 9.1.1 jest zawsze spełniony.

**Definicja 9.1.1** (Algebra z gradacją).  *$R$ -algebrą z gradacją nazywamy  $R$ -moduł z gradacją  $A_* = \bigoplus_{q=-\infty}^{\infty} A_q$  wyposażony w  $R$ -dwuliniowe łączne mnożenie  $A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$  posiadające jedność  $1 \in A_0$ .*

*Jeśli dla dowolnych elementów  $a \in A_p, b \in B_q$  zachodzi równość  $ab = (-1)^{pq}ba$  to  $R$ -algebra z gradacją nazywa się przemienna. Kategorię  $R$ -algebr przemiennych z gradacją i homomorfizmów stopnia 0 zachowujących jedność i mnożenie oznaczamy  $\text{Alg}_R^*$ .*

Dla dowolnych dwóch przemiennych algebr z gradacją  $A_*, B_*$  definiujemy strukturę przemienną  $R$ -algebry z gradacją w iloczynie tensorowym  $R$ -modułów  $A_* \otimes B_*$ :

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (-1)^{d(b)d(a')}aa' \otimes bb' \quad \text{gdzie } d(-) \text{ oznacza stopień elementu jednorodnego.}$$

**Stwierdzenie 9.1.2.** *Iloczyn tensorowy przemiennych algebr z gradacją jest koproduktem w kategorii przemiennych algebr z gradacją tzn. dla dowolnych homomorfizmów przemiennych algebr z*

gradacją  $A_* \xrightarrow{\varphi} D_* \xleftarrow{\psi} B_*$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr  $\gamma: A_* \otimes B_* \rightarrow D_*$  taki, że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccc} A_* \otimes B_* & \longleftarrow & B_* \\ \uparrow & \searrow \gamma & \downarrow \psi \\ A_* & \xrightarrow{\varphi} & D_* \end{array} \quad (9.2)$$

Każda przemienna  $R$ -algebra bez gradacji staje się algebra z gradacją jeśli przypisać wszystkim jej elementom gradację 0.

**Zadanie 76.** Dla algebry z gradacją  $A_*$  i dwustronnego ideału  $I < A_*$  generowanego przez elementy jednorodnie algebra ilorazowa  $A_*/I$  jest algebra z gradacją.

Dowolnemu  $R$ -modułowi  $M$  można przyporządkować jego *algebrę tensorową*  $T(M) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} M^{\otimes q}$ .

Jest to algebra z gradacją:  $T(M)_q = M^{\otimes q}$ . Funktor  $T: R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Alg}$  jest funktorem lewo dołączonym do funktora zapominania o strukturze algebry. Algebra tensorowa jest więc algebra wolną (bardzo nieprzemienną) generowaną przez moduł. Z modułem  $M$  są także związane dwie inne ważne algebry:

- Algebrę symetryczną:  $S(M) := T(M)/I$  gdzie  $I$  jest ideałem generowanym przez elementy postaci  $a \otimes b - b \otimes a$  dla  $a, b \in T(M)$ . Jest to oczywiście algebra przemienna, a  $S: R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Alg}_{\text{comm}}$  jest funktorem lewo dołączonym do funktora zapominania z kategorii algebr przemiennych do kategorii  $R$ -modułów. Algebra symetryczna dziedziczy gradację z algebry tensorowej i chociaż jest algebra przemienną, to NIE jest algebra przemienną z gradacją! Stałaby się przemienna, gdyby elementom  $M$  przypisać gradacje parzyste lub  $\text{char}(K) = 2$ .
- Algebrę zewnętrzną:  $\Lambda(M) := T(M)/I$  gdzie  $I$  jest dwustronnym ideałem generowanym przez kwadraty  $a^2$ , gdzie  $a \in M$ . Algebra ta jest przemienną algebra z gradacją.

Rozpatrzmy teraz powyższe konstrukcje w przypadku gdy startujemy z modułu z gradacją  $M_*$ . W takim przypadku gradację w algebrze tensorowej definiujemy przy pomocy gradacji w iloczynach tensorowych tzn.  $T(M_*)_q := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (M^{\otimes n})_q$ . Jeśli  $M_* = M_1$  to definicje te pokrywają się.

Skonstruujemy teraz wolną przemienną algebra z gradacją generowaną przez moduł z gradacją  $M_*$ :  $F(M_*) := T(M_*)/I$  gdzie  $I$  jest ideałem generowanym przez elementy  $ab - (-1)^{pq}ba$  dla dowolnych elementów jednorodnych  $a \in M_p, b \in M_q$ . Jeśli  $M = M_{\text{ev}}$  to  $F(M_*) = S(M_*)$ . Jeśli  $M = M_{\text{odd}}$  i mnożenie przez 2 jest monomorfizmem w  $M$  to  $F(M_*) = \Lambda(M_*)$ .

Funktor  $F: R\text{-mod} \rightarrow R\text{-Alg}_*$  jest dołączony do funktora zapominania, a zatem zachowuje koprodukty.

**Stwierdzenie 9.1.3.** *Jeśli  $R = K$  jest ciałem charakterystyki  $\neq 2$  to dla dowolnego  $K$ -modułu z gradacją  $M_*$  przemienna  $K$ -algebra z gradacją  $F(M_*)$  jest izomorficzna z  $R$ -algebra  $S(M_{\text{ev}}) \otimes \Lambda(M_{\text{odd}})$  gdzie  $M_* = M_{\text{ev}} \oplus M_{\text{odd}}$  jest rozkładem na sumę elementów gradacji parzystej i nieparzystej. Jeśli  $\text{char}(K) = 2$ , to  $F(M_*) = S(M_*)$ .*

*Dowód.* Ponieważ jak zauważyliśmy funktor  $F$  zachowuje koprodukty, więc gdy  $\text{char}(K) \neq 2$  to

$$F(M_*) = F(M_{\text{ev}}) \otimes F(M_{\text{odd}}) = S(M_{\text{ev}}) \otimes \Lambda(M_{\text{odd}}).$$

W przypadku gdy  $\text{char}(K) = 2$  z definicji algebry wolnej wynika, że  $F(M_*) = S(M_*)$ .  $\square$

**Zadanie 77.** Dla algebry z gradacją  $A_*$  zdefiniować pojęcie modułu z gradacją nad nią.

**Zadanie 78** (Liczba Lefschetza). Dla endomorfizmu skończenie generowanej grupy abelowej  $\phi: M \rightarrow M$  definiujemy jego ślad  $\text{Tr}(\phi) := \text{Tr}(\phi \otimes \text{id}: M \otimes \mathbb{Q} \rightarrow M \otimes \mathbb{Q})$ . Dla endomorfizmu  $\phi_*: M_* \rightarrow M_*$  stopnia zero skończenie generowanej grupy abelowej z gradacją definiujemy liczbę Lefschetza  $L(\phi_*) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \text{Tr}(\phi_q)$ . Udowodnić, że:

1.  $L: \text{Hom}(M_*, M_*) \rightarrow \mathbb{Z}$  jest homomorfizmem;
2. Jeśli  $\phi: M_* \rightarrow M_*$  i  $\psi: N_* \rightarrow N_*$  to  $L(\phi \otimes \psi) = L(\phi)L(\psi)$ .
3. jeśli  $\phi: C_* \rightarrow C_*$  jest endomorfizmem skończenie generowanego kompleksu łańcuchowego, to  $L(\phi) = L(H_*(\phi))$ .

**Zadanie 79** (Charakterystyka Eulera). Dla skończenie generowanej grupy abelowej  $M$  definiujemy  $\text{rank}(M) := \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes \mathbb{Q})$ . Dla skończenie generowanej grupy z gradacją  $M_*$  definiujemy  $\chi(M_*) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \text{rank}(M_q)$  i odpowiednio  $\chi_K(M_*)$ . Wykazać, że:

1. dla krótkiego ciągu dokładnego skończenie generowanych grup abelowych z gradacją:  $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow C_* \rightarrow 0$  zachodzi  $\chi(B_*) = \chi(A_*) + \chi(C_*)$ .
2.  $\chi(A_* \otimes B_*) = \chi(A_*)\chi(B_*)$
3. Dla ograniczonego kompleksu łańcuchowego wolnych skończenie generowanych grup abelowych  $C_*$ , zachodzi równość  $\chi(C_*) = \chi(H_*(C_*))$
4. Dla kompleksu łańcuchowego  $C_*$  j.w. i dowolnego ciała  $K$  zachodzi równość  $\chi(C_*) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q \dim_K(H_*(C_* \otimes K))$ .

**Zadanie 80** (Szereg Poincaré). Niech  $K$  będzie ciałem. Dla dowolnej przestrzeni wektorowej z gradacją  $\mathbf{V}$  nad  $K$  definiujemy jej szereg Poincaré  $P_{\mathbf{V}}(t) := \sum_{q=-\infty}^{\infty} (\dim_K \mathbf{V}_q) t^q$ . Wykazać, że  $P_{\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2}(t) = P_{\mathbf{V}_1}(t)P_{\mathbf{V}_2}(t)$ . Obliczyć szereg Poincaré algebry tensorowej, algebry symetrycznej i algebry zewnętrznej generowanej przez przestrzeń wektorową z gradacją. Jeśli  $M_*$  jest skończenie generowanym modułem nad algebrą wielomianów z gradacją  $K[c_1, \dots, c_n]$  gdzie  $\deg c_i = 2i$ , to szereg Poincaré jest funkcją wymierną postaci  $P_M(t) = p(t) / \prod_{q=1}^n (1 - t^{2q})$ , gdzie  $p(t)$  jest wielomianem.

## 9.2 Mnożenia i dzielenia - sytuacja algebraiczna

Niech  $C', C''$  oraz  $M', M'', M$  będą  $R$ -modułami oraz niech będzie dany homomorfizm  $\mu: M' \otimes M'' \rightarrow M$ . Zdefiniujemy cztery homomorfizmy będące algebraicznym fundamentem struktur moltiplicatywnych w (ko-) homologiach singularnych przestrzeni topologicznych.

1. Produkt krzyżowy (*cross product*)

$$(C' \otimes M') \otimes (C'' \otimes M'') \xrightarrow{\times} C' \otimes C'' \otimes M$$

$$(c' \otimes m') \times (c'' \otimes m'') := c' \otimes c'' \otimes \mu(m' \otimes m'')$$

2. Produkt krzyżowy (*cross product*)

$$\text{Hom}(C', M') \otimes \text{Hom}(C'', M'') \xrightarrow{\times} \text{Hom}(C' \otimes C'', M)$$

$$(\varphi \otimes \psi)(c' \times c'') := \mu(\varphi(c') \otimes \psi(c''))$$

3. Dzielenie (*slant product*)

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C' \otimes C'', M') \otimes C'' \otimes M'' &\xrightarrow{\lrcorner} \text{Hom}(C', M) \\ (\varphi / (c'' \otimes m''))(c') &:= \mu(\varphi(c' \otimes c'') \otimes m'') \end{aligned}$$

4. Dzielenie (*slant product*)

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C', M') \otimes (C' \otimes C'' \otimes M'') &\xrightarrow{\searrow} C'' \otimes M \\ \varphi \searrow (c' \otimes c'' \otimes m'') &:= c'' \otimes \mu(\varphi(c') \otimes m''). \end{aligned}$$

Działania 1-4 są naturalne ze względu na homomorfizmy modułów. Jest to oczywiste w przypadku produktów krzyżowych, bowiem są one transformacjami naturalnymi między funktorami tej samej wariantności. W przypadku dzielenia naturalność wynika z naturalności homomorfizmu ewaluacji, który oznaczamy jak iloczyn skalarny  $\langle -, - \rangle: \text{Hom}(C, M) \otimes C \rightarrow M$ , która ma następującą postać. Rozpatrzmy homomorfizmy modułów  $f: D \rightarrow C$  oraz  $g: M \rightarrow N$  i diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C, M) \otimes C & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & M \\ \text{Hom}(f, g) \downarrow & & \downarrow g \\ \text{Hom}(D, N) \otimes D & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & N \end{array} \quad (9.3)$$

**Stwierdzenie 9.2.1.** *Dla dowolnych elementów  $\varphi \in \text{Hom}(C, M)$  oraz  $d \in D$  zachodzi równość:*

$$\langle \text{Hom}(f, g)(\varphi), d \rangle = g\langle \varphi, f(d) \rangle.$$

Z myślą o zastosowaniach topologicznych jeszcze trochę skomplikujemy sytuację. Otóż założmy, że oprócz modułów  $C', C''$  mamy dany moduł  $C$  i homomorfizm  $C \rightarrow C' \otimes C''$ . Wtedy składając z homomorfizmem przezeń indukowanym otrzymujemy dwa "produkty wewnętrzne"

1. *cup product*  $\cup$ 

$$\text{Hom}(C', M') \otimes \text{Hom}(C'', M'') \xrightarrow{\times} \text{Hom}(C' \otimes C'', M) \rightarrow \text{Hom}(C, M)$$

2. *cap product*  $\cap$ 

$$\text{Hom}(C', M') \otimes C \otimes M'' \rightarrow \text{Hom}(C', M') \otimes (C' \otimes C'' \otimes M'') \xrightarrow{\searrow} C'' \otimes M$$

W sytuacji topologicznej będziemy rozpatrywać przypadek gdy  $C = C' = C''$  a homomorfizm  $C \rightarrow C \otimes C$  jest "diagonalny".

Jeśli  $C'_*, C''_*$  są kompleksami łańcuchowymi, to opisane produkty można traktować jako homomorfizmy kompleksów łańcuchowych w przypadku produktów 1. i 4. oraz kołańcuchowych w przypadku produktów 2. i 3. Biorąc produkt tensorowy kompleksu łańcuchowego i kołańcuchowego odwracamy gradację w jednym z nich na przeciwną tzn.  $C''^n := C''_{-n}$ . Uwzględniając gradację powyższe produkty przesuwają gradacje w następujący sposób:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $(C'_p \otimes M') \otimes (C''_q \otimes M'') \xrightarrow{\times} (C' \otimes C'')_{p+q} \otimes M$ ,
2. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $\text{Hom}(C'_p, M') \otimes \text{Hom}(C''_q, M'') \xrightarrow{\times} \text{Hom}((C' \otimes C'')_{p+q}, M)$

3. Dzielenie (*slant product*)  $\text{Hom}((C' \otimes C'')_n, M') \otimes C''_q \otimes M'' \xrightarrow{\lrcorner} \text{Hom}(C'_{n-q}, M)$
4. Dzielenie (*slant product*)  $\text{Hom}(C'_p, M') \otimes ((C' \otimes C'')_n \otimes M'') \xrightarrow{\lrcorner} C''_{n-p} \otimes M$

Dla przeniesienia powyższych działań na grupy (ko-)homologii wykorzystujemy, że mnożenie krzyżowe jest dobrze zdefiniowane na klasach homologii. przenosi się na homologie. Dla dowolnych kompleksów łańcuchowych (lub kółłańcuchowych) mamy:

$$H_p(C'_*; M') \otimes H_q(C''_*, M'') \xrightarrow{\times} H_{p+q}(C'_* \otimes C''_*; M).$$

a zatem dobrze zdefiniowane są następujące produkty:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $H_p(C'_*; M') \otimes H_q(C''_*; M'') \xrightarrow{\times} H_{p+q}((C' \otimes C'')_*; M)$ ,
2. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $H^p(C'_*; M') \otimes H^q(C''_*; M'') \xrightarrow{\times} H^{p+q}((C' \otimes C'')_*; M)$
3. Dzielenie (*slant product*)  $H^n((C' \otimes C'')_*, M') \otimes H_q(C''_*; M'') \xrightarrow{\lrcorner} H^{n-q}(C'_*; M)$
4. Dzielenie (*slant product*)  $H^p(C'_*, M') \otimes H_n((C' \otimes C'')_*; M'') \xrightarrow{\lrcorner} H_{n-p}(C''_*; M)$

### 9.3 Produkty w (ko-)homologiach przestrzeni topologicznych

Załóżmy teraz, że dane są przestrzenie topologiczne  $X$ ,  $Y$  a  $C'_* = \Delta_*(X)$ ,  $C''_* = \Delta_*(Y)$  są ich kompleksami łańcuchów singularnych oraz  $\Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) \xrightarrow{EZ} \Delta_*(X \times Y)$  będzie równoważnością Eilenberga-Zilbera. Składając opisane produkty z transformacją  $EZ$  lub jej łańcuchową odwrotnością otrzymujemy produkty:

1. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $H_p(X; M') \otimes H_q(Y; M'') \xrightarrow{\times} H_{p+q}(X \times Y; M)$ ,
2. Produkt krzyżowy (*cross product*)  $H^p(X; M') \otimes H^q(Y; M'') \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times Y; M)$
3. Dzielenie (*slant product*)  $H^n(X \times Y; M') \otimes H_q(Y; M'') \xrightarrow{\lrcorner} H^{n-q}(X; M)$
4. Dzielenie (*slant product*)  $H^p(X; M') \otimes H_n(X \times Y; M'') \xrightarrow{\lrcorner} H_{n-p}(Y; M)$

Powyższe produkty są dobrze zdefiniowane, gdy zastąpimy przestrzenie przez pary przestrzeni  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$ , przy czym wtedy  $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$  oraz zakładamy, że  $\{A \times Y, X \times B\}$  jest parą wycinającą.

