Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Jakub Koncki
Nr albumu: 345180

Klasy charakterystyczne w teorii przeszkód

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dra hab. Stefana Jackowskiego
Instytut Matematyki

29 czerwca 2016

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy zinterpretowano klasy Stiefela Whitney'a oraz Cherna w teorii singularnej jako przeszkody do istnienia liniowo niezależnych przekrojów wiązki wektorowej. W tym celu przedstawiono podstawowe twierdzenia i konstrukcjie teorii przeszkód.

Słowa kluczowe

wiązka wektorowa, klasy charakterystyczne, teoria przeszkód, kohomologie, CW kompleks

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

55S35 Obstruction Theory

Tytuł pracy w języku angielskim

Characteristic classes in obstruction theory

Spis treści

Wprowadzenie 5

1. Preliminaria 7
1.1. Twierdzenie Hurewicza i nakrycie uniwersalne 7
1.2. Rozwłóknienia i ich przekroje 8

2. Kohomologie o współczynnikach skręconych 11
2.1. System lokalny 11
2.2. Kohomologie o współczynnikach skręconych 14

3. Teoria Przeszkód 17
3.1. Kocykl przeszkody 17
3.2. Kołańcuch różnicujący 22

4. Klasy Stiefela-Whitney'a jako przeszkody 31
4.1. Przeszkody, a wiązki wektorowe 31
4.2. Klasy Stiefela Whitney'a 35

5. Klasy Cherna jako przeszkody 39
5.1. Przeszkody a przekroje wiązek zespolonych 39
5.2. Klasy Cherna 42

Bibliografia 45

Wprowadzenie

Klasy Stiefela Whitney'a i klasy Cherna, w rozmaitych teoriach kohomologii, są bardzo ważnymi niezmiennikami wiązki wektorowej. W teorii singularnej $H^*(-, \mathbb{Z}_2)$ w przypadku rzeczywistym, oraz w teorii $H^*(-, \mathbb{Z})$ dla wiązek zespolonych można zinterpretować te klasy w języku liniowo niezależnych przekrojów. W poniższej pracy przedstawię wspomniane interpretacje.

Opis teorii wiązek wektorowych można znaleźć w książce Milnora, Stasheffa [1], oraz skrypcie Jackowskiego [2]. W poniższej pracy podążam za tymi dwoma źródłami i staram się uzupełnić fragmenty dowodu w nich pominięte. W pracy będę zakładał znajomość podstawowych pojęć teorii wiązek wektorowych, oraz twierdzeń z topologii algebraicznej.

Rezultaty dotyczące przeszkód w teorii wiązek wektorowych dla kohomologii symplicjalnych występują w książce Steenroda „The topology of fibre bundles" [6]. W książce Fuchsa i Fomenki „Homotopic topology" [7] można znaleźć opis teorii przeszkód dla CW kompleksów będących przestrzeniami prostymi. W „Topology and geometry" Bredona [8] można znaleźć inne od przedstawionego w pracy, homotopijne podejście do teorii przeszkód (bazujące na konstrukcji wieży Postnikova).

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale 1 podam niektóre twierdzenia z topologii i teorii wiązek do których będę chciał się odwoływać w dalszej części tekstu. W rozdziale 2 wprowadzę definicję systemu lokalnego i kohomologii o współczynnikach skręconych używane w teorii przeszkód, oraz przedstawię podstawowe własności tych obiektów. Rozdział 3 zawiera właściwy opis teorii przeszkód. Interpretacja klas Stiefela Whitney'a i Cherna jako przeszkód znajdują się odpowiednio w rozdziałach 4 i 5.

W całej pracy będę zakładał, iż rozpatrywane przestrzenie są CW kompleksami.
Dla grupy G przez G-moduły, będę rozumiał $\mathbb{Z}[G]$ - moduły.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1. Twierdzenie Hurewicza i nakrycie uniwersalne

Definicja 1.1.1. Przestrzeń topologiczną X nazywamy prostą wtedy i tylko wtedy gdy X jest łukowo spójna i działanie jej grupy fundamentalnej na grupach homotopii jest trywialne.

Lemat 1.1.1. *Łukowo spójna H-przestrzeń jest prosta.*

Dowód. Lemat jest konsekwencją stwierdzenia 3.8.4 ze skryptu [3]. □

Definicja 1.1.2. Dla $n \geqslant 1$ niech $\pi'_n(X, x_0)$ będzie ilorazem grupy $\pi_n(X, x_0)$ przez grupę normalną, generowaną przez:

$$\{(\omega \cdot \alpha)\alpha^{-1} | \alpha \in \pi_n(X, x_0), \omega \in \pi_1(X, x_0)\}$$

Dla $n \geqslant 2$ niech $\pi'_n(X, A, x_0)$ będzie ilorazemgrupy $\pi_n(X, A, x_0)$ przez grupę normalną, generowaną przez:

$$\{(\omega \cdot \alpha)\alpha^{-1} | \alpha \in \pi_n(X, A, x_0), \omega \in \pi_1(A, x_0)\}$$

Twierdzenie 1.1.2 (Twierdzenie Hurewicza)**.** *Niech $x_0 \in X$ będzie punktem wyróżnionym przestrzeni łukowo spójnej X. Załóżmy iż dla pewnego $n \geqslant 1$ zachodzi $\pi_q(X, x_0)$ dla $q < n$. Wtedy $H_q(X, x_0) = 0$ dla $q < n$, oraz homomorfizm Hurewicza*

$$\varphi' : \pi'_n(X, x_0) \simeq H_n(X, x_0)$$

jest izomorfizmem.

Niech $x_0 \in A \subset X$ będzie punktem wyróżnionym, a A i X przestrzeniami łukowo spójnymi. Jeśli istnieje $n \geqslant 2$ takie, że $\pi_q(X, A, x_0) = 0$ dla $q < n$, to $H_q(X, A) = 0$ dla $q < n$, oraz homomorfizm Hurewicza

$$\varphi' : \pi'_n(X, A, x_0) \simeq H_n(X, A)$$

jest izomorfizmem ([4] rozdział 7.5)

Lemat 1.1.3. *Niech $x_0 \in A \subset X$ będzie punktem wyróżnionym, a A i X przestrzeniami łukowo spójnymi, oraz niech A będzie jednospójna, wówczas dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi $\pi'_n(X, A, x_0) = \pi_n(X, A, x_0)$. Ponadto poniższy diagram jest przemienny*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend left, "\varphi'"] & {[(D^n, S^{n-1}); (X, A)]} \arrow[r, "\simeq"] & H_n(X, A) \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

gdzie pierwsza pozioma strzełka jest zapomnieniem o punkcie wyrózniony. Poziome strzałki na tym diagramie są bijekcjami zadającymi strukturę grupy na $[(D^n, S^{n-1}); (X, A)]$.

Dowód. Z konstrukcji homomorfizmu Hurewicza $\pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ ([4] rozdział 7.4) wynika iż φ' faktoryzuje się przez przekształcenie zapominania o punkcie wyróżnionym $f\colon \pi_n(X, A, x_0) \to [(D^n, S^{n-1}); (X, A)]$. Ponieważ homomorifzm A jest jednospójne to homomorfizm Hurewicza jest izomorfizmem, zatem przekształcenie f jest injekcją. Ponieważ przekształcenie zapominania o pukcie wyróżnionym jest surjektywne (każda klasa homotopii niepunktowanej posiada reprezentanta zachowującego punkt wyrózniony) to f jest bijekcją. Tak więc przekształcenie $[(D^n, S^{n-1}); (X, A)] \to H_n(X, A)$ z diagramu 1.1 także musi być bijekcją. $\square$

Dla spójnego CW kompleksu X, na jego nakryciu uniwersalnym $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ można zadać CW strukturę pochodzącą od CW struktury na X. Dla każdego naturalnego n niech $\widetilde{X}^{(n)} := p^{-1}(X^{(n)})$. Wybierając dla każdego naturalnego $n > 1$ przekształcenia charakterystyczne n-komórek X dostaje kanoniczny wybór przekształceń charakterystycznych n-komórek $\widetilde{X}$ zadany przez podniesienia . Przy tak zdefiniowanej CW strukturze grupa $\pi_1(X, x_0)$ działa wolno na zbiorze n-komórek $\widetilde{X}$, dla każdego naturalnego n. Zatem kompleks komórkowy $C_*(\widetilde{X}) := H_*(\widetilde{X}^{(*)}, \widetilde{X}^{(*-1)})$ jest kompleksem $\pi_1(X, x_0)$-modułów.
Gdy w pracy będę pisał o CW strukturze na nakryciu uniwersalnym to zawsze będę miał na myśli opisaną wyżej CW-strukturę.

Wniosek 1.1.1 (Wniosek z twierdzenia Hurewicza)**.** Dla spójnego CW kompleksu X i dla każdego $n \geqslant 3$ homomorfizm Hurewicza $\pi_n(\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)}) \xrightarrow{\chi} H_n(\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)})$ jest izomorfizmem. Homomorfizmy Hurewicza wpisują się w diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(\widetilde{X}^{(n+1)}, \widetilde{X}^{(n)}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\partial"] & {[(D^{n+1}, S^n); (\widetilde{X}^{(n+1)}, \widetilde{X}^{(n)})]} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\partial"] & H_{n+1}(\widetilde{X}^{(n+1)}, \widetilde{X}^{(n)}) \arrow[d, "\partial"] \\ \pi_n(\widetilde{X}^{(n)}, x_0) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & {[S^n; \widetilde{X}^{(n)}]} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H_n(\widetilde{X}^{(n)}, x_0) \arrow[d] \\ \pi_n(\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)}) \arrow[r, "\simeq"] & {[(D^n, S^{n-1}); (\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)})]} \arrow[r, "\simeq"] & H_n(\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)}) \end{tikzcd}$$

1.2. Rozwłóknienia i ich przekroje

Lemat 1.2.1. *Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem. Niech $f\colon Y \to X$, a $f^!E$ będzie przeciągnięciem rozwłóknienia E. Niech $y \in Y$, a $(f^!E)_y$ i $E_{f(y)}$ będą włóknami nad*

odpowiednio y i $f(y)$. Wtedy f zadaje homeomorfizm $\bar{f}_y\colon (f^!E)_y \to E_{f(y)}$. Przeciągnięcie wiązki o prostych włóknach ma proste włókna.