W przypadku gdy  $X = Y$  produkty i rozważamy pary  $(X, A)$  oraz  $(X, B)$  produkty 2. i 4. możemy złożyć z homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie diagonalne

$$\delta: (X, A \cup B) \rightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B)$$

otrzymując tzw. produkty wewnętrzne:

1. Cup produkt  $H^p(X, A; M') \otimes H^q(X, B; M'') \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X, A \cup B; M)$
2. Cap produkt  $H^p(X, A; M') \otimes H_n(X, A \cup B; M'') \xrightarrow{\cap} H_{n-p}(X, B; M)$

Od tego momentu założmy, że  $R$  jest pierścieniem przemiennym a  $R \otimes R \rightarrow R$  jest mnożeniem.

**Stwierdzenie 9.3.1.** *Dla dowolnych elementów  $\varphi \in H^p(X; R)$ ,  $\psi \in H^q(Y; R)$  zachodzi równość*

$$\varphi \times \psi = p_X^*(\varphi) \cup p_Y^*(\psi).$$

*Dowód.* Dowód sprowadza się do wykazania przemienności następującego diagramu (pomijamy pierścieni współczynników  $R$ ):

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes H^*(Y) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times Y) \\ \downarrow p_X^* \otimes p_Y^* & & \uparrow \delta_{X \times Y}^* \\ H^*(X \times Y) \otimes H^*(X \times Y) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times Y \times X \times Y) \end{array} \quad (9.4)$$

Zauważmy, że  $p_X^*(\varphi) = \varphi \times 1$  oraz  $p_Y^*(\psi) = 1 \times \psi$  oraz  $\delta_{X \times Y}^* = T \circ (\delta_X, \delta_Y)$  gdzie  $T: X \times X \times Y \times Y \rightarrow X \times Y \times X \times Y$  jest zamianą środkowych czynników. Mamy równości:  $(p_X^* \otimes p_Y^*)(\varphi \times \psi) = (\varphi \times 1) \otimes (1 \times \psi)$  oraz

$$\delta_{X \times Y}^*((\varphi \times 1) \times (1 \times \psi)) = (\delta_X, \delta_Y)^* T^*((\varphi \times 1) \times (1 \times \psi)) = \varphi \times \psi.$$

□

**Wniosek 9.3.1.** *Homomorfizm Eilenberga-Zilbera*

$$H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R)$$

jest homomorfizmem algebr z gradacją.

*Dowód.* Iloczyn tensorowy, będący dziedziną odwzorowania  $\times$  jest sumą prostą w kategorii algebr z gradacją, a odwzorowania indukowane przez projekcje na czynniki definiują odwzorowania algebr  $H^*(X) \xrightarrow{p_X^*} H^*(X \times Y)$ ,  $H^*(Y) \xrightarrow{p_Y^*} H^*(X \times Y)$ , których suma prosta z definicji jest przekątną w diagramie, w którym  $\iota_X(\varphi) := \varphi \otimes 1$  oraz  $\iota_Y(\psi) := 1 \otimes \psi$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^*(X) & & \\ & \swarrow \iota_X & & \searrow p_X^* & \\ H^*(X) \otimes H^*(Y) & \xrightarrow{p_X^* \cup p_Y^*} & & \xrightarrow{p_X^*} & H^*(X \times Y) \\ & \nwarrow \iota_Y & & \nearrow p_Y^* & \\ & & H^*(Y) & & \end{array} \quad (9.5)$$

a na mocy Stw. 9.3.1 przekątna jest równa homomorfizmowi Eilenberga-Zilbera  $\times$ .

□

Z algebraicznego twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych wynika, że gdy  $R$  jest ciałem lub kohomologie jednej z przestrzeni są  $\mathbb{Z}$ -beztorsyjne, homomorfizm  $\times$  izomorfizmem.

**Wniosek 9.3.2.** *Niech  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$  będzie produktem sfer. Projekcje na czynniki zadają naturalny izomorfizm algebr*

$$F(\tilde{H}^*(S^{n_1}) \oplus \dots \oplus \tilde{H}^*(S^{n_k})) / \{u_1^2, \dots, u_k^2\} \simeq \Lambda^*(u_1, \dots, u_k) \simeq H^*(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}; R).$$

gdzie  $u_j \in \tilde{H}^{n_j}(S^{n_j})$  jest generatorem, a wszystkie grupy kohomologii mają współczynniki w pierścieniu  $R$ .

**Zadanie 81.** Oblicz charakterystykę Eulera  $\chi(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k})$ .

**Zadanie 82.** Dla dowolnej przestrzeni  $X$  i jej podprzestrzeni  $A \subset X$ ,  $\cap$ -produkt (odp.  $\cup$ -produkt) definiuje strukturę  $H^*(X)$ -modułu na homologiach  $H_*(X, A)$  (odp. kohomologiach  $H^*(X, A)$ ) przy czym włożenia podzbiorów  $A \subset B \subset X$  indukują homomorfizmy  $H^*(X)$ -modułów.

## 9.4 Niezmiennik Hopfa i $\pi_3(S^2 \vee \dots \vee S^2)$

**Zadanie 83** (Uogólniony niezmiennik H. Hopfa). Niech  $n \geq 1$ . Dla przekształcenia  $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}$  (bukiet  $k$  sfer) obliczyć grupy kohomologii jego stożka.

**Definicja 9.4.1** (Uogólniony niezmiennik H. Hopfa). Niech  $n \geq 1$ . Dla przekształcenia  $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}$  (bukiet  $k$  sfer) oznaczmy wolne generatory kohomologii jego stożka  $\phi_1, \dots, \phi_k \in H^{2n}(C_f; \mathbb{Z})$ , oraz generator  $[C_f] \in H^{4n}(C_f; \mathbb{Z})$ . Macierz symetryczną  $H(f)$  w której  $h_{ij} = \langle \phi_i \cup \phi_j, [C_f] \rangle$  nazywamy macierzą Hopfa przekształcenia  $f$ . W przypadku  $k = 1$  otrzymujemy klasyczny niezmiennik Hopfa.

**Zadanie 84.** Dla przekształcenia  $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}$  oraz rodziny przekształceń  $g''_i: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  dla  $i = 1, \dots, k$  i przekształcenia  $g': S^{4n-1} \rightarrow S^{4n-1}$  wyrazić niezmiennik Hopfa złożenia  $(g''_1 \vee \dots \vee g''_k) \circ f \circ g'$  w terminach  $H(f)$  i stopni przekształceń  $g', g''_i$ . [Wsk. rozpatrzyć przypadek  $k = 1$ ]

**Zadanie 85.** Niezmiennik Hopfa wyznacza homomorfizm  $H: \pi_{4n-1}(S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}) \rightarrow \text{Symm}_{\mathbb{Z}}(k, k)$ , gdzie  $\text{Symm}_{\mathbb{Z}}(k, k)$  oznacza grupę całkowitoliczbowych macierzy symetrycznych  $k \times k$  z dodawaniem (czyli form dwuliniowych, symetrycznych na  $H^{2n}(S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}; \mathbb{Z})$ .)

**Zadanie 86.** Obraz homomorfizmu  $H: \pi_{4n-1}(S^{2n} \vee \dots \vee S^{2n}) \rightarrow \text{Symm}_{\mathbb{Z}}(k, k)$  zawiera wszystkie macierze symetryczne mające parzyste wyrazy na przekątnej, a dla  $n = 1, 2, 4$  homomorfizm  $H$  jest epimorfizmem.

**Zadanie 87.** Dla dowolnego  $f: S^3 \rightarrow S^2 \vee \dots \vee S^2$  istnieje przekształcenie

$$\bar{f}: C_f \rightarrow \mathbb{C}P(2) \times \dots \times \mathbb{C}P(2) \subset \mathbb{C}P(\infty) \times \dots \times \mathbb{C}P(\infty)$$

indukujące izomorfizm na grupie  $H^2$ . Jak odczytać macierz  $H(f)$  z  $\bar{f}$ ?

**Zadanie 88.** Dla dowolnego  $k$  homomorfizm  $H: \pi_3(S^2 \vee \dots \vee S^2) \rightarrow \text{Symm}_{\mathbb{Z}}(k, k)$  jest izomorfizmem. (Wsk. Przypadek  $k = 1$  jest dużo łatwiejszy niż  $k > 1$ , który wymaga skorzystania z relatywnego twierdzenia Hurewicza dla pary  $(\mathbb{C}P(\infty) \times \dots \times \mathbb{C}P(\infty), S^2 \vee \dots \vee S^2)$ .)





## Rozdział 10

# Homologiczne własności rozmaitości

### 10.1 Topologia rozmaitości

Rozmaitością topologiczną nazywa się przestrzeń Hausdorffa, posiadającą bazę przeliczalną i lokalnie homeomorficzną z przestrzenią kartezjańską. Mapą na rozmaitości nazywamy podzbiór otwarty  $U \subset M$  wraz z homeomorfizmem  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Zbiór map  $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$  nazywamy atlasem jeśli  $\{U_i\}_{i \in I}$  jest pokryciem  $M$ .

Rozmaitością topologiczną z brzegiem nazywa się przestrzeń Hausdorffa, posiadającą bazę przeliczalną i lokalnie homeomorficzną z pół-przestrzenią kartezjańską tzn.  $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \geq 0\}$ . Zbiór punktów w  $M$  przechodzących przy pewnej mapie na punkty w  $\mathbb{R}^{n-1}$  nazywamy brzegiem rozmaitości  $M$  i oznaczamy  $\partial M$ . Pozostałe punkty nazywamy wewnętrznymi.

Jeśli każdy punkt rozmaitości topologicznej  $M$  posiada otoczenie homeomorficzne z podzbiorem ustalonej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , to mówimy że  $M$  jest  $n$ -wymiarowa. Składowe spójne dowolnej rozmaitości są rozmaitościami określonego wymiaru, Rozmaitością zamkniętą nazywamy zwartą i spójną rozmaitość (bez brzegu).

Strukturą gładką na  $M$  nazywamy maksymalny atlas  $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$  taki, że wszystkie odwzorowania przejścia  $h_j h_i^{-1}$  są gładkie. Rozmaitość topologiczną z wyróżnioną strukturą gładką nazywamy rozmaitością gładką, lub w skrócie rozmaitością. Odwzorowanie  $f : M \rightarrow N$  nazywa się gładkie, jeśli jego złożenia z dowolnymi mapami są gładkie, Analogicznie definiuje gładką rozmaitość z brzegiem. Brzeg rozmaitości gładkiej jest rozmaitością gładką. W kategorii rozmaitości gładkich istnieje suma prosta (rozłączna) oraz produkt kartezjański.

Niech  $M$  będzie rozmaitością a  $P_M(A)$  zdaniem dotyczącym pewnej klasy  $\mathcal{C}$  podzbiorów  $A \subset M$ . Rozważmy następujące warunki dla podzbiorów z  $\mathcal{C}$ .

1. Jest prawdziwe jeśli  $A \in \mathcal{C}$  jest zbiorem homeomorficznym z wypukłym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ ;
2. Dla dowolnych  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $P_M(A), P_M(B), P_M(A \cap B) \implies P_M(A \cup B)$ ;
3. Jeśli  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \in \mathcal{C}$ , oraz dla każdego  $i$ ,  $P_M(A_i)$  to  $P_M(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$ .
4.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ , posiadają rozłączne otoczenia oraz dla każdego  $i$ ,  $P_M(A_i)$  to  $P_M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ .

**Twierdzenie 10.1.1.** Niech  $M$  będzie rozmaitością  $n$ -wymiarową,  $\mathcal{C}$  klasą jej podzbiorów a  $P_M(A)$  zdaniem o podziorach  $A \in \mathcal{C}$ . Załóżmy, że zachodzi jeden z warunków:

1.  $\mathcal{C}$  jest klasą podzbiorów zwartych oraz zachodzą warunki 1. - 3.
2.  $\mathcal{C}$  jest klasą podzbiorów otwartych i spełnione są warunki 1,2, 4.

3.  $\mathcal{C}$  jest klasą podzbiorów domkniętych i zachodzą warunki 1. - 4.

Wtedy zdanie  $P_M(A)$  jest prawdziwe dla dowolnego  $A \in \mathcal{C}$ .

Dowód. p. Bredon [1] Lematy V.9.5 i VI.7.9 □

## 10.2 Orientacja rozmaitości

Przypomnimy dobrze znaną definicję orientacji skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej  $\mathbf{V}$ . Jest to klasa równoważności baz w  $\mathbf{V}$  przy czym dwie bazy wyznaczają tę samą orientację jeśli macierz przejścia między nimi ma dodatni wyznacznik. Pokażemy jak orientacja w sensie algebry liniowej wyznacza element w grupie  $H_n(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z})$ . Jeśli  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$  jest bazą to rozważamy  $n$ -wymiarowy sympleks rozpięty na tych wektorach, zawierający punkt 0 we wnętrzu. Sympleks ten jest uwypukleniem układu  $n+1$  wektorów  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$  gdzie  $\mathbf{v}_0 := -\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$ . Sympleks ten jest obrazem sympleksu singularnego  $\sigma(p_i) := \mathbf{v}_i$ , który reprezentuje element  $[\sigma] \in H_n(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z})$ . Bazy wyznaczające tę samą orientację definiują ten sam element w homologiach, co wynika z następującego:

**Stwierdzenie 10.2.1.** *Jeśli  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  jest izomorfizmem liniowym, to dla dowolnej teorii homologii  $h_*$  homomorfizm indukowany  $f_*: h_*(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z}) \rightarrow h_*(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z})$  jest mnożeniem przez  $\text{sgn det } f$ .*

Homomorfizm ewaluacji  $H_n(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z}) \otimes H^n(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{ev} \mathbb{Z}$  pozwala zdefiniować dualny element w kohomologiach. Odwrotnie, dowolny generator grupy kohomologii  $H_n(\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus 0; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  wyznacza orientację w sensie algebry liniowej.

**Definicja 10.2.1.** *Orientacją  $n$ -wymiarowej rozmaitości topologicznej  $M$  nazywamy lokalnie zgodny wybór generatorów  $o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  dla każdego punktu  $x \in M$  tzn. taki, że dla każdego punktu  $x_0 \in M$  istnieje otoczenie  $U \ni x_0$  oraz klasa  $o_U \in H_n(M, M \setminus U)$  taka, że dla każdego  $x \in U$  zachodzi równość  $o_U|_x = o_x$ .*

*Uwaga 10.2.1.* Jeśli  $W \subset M$  jest podzbiorem otwartym, a  $\{o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})\}_{x \in M}$  jest orientacją  $M$ , to  $\{o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})\}_{x \in W}$  jest orientacją  $W$ . Ogólniej, jeśli  $p: M \rightarrow N$  jest lokalnym homeomorfizmem oraz  $\{o_y \in H_n(N, N \setminus \{y\})\}_{y \in N}$  jest orientacją  $N$ , to elementy  $\{o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})\}_{x \in M}$  takie, że  $f_*(o_x) = o_{f(x)}$  są orientacją  $M$ .

*Przykład 10.2.1.* Dowolny podzbiór otwarty  $W \subset \mathbb{R}^n$  posiada orientację. Dla dowolnego  $p \in W$  z aksjomatu wycinania wynika izomorfizm  $H_*(W, W \setminus \{p\}) \simeq H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{p\})$ . Wybierając dowolną bazę  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$  definiujemy jak wyżej element  $o_0 := [\sigma] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  a następnie dla dowolnego punktu  $p \in \mathbb{R}^n$   $o_p := T_{p*}(o_0)$  gdzie  $T_p: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{p\})$  jest przesunięciem.

*Przykład 10.2.2.* Jeśli  $\mathbb{R}^n \supset W \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  będzie lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu punktu  $p \in W$ . Wtedy  $f_*(o_p) = (\text{sgn det } Df)o_{f(p)}$ .

**Stwierdzenie 10.2.2.** *Rozmaitość  $M$  jest orientowalna wtedy i tylko wtedy gdy posiada atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in J}$  taki, że odwzorowania przejścia  $\varphi_i \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  zachowuje orientację w każdym punkcie  $x \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$ .*

**Stwierdzenie 10.2.3.** *Niech  $M$  będzie rozmaitością  $n$ -wymiarową, a  $K \subset M$  jej zwartym podzbiorem. Wtedy*

1.  $H_q(M, M \setminus K) = 0$  dla  $q > n$ .

2. Homomorfizm obcięcia  $H_n(M, M \setminus K) \rightarrow \bigoplus_{x \in K} H_n(M, M \setminus \{x\})$  jest monomorfizmem

3. Jeśli  $\{o_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})\}_{x \in M}$  jest orientacją rozmaitości  $M$ , to istnieje element  $o_K \in H_n(M, M \setminus K)$  taki, że dla każdego  $y \in K$ ,  $o_K|_y = o_y$ .

*Dowód.* Skorzystać z 10.1.1. □

**Zadanie 89.** Dla dowolnej rozmaitości topologicznej  $M$  skonstruować dwukrotne nakrycie  $p: \widetilde{M} \rightarrow M$  takie, że  $p^{-1}(x) = \{\text{generatory } H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})\}$  oraz orientacje  $M$  są w bijekcji z przekrojami nakrycia  $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ . Rozmaitość nakrywająca  $\widetilde{M}$  jest orientowalna. Wywnioskować stąd, że dowolna rozmaitość której grupa podstawowa jest rzędu nieparzystego (w szczególności trywialna) jest orientowalna.

### 10.3 Twierdzenie o dwoistości

Niech  $(K, L)$  będzie parą podzbiorów zwartych rozmaitości  $n$ -wymiarowej  $M$ . Zdefiniujemy "otoczenie" grupy kohomologii pary  $(K, L)$

$$\check{H}^q(K, L) := \text{colim}_{(U, V) \supset (K, L)} H^q(U, V)$$

gdzie  $(U, V) \supset (K, L)$  są parami ich otoczeń, tworzącymi zbiór skierowany ze względu na inkluzję. Jeśli para  $(K, L)$  podzbiorów rozmaitości posiada dowolnie małe otoczenie  $(U, V) \supset (K, L)$  takie, że włożenie jest homotopijną (homologiczną) równoważnością, wtedy  $\check{H}^*(K, L) = H^*(K, L)$ . Tak jest w przypadku, gdy  $L \subset K \subset M$  są podrozmaitościami (tw. o otoczeniu tubularnym). Sformułujemy ogólne twierdzenie o dwoistości (OTD).

**Twierdzenie 10.3.1** (G. Bredon Tw. 8.3). *Niech  $M$  będzie  $n$ -wymiarową rozmaitością a  $K \subset L \subset M$  są jej podzbiórmi zwartymi. Dowolna orientacja rozmaitości  $M$  nad pierścieniem  $R$ ,*

$$\vartheta(M) = \{or_x \in H_n(M, M \setminus x; R) \mid x \in M\}$$

wyznacza dla dowolnego  $R$ -modułu  $G$  izomorfizm:

$$-\cap \vartheta: \check{H}^p(K, L; G) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K; G) \quad (10.1)$$

*Dowód.* Jeśli  $L = \emptyset$  konstrukcja homomorfizmu dwoistości wykorzystuje diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) \otimes H_n(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-q}(M, M \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^q(U) \otimes H_n(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-q}(U, U \setminus K) \end{array} \quad (10.2)$$

Wybierając element  $\vartheta_K \in H_n(M, M \setminus K)$  otrzymujemy homomorfizm  $-\cap \vartheta_K: H^q(U) \rightarrow H_{n-q}(M, M \setminus K)$ , a przechodząc do granicy po otoczeniach  $U \supset K$ ,  $-\cap \vartheta_K: \check{H}^q(K) \rightarrow H_{n-q}(M, M \setminus K)$ .

W przypadku gdy  $L \neq \emptyset$  konstrukcja homomorfizmu  $-\cap \vartheta$  wymaga cofnięcia się do poziomu łańcuchów singularnych rozważanych podprzestrzeni. Niech  $(K, L) \subset (U, V)$ , gdzie  $U, V$  są zbiorami otwartymi. Wówczas cap-produkt definiuje homomorfizm

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p(U, V) \otimes \left[ \frac{\Delta_n(V) + \Delta_n(U \setminus L)}{\Delta_n(U \setminus K)} \right] & \xrightarrow{\cap} & \Delta_{n-p}(U \setminus L, U \setminus K) \\ \downarrow \iota & & \downarrow i_* \\ \Delta^p(U, V) \otimes \left[ \frac{\Delta_n(U)}{\Delta_n(U \setminus K)} \right] & \xrightarrow{\cap} & \Delta_{n-p}(U, U \setminus K) \end{array} \quad (10.3)$$

Ponieważ strzałka  $\iota$  jest łańcuchową równoważnością (z zasady małych sympleksów), więc indukuje izomorfizm homologii, skąd otrzymujemy homomorfizm

$$-\cap\vartheta: H^p(U, V; G) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K; G)$$

a po przejściu do granicy po zbiorze skierowanym otoczeń  $(U, V) \supset (K, L)$ , homomorfizm **10.1**. Pozostaje wykazać, że dla dowolnej zwartej pary  $(K, L)$  jest on izomorfizmem. Z ciągu dokładnego pary wynika, że wystarczy rozważyć przypadek  $L = \emptyset$ . Stosujemy Tw. **10.1.1**.  $\square$

Z OTD wynikają jego szczególne przypadki, noszące nazwiska wybitnych matematyków:

1. (Poincaré) Jeśli  $M$  jest zwarta, to  $-\cap\vartheta_M: H^p(M; G) \simeq H_{n-p}(M; G)$ ;
2. (Alexander 1) Jeśli  $M = S^n$  oraz  $K = \emptyset$ , to  $\check{H}_p(L) \simeq \check{H}^{n-p}(S^n \setminus L)$ ;
3. (Alexander 2) Jeśli  $M = \mathbb{R}^n$  oraz  $K = \emptyset$ , to  $\check{H}_p(L) \simeq \check{H}^{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus L)$ .

oraz wersja dla rozmaitości z brzegiem. Przypomnijmy, że orientacją rozmaitości z brzegiem  $(M, \partial M)$  nazywamy orientację jej wnętrza  $M \setminus \partial M$ . Jeśli  $(M, \partial M)$  jest zwartą rozmaitością z brzegiem, to jej podwojeniem (dubeltem) nazywamy przestrzeń  $M \cup_{\partial M} M$ . Dzięki tw. o otoczeniu kołnierzykowym brzegu jest to rozmaitość bez brzegu.

**Twierdzenie 10.3.2.** *Orientacja  $(M, \partial M)$  wyznacza izomorfizmy:*

$$H^p(M, \partial M; G) \simeq H_{n-p}(M; G) \quad \text{oraz} \quad H^p(M; G) \simeq H_{n-p}(M, \partial M; G).$$

zadane przez cap-produkt z elementem  $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M)$ . Wykaż, że  $\partial[M, \partial M] \in H_{n-1}(M)$  jest klasą orientacji rozmaitości  $M$ .

*Uwaga.* Z twierdzeń o dwoistości wynika, że dla dowolnej zwartej rozmaitości z brzegiem  $(M, \partial M)$  oraz pierścienia  $R$  homologie i kohomologie  $(M, \partial M)$  są skończenie generowanym  $R$ -modułem.

**Zadanie 90.** Udowodnij tezę powyższej uwagi w przypadku gdy  $R = \mathbb{F}$  jest ciałem. Wsk. Tw. o współczynnikach uniwersalnych.

**Zadanie 91.** Wykazać, że jeśli zwarta rozmaitość  $(M, \partial M)$  jest zorientowana nad ciałem  $\mathbb{F}$ , to forma dwuliniowa

$$\langle -, - \rangle_M: H^p(M; \mathbb{F}) \otimes H^{n-p}(M, \partial M; \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}, \quad \langle \phi, \psi \rangle_M := \langle \phi \cup \psi, [M, \partial M] \rangle$$

jest niezdegenrowana.

## 10.4 Kohomologie o zwartych nośnikach

**Definicja.** Jeśli  $h^*$  jest dowolną teorią kohomologii zdefiniowaną (co najmniej) na parach rozmaitości to definiujemy  $h^*$ -kohomologie przestrzeni ze zwartymi nośnikami:

$$h_c^q(X) := \text{colim } h^q(X, X \setminus K)$$

gdzie granica odwrotna jest brana po zbiorze częściowo uporządkowanym zwartych podzbiorów  $K \subset X$ .

**Zadanie 92.** Kohomologie ze zwartymi nośnikami są funktorem kowariantnym na kategorii otwartych podzbiorów ustalonej przestrzeni  $X$  i ich inkluzji. Dla dowolnych podzbiorów otwartych  $U_1, U_2 \subset X$  takich, że  $X = U_1 \cup U_2$  istnieje (kowariantny) ciąg Mayera-Vietorisa:

$$\dots \rightarrow H_c^q(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^q(U_1) \oplus H_c^q(U_2) \rightarrow H_c^q(X) \rightarrow H_c^{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \dots$$

**Zadanie 93.** Łukowo spójna przestrzeń  $X$  jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy  $H_c^0(X) \neq 0$ . Niech  $K$  będzie zwartą przestrzenią, wtedy  $H_c^q(K \times \mathbb{R}) \simeq H^q(\Sigma(K^+))$ , gdzie  $K^+ := K \sqcup pt$  a  $\Sigma$  jest zawieszeniem zredukowanym.

**Zadanie 94.** Jeśli  $(W, \partial W)$  jest zwartą rozmaitością z brzegiem, to  $H_c^*(W \setminus \partial W) \simeq H^*(W, \partial W)$ . Ogólnie, dla dowolnej lokalnie zwartej przestrzeni  $X$ ,  $H_c^*(X) \simeq \check{H}^*(X^\infty, \infty)$  gdzie  $X^\infty$ , jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni  $X$ .

Rozpatrzmy diagram

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) \otimes H_n(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-q}(M, M \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H^q(V) \otimes H_n(V, V \setminus K) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-q}(V, V \setminus K) \end{array} \quad (10.4)$$

Przechodząc do granicy po zwartych podzbiorach  $K \subset M$  otrzymujemy homomorfizm.

$$H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) \xrightarrow{\cup} H_c^n(M) \quad (10.5)$$

Załóżmy teraz, że współczynniki kohomologii są ciałem  $\mathbb{F}$ . Wtedy powyższy homomorfizm można złożyć z ewaluacją  $H_c^n(M) \xrightarrow{ev} \mathbb{F}$ .

**Twierdzenie 10.4.1.** Jeśli  $M$  jest  $n$ -wymiarową rozmaitością zorientowaną to forma  $\langle -, - \rangle_M$ :

$$H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) \xrightarrow{\cup} H_c^n(M) \xrightarrow{ev} \mathbb{F} \quad (10.6)$$

jest niezdegenerowana tzn. wyznacza izomorfizm  $H^q(M) \simeq H^{n-q}(M)^*$ .

*Dowód.* Zastosować Tw. 10.1.1. □

**Wniosek 10.4.1.** Dla dowolnej jednorodnej bazy kohomologii  $b_1, \dots, b_r \in H^*(M)$  istnieje dualna baza  $b_1^\#, \dots, b_r^\# \in H^*(M)$  tzn. taka, że  $\langle b_i, b_j^\# \rangle_M = \delta_{ij}$ .

## 10.5 Interpretacje geometryczno-różniczkowe

W poniższych zadaniach przez orientację rozmaitości rozumiemy orientację nad pierścieniem  $\mathbb{Z}$ .

**Zadanie 95** (Orientacja gładka i homologiczna). Dla rozmaitości gładkiej jej orientacje w sensie różniczkowym są w naturalnej bijekcji z orientacjami w sensie homologicznym (tzn. dyfeomorfizm  $h: M \rightarrow N$  zachowuje orientacje w sensie różniczkowym wtedy i tylko wtedy gdy zachowuje odpowiadające im orientacje w sensie topologicznym.)

**Definicja 10.5.1** (Stopień odwzorowania). Dla odwzorowania gładkiego między rozmaitościami zwartymi tego samego wymiaru  $f: M \rightarrow N$  oraz jego wartości regularnej  $y_0 \in N$  definiujemy stopień modulo 2

$$\deg_2(f, y_0) = \#f^{-1}(y_0) \pmod{2} \in \mathbb{Z}_2.$$

Jeśli rozmaitości  $M, N$  są zorientowane, to definiujemy stopień

$$\deg(f, y_0) := \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \operatorname{sgn}(Df_x) \quad \text{gdzie} \quad \operatorname{sgn}(Df_x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Df_x \text{ zachowuje orientację} \\ -1 & \text{jeśli } Df_x \text{ zmienia orientację} \end{cases}$$

Zauważmy, że  $\deg_2(f, y_0) = \deg(f, y_0) \pmod{2}$ .

**Stwierdzenie 10.5.1.** *Jeśli  $N$  jest rozmaiłością spójną, to (odpowiednio dla homologii o współczynnikach w  $\mathbb{Z}_2$  i w  $\mathbb{Z}$ ) zachodzą równości:*

$$f_*[M] = \deg_2(f)[N], \quad f_*[M] = \deg(f)[N],$$

gdzie  $[M] \in H_n(M)$  oraz  $[N] \in H_n(N)$  oznaczają odpowiednio klasy orientacji rozmaiłości  $M$  i  $N$  (odpowiednio dla homologii o współczynnikach w  $\mathbb{Z}_2$  i w  $\mathbb{Z}$ ).

*Uwaga.* Wynika stąd niezależność definicji stopnia od wyboru wartości regularnej i homotopijna niezmienniczość.

*Dowód.* Niech  $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Rozważamy diagram:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(M, M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N \setminus y_0) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \bigoplus_{i=1}^k H_n(U_i, U_i \setminus x_i) & \xrightarrow{\bigoplus f_{i*}} & H_n(V, V \setminus y_0) \end{array} \quad (10.7)$$

gdzie pionowe strzałki są indukowane przez włożenia a obcięcia  $f: (U_i, U_i \setminus x_i) \rightarrow (V, V \setminus y_0)$  są dyfeomorfizmami. □

**Definicja 10.5.2** (Indeks przecięcia podrozmaiłości). *Niech  $M^n$  będzie zorientowaną, zamkniętą (tzn. zwartą, bez brzegu) rozmaiłością gładką a  $N_1^p, N_2^q \subset M$  będą domkniętymi, zorientowanymi podrozmaiściami dopełniających wymiarów tzn.  $p + q = n$ . Powiemy, że przecinają się one transversalnie ( $N_1 \pitchfork N_2$ ) jeśli dla każdego  $x \in N_1 \cap N_2$  odpowiednie przestrzenie styczne generują przestrzeń styczną do  $M$ :  $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M$  (zauważmy, że ze względów wymiarowych suma musi być sumą prostą tzn.  $T_x N_1 \cap T_x N_2 = 0$ ). Dla dowolnego punktu  $x \in N_1 \cap N_2$  definiujemy  $\text{sgn}(x) = 1$ , lub  $-1$  zależnie czy suma orientacji  $T_x N_1 + T_x N_2$  jest zgodna czy przeciwna orientacji  $T_x M$ . Definiujemy geometryczny indeks przecięcia*

$$\iota_g(N_1, N_2) := \sum_{x \in N_1 \cap N_2} \text{sgn}(x).$$

(Przecięcie transversalne  $N_1 \cap N_2$  jest zbiorem skończonym.)