Dowód. Bezpośrednio z definicji przeciągnięcia $(f^!E)_y = \{(y,e)|e \in E_{f(y)}\}$ i $\bar{f}(y,e) = e$. Tak zadane $\bar{f}_y$ jest oczywiście homeomorfizmem o odrotności $\bar{f}_y^{-1}\colon E_{f(y)} \to (f^!E)_y$ zadanej przez $\bar{f}_y^{-1}(e) = (y,e)$. □

Lemat 1.2.2. *Rozwłóknienie (lokalnie trywialne) nad przestrzenią ściągalną jest włókniście homotopijnie równoważne z rozwłóknieniem trywialnym.*

Dowód. Lemat jest konsekwencją Twierdzenie 3.5.2 ze skryptu [3]. □

Lemat 1.2.3. *Niech S^n_+ będzie górną pólsferą S^n. Niech $a \in \pi_n(X, x_0)$. Wtedy $f_+\colon (S^n_+, 1) \to (X, x_0)$ mogę rozszerzyć do f określonego na S^n, tak aby $[f] = a$ (gdzie $[]$ oznacza klasę homotopii).*

Dowód. Skonstruuje rozszerzenie: rozszerzam f_+ do f'_+ określonego na "większej" półsferze $S^{n\prime}_+$ tak aby na brzegu $S^{n\prime}_+$ było stałe. Ściągnięcie brzegu $S^{n\prime}_+$ zadaje przekształcenie $S^n \to S^n \wedge S^n$. Niech $[f'_+]$ oznacza klasę homotopii przekształcenia zadanego przez f'_+ na górnej sferze $S^n \wedge S^n$. Wówczas zadając na dolnej sferze $S^n \wedge S^n$ dowolne przekształcenie g takie iż $[g] = [f'_+]^{-1} \cdot [a]$ otrzymuję szukane przedłużenie f. □

Lemat 1.2.4. *Niech $E \to D^n$ będzie rozwłóknieniem (lokalnie trywialnym). Przekrój zadany na S^{n-1} posiada rozszerzenie na dysk wtedy i tylko wtedy gdy jest przekształceniem ściągalnym.*

Dowód. Z lematu mogę bez straty ogólności założyć iż $E = D^n \times F$. W tym przypadku treść lematu sprowadza się do: przekształcenie $S^{n-1} \to F$ posiada rozszerzenie na dysk wtedy i tylko wtedy gdy jest ściągalne. Co jest oczywiście prawdą gdyż dysk jest stożkiem nad sferą. □

Lemat 1.2.5 (przeciąganie przekroju)**.** *Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem, niech $f\colon Y \to X$ a $f^!E$ będzie przeciągnięciem. Niech $g\colon Z \to X$, A będzie podzbiorem Y, a s_g i h przekształceniami takimi, iż poniższy diagram komutuje:*

$$\begin{tikzcd}
 & f^!E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] & \\
A \arrow[ur, dashed, "s_{f,A}"] \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "h"'] & Y \arrow[r, "f"] & X & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[ul, "s_g"']
\end{tikzcd}$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno $s_{f,A}\colon A \to f^!E$, takie, iż diagram (uwzględniając zewnętrzny czworokąt) komutuje. Operacja przeciągania przekroju jest funktorialna.

Dowód. Lemat jest bezpośrednią konsekwencją własności uniwersalnej przeciągnięcia. □

Lemat 1.2.6. *Przy oznaczeniach z poprzedniego lematu. Niech $g\colon Y \to X$ będzie homotopijne z f wtedy $f^!E$ i $g^!E$ są włókniście homotopijnie równoważne nad Y, poprzez przekształcenie $r\colon g^!E \to f!E$ takie, iż $s_{f,A}$ jest homotopijne z $r \circ s_{g,A}$*

Dowód. Istnienie równoważności r wynika z twierdzenie 3.5.2 ze skryptu [3]. Ponieważ r jest włóknistą homotopijną równoważnością to złożenia $s_{f,A}$ i $r \circ s_{g,A}$ z rzutowaniem $f^!E \to X$ są równe. Ponadto złożenia z $f^!E \to E$ są homotopijne (nad X). Tak więc z homotopijnych własności pullbacku $s_{f,A}$ jest homotopijne z $r \circ s_{g,A}$. $\square$

Lemat 1.2.7. *Niech X będzie CW kompleksem, $E \to X$ rozwłóknieniem, a $p\colon \widetilde{X} \to X$ nakryciem. Niech s_k i t_k będą przekrojami wiązki E na k-szkielecie X, a $\widetilde{s}_k$, $\widetilde{t}_k$ przeciągnięciami przekrojów nad k-szkielet $\widetilde{X}$. Wówczas s_k rozszerza się do przekroju na $(k+1)$-szkielecie X wtedy i tylko wtedy gdy $\widetilde{s}_k$ rozszerza się do przekroju nad $(k+1)$-szkieletem $\widetilde{X}$.*

Niech H_{k-1} będzie włóknistą homotopią między $s_k|_{X^(k-1)}$ i $t_k|_{X^(k-1)}$, a $\widetilde{H}_{k-1}$ jej przeciągnięciem przez p. Wówczas H_{k-1} rozszerza się do włóknistej homotopii między s_k i t_k, wtedy i tylko wtedy gdy $\widetilde{H}_{k-1}$ przedłuża się do włóknistej homotopii między $\widetilde{s}_k$, $\widetilde{t}_k$.

Dowód. $\Rightarrow$ Przeciągnięcie rozszerzenia s_{k+1} nad $\widetilde{X}$ zadaje szukane rozszerzenie przekroju $\widetilde{s}_k$.
$\Leftarrow$ Rozszerzam przekrój s_k po komórkach: dla $(k+1)$-komórki X σ_{k+1} wybieram dowolną odpowiadającą jej komórkę $\widetilde{\sigma}_{k+1}$ kompleksu $\widetilde{X}$. Rzutowanie $p|_{\mathrm{Int}\ (\widetilde{\sigma}_{k+1})}$ jest homeomorfzmem. Łatwo sprawdzić iż przeciągnięcie przekroju $\widetilde{s}_{k+1}|_{\mathrm{Int}\ (\widetilde{\sigma}_{k+1})}$ przez $p|^{-1}_{\mathrm{Int}\ (\widetilde{\sigma}_{k+1})}$ jest rozszerzeniem s_k na σ_{k+1}. Wykonując tą operację dla wszystkich $(k+1)$-komórek X otrzymam przekrój s_{k+1}.
Dowód dla włóknistej homotopii jest identyczny. $\square$

Rozdział 2

Kohomologie o współczynnikach skręconych

2.1. System lokalny

Definicja 2.1.1. Grupoidem fundamentalnym przestrzeni topologicznej X nazywam kategorię, której obiektami są punkty przestrzeni X, a morfizmami klasy homotopii ścieżek między punktami. Grupoid fundamentalny przestrzeni X będę oznaczał jako $\mathcal{P}(X)$.

Lemat 2.1.1. *Jeśli X jest łukowo spójna to jej grupoid fundamentalny jest równoważny swojej pełnej podkategorii zawierającej jeden obiekt. Taką podkategorię związaną z obiektem x_0 będę oznaczał $\mathcal{P}(X)_{x_0}$.Łatwo zauważyć iż jest to kategoria zadana przez grupę fundamentalną X.*

Dowód. Gdy X jest łukowo spójna to dowolne dwa obiekty $\mathcal{P}(X)$ są izomorficzne. Zatem włożenie pełnej podkategorii $\mathcal{P}(X)$ z jednym obiektem, jest funktorem wiernym, pełnym i właściwie surjektywnym a więc zadaje równoważność kategorii. □

Definicja 2.1.2. Systemem lokalnym na X nazywamy funktor z kategorii $\mathcal{P}(X)$ do kategorii grup abelowych.

Twierdzenie 2.1.2. *Jeśli X jest łukowo spójne to kategoria systemów lokalnych na X jest naturalnie równoważna kategorii $\pi_1(X, x_0)$-modułów*

Dowód. Z lematu 2.1.1 kategoria systemów lokalnych na X jest naturalnie równoważna kategorii funktorów z $\mathcal{P}(X)_{x_0}$ w Ab. Niech θ_{x_0} będzie funktorem z kategorii $Funct(\mathcal{P}(X)_{x_0}; Ab)$ w $\pi_1(X, x_0)$-moduły takim, że: $\theta_{x_0}(F) = F(x_0)$ jako grupa abelowa i dla każdego $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, ω działa na $F(x_0)$ poprzez $F(\omega)$. Transformacji naturalnej między systemami lokalnymi F i G funktor θ_{x_0} przeporządkowywuje jej składową na obiekcie $F(x_0)$. Tak zdefiniowany funktor jest wierny, pełny i właściwie surjektywny, zatem zadaje równoważnośc kategorii. □

Wniosek 2.1.1. Na przestrzeni łukowo spójnej X, klasy izomorfizmu $Funct(\mathcal{P}(X)_{x_0}; Ab)$ są w kanonicznej bijekcji z klasami izomorfizmu $\pi_1(X, x_0)$-modułów (bijekcja zadana przez funktor z dowodu twierdzenia 2.1.2).

Przykłady Ważne przykłady systemu lokalnego to:

- System $\pi_n(X, \star)$ (dla $n > 1$), taki iż $\pi_n(X, \star)(\mathrm{a}) = \pi_n(X, a)$ dla $a \in X$, oraz $\pi_n(X, \star)(\omega)(\alpha) = \omega(\alpha)$ dla ścieżki ω i $\alpha \in \pi_n(X, \omega(0))$.

- Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem o prostych włóknach; dla $x \in X$ niech E_x będzie włóknem nad X. Z prostoty włókien wynika iż istnieje kanoniczna bijekcja $\pi_n(E_x, e_x) \simeq [S^n, E_x]$ zadająca strukturę grupy abelowej na $[S^n, E_x]$. Dla każdego $b \in X$ wybierzmy $e_b \in E_b$. Niech F będzie systemem lokalnym takim, iż dla $x \in X$, $F(x) = \pi_n(E_x, e_x) \simeq [S^n, E_x]$. Każda klasa homotopii ścieżek ω w X definiuje klasę homotopii $h_\omega \colon E_{\omega(0)} \to E_{\omega(1)}$. Niech

  $$F(\omega) \colon \pi_n(E_{\omega(0)}, e_{\omega(0)}) \simeq [S^n, E_{\omega(0)}] \xrightarrow{h_\omega} [S^n, E_{\omega(1)}] \simeq \pi_n(E_{\omega_1}, e_{\omega(1)}).$$

  Ten system będę potem oznaczał $\{\pi_n(E_x)\}$.

- Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem o włóknach złożonych z dwóch homeomorficznych składowych łukowej spójności, będących przestrzeniami prostymi. Niech każda składowa spójności każdego włókna będzie homeomorficzna z E_0. Załóżmy iż istnieje $T : E \to E$ homeomorfizmem nad X permutującym składowe spójności. Dla każdego $b \in X$ wybierzmy $e_b \in E_b$. Niech F będzie systemem lokalnym takim, iż dla $x \in X$, $F(x) = \pi_n(E_x, e_x) \simeq [S^n, E_0]$. Każda klasa homotopii ścieżek ω w X definiuje klasę homotopii $h_\omega \colon E_{\omega(0)} \to E_{\omega(1)}$. Niech

  $$F(\omega) \colon \pi_n(E_{\omega(0)}, e_{\omega(0)}) \simeq [S^n, E_{0)}] \xrightarrow{i} [S^n, E_{\omega(0)}] \xrightarrow{h_\omega} [S^n, E_{\omega(1)}] \xrightarrow{\pi} [S^n, E_{0)}] \simeq \pi_n(E_{\omega_1}, e_{\omega(1)}),$$

  gdzie i jest włożeniem na dowolną składową, a π rzutowaniem $E_0 \sqcup E_0 \to E_0$. Istnienie homeomorfizmu T gwarantuje niezależność $F(\omega)$ od wyboru włożenia i. Łatwo sprawdzić iż F jest funktorem.Ten system również będę oznaczał przez $\{\pi_n(E_x)\}$.

W dalszych rozważaniach szczególnie istotny będzie system lokalny rozwłóknienia o prostych włóknach. Przyda się następujący lemat:

Lemat 2.1.3. *Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem o prostych włóknach, a $f \colon Y \to X$ przekształceniem ciągłym. Wtedy jeśli system lokalny $\{\pi_i(E_x)\}$ jest trywialny (czyli dla każdej pętli $\pi_i(E_x)(\omega) = id$), to system lokalny $\{\pi_i(f^! E_x)\}$ jest również trywialny.*

Aby go udowodnić pokażę ogólniejszy fakt.

Definicja 2.1.3. Niech $f \colon X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni ciągłych. Wtedy f zadaje funktor $f_! \colon P(X) \to P(Y)$.
Niech F będzie systemem lokalnym na X. Przeciągnięciem systemu F przez f będę nazywał system $F \circ f_!$. Ten system będę oznaczał przez $f^! F$.

Twierdzenie 2.1.4. *Niech $E \to X$ będzie rozwłóknieniem o prostych włóknach, a $f\colon Y \to X$ przekształceniem CW kompleksów. Wtedy system lokalny $\{\pi_i(f^!E_x)\}$ jest naturalnie równoważny systemowi przeciągniętemu $\{f^!\pi_i(E_x)\}$.*

Dowód. Z własności przeciągnięcia wiązki wynika, iż dla każdego $y \in Y$ przekształcenie f zadaje homeomorfizm $f^!E_y \xrightarrow{\bar{f}_y} E_{f(y)}$. Pokażę iż homomorfizmy:

$$\pi_i(f^!E_*)(y) = \pi_i(f^!E_y) \xrightarrow{\bar{f}_{y*}} \pi_i(E_{f(y)}) = f^!\pi_i(E_*)(y)$$

zadają szukany naturalny izomorfizm funktorów.
Rozpatrzmy dowolną ścieżkę $\alpha\colon I \to Y$, oznaczmy $\alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y_1$. Z własności rozwłóknienia istnieje homotopia H czyniąca poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{tikzcd}
f^!E_{y_0} \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & f^!E \arrow[d] \\
f^!E_{y_0} \times I \arrow[r, "\alpha\circ\pi"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

(gdzie π jest rzutowaniem $f^!E_{y_0} \times I \to I$). Klasa homotopii przekształcenia indukowanego na włóknach przez α jest zadana jako:

$$\omega_\alpha\colon\ f^!E_{y_0} \xrightarrow{i_1} f^!E_{y_0} \times I \xrightarrow{H} f^!E_{y_1} \ \subset f^!E$$

(z przemienności powyższego diagramu wynika, iż obraz ω_α jest zawarty w $f^!E_{y_1}$). Łatwo zauważyć, iż homotopia

$$G\colon E_{f(y_0)} \times I \xrightarrow{\phi^{-1}\times id} f^!E_{y_0} \times I \xrightarrow{H} f^!E \xrightarrow{\widetilde{f}} E$$

czyni przemiennym diagram:

$$\begin{tikzcd}
E_{f(y_0)} \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d] \\
E_{f(y_0)} \times I \arrow[r, "id\times f_*(\alpha)"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & X
\end{tikzcd}$$

Klasa homotopii przekształcenia indukowanego na włóknach przez $f_*(\alpha)$ jest zadana jako:

$$\omega_{f_*(\alpha)}\colon\ E_{f(y_0)} \xrightarrow{i_1} E_{x_0} \times I \xrightarrow{G} E_{f(y_1)} \ \subset E.$$

Z definicji $\omega_{f_*(\alpha)}$ wynika, iż poniższy diagram komutuje (co do homotopii).

$$\begin{tikzcd}
f^!E_{y_0} \arrow[r, "\bar{f}_{y_0}"] \arrow[d, "\omega_\alpha"'] & E_{f(y_0)} \arrow[d, "\omega_{f_*(\alpha)}"] \\
f^!E_{y_1} \arrow[r, "\bar{f}_{y_1}"] & E_{f(y_1)}
\end{tikzcd}$$

co daje przemienność diagramu:

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(f^! E_{y_0}) \arrow[r, "\bar{f}_{y_0 *}"] \arrow[d, "\pi_i(f^! E_*)(\alpha)"'] & \pi_i(E_{f(y_0)}) \arrow[d, "f^! \pi_i(E_*)(\alpha)"] \\
\pi_i(f^! E_y) \arrow[r, "\bar{f}_{y_1 *}"] & \pi_i(E_{f(y_1)})
\end{tikzcd}$$

Zatem przekształcenia $\bar{f}_{y*}$ zadają naturalną transformację funktorów. Ponieważ $\bar{f}_y$ są homeomorfizmami, to $\bar{f}_{y*}$ są izomorfizmami, a zatem zanleziona naturalna transformacja jest naturalnym izomorfizmem. $\square$

Lemat 2.1.3 jest oczywistą konsekwencją twierdzenia 2.1.4.

2.2. Kohomologie o współczynnikach skręconych

W dalszej części pracy będę zakładać, iż przestrzeń X jest spójna (a zatem łukowo spójna, gdyż CW kompleksy są lokalnie łukowo spójne). Nie zmniejsza to ogólności rozważań, gdyż konstrukcje przekroju i włóknistej homotopii między przekrojami, przeprowadza się na każdej składowej spójnej oddzielnie. Dzięki temu założeniu z wniosku 2.1.1 możemy rozpatrywać $\pi_1(X, x_0)$-moduły zamiast systemów lokalnych.

Definicja 2.2.1. Niech C_* będzie kompleksem łańcuchowym prawych R-modułów, gdzie R jest pierścieniem (niekoniecznie przemiennym).

- homologiami o współczynnikach skręconych przez lewy R-moduł A kompleksu C_*, nazywamy homologie kompleksu $C_* \otimes_R A$
- kohomologiami o współczynnikach skręconych przez prawy R-moduł A kompleksu C_*, nazywamy kohomologie kompleksu $\mathrm{Hom}_R(C_*, A)$

Definicja 2.2.2. Niech X będzie spójnym CW kompleksem. Rozpatrzmy $S_*(\widetilde{X})$-kompleks singularny nakrycia uniwersalnego X z kanonicznym działaniem $\pi_1(X, x_0)$ (pochodzącym od działania $\pi_1(X, x_0)$ na $\widetilde{X}$). Niech F będzie systemem lokalnym, któremu odpowiada prawy $\pi_1(X, x_0)$-moduł A. Wówczas kohomologiami skręconymi przestrzeni topologicznej X w systemie lokalnym F, nazywamy kohomologie o współczynnikach skręconych przez A kompleksu $S_*(\widetilde{X})$. Tak zdefiniowane kohomologie o współczynnikach skręconych nie zależą od wyboru nakrycia uniwersalnego, gdyż dowolne dwa nakrycia uniwersalne są homoeomorficzne jako $\pi_1(X, x_0)$ przestrzenie (po wyborze punktu wyróżnionego, istnieje wyrózniony homeomorfizm).

Oznaczenie. Kohomologie skręcone X w lokalnym systemie odpowiadającym modułowi A oznaczamy $H^*(X; A)$ (homologie analogicznie z * u dołu)

Stwierdzenie 2.2.1. *Kohomologie skręcone X w systemie odpowiadającym modułowi A z trywialnym działaniem $\pi_1(X,x_0)$, to klasyczne kohomologie o współczynnikach w A, gdzie A traktujemy jako grupę abelową.*

Dowód. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie rzutowaniem z nakrycia uniwersalnego. Wprowadźmy na $S_*(X)$ trywialne działanie $\pi_1(X, x_0)$. Wówczas przekształcenie $p_* \colon S_*(\widetilde{X}) \to S_*(X)$ jest epimorfizmem kompleksów $\pi_1(X, x_0)$-modułów. Kohomologie skręcone X o współczynnikach w A to z definicji kohomologie kompleksu $\mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(\widetilde{X}), A)$. Pokażę, iż:

$$p^* \colon \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(X), A) \to \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(\widetilde{X}), A)$$

jest izomorfizmem. Homomorfizm p^* jest monomorfizmem gdyż rzutowanie $p_* \colon S_*(\widetilde{X}) \to S_*(X)$. Ponadto jądro $ker(p_*)$ jest podmodułem generowanym przez alementy postaci

$$\{\omega\alpha - \alpha | \text{ dla } \alpha \in S_*(\widetilde{X}), \omega \in \pi_1(X, x_0)\},$$

więc jest zawarte w jądrze dowolnego $\pi_1(X, x_0)$ ekwiwariantnego homomorfizmu z $S_*(\widetilde{X})$ w moduł trywialny. Tak więc z własności uniwersalnej ilorazu p^* jest epimorfizmem. Ponadto $\pi_1(X, x_0)$ działa trywialnie zarówno na $\widetilde{X}$ jak i na A zatem:

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(X), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(X), A) \simeq \mathrm{Hom}_{Ab}(S_*(X), A).$$

Ale kohomologie $\mathrm{Hom}_{Ab}(S_*(X), A)$ to kohomologie X o współczynnikach w grupie abelowej A. Teza jest spełniona ponieważ kohomologie izomorficznych kompleksów są identyczne. $\square$

Obliczanie homologii CW kompleksu przy użyciu kompleksu komórkowego jest zazwyczaj prostsze niż przy użyciu kompleksu singularnego. Okazuje się, iż ta technika może być używana również do liczenia kohomologii o skręconych współczynnikach.