Dla dowolnej zamkniętej zorientowanej podrozmaiłości  $N^k \subset M^n$  definiujemy dualną klasę kohomologii  $\eta_N := D_M(i_*[N])$ , gdzie  $D_M: H_k(M) \simeq H^{n-k}(M)$  jest dwoistością Poincaré.

**Stwierdzenie 10.5.2.** *Jeśli  $M$  jest gładka i podrozmaiłości  $N_1$  i  $N_2$  przecinają się transversalnie to  $N_{12} := N_1 \cap N_2$  jest zorientowaną podrozmaiłością oraz*

$$\iota_g(N_1, N_2) = \iota_h(N_1, N_2) := \langle \eta_{N_1} \cup \eta_{N_2}, [M] \rangle.$$

Jest to szczególny przypadek ogólnego twierdzenia o przecięciu transversalnym podrozmaiłości. cf. [Michael Hutchings Cup product and intersections](#).

*Dowód.* Dowód wygodnie jest sformułować wykorzystując następującą wersję "podwójnie relatywnego" cup-produktu. Niech dana będzie przestrzeń  $X$  oraz dwie pary jej podzbiorów  $(X_1, A_1)$ ,  $(X_2, A_2)$ . W ten sam sposób jak cup-produkt relatywny definiujemy

$$\cup: H^p(X_1, A_1) \otimes H^q(X_2, A_2) \rightarrow H^{p+q}(X_1 \cap X_2, (A_1 \cup A_2) \cap (X_1 \cap X_2)).$$

Niech  $\bar{U}_i \supset N_i$  będzie (dostatecznie małym) domkniętym otoczeniem tubularnym podrozmaitości. Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n_i}(N_i) & \xrightarrow{\simeq} & H_{n_i}(U_i) & \xrightarrow[\simeq]{\bar{D}} & H^{n-n_i}(M, M \setminus U_i) & \xrightarrow{\simeq} & H^{n-n_i}(M, M \setminus N_i) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & H_{n_i}(M) & \xrightarrow[\simeq]{D} & H^{n-n_i}(M) & & \end{array} \quad (10.8)$$

Wynika stąd, że wystarczy rozważać produkt w środkowym wierszu:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-n_1}(M) \otimes H^{n-n_2}(M) & \longrightarrow & H^n(M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^{n-n_1}(M, M \setminus N_1) \otimes H^{n-n_2}(M, M \setminus N_2) & \longrightarrow & H^n(M, M \setminus (N_1 \cap N_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i=1}^r H^{n-n_1}(K_i, K_i \setminus N_1) \otimes H^{n-n_2}(K_i, K_i \setminus N_2) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^r H^n(K_i, K_i \setminus \{x_i\}) \end{array} \quad (10.9)$$

gdzie  $N_1 \cap N_2 = \{x_1, \dots, x_r\}$  a  $K_i \ni x_i$  są rozłącznymi "kwadratowymi" otoczeniami.  $\square$

## 10.6 Twierdzenie Lefschetza o punktach stałych

**Twierdzenie 10.6.1.** Niech  $f: M \rightarrow M$  będzie przekształceniem zorientowanej rozmaitości zwartej, a  $\Delta, \Delta_f \subset M \times M$  oznaczają odpowiednio przekątną i wykres przekształcenia  $f$ . Wtedy

$$\iota_h(\Delta, \Delta_f) = L(f)$$

gdzie  $L(f)$  oznacza liczbę Lefschetza homomorfizmu indukowanego  $f_*: H_*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Q})$ .

**Wniosek 10.6.1** (Twierdzenie Lefschetza o punktach stałych). Jeśli  $L_*(f) \neq 0$ , to  $f$  ma punkt stały.

Ponieważ zachodzą równości

$$\iota_h(\Delta, \Delta_f) = \langle D\Delta \cup D\Delta_f, [M \times M] \rangle = \langle D\Delta, D\Delta_f \cap [M \times M] \rangle = \langle D\Delta, \Delta_f \rangle = \langle D\Delta, (id \times f)_*\Delta \rangle$$

trzeba więc obliczyć element dualny do przekątnej  $D(\Delta) \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \simeq \mathbb{Q}$  (w tym rozdziale dla uproszczenia rozważamy współczynniki w ciele liczb wymiernych).

**Lemat 10.6.1.** Niech  $p_1, p_2: M \times M \rightarrow M$  będą projekcjami na czynniki. Wtedy dla dowolnych klas kohomologii  $a \in H^*(M)$  i  $U \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$

$$p_1^*(a) \cup U = p_2^*(a) \cup U \in H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \quad \text{oraz} \quad p_1^*(a) \cup U|_{M \times M} = p_2^*(a) \cup U|_{M \times M} \in H^*(M \times M).$$

*Dowód.* Let  $U \supset \Delta$  be a tubular neighborhood of the diagonal  $M = \Delta \subset M \times M$ . By excision property  $H^*(M \times M, (M \times M \setminus \Delta)) = H^*(U, U \setminus \Delta)$ . The key observation is the following: two projections are equal on the diagonal. Since embedding  $\Delta \subset U$  is a homotopy equivalence, the restrictions  $p_1, p_2: U \rightarrow M$  are homotopic, thus  $p_1^*(a)|_U = p_2^*(a)|_U$ . Now we have to apply some diagram chasing. Naturality of the cup product implies commutativity of the diagram which immediately implies conclusion of the theorem:

$$\begin{array}{ccc} H^*(M \times M) \otimes H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) & \xrightarrow{\cup} & H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H^*(U) \otimes H^*(U, U \setminus \Delta) & \xrightarrow{\cup} & H^*(U, U \setminus \Delta) \end{array} \quad (10.10)$$

□

The Poincaré duality implies (p. Wniosek 10.4.1) that for any homogeneous basis  $b_1, \dots, b_r \in H^*(M)$  there exists a dual basis  $b_1^\#, \dots, b_r^\# \in H^*(M)$  such that  $PD(b_i, b_j^\#) = \delta_{ij}$ .

**Twierdzenie 10.6.2.**  $D[\Delta] = \sum (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^\#$ .

*Dowód.* We use the Künneth isomorphism  $H^*(M) \otimes H^*(M) \xrightarrow{\simeq} H^*(M \times M)$  and express the class  $D[\Delta]$  in terms of the basis  $b_i$ . There exist elements  $c_i \in H^{n-\dim b_i}(M)$  such that

$$D[\Delta] = b_1 \times c_1 + \dots + b_r \times c_r.$$

We need to identify coefficients  $c_i$ .

□

*Dowód tw. Lefschetza.*

$$\langle D\Delta, (id \times f)_*[\Delta] \rangle = \sum (-1)^{\dim b_i} \langle b_i \times b_i^\#, (id \times f)_*[\Delta] \rangle$$

Obliczamy  $\langle b_i \times b_i^\#, (id \times f)_*\Delta \rangle = \langle (id \times f)^*(b_i \times b_i^\#), \Delta \rangle = \langle b_i \cup f^*b_i^\#, \Delta \rangle = \langle f^*b_i^\#, b_i^\# \rangle$ . □



## A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I

By M. F. ATIYAH and R. BOTT

**THEOREM A.** *Let  $\Gamma(E)$  be an elliptic complex on  $X$ , and let  $T$  be a geometric endomorphism of  $\Gamma(E)$  defined by a map  $f: X \rightarrow X$ , with only simple fixed points, and bundle homomorphisms  $\varphi_i$ . Then the Lefschetz number  $L(T)$  is given by the formula*

378

ATIYAH AND BOTT

$$L(T) = \sum_A \nu(A)$$

where the summation is over the set of fixed points of  $f$ , and  $\nu(A)$  is given by

$$\nu(A) = \frac{\sum (-1)^i \text{Trace } \varphi_{i,A}}{|\det(1 - df_A)|}.$$

### 8. Alternative methods

We shall now discuss two variations of the proof of Theorem A.

*Homological method.* The first variation, although essentially equivalent in analytical content, involves a different algebraic point of view. It is well known in various *homology theories* in topology and algebraic geometry that a Lefschetz fixed-point formula is a purely formal consequence of three things:

- (i) Künneth formula: giving the cohomology of a product,
- (ii) Poincaré duality: the isomorphism between homology and cohomology,
- (iii) compatibility between *intersection of cycles* and cup-product of cohomology classes.

The precise nature of these statements depends of course on the context. For those familiar with this homological point of view, it may therefore be helpful to explain what form (i)–(iii) take in the context of elliptic complexes. Once these have been established, our Lefschetz theorem will follow in the routine manner.

**Zadanie 96.** Niech  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Które przestrzenie rzutowe mają własność punktu stałego, tzn. dowolne przekształcenie  $f : \mathbb{F}P(n) \rightarrow \mathbb{F}P(n)$  ma punkt stały? Które przestrzenie rzutowe dopuszczają przekształcenia zmieniające orientację (podać przykłady takich przekształceń). (Wsk. Skorzystać z twierdzenia Lefschetza o śladzie i punktach stałych.)



# Rozdział 11

## Uzupełnienia

### 11.1 Relatywne homotopijne równoważności

Przypomnijmy, że dla ustalonej przestrzeni  $A$  przez  $\mathcal{T}^A$  oznaczamy kategorię morfizmów określonych na  $A$ , której obiektami są przekształcenia  $A \rightarrow X$ , a morfizmami są przekształcenia  $f: X \rightarrow Y$  dla których diagram

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

jest przemienny. Rozważmy pełną podkategorię  $\mathcal{T}^{cofA} \subset \mathcal{T}^A$  składającą się z przekształceń  $A \rightarrow X$  będących korozwłóknieniami. Dla uproszczenia sformułowań dodajmy założenie, że rozpatrywane korozwłóknienia są inkluzjami podzbiorów, a rozpatrywane przestrzenie są Hausdorffa, co gwarantuje, że podzbiory są domknięte (p. Stw. 3.3.2).

W kategorii  $\mathcal{T}^A$  mamy relację homotopii przekształceń rel  $A$  (podaj dokładną definicję) i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy  $(\mathcal{T}^{cofA})_h \subset (\mathcal{T}^A)_h$ . Funktor zapominania  $\mathcal{T}^A \ni (A \rightarrow X) \mapsto X \in \mathcal{T}$  indukuje functor między odpowiednimi kategoriami homotopii.

**Twierdzenie 11.1.1.** *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*odwzorowania  $i, j$  są korozwłóknieniami a  $f$  jest homotopijną równoważnością (czyli w kategorii  $\mathcal{T}$ ), to  $f$  jest homotopijną równoważnością rel  $A$  (czyli w kategorii  $\mathcal{T}^A$ ).*

W terminach kategorijskich to twierdzenie można wysławić następująco: Jeżeli functor zapominania przeprowadza pewien morfizm w kategorii  $(\mathcal{T}^{cofA})_h$  na izomorfizm w  $\mathcal{T}_h$ , to jest on izomorfizmem w  $(\mathcal{T}^{cofA})_h$ . Ten punkt widzenia jest pomocny w zrozumieniu pierwszych kroków dowodu, zawartych w lematach o charakterze kategorijskim. Niech  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  będzie funktorem a  $\mathcal{M}$  pewną klasą morfizmów w  $\mathcal{C}$ , które  $F$  przeprowadza na izomorfizmy w  $\mathcal{D}$ . Szukamy warunków wystarczających do tego, aby każdy morfizm w  $\mathcal{M}$  był izomorfizmem. Funktor, który rozważamy to functor zapominania  $(\mathcal{T}^{cofA})_h \rightarrow \mathcal{T}_h$ .

Rozpocznijmy od lematu, który pozwoli na zredukowanie badania odwracalności morfizmu do znalezienia jednostronnej odwrotności. Uogólnia on nietrudny fakt z algebry, powiadający, że w aksjomatach grupy wystarczy założyć istnienie jednostronnych odwrotności elementów (np. lewostronnych), a stąd wynika, że te odwrotności są obustronne.

**Lemat 11.1.1.** *Jeśli  $\mathcal{M}$  jest klasą morfizmów w kategorii  $\mathcal{C}$  taką, że każdy morfizm w  $\mathcal{M}$  ma lewostronną (odp. prawostronną) odwrotność należącą do  $\mathcal{M}$ , to każdy morfizm w  $\mathcal{M}$  jest izomorfizmem.*

*Dowód.* Dla każdego morfizmu  $f \in \mathcal{M}$  istnieje  $g \in \mathcal{M}$  taki, że  $gf = id$ . Z założenia istnieje  $f' \in \mathcal{M}$  taki, że  $f'g = id$  a więc:  $f' = f'(gf) = (f'g)f = f$ . Stąd wynika, że  $g$  jest obustronną odwrotnością  $f$ .  $\square$

Poniższy lemat umożliwia zredukowanie ogólnej sytuacji opisanej w Tw. 11.1.1 do sytuacji gdy  $X = Y$  i znalezienia jednostronnej homotopijnej odwrotności rel  $A$  dla przekształcenia  $f \sim id_X$ .

**Lemat 11.1.2.** *Niech  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  będzie funktorem. Załóżmy, że dla każdego obiektu  $c \in \text{ob } \mathcal{C}$  i morfizmu  $e \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c)$  takiego, że  $F(e) = id$  istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w  $\mathcal{C}$ . Wtedy dowolny morfizm  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$ , dla którego istnieje  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  takie, że  $F(g)$  jest izomorfizmem oraz  $F(gf) = id$  w  $\mathcal{D}$  jest izomorfizmem w  $\mathcal{C}$ .*

*Dowód.* Rozpatrzmy klasę morfizmów

$$\mathcal{M} = \{f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \mid \exists_g F(gf) = id, F(g) \text{ jest izomorfizmem w } \mathcal{D}\}$$

Na mocy Lematu 11.1.1 wystarczy pokazać, że każdy morfizm z  $\mathcal{M}$  posiada lewą odwrotność należącą do tej klasy. Rozważmy endomorfizm  $gf \in \mathcal{C}$ . Na mocy założenia istnieje  $e' \in \mathcal{C}$  taki, że  $e'(gf) = id$ . Stąd  $g' = e'g$  jest lewą odwrotnością morfizmu  $f \in \mathcal{C}$ . Trzeba pokazać, że  $g' \in \mathcal{M}$ . Zauważmy, że skoro  $F(g'f) = F(g')F(f) = id$  oraz  $F(g')$  jest izomorfizmem, to także  $F(fg') = F(f)F(g') = id$  a więc  $g' \in \mathcal{M}$ .  $\square$

Rozważania topologiczne zaczniemy od następującej obserwacji będącej natychmiastowym wnioskiem z definicji korozwłóknienia.

**Stwierdzenie 11.1.1.** *Jeśli  $i : A \rightarrow X$  jest korozwłóknieniem, a diagram*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

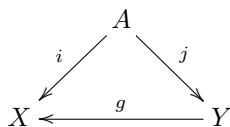
*jest homotopijnie przemienny, to istnieje przekształcenie  $f' \sim f$  takie, że  $f'i = j$ , czyli diagram jest ściśle przemienny po zamianie  $f$  na  $f'$ .*

*Dowód.* Niech  $H : A \times I \rightarrow Y$  będzie homotopią taką, że  $H(-, 0) = fi$ ,  $H(-, 1) = j$ . Rozszerzmy ją na  $X_A = X \times \{0\} \cup A \times I$  kładąc  $H(x, 0) := f(x)$ . Z definicji korozwłóknienia istnieje retrakcja  $X \times I \xrightarrow{r} X_A$ . Rozważmy złożenie  $H \circ r$  i jego obcięcie do górnego denka cylindra:  $f' := H \circ r|_{X \times \{1\}}$ , które oczywiście czyni trójkąt ściśle przemiennym oraz  $f' \sim f$ .  $\square$

**Wniosek 11.1.1.** *Jeśli  $i : A \rightarrow X$  oraz  $j : A \rightarrow Y$  są korozwłóknieniami a w diagramie (czyli morfizmie w  $\mathcal{T}^A$ )*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

przekształcenie  $f$  jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje morfizm w  $\mathcal{T}^A$

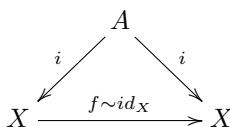


taki, że  $gf \sim id_X$ .