Twierdzenie 2.2.1 (topologiczna niezmienniczość kohomologii skręconych)**.** *Rozpatrzmy na $\widetilde{X}$ (nakryciu uniwersalnym X) standardową CW strukturę wynikającą z CW struktury na X. Niech kompleks komórkowy nakrycia uniwerslnego $\widetilde{X}$ będzie dany jako*

$$C_n(\widetilde{X}) = H_n(\widetilde{X}^{(n)}, \widetilde{X}^{(n-1)}) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

ze standardowymi przekształceniami brzegu. Niech A będzie R-modułem Wówczas kohomologie skręcone przez A kompleksów $S_*(\widetilde{X})$ i $C_*(\widetilde{X})$ są równe.

Rozważania prowadzące do dowodu powyższego twierdzenia można znaleźc w książce G.W.Whiteheda ([5] rozdział VI).
Z wniosku z twierdzenia Hurewicza (wniosek 1.1.1 i lematu 1.1.3) wynika, iż dla $k \geqslant 3$

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}([(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})], A) \simeq \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}), A)$$

gdzie struktura $\pi_1(X, x_0)$ modułu na $[(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})]$ jest zadana przez działanie $\pi_1(X, x_0)$ na $\widetilde{X}$. Ponadto przekształcenia "brzegu" z wnosku 1.1.1 komutują z izomorfizmami z powyższej równości.

Wniosek 2.2.1. Tak więc z twierdzenia 2.2.1 kohomologie skręcone możemy obliczać z kompleksu łańcuchowego:

$$C^k(X;A) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}([(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})], A) \text{ dla } k \geqslant 3 \\ \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}), A) \text{ dla } k \in \{1;2\} \end{cases}$$

w którym operatory kobrzegu są zadane zgodnie z wnioskiem 1.1.1 dla $k \geqslant 3$.

W dalszych rozważaniach przyda nam się lemat

Lemat 2.2.2. *Standardowe rozszerzenie definicji $H^*(X;-)$ na morfizmy systemów lokalnych X czyni z $H^*(X;-)$ funktor z kategorii systemów lokalnych na X w kategorię grup abelowych.*

Dowód. Z twierdzenia 2.1.2 należy pokazać iż $H^*(X;-)$ jest endofunktorem z kategorii $\pi_1(X,x_0)$-modułów. Niech $g\colon M \to N$ będzie homomorfizmem $\pi_1(X,x_0)$-modułów. Wówczas niech $H^*(X;g)\colon H^*(X;M) \to H^*(X;N)$ będzie dane jako przekształcenie indukowane na kohomologiach przez:

$$g_*\colon \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(\widetilde{X}), M) \to \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(S_*(\widetilde{X}), N).$$

Taka definicja jest funktorialna. $\square$

Rozdział 3

Teoria Przeszkód

W tym rozdziale będę zakładał iż (X, x_0) jest spójnym CW kompleksem, niech $X^{(0)} = x_0$ i wszystkie odwzorowania charakterystyczne komórek zachowują punkt wyróżniony. Niech $q\colon (E, e_0) \to (X, x_0)$ będzie rozwłóknieniem o prostych włóknach. Niech $\{\pi_k(E_x)\}$ będzie systemem lokalnym opisanym jako 2 przykład w rozdziale 2.1. Niech $C^k(X; A)$ będzie kompleksem łańcuchowym

$$C^k(X; A) := \Big\{\mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x_0)}(H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}), A) \text{ dla } k \geqslant 1$$

Wybierzmy przekształcenia charakterystyczne komórek X, ten wybór zadaje wybór przekształceń charakterystycznych komórek $\widetilde{X}$.
Niech $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ będzie nakryciem uniwersalnym X. Niech $\widetilde{E}$ będzie przeciągnięciem wiązki E przez p, oraz niech E_n będzie obcięciem wiązki E do n-szkieletu X.

Oznaczenie. Dla przekształcenia lokalnie trywialnego $p\colon E \to X$, niech $\Gamma(E)$ oznacza zbiór przekrojów p.

3.1. Kocykl przeszkody

Twierdzenie 3.1.1. *Dla każdego $k \geqslant 1$ istnieje przekształcenie*

$$c(-) : \Gamma(E|_{X_k}) \to C^{k+1}(X; \{\pi_k(E_x)\})$$

takie, że dla przekroju $s_k \in \Gamma(E|_{X_k})$, kołańcuch $c(s_k) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy s_k przedłuża się do przekroju na $(k+1)$-szkielet X.

Dowód. Istotą dowodu będzie skonstruowanie przekształcenia

$$c'\colon \Gamma(E|_{X_k}) \to \mathrm{Hom}_{Set}([(D^{k+1}, S^k); (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})], A)$$

będącego przekształceniem w homomorfizmy grup abelowych dla $k \geqslant 2$. Wówczas dla $k \geqslant 2$ mogę zadać przekształcenie $c(-)$ na dwa sposoby:

a) skorzystać z formy kompleksu $C^k(X;A)$ z wniosku 2.2.1 i zadać $c = c'$.
b) dla każdej komórki σ kompleksu $\widetilde{X}$ o wybranym przekształceniu charakterystycznym Φ, i dowolnego przekroju s_k zadać $c(s_k)(\sigma) = c'(s_k)(\Phi)$, a następnie rozszerzyć $c(s_k)$ na $H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})$ korzystając z własności uniwersalnej grupy wolnej.
Te dwie konstrukcje zadają to samo przekształcenie c gdyż pokrywają się na generatorach, gdyż wybór przekształcenia charakterystycznyge zadaje przekrój przekształcenia

$$[(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})] \to H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}).$$

Następnie wykażę iż tak zadane c jest przekształceniem $\pi_1(X, x_0)$ modułów i spełnia warunki z treści zadania.
Dla $k = 1$ aby otrzymać przekształcenie c użyję konstrukcji b).

1. Skonstruuję przekształcenie c'

$$\begin{tikzcd}
 & (\alpha^!\widetilde{E})_1 \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] \arrow[d, "i_\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\tau_\alpha"] & \widetilde{E}_{\widetilde{x}_0} \arrow[r, "\bar{p}"'] \arrow[d, "i_{\tilde{x}_0}"] & E_{x_0} \arrow[d, "i_{x_0}"] & \\
 & \alpha^!\widetilde{E}_{k+1} \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d, "q_\alpha"] & \widetilde{E}_{k+1} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d, "\widetilde{q}"] & E_{k+1} \arrow[d, "q"] & \\
(S^k, 1) \arrow[ur, "s_\alpha"] \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "p\circ\alpha"'] & (D^{k+1}, S^k) \arrow[r, "\alpha"] & (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}) \arrow[r, "p"] & (X^{(k+1)}, X^{(k)}) & (X^{(k)}, x_0) \arrow[l] \arrow[ul, "s_k"']
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Dla danego przekroju s_k chcę zadać przekształcenie

$$c(s_k)\colon [(D^{k+1}; S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})] \to \pi_k(E_x, e_{x_0}).$$

Aby to zrobić zadam wartość przekształcenia $c(s_k)$ na elemencie $\alpha \in [(D^{k+1}; S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})]$.
Bez straty ogólności mogę założyć iż α jest komórkowe więc $\alpha(1) \in \widetilde{X}^0$.
W diagramie powyżej (3.1) dolne kwadraty definiujemy jako przeciągnięcia. Górne strzałki są przekształceniami zadanymi na włóknach a zatem z lematu 1.2.1 homeomorfizmami, nazwijmy ich złożenie τ_α. Ponadto z lematu 1.2.5 przekrój s_k wyznacza przekrój s_α wiązki $\alpha^!\widetilde{E}_{k+1}$ nad sferą $(S^k, 1)$, a zatem element $\pi_k(\alpha^!\widetilde{E}_{k+1}, s_\alpha(1))$. Dysk D^{k+1} jest ściągalny więc, z długiego ciągu rozwłóknienia:

$$(\alpha^!\widetilde{E}_{k+1})_1 \xrightarrow{i_\alpha} \alpha^!\widetilde{E}_{k+1} \to D^{k+1},$$

przekształcenie i_α (patrz diagram) zadaje izomorfizm grup homotopii.
Niech $c'(s_k)(\alpha) := \tau_{\alpha*} i_{\alpha*}^{-1}[s_\alpha]$, gdzie $\tau_{\alpha*}$, oraz $i_{\alpha*}$ są izomorfizmami indukowanymi na grupach homotopii. Tak zadane przekształcenie nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy homotopii (lemat 1.2.6).

2. Pokażę, iż $c'(s_k)$ jest homomorfizmem grup abelowych dla $k \geqslant 2$. Niech

$$\alpha_1, \alpha_2 \colon (D^{k+1}, S^k) \to (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})$$

Z wniosku 1.1.1 wynika iż $[(D^{k+1}; S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})] \simeq \pi_{k+1}(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{x}_0)$ i struktura grupy na $[(D^{k+1}; S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})]$ pochodzi z tego izomorfizmu. Zatem bez straty ogólności mogę założyć iż

$$\alpha_1, \alpha_2 \colon (D^{k+1}, S^k, 1) \to (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{x}_0)$$

Należy pokazać iż $c(s_k)(\alpha_1 + \alpha_2) = c(s_k)(\alpha_1) + c(s_k)(\alpha_2)$. Dla k $\in \{1; 2\}$:

$$\begin{tikzcd}
((\alpha_1+\alpha_2)^!\widetilde{E})_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_{\alpha_1+\alpha_2}"] & ((\alpha_1\vee\alpha_2)^!\widetilde{E})_1 \arrow[d, "i_{\alpha_1\vee\alpha_2}"] & (\alpha_k^!\widetilde{E})_1 \arrow[l] \arrow[d, "i_{\alpha_k}"] \\
(\alpha_1+\alpha_2)^!\widetilde{E} \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[d] & (\alpha_1\vee\alpha_2)^!\widetilde{E} \arrow[d, "q_{\alpha_1\vee\alpha_2}"] & \alpha_k^!\widetilde{E} \arrow[l] \arrow[d] \\
D^{k+1} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\alpha_1+\alpha_2"'] & D^{k+1}\vee D^{k+1} \arrow[d, "\alpha_1\vee\alpha_2"] & D^{k+1} \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "\alpha_k"] \\
 & \widetilde{X} &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

W diagramie 3.2 dolne kwadraty są przeciągnięciami, górne strzałki są przekształceniami indukowanymi na włóknach, a zatem z lematu 1.2.1 homeomorfizmami. Przekształcenie Δ jest ściągnięciem równika $(D^k \times 0)$, a przekształcenia i_1 i i_2 to włożenia na odpowiednio górny i dolny dysk. Z definicji τ (diagram 3.1) przekształcenia $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}$ *i* $\tau_{\alpha_1+\alpha_2}$ faktoryzują się przez przestrzeń $((\alpha_1 \vee \alpha_2)^!\widetilde{E})_1$. Ponadto przestrzeń $D^{k+1} \vee D^{k+1}$ jest ściągalna, więc z długiego ciągu rozwłóknienia

$$((\alpha_1 \vee \alpha_2)^!\widetilde{E})_1 \longrightarrow (\alpha_1 \vee \alpha_2)^!\widetilde{E} \xrightarrow{q_{\alpha_1\vee\alpha_2}} D^{k+1} \vee D^{k+1}$$

przekształcenie $i_{\alpha_1\vee\alpha_2}$ zadaje izomorfizmy na grupach homotopii. Zatem z definicji $c(s_k)$ wystarczy pokazać, iż:

$$\widetilde{\Delta}_*[s_{\alpha_1+\alpha_2}] = \widetilde{i_1}_*[s_{\alpha_1}] + \widetilde{i_2}_*[s_{\alpha_2}]$$

co jest równoważne

$$\widetilde{\Delta} \circ s_{\alpha_1+\alpha_2} \simeq \widetilde{i_1} \circ s_{\alpha_1} + \widetilde{i_2} \circ s_{\alpha_2},$$

gdzie $\simeq$ oznacza homotopijną równoważność. Bezpośrednio z definicji przekształceń (i funktorialności przeciągania rozwłóknień) wynika, iż obie strony są homotopijne z przekształceniem $s_{\alpha_1\vee\alpha_2} \circ \Delta|_{S^k}$. Zatem $c(s_k)$ jest homomorfizmem grup abelowych.

3. Pokażę, iż $c(s_k)$ jest homomorfizmem $\pi_1(X, x_0)$-modułów dla każdego $k \geqslant 1$. Aby to uzasadnić użyję definicji b) (działającej również dla $k = 1$).
Niech $\sigma \in H_{k+1}(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})$, a $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, niech Φ_σ będzie wybraną mapą charakterystyczną σ. Trzeba pokazać, iż

$$c(s_k)(\omega(\sigma)) = \omega c(s_k)(\sigma).$$

Ale ponieważ przekształcenia charakterystyczne komórek $\widetilde{X}$ zostały zadane poprzez wybór przekształceń charakterystycznych komórek X, to $\Phi_{\omega(\sigma)} = \omega \circ \Phi_\sigma$. Zatem należy udowodnić iż

$$c'(s_k)(\omega \circ \Phi_\sigma) = \omega c'(s_k)(\Phi_\sigma).$$

Ponieważ $p \circ \omega \circ \Phi_\sigma = p \circ \Phi_\sigma$ to przekształcenia $\omega \circ \Phi_\sigma$ i Φ_σ indukują tą samą wiązkę nad dyskiem, oraz ten sam przekrój tej wiązki. Tak więc $s_{\omega \circ \Phi_\sigma} = s_{\Phi_\sigma}$. Niech przekształcenie nadkreślone oznaczają przekształcenia indukowane na włóknach wtedy:

$$\tau_{\omega\Phi_\sigma *} = \bar{p}_* \circ \overline{\omega\Phi_\sigma}_* = \bar{p}_* \circ \bar{\omega}_* \circ \bar{\Phi}_{\sigma *} = \omega(\bar{p}_* \circ \bar{\Phi}_{\sigma *}) = \omega(\tau_{\Phi_\sigma *}).$$

Zatem

$$c(s_k)(\omega\Phi_\sigma) = \tau_{\omega\Phi_\sigma *}(i_*^{-1}(s_{\omega\Phi_\sigma})) = \tau_{\omega\Phi_\sigma *}(i_*^{-1}(s_{\Phi_\sigma})) = \omega(\tau_{\Phi_\sigma *}(i_*^{-1}(s_{\Phi_\sigma}))) = \omega(c(s_k)(\Phi_\sigma))$$

Tak więc $c(s_k)$ jest homomorfizmem $\pi_1(X, x_0)$-modułów.

4. Pokażę iż dla każdego $k \geqslant 1$ przekształcenie $c(s_k) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy przekrój s_k rozszerza się na $(k+1)$-szkielet X.
$\Leftarrow$ gdy przekrój s_k rozszerza się do s_{k+1}, to dla każdego $\alpha \in [(D^{k+1}, S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})]$, przekrój s_α rozszerza się na dysk, więc jest ściągalny. Zatem dla każdego $\alpha \in [(D^{k+1}, S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})]$, zachodzi:

$$c'(s_k)(\alpha) = \tau_{\alpha *} i_{\alpha *}^{-1}[0] = 0$$

Zatem $c'(s_k) = 0$, więc również $c(s_k) = 0$.
$\Rightarrow$ gdy $c(s_k) = 0$ to dla każdej $(k+1)$-komórki σ kompleksu $\widetilde{X}$ otrzymuje, iż $c'(s_k)(\Phi_\sigma) = 0$ a zatem $\widetilde{s_k}$ można rozszerzyć na $(k+1)$-szkielet $\widetilde{X}$ (lemat 1.2.4). Tak więc z lematu 1.2.7 przekrój s_k można rozszerzyć na $(k+1)$-szkielet X.

Z powyższych rozważań wynika iż c spełnia warunki wymagane w tezie. $\square$

Lemat 3.1.2. *Konstrukcja $c(-)$ z twierdzenia 3.1.1 jest funktorialna względem przekształceń komórkowych w następującym sensie: rozpatrzmy przeciągnięcie przez przekształcenie komórkowe*

$$\begin{tikzcd}
 & f^!E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "q_f"] & E \arrow[d, "q"] & \\
Y^{(k)} \arrow[ur, "s'_k"] \arrow[r] & Y \arrow[r, "f"] & X & X^{(k)} \arrow[l] \arrow[ul, "s_k"']
\end{tikzcd}$$

gdzie s'_k jest przekrojem odpowiadającym s_k. Funkcja f zadaje przekształcenia

$$\begin{aligned}
&f_*\colon H_*(\widetilde{Y}_*, \widetilde{Y}_{*-1}) \to H_*(\widetilde{X}_*, \widetilde{X}_{*-1})\\
&f'_*\colon [(D^*, S^{*-1})(\widetilde{Y}_*, \widetilde{Y}_{*-1})] \to [(D^*, S^{*-1})(\widetilde{X}_*, \widetilde{X}_{*-1})]\\
&\bar{f}_{y_0*}\colon \pi_*(E_x) \to \pi_*((f^! E)_x)
\end{aligned}$$

Wówczas dla każdej pary liczb naturalnych n, m można zadać

$$f^*\colon C^n(X, \pi_m(E_x)) \to C^n(Y, \pi_m((f^! E)_x))$$

poprzez $f^*(g) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(g \circ f_*)$ (dla $g \in C^n(X, \pi_m(E_x))$).
Wówczas zachodzi $c(s'_k) = f^*(c(s_k))$.

Dowód. W pracy przeprowadzę dowód jedynie dla przypadku $k \geqslant 2$.
Dla $k \geqslant 2$ można skorzystać z postaci kompleksu $C^k(X, A)$ z wniosku 2.2.1. Wtedy przekształcenie f^* przyjmuje postać $f^*(g) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(g \circ f'_*)$ i z konstrukcji c wystarczy wykazać iż dla dowolnego komórkowego $\alpha \in [(D^{k+1}, S^k); (\widetilde{Y}^{(k+1)}, \widetilde{Y}^{(k)})]$ zachodzi

$$c'(s'_k)(\alpha) = f^* c'(s_k)(\alpha) \text{ czyli } c'(s'_k)(\alpha) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(c'(s_k)(\alpha) \circ f'_*) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(c(s_k)(\widetilde{f} \circ \alpha)),$$

Rozpatrzmy diagram

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{Y}_k, \widetilde{y}) \arrow[r, "p"] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] & (Y_k, y_0) \arrow[dd, "f"] \\
(S^k, 1) \arrow[ur, "\alpha|_{S^k}"] \arrow[dr, "\widetilde{f}\circ\alpha|_{S^k}"'] & & \\
 & (\widetilde{X}_k, \widetilde{x}_0) \arrow[r, "p"] & (X_k, x_0)
\end{tikzcd}$$

gdzie $\bar{f}_{y_0}\colon (f^! E)_{x_0} \to E_{y_0}$ jest przekształceniem indukowanym na włóknie nad y_0. Ale z przemienności powyższego diagramu i funktorialności przeciągania wiązek wynika iż wiązka indukowana nad S^k, przez wiązkę E i wiązka indukowana przez $f^! E$ są równe. Ponadto przekrój tej wiązki indukowany przez s_k, jest równy przekrojowi indukowanemu przez s'_k. Zatem obydwa przekroje zadają ten sam element grupy homotopii włókna nad 1. Tak więc istnieje $a \in \pi_k((\alpha^! \widetilde{E}_k)_1)$ takie, iż:

$$c'(s'_k)(\alpha) = \tau_\alpha[a] \text{ i } c'(s_k)(\widetilde{f} \circ \alpha) = \tau_{\widetilde{f}\circ\alpha}[a].$$

Z przemienności diagramu i definicji τ (diagram 3.1) wynika, iż $\tau_{\widetilde{f}\circ\alpha} \circ (\tau_\alpha)^{-1} = f_{y_0*}$. Zatem

$$c(s'_k)(\alpha) = (\tau_{\widetilde{f}\circ\alpha} \circ (\tau_\alpha)^{-1})^{-1}(c(s_k)(\widetilde{f} \circ \alpha)) = f^{-1}_{y_0*}(c(s_k)(\widetilde{f} \circ \alpha)) = f^* c(s_k)(\alpha).$$

Czyli $c(s'_k) = f^*(c(s_k))$. $\square$

Lemat 3.1.3. *Dla dowolnego przekroju s_k, kołańcuch przeszkody $c(s_k)$ jest kocyklem, czyli $\delta c(s_k) = 0$.*

Dowód. W pracy przeprowadzę dowód jedynie dla przypadku $k \geqslant 2$.
Analogicznie jak w poprzednim dowodzie dla $k \geqslant 2$ z wniosku 2.2.1 wystarczy pokazać to dla $\delta c'(s_k) = 0$. Niech

$$\partial\colon [(D^{k+2}, S^{k+1})(\widetilde{X}^{(k+2)}, \widetilde{X}^{(k+1)})] \to [(D^{k+1}, S^k)(\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)})].$$

Z definicji ∂ z długiego ciągu trójki wiadomo, iż dla dowolnego przekształcenia β, przekształcenie

$$\partial\beta\colon (D^{k+1}, S^k, 1) \to (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{x}_0)$$

jest stałe na S^k. Tak więc przekrój $s_{\partial\beta}$ jest stały, a zatem ściągalny, czyli $c(s_k)(\partial\beta) = 0$. Ale to oznacza iż dla każdego przekształcenia β zachodzi

$$\delta c(s_k)(\beta) = c(s_k)(\partial\beta) = 0.$$

Czyli $\delta c(s_k) = 0$, czyli $c(s_k)$ jest kocyklem. $\square$

Z powyższego lematu wynika, iż kocykl przeszkody wyznacza pewien element $[c(s_k)]$ skręconych kohomologii X. Może się zdażyć, iż $c(s_k)$ jest nietrywialny ale wyznacza zerową klasę kohomologii (jest nietrywialnym kobrzegiem). Taką sytucje opisuje, udowodnione w kolejnym rozdziale, twierdzenie 3.2.5.