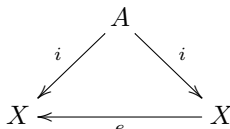
*Uwaga.* Teza lematu oznacza, że dla dowolnego  $a \in A$  przekształcenie  $g$  spełnia warunek  $g(i(a)) = j(a)$ , ale homotopia  $gf \sim id_X$  nie musi być  $\text{rel}(A)$ .

*Dowód.* Wynika natychmiast z Lematu 11.2.1 zastosowanego do homotopijnej odwrotności przekształcenia  $f$ .  $\square$

*Dowód Tw. 11.1.1.* Dzięki Lematom 11.2.1 i 11.1.2 wystarczy skonstruować lewą homotopijną odwrotność  $\text{rel}(A)$  dla dowolnego  $f \sim id_X$  zamykającego przemienny diagram:



Niech  $H: X \times I \rightarrow X$  będzie homotopią taką, że  $H(x, 0) = x$ ,  $H(x, 1) = f(x)$ . Rozważmy homotopię  $H \circ (i \times id): A \times I \rightarrow X$  i rozszerzmy ją na  $X \times I$  z warunkiem początkowym  $id: X \times \{0\} \rightarrow X$  do homotopii  $K: X \times I \rightarrow X$ . Zauważmy, że dla  $a \in A$ ,  $K(a, 1) = f(a) = a$ , a więc  $e(x) := K(x, 1)$  jest morfizmem



Udowodnimy, że  $e$  jest szukaną lewą homotopijną odwrotnością  $\text{rel}(A)$ , konstruując homotopię  $ef \sim id_X$   $\text{rel}(A)$ . Rozważmy kompozycję dwóch homotopii:  $G_0 := H^{-1} * (K \circ (f \times id)): X \times I \rightarrow X$  określoną wzorem

$$G_0(x, t) := \begin{cases} H(x, 2 - 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(f(x), t) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

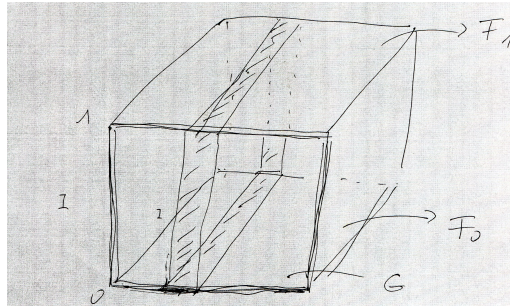
Z definicji homotopii  $K$  wynika, że  $K(f(a), t) = K(a, t) = H(a, t)$  a więc dla każdego  $a \in A$  droga

$$G_0(j(a), -) = H^{-1}(j(a), -) * H(j(a), -)$$

jest kanonicznie homotopijna z drogą stałą, jest to bowiem złożenie drogi z jej homotopijną odwrotnością. Istnieje więc (podwójną) homotopia  $G: A \times I \times I \rightarrow X$  taką, że  $G(a, t, 0) = G_0(a, t)$  oraz  $G(a, 0, t) = G(a, 1, t) = G(a, t, 1) = i(a)$ . Homotopię tę rozszerzamy do  $\bar{G}: X \times I \times I \rightarrow X$  z warunkiem początkowym  $G_0: X \times I \times \{0\} \rightarrow X$ . (Korzystamy tu z faktu, że  $A \times I \xrightarrow{i \times id} X \times I$  jest korozwłóknieniem.) Szukana homotopia  $ef \sim id_X$   $\text{rel}(A)$  dana jest (dla każdego  $x \in X$ ) jako kompozycja obcięć homotopii  $\bar{G}$  do trzech boków kwadratu:

$$(\bar{G}|_{X \times 0 \times I}) * (\bar{G}|_{X \times I \times 1}) * (\bar{G}|_{X \times 1 \times I})^{-1}.$$

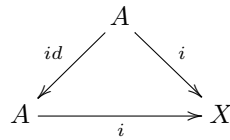
Homotopia jest zilustrowana na poniższym rysunku [Będzie lepszy!].



□

**Wniosek 11.1.2.** *Jeśli  $A \subset X$  jest korozwłóknieniem a zarazem homotopijną równoważnością, to  $A$  jest silnym retraktem deformacyjnym  $X$ .*

*Dowód.* Stosujemy Tw. 11.1.1 do diagramu:

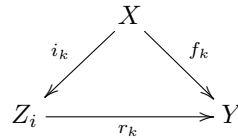


□

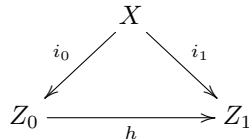
**Jednoznaczność rozkładu na korozwłóknienie i homotopijną równoważność**

Możemy teraz wykazać homotopijną jednoznaczność rozkładu przekształcenia na korozwłóknienie i homotopijną równoważność.

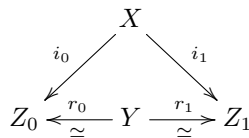
**Stwierdzenie 11.1.2.** *Niech  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  będą homotopijnymi przekształceniami. Niech dla  $k = 0, 1$  dane będą faktoryzacje:*



gdzie  $i_k$  jest korozwłóknieniem, a  $r_k$  homotopijną równoważnością. Wówczas istnieje homotopijna równoważność rel  $X$ ,  $h: Z_0 \rightarrow Z_1$  :



*Dowód.* Rozpatrzmy homotopijnie przemienny diagram



w którym przekształcenie  $r_1 r_0^{-1}$  jest homotopijną równoważnością. Teza wynika teraz natychmiast z Stw. 11.2.1 oraz Tw. 11.1.1. □

Jako prosty wniosek z powyższego stwierdzenia otrzymujemy homotopijną jednoznaczność stożka przekształcenia.

**Wniosek 11.1.3.** *Dla dowolnego przekształcenia  $f: X \rightarrow Y$  i jego faktoryzacji  $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{r} Y$  na superpozycję korozwłóknienia i oraz homotopijnej równoważności  $r$  istnieje przemienny diagram w którym przekształcenia oznaczone pionowymi strzałkami są homotopijnymi równoważnościami:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_f} & Z(f) & \xrightarrow{r_f} & C(f) \\ \downarrow id & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ X & \xrightarrow{i} & Z & \longrightarrow & C(i) \end{array}$$

### Homotopijna niezmienniczość doklejania przestrzeni

**Definicja 11.1.1.** *Niech  $A \subseteq X$  i niech  $f: A \rightarrow Y$  będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas doklejeniem przestrzeni  $X$  do  $Y$  wzdłuż przekształcenia  $A$  nazywamy push-out diagram:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{i'} & X \cup_f Y \end{array},$$

czyli  $X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/R$  gdzie  $xRy \iff x = y$  lub  $x \in A$  i  $f(x) = y$ , a  $i$  oraz  $i'$  są włożeniami.

Zauważmy, że przestrzeń  $X$  z podzbiorem  $A$  zgniecionym do punktu jest szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji – jeżeli  $Y = \{*\}$  jest przestrzenią jednopunktową, to przestrzeń  $X \cup_f \{*\}$  jest homeomorficzna z  $X/A$ . Następne twierdzenie uogólnia Stw. 3.3.4.

**Twierdzenie 11.1.2.** *Niech  $A \xrightarrow{i} X$  będzie korozwłóknieniem. Każdej homotopii  $F: A \times I \rightarrow Y$  odpowiada homotopijna równoważność  $h_F: X \cup_{f_0} Y \simeq X \cup_{f_1} Y \text{ rel } (Y)$ , przy czym homotopii trywialnej odpowiada przekształcenie identycznościowe a kompozycji (konkatenacji) homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie homotopijnych równoważności. Jeśli dwie homotopie  $F_0, F_1: A \times I \rightarrow Y$  są homotopijne rel  $X \times \{0, 1\}$  to wyznaczone przez nie homotopijne równoważności  $h_{F_0}$  i  $h_{F_1}$  są homotopijne.*

*Dowód.* Niech  $F: A \times I \rightarrow Y$  będzie homotopią między  $f_0$  i  $f_1$ . Wykażemy, że oba włożenia  $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$  dla  $k = 0, 1$  są reaktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do  $k = 0$ . Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech  $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$  będzie silną retrakcją deformacyjną (p. Stw 3.3.3) zaś  $G: X \times I \times I \rightarrow X \times I$  homotopią taką, że  $G(x, t, 0) = (x, t)$ ,  $G(a, t, s) = (a, t)$ ,  $G(x, t, 1) = r(x, t)$ . Kładąc identyczność na przestrzeni  $Y$  retrakcję  $r$  rozszerzamy do retrakcji  $\bar{r}: (X \times I) \cup_F Y \rightarrow X \cup_{f_0} Y$ . Ponieważ homotopia  $G$  jest stała na  $X \times \{0\} \cup A \times I$ , to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii  $\bar{G}: (X \times I) \cup_F Y \times I \rightarrow (X \times I) \cup_F Y$  kładąc identyczność na przestrzeni  $Y$ .  $\bar{G}$  jest homotopią między identycznością a retrakcją  $\bar{r}$ . Homotopijna równoważność  $X \cup_{f_0} Y \rightarrow X \cup_{f_1} Y$  wyznaczona przez homotopię  $F$  jest zadana jako złożenie:  $X \cup_{f_0} Y \subset (X \times I) \cup_F Y \xrightarrow{\bar{r}} X \cup_{f_1} Y$ . Sprawdzenie pozostałych tez stwierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.  $\square$

Zachodzi także następująca wersja Tw. 11.1.1 dotycząca morfizmów między dwoma korozwłóknieniami zdefiniowanymi na różnych przestrzeniach. [13] str. 47.

**Twierdzenie 11.1.3.** *Jeśli w diagramie*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*$i, j$  są korozwłóknieniami, a  $f$  oraz  $d$  są homotopijnymi równoważnościami, to  $(f, d)$  jest homotopijną równoważnością par.*

## 11.2 Włókniste homotopijne równoważności

Udowodnimy własności rozwłóknień, dwoiste do własności korozwłóknień opisanych w poprzednim rozdziale. Przypomnijmy, że dla ustalonej przestrzeni  $B$  przez  $\mathcal{T}_B$  oznaczamy kategorię morfizmów (przekształceń)  $X \rightarrow B$ , w której morfizmami są diagramy

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Rozważmy pełną podkategorię  $\mathcal{T}_B^{fib} \subset \mathcal{T}_B$  składającą się z przekształceń  $E \rightarrow B$  będącymi rozwłóknieniami. W kategorii  $\mathcal{T}_A$  mamy relację homotopii przekształceń  $\sim_B$  nazwaną *włóknistą homotopią* (podaj dokładną definicję) i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy  $(\mathcal{T}_B^{fib})_h \subset (\mathcal{T}_B)_h$ . Funktor zapominania  $\mathcal{T}_B \ni (X \rightarrow B) \mapsto X \in \mathcal{T}$  indukuje functor zapominania na odpowiednich kategoriach homotopii.

**Twierdzenie 11.2.1.** *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

*odwzorowania  $p, p'$  są rozwłóknieniami a przekształcenie  $f$  jest homotopijną równoważnością (czyli w kategorii  $\mathcal{T}$ ), to  $f$  jest włóknistą homotopijną równoważnością (czyli w kategorii  $\mathcal{T}_B$ ).*

**Zadanie 97.** Udowodnij następujące odpowiedniki Stw. 11.2.1 i Wniosku 11.2.1 poprzedzających dowód Tw. 11.1.1.

**Stwierdzenie 11.2.1.** *Jeśli  $p: E' \rightarrow B$  jest rozwłóknieniem, a diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

*jest homotopijnie przemienny, to istnieje przekształcenie  $f' \sim f$  takie, że  $pf'i = p$ , czyli diagram jest ściśle przemienny po zamianie  $f$  na  $f'$ .*



**Wniosek 11.2.1.** *Jeśli  $p_i: E_i \rightarrow B$ ,  $i = 1, 2$  są rozwłóknieniami a w diagramie (czyli morfizmie w  $\mathcal{T}_B$ )*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

*przekształcenie  $f$  jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje morfizm w  $\mathcal{T}_B$*

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{g} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

*taki, że  $fg \sim id_{E'}$ .*

*Dowód Tw. 11.2.1.* Analogicznie jak w dowodzie Tw. 11.1.1, wystarczy wykazać, że jeśli

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & B \end{array}$$

jest endomorfizmem rozwłóknienia  $E \xrightarrow{p} B$  takim, że  $f \simeq id_E$ , to  $f$  posiada prawą włóknistą homotopijną odwrotność. Niech  $\tilde{H}: E \times I \rightarrow E$  homotopią między  $f$  a  $id$ . Żeby skonstruować włóknistą prawą homotopijną odwrotność  $f$  rozpatrzmy homotopię  $G := p\tilde{H}: E \times I \rightarrow B$  i jej podniesienie  $\tilde{G}: E \times I \rightarrow E$  z warunkiem początkowym  $E \times 0 \xrightarrow{id} E$ .

$$\begin{array}{ccc} E \times \{0\} & \xrightarrow{id} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow{p\tilde{H}} & B \end{array}$$

Niech  $g(e) := \tilde{G}(e, 1)$ ; wykażemy, że  $id \sim_B fg$ . Zdefiniujmy homotopię  $\tilde{K}_0 := \tilde{H}^{-1} * (f \circ \tilde{G}): id \sim fg$ :

$$\tilde{K}_0(e, t) := \begin{cases} \tilde{H}(e, 2 - 2t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\tilde{G}(e, t)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

i rozważmy  $p\tilde{K} = G^{-1} * G$ , czyli dla każdego  $e \in E$  mamy złożenie drogi  $G(e, -)^{-1}$  z jej odwrotnością  $G(e, -)$ . Można więc określić homotopię  $K: E \times I \times I \rightarrow B$  taką, że  $K(e, t, 0) = K_0(e, t)$  oraz  $K(e, 0, t) = K(e, 1, t) = K(e, t, 1) = p(e)$ . Podnieśmy ją do  $\tilde{K}: E \times I \times I \rightarrow E$  z warunkiem początkowym  $\tilde{K}_0: E \times 0 \rightarrow E$ . Kompozycja homotopii otrzymanych przez obcięcie  $\tilde{K}$  do trzech wolnych boków kwadratu definiuje homotopię  $id \sim_B fg$  (por. dowód Tw. 11.1.1).  $\square$

Udowodnimy twierdzenie dualne do Tw. 11.1.2, mówiącego o homotopijnej niezmienniczości operacji doklejanía.

**Twierdzenie 11.2.2.** *Niech  $p: E \rightarrow B$  będzie rozwłóknieniem. Każda homotopia  $F: X \times I \rightarrow B$  wyznacza klasę włóknistych homotopijnych równoważności rozwłóknień indukowanych  $f_0^*E \sim_X f_1^*E$ , gdzie  $f_i := F(-, i)$ ,  $i = 0, 1$ . Homotopii stałej  $F(x, t) = f_0(x)$  odpowiada identyczność, a kompozycji (konkatenacji) homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie włóknistych homotopijnych równoważności. Jeśli dwie homotopie  $F_0, F_1: X \times I \rightarrow B$  homotopijne rel  $(X \times \{0, 1\})$  to wyznaczają tę samą klasę włóknistych homotopijnych równoważności.*

*Dowód.* Niech  $E \xrightarrow{p} X \times I$  będzie dowolnym rozwłóknieniem nad walcem; oznaczmy  $E_t := p^{-1}(X \times \{t\})$ . Pokażemy, że rozwłóknienie  $E \xrightarrow{p} X \times I$  wyznacza homotopijnie jednoznaczne włókniste przekształcenie  $E_0 \rightarrow E_t$ . Polega ono na przenoszeniu włókien  $E_0$  wzdłuż tworzących walca  $X \times I$  na włókna rozwłóknienia  $E_t$ .

Zdefiniujmy homotopię  $E_0 \times I \xrightarrow{p_0 \times id} X \times I$  i jej podniesienie  $\tilde{P}: E_0 \times 0 \rightarrow E$  z warunkiem początkowym  $E_0 \times 0 \subset E$ .

$$\begin{array}{ccc} E_0 \times \{0\} & \xrightarrow{\subset} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{g} & \downarrow p \\ E_0 \times I & \xrightarrow{p_0 \times id} & X \times I \end{array} \quad (11.1)$$

Z Tw. 3.3.3 wynika, że dowolne dwa podniesienia  $\tilde{P}, \tilde{P}'$  są włóknście homotopijne. Oczywiście, dla każdego  $t \in I$  mamy  $\tilde{g}(-, t): E_0 \times 1 \rightarrow E_t$ , a więc  $h_E(e) := \tilde{g}(e, 1)$  jest przekształceniem  $E_0 \rightarrow E_1$  nad  $X$  wyznaczonym jednoznacznie z dokładnością do włóknistej homotopii.

Niech teraz  $E \rightarrow B$  będzie rozwłóknieniem a  $F: X \times I \rightarrow B$  będzie homotopią. Przy jej pomocy możemy zdefiniować rozwłóknienie  $F^*E \rightarrow X \times I$ , którego obcięcia do podstaw walca to rozwłóknienia  $f_0^*E$  i  $f_1^*E$ . Opisana konstrukcja zadaje klasę włóknistej homotopii odwzorowań  $h_F: f_0^*E \rightarrow f_1^*E$ .

Kompozycji homotopii można przyporządkować złożenie tych przekształceń. Żeby dowieść, że są to włókniste równoważności wystarczy sprawdzić, że klasa włóknistej homotopii nie zależy od wyboru podniesienia  $\tilde{g}$ . Wykażemy od razu więcej - że dwa przekształcenia  $F_0, F_1: X \times I \rightarrow B$  homotopijne rel  $(X \times \{0, 1\})$  wyznaczają tę samą klasę włóknistych przekształceń  $f_0^*E \rightarrow f_1^*E$ . Niech  $\tilde{g}_0: E_0 \times I \rightarrow F_0^*E$  oraz  $\tilde{g}_1: E_0 \times I \rightarrow F_1^*E$  będą homotopiami skonstruowanymi według powyższego przepisu (Diagram 11.1). Rozważmy homotopię  $F: F_0 \sim F_1$  rel  $(X \times \{0, 1\})$  czyli przekształcenie  $\tilde{F}: X \times I \times I \rightarrow B$  spełniające odpowiednie warunki i rozwłóknienie przeciągnięte  $F^*E \rightarrow X \times I \times I$  oraz homotopię

$$H := p_0 \times id \times id: E_0 \times I \times I \rightarrow X \times I \times I.$$

Podnosząc  $H$  z warunkiem początkowym  $\tilde{H}_\sqcup$  określonym na korytku  $\sqcup$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{I \times 0}: E_0 \times I \times 0 &\rightarrow E, & \tilde{H}_{I \times 0}(e, t, 0) &= e \in E_0 \subset F^*E \\ \tilde{H}_{0 \times I}: E_0 \times 0 \times I &\rightarrow E, & \tilde{H}_{0 \times I}(e, 0, t) &= g_0(e, t) \in F_0^*E \subset F^*E \\ \tilde{H}_{1 \times I}: E_0 \times 1 \times I &\rightarrow E, & \tilde{H}_{1 \times I}(e, 1, t) &= g_1(e, t) \in F_1^*E \subset F^*E \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} E_0 \times \sqcup & \xrightarrow{\tilde{H}_\sqcup} & F^*E \\ \downarrow \subset & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ E_0 \times I \times I & \xrightarrow{p_0 \times id \times id} & X \times I \times I \end{array} \quad (11.2)$$

otrzymujemy homotopię  $\tilde{H}: E_0 \times I \times I \rightarrow E$ , której obcięcie  $\tilde{H}|_{E_0 \times 1 \times I}$  zadaje szukaną włóknistą homotopię.  $\square$

**Wniosek 11.2.2.** Niech  $p: E \rightarrow B$  będzie rozwłóknieniem. Przyporządkowanie każdemu punktowi  $b \in B$  włókna nad nim  $p^{-1}(b)$  a klasie homotopii drogi  $\omega: I \rightarrow B$  klasę homotopii  $h_{[\omega]}: p^{-1}(\omega(0)) \rightarrow p^{-1}(\omega(1))$  definiuje functor  $\text{Fib}: \Pi(B) \rightarrow \mathcal{T}_h$  z grupoidu podstawowego przestrzeni  $B$  do kategorii homotopii przestrzeni topologicznych.

*Dowód.* Traktujemy drogę  $\omega : I \rightarrow B$  jako homotopię między włożeniami punktów końcowych i stosujemy Tw. 11.2.1  $\square$

**Wniosek 11.2.3.** *Jeśli  $p : E \rightarrow B$  jest rozwiłkaniem, to istnieje włóknista homotopijna równoważność  $E \sim_B P_p$ , gdzie  $P_p \rightarrow B$  jest kocyndrem odwzorowania  $p$ . W szczególności dla każdego punktu  $b \in B$  włókno  $p^{-1}(b)$  i homotopijne włókno  $\text{Fib}(f, b)$  są homotopijnie równoważne.*

*Dowód.* Z konstrukcji kocyndra wiemy, że istnieje przekształcenie włókniste  $s : E \rightarrow P_p$ , które jest zwykłą homotopijną równoważnością. Skoro  $p$  jest rozwiłkaniem, z Tw. 11.2.1 wynika, że  $s$  jest włóknistą homotopijną równoważnością.  $\square$

**Zadanie 98.** Jeśli  $p : E \rightarrow B$  jest rozwiłkaniem nad przestrzenią łukowo spójną, a przestrzeń  $E$  jest ściągająca to istnieje homotopijna równoważność:  $p^{-1}(b_0) \simeq \Omega(B, b_0)$ . (Jest to dualna własność do Zad. 44.)

**Zadanie 99.** Sformułować i udowodnić wniosek dualny do 11.1.3

## 11.3 Lokalny opis koroszwłóknień

Poniższe twierdzenie opisuje w terminach wewnętrznych i lokalnych kiedy włożenie podprzestrzeni  $A \subset X$  jest koroszwłóknieniem.

**Twierdzenie 11.3.1.** [20] *Dla domkniętego podzbioru  $A \subset X$  następujące warunki są równoważne*

1. *Włożenie  $j : A \subset X$  jest koroszwłóknieniem (tzn.  $(X, A)$  jest parą Borsuka);*
2. *Istnieje deformacja rel  $A, D : X \times I \rightarrow X$  (tzn. homotopia taka, że  $D(x, 0) = x$ ,  $D(a, t) = a$ ), oraz funkcja  $\varphi : X \rightarrow I$  taka, że  $A = \varphi^{-1}(0)$  oraz  $D(x, 1) \in A$  jeśli  $\varphi(x) < 1$ ;*
3. *Istnieje deformacja rel  $A, D : X \times I \rightarrow X$  oraz funkcja  $\varphi : X \rightarrow I$  taka, że  $A \subset \varphi^{-1}(0)$  oraz  $D(x, t) \in A$  jeśli  $\varphi(x) < t$ ;*
4. *Istnieje otoczenie  $U \supset A$  deformowalne rel  $A$  w  $X$  do  $A$  (tzn. istnieje homotopia  $H : U \times I \rightarrow X$  taka, że  $H(x, 0) = x$ ,  $H(a, t) = a$ ,  $H(x, 1) \subset A$ ) oraz funkcja  $\varphi : X \rightarrow I$  taka, że  $A = \varphi^{-1}(0)$  i  $\varphi(x) = 1$  dla  $x \in X \setminus U$ .*

*Jeśli koroszwłóknienie  $A \subset X$  jest acykliczne (tzn.  $A \subset X$  jest homotopijna równoważnością), to istnieje deformacja rel  $A, D : X \times I \rightarrow X$  taka, że  $D(X \times \{1\}) \subset A$ .*

*Dowód.* [1.  $\Rightarrow$  2.] Ponieważ  $A \subset X$  jest koroszwłóknieniem, istnieje retrakcja  $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ , która posłuży nam do konstrukcji  $D$  i  $\varphi$ ,  $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$ . Zdefiniujemy  $\varphi : X \rightarrow I$  wzorem

$$\varphi(x) := \sup\{|t - r_2(x, t)| \mid t \in I\} \quad \text{oraz} \quad D : X \times I \rightarrow X, \quad D(x, t) := r_1(x, t).$$

Mamy  $\varphi^{-1}(0) = A$  bowiem  $\varphi(x) = 0$  oznacza, że  $r(x, t) \in A \times I$  dla  $t > 0$  a stąd także  $r(x, 0) \in A \times I$  gdyż  $A \times I \subset X \times I$  jest podzbiorem domkniętym. Jeśli  $\varphi(x) < 1$  to znaczy, że dla każdego  $t$ ,  $-1 < t - r_2(x, t) < 1$ , czyli  $r_2(x, t) > 0$ . Stąd wynika, że  $r_1(x, t) \in A$ .

[2.  $\Rightarrow$  3.] Oczywiście.

[3.  $\Rightarrow$  1.] Przy pomocy  $D$  i  $\varphi$  definiujemy retrakcję  $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ :

$$r(x, t) := \begin{cases} (D(x, t), 0) & \text{dla } t \leq \varphi(x) \\ (D(x, t), t - \varphi(x)) & \text{dla } t \geq \varphi(x). \end{cases}$$

Istotnie:  $r(x, 0) = (D(x, 0), 0) = x$  oraz  $r(a, t) = (D(a, t), t) = (a, t)$ .

[2.  $\Rightarrow$  4.] Wykorzystujemy funkcję  $\varphi$  zdefiniowaną w punkcie 4. a deformację  $D$  obcinamy do zbioru  $U := \varphi^{-1}([0, 1])$ .

[4.  $\Rightarrow$  1.] Niech dane będą otoczenie  $U \supset A$ , deformacja  $H$  oraz funkcja  $\varphi$  jak w pkt. 6. Skonstruujemy retrakcję  $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ .

$$r(x, t) := \begin{cases} (x, 0) & \text{dla } \varphi(x) = 1 \\ (H(x, 2(1 - \varphi(x))t), 0) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq \varphi(x) < 1 \\ (H(x, \frac{t}{2\varphi(x)}), 0) & \text{dla } 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \text{ i } 0 \leq t \leq 2\varphi(x) \\ (H(x, 1), t - 2\varphi(x)) & \text{dla } 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \text{ i } 2\varphi(x) \leq t \leq 1 \\ (x, t) & \text{dla } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

□

*Uwaga 11.3.1.* Zauważmy, że jeśli  $X$  jest przestrzenią metryzowalną, to mając dany zbiór domknięty  $U$  i jego otoczenie  $A \subset U$  można skonstruować funkcję, o której mowa w warunku 4:

$$\varphi(x) := \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, A) + d(x, X \setminus U)},$$

gdzie  $d$  jest funkcją odległości punktu od zbioru. Warunek 4. sprowadza się więc do bardzo intuicyjnego geometrycznego założenia istnienia otoczenia  $U \supset A$ , które deformujące się w  $X$  do  $A$ . Można stąd łatwo wydedukować, że włożenia podzmaitości domkniętej w rozmaitość gładką lub podwielościanu w wielościach są korozwłóknieniami.

**Wniosek 11.3.1.** *Jeśli  $X$  jest przestrzenią normalną (np. metryzowalną) oraz  $A \subset U \subset X$  są podzbiorkami odpowiednio domkniętym i otwartym w  $X$ , to jeśli włożenie  $A \hookrightarrow U$  jest korozwłóknieniem, to włożenie  $A \hookrightarrow X$  też jest korozwłóknieniem.*

*Dowód.* Wynika natychmiast z Tw. 11.3.1 pkt. 6. □

### Wniosek 11.3.2.

1. Dowolna acykliczna para Borsuka  $j : A \hookrightarrow X$  jest retraktem walca  $i_0 : X \hookrightarrow X \times I$ .
2. Dowolne acykliczne rozwłóknienie  $p : E \rightarrow B$  jest retraktem kowalca  $p_0 : P(E) \rightarrow E$ .

*Dowód.* Ad 1. Skonstruujemy diagram:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{D(x,1)} & A \\ \downarrow j & & \downarrow i_0 & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{j}} & X \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

w którym złożenia górnych i dolnych strzałek są identycznościami. Niech  $D : X \times I \rightarrow X$  będzie deformacją rel  $(A)$  a  $\varphi : X \rightarrow I$  funkcją taką, że  $\varphi^{-1}(0) = A$ . Definiujemy  $\bar{j}(x) := (x, \varphi(x))$  oraz homotopię:

$$H(x, t) := \begin{cases} D(x, \min(|1 - t/\varphi(x)|, 1)) & \text{dla } x \notin A \\ x & \text{dla } x \in A \end{cases}.$$

Homotopia  $H$  jest ciągła: jest to oczywiste dla punktów  $(x, t) \notin A \times I$ . Niech  $(a, t) \in A \times I$  oraz  $V \ni H(a, t) = a$  będzie otoczeniem. Zdefiniujmy zbiór otwarty  $U := \{x \in X \mid D(\{x\} \times I) \subset V\}$ . Ponieważ  $D(a, t) = a$  dla każdego  $t \in I$ , więc  $U$  jest otoczeniem punktu  $a$  i oczywiście zachodzi

inkluzja  $H(U \times I) \subset V$ , co dowodzi ciągłości  $H$ . Sprawdźmy, że złożenia poziomych strzałek są identycznościami i diagramy są przemienne.

Z definicji  $D(a, 1) = a$  oraz  $(H \circ \bar{j})(x) = D(x, \min(|1 - \varphi(x)/\varphi(x)|, 1)) = D(x, 0) = x$  dla  $x \notin A$  i  $(H \circ \bar{j})(a) = D(a, 0) = a$ . Podobnie sprawdzamy przemienność diagramów:  $\bar{j}(j(a)) = i_0 j(a) = (a, 0)$  oraz  $H(x, 0) = D(x, 1)$ .

Ad 2. ZADANIE. □

**Wniosek 11.3.3.** *Jeśli  $j: A \rightarrow X$  jest acyklicznym korowłóknieniem to jest ono lewo ortogonalne (Def. 1.6.1) do dowolnego rozwłóknienia  $p: E \rightarrow B$  tzn. dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{F}} & E \\ j \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (11.3)$$

istnieje podniesienie  $\bar{F}: X \rightarrow E$ .

Dowód. ZADANIE □

**Wniosek 11.3.4.** *Jeżeli  $A \hookrightarrow X$  i  $B \hookrightarrow Y$  są parami Borsuka, to włożenia  $A \times B \hookrightarrow X \times B \cup A \times Y \hookrightarrow X \times Y$  są parami Borsuka.*

Dowód. (p. [21]) Ponieważ  $A, B$  są zbiorami domkniętymi, to odpowiednie podzbiory w iloczynie kartezjańskim też są domknięte. Niech  $\varphi: X \rightarrow I$  oraz  $H: X \times I \rightarrow X$ ,  $\psi: Y \rightarrow I$ ,  $G: Y \times I \rightarrow Y$  będą odwzorowaniami, których istnienie zapewnia Tw.11.3.1 pkt.4. Zdefiniujemy odpowiednie funkcje dla pary  $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ .

$$\eta(x, y) := \min(\varphi(x), \psi(y)), \quad F(x, y, t) := (H((x, \min(t, \psi(y))), G(y, \min(t, \varphi(x)))).$$

Zauważmy, że  $F(x, y, t) \in X \times B \cup A \times Y$  jeśli  $t > \eta(x, y)$ . Stąd na mocy Tw.11.3.1 pkt. 4 włożenie  $X \times B \cup A \times Y \hookrightarrow X \times Y$  jest parą Borsuka. □

**Wniosek 11.3.5.** *Jeśli  $A \hookrightarrow X$  jest parą Borsuka,  $X_A := X \times \{0\} \cup A \times I$  a  $p: E \rightarrow B$  dowolnym rozwłóknieniem to dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczonych litymi strzałkami:*

$$\begin{array}{ccc} X_A & \xrightarrow{\bar{F}} & E \\ \hookrightarrow \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow p_0 \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (11.4)$$

istnieje podniesienie  $\bar{F}: X \times I \rightarrow E$ .