3.2. Kołańcuch różnicujący

Twierdzenie 3.2.1. *Niech*

$$T = \{s_k, t_k, H_{k-1} | s_k, t_k \in \Gamma(E|_{X_k}), H_{k-1}\colon X_{k-1} \times I \to E|_{X^{k-1}}$$
$$H_{k-1}\text{- punktowana włóknista homotopia między } s_k|_{X_{k-1}}, t_k|_{X_{k-1}}\}.$$

Dla każdego $k \geqslant 1$ istnieje przekształcenie

$$d(-,-) : T \to C^k(X; \{\pi_k(E_x)\})$$

takie, że dla trójki $(s_k, t_k, H_{k-1}) \in T$, kołańcuch $d(s_k, t_k) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy H_{k-1} przedłuża się do włoknistej homotopii między s_k i t_k.

Dowód. Istotą dowodu będzie skonstruowanie dla każdego $k \geqslant 1$ przekształcenia

$$d'\colon T \to \mathrm{Hom}_{Set}([(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})], A)$$

będącego przekształceniem w homomorfizmy grup abelowych dla $k \geqslant 3$. Wówczas dla $k \geqslant 2$ mogę zadać przekształcenie $d(-,-)$ na dwa sposoby:
a) skorzystać z formy kompleksu $C^k(X; A)$ z wniosku 2.2.1 i zadać $d = d'$.
b) dla każdej komórki σ kompleksu $\widetilde{X}$ o wybranym przekształceniu charakterystycznym

Φ, i dowolnej trójki $(s_k, t_k, H_{k-1}) \in T$ zadać $d(s_k, t_k)(\sigma) = d'(s_k, t_k)(\Phi)$, a następnie rozszerzyć $d(s_k, t_k)$ na $H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})$ korzystając z własności uniwersalnej grupy wolnej. Te dwie konstrukcje zadają to samo przekształcenie d gdyż pokrywają się na generatorach, ponieważ wybór przekształcenia charakterystycznyge zadaje przekrój przekształcenia

$$[(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})] \to H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}).$$

Następnie wykażę iż tak zadane d jest przekształceniem $\pi_1(X, x_0)$ modułów i spełnia warunki z treści zadania.
Dla $k \in \{1; 2\}$ aby otrzymać przekształcenie d użyję konstrukcji b).

1 Skonstruuje przekształcenie d'

$$\begin{tikzcd}
 & ((\alpha\circ\pi)^!\widetilde{E})_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\tau_\alpha"] & \widetilde{E}_{\widetilde{x}_0} \arrow[r] \arrow[d, "i_{\widetilde{x}_0}"] & E_{x_0} \arrow[d, "x_0"] \\
 & (\alpha\circ\pi)^!\widetilde{E}_k \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d] & \widetilde{E}_k \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d] & E_k \arrow[d, "q"] \\
D_S \arrow[ur, "s_\alpha\cup H_\alpha\cup t_\alpha"] \arrow[r, "i"] \arrow[rrr, bend right, "p\circ\alpha"'] & (D^k, S^{k-1})\times I \arrow[r, "\alpha\circ\pi"] & (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}) \arrow[r, "p"] & (X^{(k)}, X^{(k-1)}) & X_S \arrow[l, "h"'] \arrow[ul, "s_k\cup H_{k-1}\cup t_k"']
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

gdzie $D_S = (D^k \times \partial I \cup S^{k-1} \times I, \{1\} \times I) \simeq (S^k, 1)$
$X_S = (X^{(k-1)} \times I \cup X^{(k)} \times \partial I, x_0 \times I)$, oraz $h(x, t) = x$.
Chcę zadać przekształcenie

$$d'(s_k, t_k)\colon [(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})] \to \pi_k(E_x, e_{x_0}).$$

Aby to zrobić zadam wartość przekształcenia $d(s_k, t_k)$ na elemencie $\alpha \in [(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})]$.
Bezs straty ogólności mogę założyć iż α jest komórkowe zatem $\alpha(1) \in \widetilde{X}^{(0)}$
W diagramie powyżej (3.3) dolne kwadraty definiujemy jako przeciągnięcia. Górne strzałki są przekształceniami zadanymi na włóknach, a zatem (z lematu 1.2.1) homeomorfizmami. Nazwijmy ich złożenie τ_α. Przekształcenie i jest włożeniem, a π rzutowaniem na dysk. Ponadto z lematu 1.2.5 przekrój $s_k \cup H_{k-1} \cup t_k$ wyznacza przekrój $s_\alpha \cup H_\alpha \cup t_\alpha$ wiązki $\alpha^!\widetilde{E}_k$ nad sferą $D_S \simeq (S^k, 1)$, a zatem element $\pi_k((\alpha\circ\pi)^!\widetilde{E}_{k+1}, s_\alpha(1))$. Przestrzeń $D^k \times I$ jest ściągalna więc, z długiego ciągu rozwłóknienia:

$$((\alpha\circ\pi)^!\widetilde{E}_k)_1 \xrightarrow{i_\alpha} (\alpha\circ\pi)^!\widetilde{E}_k \to D^k \times I,$$

przekształcenie i_α (patrz diagram) zadaje izomorfizm grup homotopii.
Niech

$$d'(s_k, t_k)(\alpha) := \tau_{\alpha*} i_{\alpha*}^{-1}[s_\alpha \cup H_\alpha \cup t_\alpha],$$

gdzie $\tau_{\alpha *}$, oraz $i_{\alpha *}$ są izomorfizmami indukowanymi na grupach homotopii. Klasa homotopii przekształcenia $d'(s_k, t_k)(\alpha)$ nie zależy od wyboru reprezentanta z grupy homotopii (lemat 1.2.6).

2. Pokażę, iż $d'(s_k, t_k)$jest homomorfizmem grup abelowych dla $k \geqslant 3$. Niech

$$\alpha_1, \alpha_2 \colon (D^k, S^{k-1}) \to (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})$$

Z wniosku 1.1.1 wynika iż $[(D^k; S^{k-1})(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})] \simeq \pi_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}, \widetilde{x}_0)$ i struktura grupy na $[(D^k; S^{k-1})(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})]$ pochodzi z tego izomorfizmu. Zatem bez straty ogólności mogę założyć iż

$$\alpha_1, \alpha_2 \colon (D^{k+1}, S^k, 1) \to (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{x}_0)$$

Należy pokazać iż $c(s_k)(\alpha_1 + \alpha_2) = c(s_k)(\alpha_1) + c(s_k)(\alpha_2)$. Dla k $\in \{1; 2\}$:
Niech:

$$\alpha_1, \alpha_2 \colon (D^k, S^{k-1}, 1) \to (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)}, \widetilde{x}_0)$$

Należy pokazać, iż $d(s_k, t_k)(\alpha_1 + \alpha_2) = d(s_k, t_k)(\alpha_1) + d(s_k, t_k)(\alpha_2)$. Dla $k \in \{1; 2\}$:

$$\begin{tikzcd}
((\alpha_1 \circ \pi + \alpha_2 \circ \pi)^! \widetilde{E})_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_{\alpha_1+\alpha_2}"] & (((\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \pi)^! \widetilde{E})_1 \arrow[d, "i_{\alpha_1 \vee \alpha_2}"] & ((\alpha_k \circ \pi)^! \widetilde{E})_1 \arrow[l] \arrow[d, "i_{\alpha_k}"] \\
(\alpha_1 \circ \pi + \alpha_2 \circ \pi)^! \widetilde{E} \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[d] & ((\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \pi)^! \widetilde{E} \arrow[d, "q_{\alpha_1 \vee \alpha_2}"] & (\alpha_k \circ \pi)^! \widetilde{E} \arrow[l] \arrow[d] \\
D^k \times I \arrow[r, "\Delta \times id"] \arrow[dr, "(\alpha_1+\alpha_2)\circ\pi"'] & (D^k \vee D^k) \times I \arrow[d, "(\alpha_1 \vee \alpha_2)\circ\pi"] & D^k \times I \arrow[l, "i_1 \times id"'] \arrow[dl, "\alpha_1 \circ \pi"] \\
 & \widetilde{X} &
\end{tikzcd}$$

W diagramie dolne kwadraty są przeciągnięciami, górne strzałki są przekształceniami indukowanymi na włóknach, a zatem z lematu 1.2.1 homeomorfizmami. Przekształcenia Δ, i_1 i i_2 są zdefiniowane tak jak w poprzednim rozdziale. Z definicji τ (diagram 3.1) przekształcenia $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}$ *i* $\tau_{\alpha_1+\alpha_2}$ faktoryzują się przez przestrzeń $((\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \pi)^! \widetilde{E})_1$. Ponadto przestrzeń $(D^{k+1} \vee D^{k+1}) \times I$ jest ściągalna, więc z długiego ciągu rozwłóknienia

$$(((\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \pi)^! \widetilde{E})_1 \xrightarrow{i_{\alpha_1 \vee \alpha_2}} ((\alpha_1 \vee \alpha_2) \circ \pi)^! \widetilde{E} \xrightarrow{q_{\alpha_1 \vee \alpha_2}} (D^{k+1} \vee D^{k+1}) \times I$$

wynika, iż $i_{\alpha_1 \vee \alpha_2}$ zadaje izomorfizmy na grupach homotopii. Zatem z definicji $d(s_k, t_k)$ wystarczy pokazać, iż:

$$\widetilde{\Delta}_*[s_{\alpha_1+\alpha_2} \cup H_{\alpha_1+\alpha_2} \cup t_{\alpha_1+\alpha_2}] = \widetilde{i_1}_*[s_{\alpha_1} \cup H_{\alpha_1} \cup t_{\alpha_1}] + \widetilde{i_2}_*[s_{\alpha_2} \cup H_{\alpha_2} \cup t_{\alpha_2}]$$

co jest równoważne

$$\widetilde{\Delta} \circ (s_{\alpha_1+\alpha_2} \cup H_{\alpha_1+\alpha_2} \cup t_{\alpha_1+\alpha_2}) \simeq \widetilde{i_1} \circ (s_{\alpha_1} \cup H_{\alpha_1} \cup t_{\alpha_1}) + \widetilde{i_2} \circ (s_{\alpha_2} \cup H_{\alpha_2} \cup t_{\alpha_2}),$$

gdzie $\simeq$ oznacza homotopijną równoważność. Bezpośrednio z definicji przekształceń (i funktorialności przeciągania przekrojów) wynika, iż obie strony są homotopijne z przekształceniem:

$$(s_{\alpha_1 \vee \alpha_2} \cup H_{\alpha_1 \vee \alpha_2} \cup t_{\alpha_1 \vee \alpha_2}) \circ (\Delta \times id)|_{S^{k-1} \times I}.$$

Zatem $d(s_k, t_k)$ jest homomorfizmem grup abelowych.