**Wniosek 11.3.6.** *Jeśli  $(X, x_0), (Y, y_0)$  są dobrze punktowanymi przestrzeniami Hausdorffa, to włożenie  $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$  jest parą Borsuka.*

## 11.4 Lokalny opis rozwłóknień

Przytoczymy najsilniejsze twierdzenie mówiące, że w odpowiednim sensie własność podnoszenia homotopii jest własnością lokalną. W tym celu musimy zdefiniować pewną własność pokryć zbiorami otwartymi:

**Definicja 11.4.1.** *Pokrycie otwarte pokrycia otwartego  $\{U_i\}_{i \in J}$  przestrzeni  $X$  nazywamy numerowalnym jeśli dla każdego  $i \in J$  można zadać funkcję  $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$  tak, że następujące warunki są spełnione:*

1. Dla każdego  $i \in J$ ,  $\text{supp}(\varphi_i) := \text{cl}\{x \in X \mid \varphi_i(x) \neq 0\} \subset U_i$
2. W dowolnym punkcie  $x \in X$ , tylko skończenie wiele funkcji  $\varphi_i$  jest różne od zera,
3. Dla każdego  $x \in X$ ,  $\sum_{i \in J} \varphi_i(x) = 1$

Przestrzeń Hausdorffa, której każde pokrycie jest numerowalne, nazywa się przestrzenią parazwartą.

Każda przestrzeń zwarta oraz dowolna przestrzeń metryzowalna są parazwarte, choć dowód nie jest łatwy.

**Twierdzenie 11.4.1** (A. Dold [4]). *Jeśli  $p: E \rightarrow B$  jest przekształceniem takim, że dla pewnego numerowalnego pokrycia otwartego  $\{U_i\}_{i \in I}$  obcięcia  $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  są rozwłóknieniami, to  $p$  jest rozwłóknieniem.*

Oryginalny dowód znajduje się w pracy [4]; jest także opisany w [?], [17] Tw. 2.7.12. oraz [13] rozdz.7.4.

**Wniosek 11.4.1.** *Jeśli  $p: E \rightarrow B$  jest przekształceniem o wartościach w przestrzeni parazwartej takim, że dla pewnego pokrycia otwartego  $\{U_i\}_{i \in I}$  obcięcia  $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  są rozwłóknieniami, to  $p$  jest rozwłóknieniem.*

Szczególnie ważne z punktu widzenia zastosowań są przekształcenia *lokalnie trywialne*, a więc będące lokalnie rozwłóknieniami.

**Definicja 11.4.2.** *Przekształcenie  $p: E \rightarrow B$ , jest lokalnie trywialne jeśli dla pewnego pokrycia otwartego  $\{U_i\}_{i \in I}$  obcięcia  $p: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  są izomorficzne w kategorii przestrzeni nad  $U_i$  z pewną projekcją  $U_i \times F_i \rightarrow U_i$ , czyli istnieje homeomorfizm  $h$  zamykający następujący diagram:*

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\simeq]{h} & U_i \times F_i \\
 & \searrow p & \swarrow p_1 \\
 & & U_i
 \end{array}$$

Przekształcenia lokalnie trywialne nazywa się często wiązkami lokalnie trywialnymi lub po prostu wiązkami.

**Zadanie 100.** Jeśli  $p: E \rightarrow B$  jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a przestrzeń  $B$  jest spójna to przestrzenie  $F_i$  występujące w definicji są homeomorficzne.

Ponieważ projekcja z iloczynu kartezjańskiego jest rozwłóknieniem, otrzymujemy następujący:

**Wniosek 11.4.2.** *Jeśli  $p: E \rightarrow B$  jest przekształceniem lokalnie trywialnym o wartościach w przestrzeni parazwartej, to  $p$  jest rozwłóknieniem.*

W przypadku odwzorowań gładkich między rozmaitościami ważne kryterium lokalnej trywialności można sformułować w terminach pochodnej.

**Twierdzenie 11.4.2.** *Niech  $p: M \rightarrow N$  jest odwzorowaniem gładkim, które jest właściwe (tzn. przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte). Jeśli  $p$  jest submersją tzn. dla każdego punktu  $x \in M$  pochodna  $Dp_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  jest epimorfizmem, to przekształcenie  $p$  jest lokalnie trywialne.*

Dowód, korzystający z aparatu geometrii różniczkowej, można znaleźć w książce Bröckera i Jänicha [3].

W definicji własności podnoszenia homotopii (HLP 3.1.2) wymagaliśmy, aby podnoszona homotopia była określona na dowolnej przestrzeni topologicznej. Zawężając klasę przestrzeni może być łatwiej wykazać własność HLP.

**Definicja 11.4.3.** *Jeśli  $\mathcal{C}$  jest pewną klasą przestrzeni (np. przestrzenie zwarte, wielościany, dyski lub kostki itp.) to będziemy mówili, że przekształcenie  $p: E \rightarrow B$  ma własność podnoszenia homotopii ze względu na tę klasę, jeśli dla dowolnego przemiennego diagramu przekształceń oznaczanych litymi strzałkami*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

w którym  $Y \in \mathcal{C}$  istnieje podniesienie, (przerzywana strzałka)  $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow E$ . Klasę przekształceń  $p$  mających tę własność oznaczamy w skrócie HLP( $\mathcal{C}$ ).

**Definicja 11.4.4.** *Klasę przekształceń HLP( $\mathcal{C}$ ), gdzie  $\mathcal{C} := \{pt, I^1, I^2, \dots, I^n, \dots\}$  jest zbiorem kostek nazywamy rozwłóknieniami Serre'a.<sup>1</sup>*

Zauważmy, że oczywiście kostki można zastąpić dowolnymi przestrzeniami z nimi homeomorficznymi np. dyskami  $D^n$ . Okazuje się, że rozwłóknienia Serre'a posiadają HLP ze względu na znacznie szerszą klasę przestrzeni - CW-kompleksy, które omówimy w Rozdziale ?. Kluczowym dla dowodu lematem jest następujące:

**Twierdzenie 11.4.3** (Lemat Feldbau<sup>2</sup>). *Jeśli  $p: E \rightarrow I^n$  jest wiązką lokalnie trywialną, to jest trywialna tzn. istnieje homeomorfizm  $h$  zamykający diagram:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & I^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & I^n \end{array}$$

*Dowód.* Niech  $\{U_j\}_{j \in J}$  będzie pokryciem otwartym kostki  $I^n$  o którym mowa w definicji lokalnej trywialności 11.4.2. Ponieważ kostka jest przestrzenią zwartą, z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone, które ma liczbę Lebesgue'a  $\lambda > 0$ . Wybierając dostatecznie dużą liczbę  $k$  i dzieląc odcinek  $[0, 1]$  na  $k$  pododcinków długości  $\frac{1}{k}$  otrzymujemy podział kostki  $I^n$  na  $k^n$  małych kostek, przecinających się wzdłuż jednej ściany, nad każdą z których wiązka  $p$  jest trywialna. Też dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę kostek nad którymi przekształcenie jest trywialne. W przypadku jednej kostki teza jest oczywista. Zauważmy, że suma dwóch małych kostek, przecinających się wzdłuż jednej  $n - 1$  wymiarowej ściany jest znów przestrzenią homeomorficzną z kostką. Dowód będzie więc zakończony jeśli wykażemy lemat, który sformułujemy osobno.  $\square$

<sup>1</sup>Jean-Pierre Serre (Bages, Pyrénées Orientales, F 1926)

<sup>2</sup>Jacques Feldbau (Strasbourg F/D 1914 - 1945 Ganacker, D)

**Lemat 11.4.1.** *Jeśli  $p: E \rightarrow I^n$  jest wiązką, która jest trywialna nad każdym z dwóch podzbiorów  $I_0^n := I^{n-1} \times [0, \frac{1}{2}]$ ,  $I_1^n := I^{n-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$  to  $p$  jest wiązką trywialną.*

*Dowód.* Oznaczmy wspólną ścianę kostek  $I_{01}^{n-1} := I_0^n \cap I_1^n = I^{n-1} \times \{\frac{1}{2}\}$  oraz  $F = p^{-1}(1, 0, \dots, 0)$ . Zauważmy, że przestrzeń  $E$  jest homeomorficzna ze sklejeniem przestrzeni  $I_0^n \times F$  i  $I_1^n \times F$  wzdłuż  $I_{01}^{n-1} \times F$ . Istotnie, rozważmy homeomorfizmy  $h_k$  dla  $k = 0, 1$ :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(I_k^n) & \xrightarrow[h_k \simeq]{} & I_k^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & I_k^n & \end{array}$$

oraz nad zbiorem  $I_{01}^{n-1}$  dwa homeomorfizmy :

$$\begin{array}{ccc} I_{01}^{n-1} \times F & \xleftarrow[h_0 \simeq]{} p^{-1}(I_{01}^{n-1}) \xrightarrow[h_1 \simeq]{} & I_{01}^{n-1} \times F \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_1 \\ & I_{01}^{n-1} & \end{array}$$

i ich złożenie  $h := h_1 h_0^{-1}: I_{01}^{n-1} \times F \rightarrow I_{01}^{n-1} \times F$ , który jest postaci  $h(x, y) = (x, h_2(x, y))$  Żeby skonstruować homeomorfizm  $k: E \rightarrow I^n \times F$  rozszerzymy homomorfizm  $h: I_{01}^{n-1} \times F \rightarrow I_{01}^{n-1} \times F$  do homeomorfizmu  $\bar{h}: I_1^n \times F \rightarrow I_1^n \times F$  wzorem:

$$\bar{h}((z, t), y) = ((z, t), \pi_2(h_0 h_1^{-1})((z, \frac{1}{2}), y)) \quad \text{gdzie } z \in I^{n-1}, t \in [\frac{1}{2}, 1], \quad I_1^n \times F \xrightarrow{\pi_2} F.$$

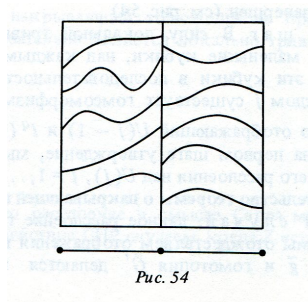
Zdefiniujemy przekształcenie  $\bar{k}: E \rightarrow I^n \times F$

$$\bar{k}(e) := \begin{cases} h_0(e) & \text{dla } p(e) \in I_0^n \\ (h_1^{(1)}(e), \pi_2 \bar{h} h_1(e)) & \text{dla } p(e) \in I_1^n \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że jest to przekształcenie dobrze zdefiniowane i bijektywne oraz zamykające diagram:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\simeq]{\bar{k}} & I^n \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & I^n & \end{array}$$

Odwzorowanie  $\bar{k}$  jest także homeomorfizmem, bo jest homeomorfizmem między zbiorami domkniętymi  $p^{-1}(I_k^n) \rightarrow I_k^n \times F$ ,  $k = 0, 1$ .  $\square$



Rys. Wizualizacja wiązki nad odcinkiem, trywialnej na półodcinkach. [9]



## 11.5 Przestrzenie rzutowe

Będziemy rozpatrywać ciała przemienne liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , zespolonych  $\mathbb{C}$  oraz ciało nieprzemienne, lecz łączne kwaterniony  $\mathbb{H}$ . Niech  $\mathbb{F}$  będzie jednym z tych ciał a  $\mathbf{V}$  skończenie wymiarową przestrzenią nad nim. Jej przestrzeń rzutową definiujemy jako zbiór klas równoważności niezerowych wektorów z dokładnością do proporcjonalności, który wyposażamy w topologię ilorazową. Jest to więc przestrzeń orbit działania grupy mnożycielskiej  $\mathbb{F}^*$  na  $\mathbf{V} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{P}(\mathbf{V}) := (\mathbf{V} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^*$ . Konstrukcja przestrzeni rzutowej jest funktorialna ze względu na monomorfizmy przestrzeni wektorowych: włożenie  $j: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  indukuje włożenie  $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{W})$ . Włożenie podciała  $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$  zadaje dla dowolnej przestrzeni wektorowej  $\mathbf{V}$  nad ciałem  $\mathbb{F}$  odwzorowanie surjektywne  $\mathbb{P}(\mathbf{V}|\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$  z włóknem  $\mathbb{F}^*/\mathbb{K}^*$ . Jeśli  $\mathbf{V} = \mathbb{F}^{n+1}$  to odpowiednią przestrzeń rzutową oznaczamy  $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ ; jeśli ciało jest ustalone, to piszemy krócej  $\mathbb{P}^n$ . W dalszym ciągu będą nas interesowały pary przestrzeni rzutowych, dlatego rozpoczniemy od lematu:

**Lemat 11.5.1.** *Dla dowolnej podprzestrzeni  $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$  włożenia  $(\mathbf{W}^\perp, (\mathbf{W}^\perp \setminus 0) \subset (\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus \mathbf{W})$  oraz  $\mathbb{P}(\mathbf{W}^\perp) \subset \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \mathbb{P}(\mathbf{W})$  są homotopijnymi równoważnościami.*

*Dowód.* Projekcja ortogonalna  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}^\perp$  definiuje homotopijną odwrotność włożenia  $(\mathbf{W}^\perp, (\mathbf{W}^\perp \setminus 0) \subset (\mathbf{V}, \mathbf{V} \setminus \mathbf{W})$ . Projekcja ta także zadaje homotopijną odwrotność włożenia  $\mathbb{P}(\mathbf{W}^\perp) \subset \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \mathbb{P}(\mathbf{W})$ .  $\square$

Dla każdego z ciał  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  w przestrzeni  $\mathbb{F}^n$  określona jest forma hermitowska o wartościach w  $\mathbb{F}$ -valued (hermitian)  $(v, w) := \sum v_i w_i^*$ , gdzie  $*$  oznacza sprzężenie. Wektory o długości 1 (sfera jednostkowa) tworzą podgrupę  $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^*$ , gdzie  $d_{\mathbb{F}} := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$ , która zachowuje sferę  $S^{d_{\mathbb{F}}n-1}$ . Ponieważ każdy niezerowy wektor jest proporcjonalny do wektora o długości 1, a więc  $\mathbb{F}\mathbb{P}^n = S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1}/S^{d_{\mathbb{F}}-1}$  oraz rozwłóknienie (*de facto* wiązkę główną)  $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \xrightarrow{p} \mathbb{F}\mathbb{P}^n$ . Wynika stąd, że przestrzenie rzutowe są zwarte.

Opiszemy strukturę CW-kompleksu na przestrzeniach rzutowych  $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ . W każdym przypadku filtracja szkieletami jest zdefiniowana przez podprzestrzenie  $pt = \mathbb{F}\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{F}\mathbb{P}^n$ . Zauważmy, że szkielety  $(\mathbb{F}\mathbb{P}^n)^{(kd_{\mathbb{F}})} = (\mathbb{F}\mathbb{P}^n)^{(kd_{\mathbb{F}}+q)} = \mathbb{F}\mathbb{P}^k =$  dla  $k \geq 0$  i  $0 \leq q < d_{\mathbb{F}}$ .

Żeby sprawdzić iż spełnia ona warunki z definicji CW-kompleksu trzeba wykazać:

**Stwierdzenie 11.5.1.** *Dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje homeomorfizm*

$$\mathbb{F}\mathbb{P}^n \simeq D^{nd_{\mathbb{F}}} \cup_p \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}(\text{rel } \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}).$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy jednocześnie dla dowolnego ciała  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , choć w przypadku rzeczywistym jest znacznie łatwiejszy niż w pozostałych. W sferze  $S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1}$  wyróżnimy podzbiór punktów o ostatniej współrzędnej rzeczywistej, nieujemnej  $D := \{(z_0, \dots, z_n) \in S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \mid z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0\}$ . Zbiór ten jest homeomorficzny z dyskiem  $D^{nd_{\mathbb{F}}} = \{(z_0, \dots, z_{n-1})\}$  bowiem ostatnia współrzędna w  $D$  jest wyznaczona przez pozostałe.