3. Pokażę, iż $d(s_k, t_k)$ jest homomorfizmem $\pi_1(X, x_0)$-modułów dla każdego $k \geqslant 1$.
Aby to uzasadnić użyję definicji b) (działającej również dla $k \in \{1; 2\}$).
Niech $\sigma \in H_k(\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})$, a $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, niech Φ_σ będzie wybraną mapą charakterystyczną σ. Trzeba pokazać, iż

$$d(s_k, t_k)(\omega(\sigma)) = \omega d(s_k, t_k)(\sigma).$$

Ale ponieważ przekształcenia charakterystyczne komórek $\widetilde{X}$ zostały zadane poprzez wybór przekształceń charakterystycznych komórek X, to $\Phi_{\omega(\sigma)} = \omega \circ \Phi_\sigma$. Zatem należy udowodnić iż

$$d'(s_k, t_k)(\omega \circ \Phi_\sigma) = \omega d'(s_k, t_k)(\Phi_\sigma).$$

Ponieważ $p \circ \omega \circ \Phi_\sigma = p \circ \Phi_\sigma$ to przekształcenia $\omega\Phi_\sigma$ i Φ_σ indukują tę samą wiązkę nad D_S, oraz ten sam przekrój tej wiązki, czyli

$$s_{\omega\Phi_\sigma} \cup H_{\omega\Phi_\sigma} \cup t_{\omega\Phi_\sigma} = s_{\Phi_\sigma} \cup H_{\Phi_\sigma} \cup t_{\Phi_\sigma}.$$

Ponadto,

$$\tau_{\omega\Phi_\sigma *} = \bar{p}_* \circ \overline{\omega\Phi_\sigma}_* = \bar{p}_* \circ \bar{\omega}_* \circ \bar{\Phi}_{\sigma *} = \omega(\bar{p}_* \circ \bar{\Phi}_{\sigma *}) = \omega(\tau_{\Phi_\sigma *}).$$

Zatem (dla przejrzystości zapisu pominę izomorfizm $i_*^{(-1)}$)

$$d(s_k, t_k)(\omega\Phi_\sigma) = \tau_{\omega\Phi_\sigma *}(s_{\omega\Phi_\sigma} \cup H_{\omega\Phi_\sigma} \cup t_{\omega\Phi_\sigma}) = \tau_{\omega\Phi_\sigma *}(s_{\Phi_\sigma} \cup H_{\Phi_\sigma} \cup t_{\Phi_\sigma}) = \omega(\tau_{\Phi_\sigma *}(s_{\Phi_\sigma} \cup H_{\Phi_\sigma} \cup t_{\Phi_\sigma})) = \omega(d(s_k, t_k)(\Phi_\sigma$$

Tak więc $d(s_k, t_k)$ jest homomorfizmem $\pi_1(X, x_0)$-modułów.

4. Pokażę iż dla każdego $k \geqslant 1$ przekształcenie $d(s_k, t_k) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy gdy H_{k-1} przedłuża się do włóknistej homotopii H_k między s_k i t_k na k-szkielecie X.
$\Leftarrow$ gdy H_{k-1} rozszerza się do H_k, to dla każdego $\alpha \in [(D^k, S^{k-1}), (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})]$, przekrój $s_\alpha \cup H_\alpha \cup t_\alpha$ rozszerza się na walec więc jest przekształceniem ściągalnym Zatem dla każdego $\alpha \in [(D^k, S^{k-1}), (\widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{X}^{(k-1)})]$ zachodzi:

$$d'(s_k, t_k)(\alpha) = \tau_{\alpha *} i_{\alpha *}^{-1}[0] = 0.$$

Tak więc $d'(s_k, t_k) = 0$, a zatem również $d(s_k, t_k) = 0$.
$\Rightarrow$ gdy $d(s_k, t_k) = 0$ to dla każdej k-komórki σ kompleksu $\widetilde{X}$ otrzymuje, iż $d'(s_k, t_k)(\Phi_\sigma) = 0$

a zatem $\widetilde{H}_{k-1}$ można rozszerzyć na k-szkielet $\widetilde{X}$. Więc, z lematu 1.2.7 homotopie H_{k-1} można włókniście rozszerzyć na k-szkielet X.

Z powyższych rozważań wynika iż przekształcenie d spełnia warunki z treści twierdzenia. $\square$

Lemat 3.2.2. *Konstrukcja $d(s_k, t_k)$ jest naturalna ze względu na przekształcenia komórkowe w następującym sensie: gdy $f\colon Y \to X$ jest komórkowe, a s'_k, t'_k są przekrojami $f^!E$ odpowiadającymi s_k, t_k, oraz H'_{k-1} włóknistą homotopią odpowiadającą H_{k-1} (lemat 1.2.5), to $f^*d(s_k, t_k) = d(s'_k, t'_k)$ (gdzie f^* jest zdefiniowane tak jak w lemacie 3.1.2).*

Dowód. W pracy przeprowadzę dowód jedynie dla przypadku $k \geqslant 3$.
Dla $k \geqslant 3$ można skorzystać z postaci kompleksu $C^k(X, A)$ z wniosku 2.2.1. Wtedy przekształcenie f^* przyjmuje postać $f^*(g) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(g \circ f'_*)$ i z konstrukcji d wystarczy wykazać iż dla dowolnego komórkowego $\alpha \in [(D^k, S^{k-1}); (\widetilde{Y}^{(k)}, \widetilde{Y}^{(k-1)})]$ zachodzi

$$d'(s'_k, t'_k)(\alpha) = f^*d'(s_k, t_k)(\alpha), \text{ czyli } d'(s'_k, t'_k)(\alpha) = \bar{f}^{-1}_{y_0*}(d'(s_k, t_k)(\widetilde{f} \circ \alpha)),$$

Rozpatrzmy diagram

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{Y}_k, \widetilde{y}) \arrow[r, "p"] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] & (Y_k, y_0) \arrow[dd, "f"] \\
(D_S, I) \arrow[ur, "\alpha\circ\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{f}\circ\alpha\circ\pi"'] & & \\
 & (\widetilde{X}_k, \widetilde{x}_0) \arrow[r, "p"] & (X_k, x_0)
\end{tikzcd}$$

gdzie $\bar{f}_{y_0}$ jest przekształceniem indukowanym na włóknie nad y_0. Ale z przemienności powyższego diagramu i funktorialności przeciągania wiązek wynika iż wiązka indukowana nad D_S, przez wiązkę E i wiązka indukowana przez $f^!E$ są równe. Ponadto przekrój tej wiązki indukowany przez $(s_k \cup H_k \cup t_k)$, jest równy przekrojowi indukowanemu przez $(s'_k \cup H'_k \cup t'_k)$. Zatem obydwa przekroje zadają ten sam element grupy homotopii włókna nad 1. Tak więc istnieje $a \in \pi_k((\alpha^!\widetilde{E}_k)_1)$ takie, iż:

$$d'(s'_k, t'_k)(\alpha) = \tau_\alpha[a] \text{ oraz } d'(s_k, t_k)(\widetilde{f} \circ \alpha) = \tau_{\widetilde{f}\circ\alpha}[a].$$

Z przemienności diagramu i definicji τ (diagram 3.3) wynika, iż $\tau_{\widetilde{f}\circ\alpha\circ\pi} \circ (\tau_{\alpha\circ\pi})^{-1} = f_{y_0*}$. Zatem:

$$d'(s'_k, t'_k)(\alpha) = (\tau_{\widetilde{f}\circ\alpha\circ\pi} \circ (\tau_{\alpha\circ\pi})^{-1})^{-1}(d'(s_k, t_k)(\widetilde{f}\circ\alpha)) = f^{-1}_{y_0*}(c(s_k)(\widetilde{f}\circ\alpha)) = f^*d'(s_k, t_k)(\alpha).$$

Tak więc $f^*d((s_k, t_k)) = d(s_k, t_k)$. $\square$

Lemat 3.2.3. *Dla dowolnych przekrojów s_k i t_k zdefiniowanych na k-szkielecie X i włókniście homotopijnych na $(k-1)$-szkielecie X , kołańcuch różnicujący $d(s_k, t_k) \in C^k(X; \{\pi_k(E_x)\})$ spełnia równość: $\delta d(s_k, t_k) = c(s_k) - c(t_k)$.*