Dla dowolnego punktu  $(z_0, \dots, z_n) \in S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1}$  jego  $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$ -orbita przecina zbiór  $D$  - jeśli  $z_n = 0$  wynika to z definicji, jeśli  $z_n \neq 0$  to  $\frac{z_n^*}{\|z_n\|}(z_0, \dots, z_n) \in D$  i jest to jedyny punkt przecięcia. Wynika stąd, że przekształcenie  $h: D^{nd_{\mathbb{F}}} \coprod \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^n$  zdane wzorem:  $h((z_0, \dots, z_{n-1})) := [z_0; \dots; z_{n-1}, \sqrt{1 - \sum \|z_i\|^2}]$  oraz  $h([z_0; \dots; z_{n-1}]) = [z_0; \dots; z_{n-1}, 0]$  definiuje szukany homeomorfizm  $\mathbb{F}\mathbb{P}^n \simeq D^{nd_{\mathbb{F}}} \cup_p \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \text{ rel } \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ .  $\square$

Zauważmy, że przestrzeń  $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$  posiada po jednej komórce w każdym wymiarze  $qd_{\mathbb{F}}$  dla  $q \leq n$ ; a więc w przypadku rzeczywistym w każdym wymiarze, zespolonym w wymiarach parzystych, a w kwaternionowym podzielnych przez 4.

Obliczymy teraz addytywną strukturę (ko-)homologii przestrzeni rzutowych, korzystając z Twierdzenia 7.2.3 powiadającego, że dla dowolnego CW-kompleksu  $X$  grupy (ko-)homologii singularnych przestrzeni  $X$  można obliczać jako grupy (ko-)homologii kompleksu łańcuchowego:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

w którym  $C_n(X) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  a różniczka  $\partial_q$  jest homomorfizmem brzegu w ciągu dokładnym trójki  $(X^{(q)}, X^{(q-1)}, X^{(q-2)})$ :

$$\dots H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)}) \rightarrow H_q(X^{(q)}, X^{(q-1)}) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(X^{(q-1)}, X^{(q-2)}) \rightarrow H_{q-1}(X^{(q)}, X^{(q-2)}) \rightarrow \dots$$

Dla przestrzeni rzutowych:

$$C_q(\mathbb{F}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } q = kd_{\mathbb{F}}, k \leq n \\ 0 & \text{pozostałych } q \end{cases}$$

Wynika stąd, że dla  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  wszystkie różniczki w kompleksie komórkowym znikają, a więc dla dowolnej grupy  $G$  współczynników:

$$H_q(\mathbb{F}\mathbb{P}^n; G) = \begin{cases} G & \text{dla } q = kd_{\mathbb{F}}, k \leq n \\ 0 & \text{pozostałych } q \end{cases} \quad \text{oraz} \quad H^q(\mathbb{F}\mathbb{P}^n; G) = \begin{cases} G & \text{dla } q = kd_{\mathbb{F}}, k \leq n \\ 0 & \text{pozostałych } q \end{cases} \quad (11.5)$$

W przypadku rzeczywistej przestrzeni rzutowej  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n =: \mathbb{P}^n$  musimy obliczyć różniczki. Niech  $h: (D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (\mathbb{P}^q, \mathbb{P}^{q-1}, \mathbb{P}^0)$  będzie opisanym wyżej odwzorowaniem charakterystycznym komórki  $q$ -wymiarowej.

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathbb{P}^q, \mathbb{P}^{q-1}) & \xrightarrow{\partial_q} & H_{q-1}(\mathbb{P}^{q-1}, \mathbb{P}^{q-2}) \\ h_* \uparrow \simeq & & h_* \uparrow \\ H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow[\simeq]{\partial} & \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1}) \simeq \mathbb{Z} \end{array} \quad (11.6)$$

Wystarczy więc zbadać stopień odwzorowania  $S^{q-1} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^{q-1} \rightarrow \mathbb{P}^{q-1}/\mathbb{P}^{q-2} \simeq S^{q-1}$  które dla  $q > 1$  ( $\partial_1 = 0$ ) można przedstawić jako złożenie:

$$\begin{array}{ccc} S^{q-1} & \xrightarrow{\nu} & S^{q-1} \vee S^{q-1} \\ \downarrow p & & \downarrow \\ \mathbb{P}^{q-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{q-1}/\mathbb{P}^{q-2} \simeq S^{q-1} \end{array} \quad (11.7)$$

Łatwo się przekonać, że na "górnym" półsferyze przekształcenie to jest homotopijne z identycznością, a na dolnej z przekształceniem antypodycznym  $S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$ , a więc stopień złożenia wynosi  $1 + (-1)^q$  (p. rysunek dla  $q = 2$ ). Komplex komórkowy przestrzeni  $\mathbb{P}^{2k}$  ma więc postać:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

a przestrzeni  $\mathbb{P}^{2k+1}$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Dla dowolnej grupy abelowej  $G$  otrzymujemy stąd, że

$$H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2k}; G) = \begin{cases} \ker\{G \xrightarrow{\times 2} G\} \\ \text{im}\{G \xrightarrow{\times 2} G\} \\ 0 \end{cases} \quad H^q(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2k}; G) = \begin{cases} \text{im}\{G \xrightarrow{\times 2} G\} & 0 \leq q \leq 2k, q = 2m \\ \ker\{G \xrightarrow{\times 2} G\} & 0 \leq q \leq 2k, q = 2m + 1 \\ 0 & \text{pozostałych } q \end{cases} \quad (11.8)$$

oraz

$$H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2k+1}; G) = \begin{cases} G \\ \ker\{G \xrightarrow{\times 2} G\} \\ \text{im}\{G \xrightarrow{\times 2} G\} \\ 0 \end{cases} \quad H^q(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2k}; G) = \begin{cases} G & q = 2k + 1 \\ \text{im}\{G \xrightarrow{\times 2} G\} & 0 \leq q \leq 2k, \quad q = 2m \\ \ker\{G \xrightarrow{\times 2} G\} & 0 \leq q \leq 2k, \quad q = 2m + 1 \\ 0 & \text{pozostałych } q \end{cases} \quad (11.9)$$

W szczególności, jeśli  $G = \mathbb{Z}_2$ , to  $H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \simeq H^q(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  dla  $0 \leq q \leq n$ .

**Zad. 5.** Wypisać explicite (ko-) homologie rzeczywistej przestrzeni rzutowej dla  $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}$ .

Zajmiemy się teraz obliczeniem struktury mnożonej kohomologii  $H^*(\mathbb{F}\mathbb{P}^n; R)$ ; w przypadku  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  dla dowolnego pierścienia  $R$ , a w przypadku  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  dla  $R = \mathbb{Z}_2$ . Przyda nam się do tego następujący:

**Lemat 11.5.2.** Dla dowolnych liczb  $j \leq n$  homomorfizmy indukowane przez włożenia podprzestrzeni i par indukują izomorfizmy:

$$H^{di}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) \rightarrow H^{di}(\mathbb{P}^n), \quad H^{di}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) \rightarrow H^{di}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus \mathbb{F}^j).$$

*Dowód.* Z Lematu 11.5.1 i ciągu dokładnych par otrzymujemy izomorfizmy

$$H^{di}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) \xrightarrow{\simeq} H^{di}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{i-1}) \xrightarrow{\simeq} H^{di}(\mathbb{P}^n)$$

Ustalamy zanurzenie przestrzeni afinicznej w przestrzeń rzutową:  $\mathbb{F}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto [1; z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{P}^n$  i rozpatrujemy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} & H^{dj}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) & \longrightarrow & H^{dj}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus \mathbb{F}^j) & \\ & \swarrow \simeq & \downarrow & \downarrow & \\ H^{dj}(\mathbb{P}^n) & & & & \\ & \swarrow \simeq & \downarrow & \downarrow & \\ & H^{dj}(\mathbb{P}^j, \mathbb{P}^j \setminus pt) & \longrightarrow & H^{dj}(\mathbb{F}^j, \mathbb{F}^j \setminus 0) & \end{array} \quad (11.10)$$

w którym skośne strzałki są izomorfizmami, a więc lewa pionowa strzałka jest izomorfizmem, prawa pionowa strzałka jest izomorfizmem na podstawie Lematu 11.5.1, a dolna pozioma aksjomatu wycinania. Stąd wynika, że górna pozioma strzałka jest izomorfizmem.  $\square$

**Twierdzenie 11.5.1.** Dla dowolnego pierścienia  $R$ , jeśli  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , oraz  $R = \mathbb{Z}_2$  jeśli  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  zachodzi izomorfizm algebr z gradacją:

$$H^*(\mathbb{F}\mathbb{P}^n; R) \simeq R[x_{\mathbb{F}}]/(x_{\mathbb{F}}^{n+1})$$

gdzie  $x_{\mathbb{F}}$  jest generatorem algebry wielomianów w gradacji  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$ , a  $(x_{\mathbb{F}}^{n+1})$  jest ideałem generowanym przez jego  $n + 1$  potęgę.

*Dowód 1.* Dla uproszczenia będziemy pomijać w notacji ciało bazowe tzn.  $\mathbb{P}^n := \mathbb{F}\mathbb{P}^n$  i  $d := d_{\mathbb{F}}$  oraz współczynniki grup kohomologii. Dla liczb  $i + j = n$  rozpatrzmy włożenia podprzestrzeni  $\mathbb{P}^i \subset \mathbb{P}^n$  jako podzbioru złożonego z punktów postaci  $[z_0; \dots; z_i; 0; \dots; 0]$  oraz  $\mathbb{P}^j \subset \mathbb{P}^n$  jako podzbioru złożonego z punktów postaci  $[0; \dots; 0; z_i; 0; \dots; z_n]$ . Zauważmy, że przecięcie  $\mathbb{P}^i \cap \mathbb{P}^j = \{[0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0]\}$  jest jednopunktowe. Włożenia podzbiorów i par podzbiorów definiują następujący przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc}
H^{di}(\mathbb{P}^n) \otimes H^{dj}(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow[\text{(h4)}]{\cup} & H^{dn}(\mathbb{P}^n) \\
\uparrow \text{(v5)} & & \uparrow \text{(v6)} \\
H^{di}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) \otimes H^{dj}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^j) & \xrightarrow[\text{(h3)}]{\cup} & H^{dn}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus pt) \\
\downarrow \text{(v3)} & & \downarrow \text{(v4)} \\
H^{di}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus \mathbb{F}^j) \otimes H^{dj}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus \mathbb{F}^j) & \xrightarrow[\text{(h2)}]{\cup} & H^{dn}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus pt) \\
\downarrow \text{(v1)} & & \downarrow \text{(v2)} \\
H^{di}(\mathbb{F}^i, \mathbb{F}^i \setminus 0) \otimes H^{dj}(\mathbb{F}^j, \mathbb{F}^j \setminus 0) & \xrightarrow[\text{(h1)}]{\cup} & H^{dn}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus 0)
\end{array} \tag{11.11}$$

W diagramie strzałki pionowe są indukowane przez odpowiednie włożenia par podprzestrzeni. Naszym celem jest wykazanie, że strzałka  $(h_4)$  jest izomorfizmem. W tym celu będziemy uzasadniać, że idąc od dołu wszystkie strzałki w diagramie są izomorfizmami.

$(h_1)$  Wynika z twierdzenia Eilenberga-Zilbera, bo  $(\mathbb{F}^i, \mathbb{F}^i \setminus 0) \times (\mathbb{F}^j, \mathbb{F}^j \setminus 0) = (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus 0)$  a grupy kohomologii są beztorsyjne.

$(v_1, v_2)$  Wynika natychmiast z faktu, że włożenia  $(\mathbb{F}^i, \mathbb{F}^i \setminus 0) \subset (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n \setminus \mathbb{F}^j)$  są homotopijnymi równoważnościami (odwrotność jest dana przez projekcję ortogonalną  $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^i$ ).

$(h_2)$  Wynika stąd, że pozostałe strzałki  $(h_1)$ ,  $(v_1, v_2)$  są izomorfizmami.

$(v_3-v_6)$  Strzałki  $(v_4)$ ,  $(v_6)$  są indukowane przez włożenia, a  $(v_3)$ ,  $(v_5)$  są iloczynami tensorowymi homomorfizmów indukowanych przez włożenia, a więc zakończenie dowodu, czyli wykazanie, że są izomorfizmami wynika z lematu 11.5.2

$(h_4)$  Jest izomorfizmem, bo domyka diagram złożony z izomorfizmów.

□

*Dowód 2.* Obliczenia algebry kohomologii można też dokonać korzystając z twierdzenia o dwoistości Poincaré. Zauważmy, że przestrzenie rzutowe zespolona i kwaternionowa są orientowalne nad dowolnym pierścieniem, a przestrzeń rzeczywista (w ogólności) tylko nad  $\mathbb{Z}_2$ . Postępujemy indukcyjnie, korzystając z obliczonej struktury addytywnej kohomologii (p. 11.5, 11.8, 11.9). Tw. oczywiście zachodzi dla  $n = 1$ . Załóżmy, że zachodzi dla  $n - 1$  i niech  $o_{\mathbb{P}^n} \in H_{dn}(\mathbb{P}^n)$  będzie klasą orientacji przestrzeni  $\mathbb{P}^n = \mathbb{F}\mathbb{P}^n$ ,  $d = d_{\mathbb{F}}$ . Dla  $k < n$  Włożenie  $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$  indukuje izomorfizm grup (ko-)homologii w wymiarach  $\leq dk$ , a więc pozostaje sprawdzić, że jeśli  $x \in H^d(\mathbb{P}^n)$  i  $y \in H^{d(n-1)}(\mathbb{P}^n)$  są generatorami, to  $x \cup y \in H^{dn}(\mathbb{P}^n)$  jest generatorem. Wystarczy sprawdzić, że ewaluacja kocyklu  $x \cup y$  na klasie Wynika to z dwoistości Poincaré, bo

$$\langle x \cup y, o_{\mathbb{P}^n} \rangle = \langle x, y \cap o_{\mathbb{P}^n} \rangle = \pm 1$$

bo element  $y \cap o_{\mathbb{P}^n} \in H^d(\mathbb{P}^n)$  jest generatorem jako obraz generatora przy izomorfizmie.

□

# Bibliografia

- [1] G. Bredon **Topology and Geometry**
- [2] Bojanowska, A., Jackowski, S. **Topologia II**
- [3] Bröcker, Th.; Jänich, K. **Introduction to differential topology.**
- [4] Dold, A. *Partitions of Unity in the Theory of Fibrations* Annals of Mathematics, Vol. 78, No. 2 (1963), pp. 223-255
- [5] Dold, A. **Halbexakte Homotopiefunktoren.** Lecture Notes in Math. Springer
- [6] Eilenberg, S. , MacLane, S., *General Theory of Natural Equivalences* Trans. Am. Math. Soc. 58 (1945): pp. 231–294).
- [7] Eilenberg, S. , MacLane, S., *Acyclic Models* American Journal of Mathematics , Vol. 75, No. 1 (Jan. 1953), pp. 189-199
- [8] Friedman, G. *An elementary illustrated introduction to simplicial sets. 2011*
- [9] Fomienko, A.T, Fuks, D.B. **Kurs gomotopiceskoj topologii** Moskwa 1989 (ros.)
- [10] Greenberg, Marvin J.; Harper, John R. **Algebraic topology. A first course.** Mathematics Lecture Note Series, 58. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. xi+311 (Tłum. polskie PWN 1980)
- [11] Husemoller, D. **Fiber Bundles.** Third Edition. GTM 20. Springer 1993
- [12] Khokhlov, A. V. *Homotopy Covariant Functors* Mat. Zamietki Vol. 35, No. 3 (1984)
- [13] May, J.P. **A Concise Course in Algebraic Topology.**
- [14] Milnor, J. **Topology from differentiable viewpoint** Tłum. polskie.
- [15] Postnikov, M.M. **Lekcji po algebraiczeskoj topologii, Teorja kljetocznych prostrantw.** Mir, Moskwa 1985
- [16] Schön, R. *Acyclic Models and Excision* Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 59, Number 1, August 1976
- [17] Spanier, E.H. **Topologia Algebraiczna**
- [18] Strickland, N. *Local fibrations*
- [19] Strickland, N *The category of CGWH spaces*
- [20] Strom, A. *Note on Cofibrations Math.Scand. 19 (1966), 11-14*
- [21] Strom, A. *Note on Cofibrations II Math.Scand. 22 (1968), 130-142*