Dowód. W pracy przeprowadzę dowód jedynie dla przypadku $k \geqslant 3$.
Analogicznie jak w poprzednim dowodzie dla $k \geqslant 3$ z wniosku 2.2.1 wystarczy pokazać, że $\delta d'(s_k, t^k) = c'(s_k) - c'(t_k)$.
Trzeba pokazać, iż $d(s_k, t_k)(\partial\beta) = s_k(\beta) - t_k(\beta)$ dla danego przekształcenia

$$\beta\colon (D^{k+1}, S^k) \to (\widetilde{X}^{(k+1)}, \widetilde{X}^{(k)}).$$

Bez straty ogólności mogę założyć iż β jest komórkowe. Rozwłóknienie indukowane przez β nad dyskiem D^{k+1} jest trywialne (z lematu 1.2), zatem jest trywialne również nad brzegiem dysku S^k (czyli jest postaci postaci $S^k \times (\beta^! \widetilde{E})_1$). Homotopijną odwrotnością włożenia włókna jest rzutowanie ψ (dla trywializacji pochodzącej od trywializacji nad dyskiem). Również rozwłóknienie indukowane przez $d(s_k, t_k)$ nad $D_S = S^{k-1} \times I \cup D^k \times \partial I$ jest trywialne. Wystarczy zatem pokazać, iż przekształcenia:

$$\psi \circ (s_{\delta\beta} \cup H_{\delta\beta} \cup t_{\delta\beta}) \text{ i } \psi \circ s_\beta - \psi \circ t_\beta$$

są homotopijne. Z definicji przekształcenia δ wynika, iż przekształcenie $d(s_k, t_k)(\delta\beta)$ jest stałe na ścianach wlaca, a zatem faktoryzuje się przez $S^k \vee S^k$ (patrz diagram).

$$\begin{tikzcd}
 & F & \\
D_S \times F \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr] & & (S^k \vee S^k) \times F \arrow[ul, "\psi"'] \\
D_S \arrow[u, "s_{\delta\beta} \cup H_{\delta\beta} \cup t_{\delta\beta}"] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "\delta\beta \circ \pi"'] & S^k \vee S^k \arrow[u, "s_\beta \vee (-t_\beta)"'] \arrow[r, "\delta\beta \vee \delta\beta"] & \widetilde{X_k}
\end{tikzcd}$$

Gdzie Δ jest ściągnięciem równika, a diagram komutuje co do homotopii. Zatem co do homotopii

$$\psi \circ (s_{\delta\beta} \cup H_{\delta\beta} \cup t_{\delta\beta}) \simeq \psi \circ (s_\beta \vee -t_\beta) \circ \Delta \simeq (\psi \circ s_\beta \vee \psi \circ -t_\beta) \circ \Delta \simeq \psi(s_\beta - t_\beta)$$

□

Wniosek 3.2.1. Z lematu 3.2.3 wynika, iż jeśli dwa przekroje na k-szkielecie X są włókniście homotopijne na $(k-1)$-szkielecie X, to ich kocykle przeszkody wyznaczają ten sam element w kohomologiach.

Lemat 3.2.4. *Niech s_k będzie przekrojem zdefiniowanym na k-szkielecie X, oznaczmy $s_{k-1} := s_k|_{X^{(k-1)}}$ i niech $d \in C^k(X; \pi_k(E_x))$. Wtedy istnieje taki przekrój t_k zdefiniowany na k-szkielecie X iż $t_k|_{X^{(k-1)}} = s_{k-1}$, oraz $d(s_k, t_k) = d$ (dla homotopii stałej na $(k-1)$-szkielecie X).*

Dowód. Niech σ_k będzie k-komórką kompleksu X. Pokażę iż mogę rozszerzyć przekrój s_{k-1} na σ_k w taki sposób, aby dla każdej k-komórki $\widetilde{\sigma}$ kompleksu $\widetilde{X}$ rzutującąej się

na σ_k zachodziła równość $d(s_k, t_k)(\tilde{\sigma}) = d(\tilde{\sigma})$. Z definicji $d(s_k, t_k)$ wystarczy pokazać iż dla wybranego przekształcenia charakterystycznego $\Phi_{\tilde{\sigma}}$ zachodzi $d'(s_k, t_k)(\Phi_{\tilde{\sigma}}) = d(\tilde{\sigma})$. Ponieważ na zbiorze wybranych przekształceń charakterystycznych k-komórek $\widetilde{X}$ rzutujących się na σ_k działa tranzytywnie i wolno grupa $\pi_1(X, x_0)$, a d i $d'(s_k, t_k)$ są homomorfizmami $\pi_1(X, x_0)$-modułów, to wystarczy zadać t_k tak, aby równość

$$d'(s_k, t_k)(\Phi_{\tilde{\sigma}}) = d(\tilde{\sigma})$$

była spełniona dla pewnego ustalonego $\tilde{\sigma}$. Z lematu 1.2.3 jest to możliwe.
Po wykonaniu powyższej procedury dla wszystkich k-komórek X rozszerzyłem przekrój s_{k-1} do t_k określonego na całym k-szkielecie X, tak iż dla dowolnej k-komórki σ kompleksu $\widetilde{X}$ zachodzi $d(s_k, t_k)(\sigma) = d(\sigma)$. Ponieważ dwa homomorfizmy grup pokrywające się na generatorach są równe to $d(s_k, t_k) = d$. □

Wniosek 3.2.2. Dla każdego przekroju s_k zdefiniowanego na k-szkielecie X i każdego cyklu $a \in C^k(X; \pi_k(E_x))$, takiego iż $[c(s_k)] = [a]$, przekrój s_{k-1} mogę rozszerzyć do przekroju t_k zdefiniowanego na $X^{(k)}$ tak, aby $c(t_k) = a$. (gdzie [] - oznacza klasę kohomologii cyklu)

Dowód. Zauważmy iż $[c(s_k) - a] = 0$. Zatem $c(s_k) - a = \delta\gamma$ dla pewnego łańcucha $\gamma \in C^{k-1}(X; \pi_k(E_x))$. Z lematu 3.2.4 przekrój s_{k-1} mogę roszerzyć do t_k takiego iż $d(s_k, t_k) = \gamma$. Wtedy z lematu 3.2.3 zachodzi:

$$c(t_k) = c(s_k) - \delta d(s_k, t_k) = a.$$

□
Dzięki powyższemu wnioskowi możemy opisać, kiedy kocykl przeszkody reprezentuje zero w kohomologiach.

Twierdzenie 3.2.5. *Niech s_k będzie przekrojem zdefiniowanym na k-szkielecie X. Wówczas: $[c(s_k)] = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy przekrój $s_{k-1} := s_k|_{X^{(k-1)}}$ da się rozszerzyć do przekroju na $X^{(k+1)}$.*

Dowód. Gdy $[c(s_k)] = 0$ to z wniosku 3.2.2 przekrój s_{k-1} mogę rozszerzyć do przekroju t_k takiego, iż $c(t_k) = 0$. Zatem t_k da się roszerzyć na $(k+1)$-szkielet X, a zatem przekrój s_{k-1} mogę rozszerzyć na $(k+1)$-szkielet X.
Implikacja w drugą stronę wynika trywialnie z lematu 3.2.3. □

W dalszych rozważaniach przyda nam się poniższy lemat:

Lemat 3.2.6. *Niech $(E, e_0) \to (X, x_0)$ będzie rozwłóknieniem o prostych włóknach F. Niech $\pi_i(F) = 0$ dla $i < k$. Wtedy istnieje przekrój na k-szkielecie X i dowolne dwa takie przekroje są włókniście homotopijne na $(k-1)$-szkielecie X.*

Dowód. Pokażę najpierw istnienie przekroju s_k. Mogę zadać dowolnie przekrój s_0 na $X^{(0)}$. Ponieważ $\pi_i(F) = 0$ dla $i < k$, więc $C^*(X, \pi_i(F)) = 0$ dla $i < k$. Tak więc z twierdzenia 3.1.1 przeszkody do rozszerzania przekroju s_i na i-szkielecie X do przekroju s_{i+1} na $(i+1)$-szkielecie X są zerowe dla $i < k$. Zatem s_0 rozszerza się do

przekroju s_k na k-szkielecie X.
Załózmy teraz iż mamy dane 2 przekroje s_k i t_k na k-szkielecie X. Są one oczywiście włókniście homotopijne na 0-szkielecie X (bo przestrzeń prosta jest spójna, a zatem łukowo spójna jako CW kompleks). Ale z twierdzenia 3.2.1 przeszkody do rozszerzania homotopii na i-szkielecie X do homotopii na $(i+1)$-szkielecie X są zerowe gdy $(i+1) < k$. Zatem istnieje włóknista homotopia między s_k i t_k na $(k-1)$-szkielecie X. $\square$

Rozdział 4

Klasy Stiefela-Whitney'a jako przeszkody

4.1. Przeszkody, a wiązki wektorowe

Ważną rolę w teorii wiązek wektorowych pełnią liniowo niezależne niezerowe przekroje wiązki. Aby uwzględnić te warunki podczas szukania rozszerzeń przekroju należy rozpatrzeć wiązkę rozmaitości Stiefela.

Definicja 4.1.1 (rozmaitość Stiefela)**.** Niech $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wtedy dla dowolnych liczb naturalnych k i n, rozmaitością Stiefela nazywamy

$$V_k(\mathbb{F}^n) := \{(v_1, v_2, ...v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k | v_1, ...v_k \text{ są liniowo niezależne nad } \mathbb{F}\}$$

z naturalną topologią podprzestrzeni.
Grupa $GL(n)(\mathbb{F})$ działa na $V_k(\mathbb{F}^n)$ tak iż:

$$g(v_1, v_2, ...v_k) = (gv_1, gv_2, ...gv_k) \text{ dla } g \in GL(n)(\mathbb{F}).$$

Definicja 4.1.2 (wiązka rozmaitości Stiefela)**.** Niech $p\colon E \to X$ będzie n-wymiarową wiązką wektorową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nad X. Niech $P_E \to X$ będzie odpowiadającą jej $GL(n)$ wiązką główną. Niech $k < n$ i $V_k(\mathbb{F}^n)$ będzie rozmaitością Stiefela. Wtedy

$$p_k\colon V_k(E) := P_E \times_{GL(n)} V_k(\mathbb{F}^n) \to X$$

nazwiemy wiązką Stiefela wiązki E (stopnia k).

Lemat 4.1.1. *Niech $E \to X$ będzie wiązką wektorową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wtedy przekroje wiązki Stiefela $V_k(E)$ są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z uporządkowanymi zbiorami k liniowo niezależnych (w każdym punkcie) przekrojów wiązki E.*

Dowód. Włókna wiązki $V_k(E)$ to rozmaitości Stiefela włókien E. Przekrój s wiązki $V_k(E)$,w każdym punkcie $x \in X$ jest dany jako uporządkowny zbiór k liniowo niezależnych wektorów z włókna E_x. Niech $s_i(x)$ będzie i-tym z tych wektorów. Wówczas

funkcje s_i są k liniowo niezależnymi przekrojami wiązki E. Ciągłość funkcji s_i wystarczy sprawdzać lokalnie, a na pokryciu trywializującym wynika ona bezpośrednio z ciągłości przekroju s.
Ponadto k liniowo niezależnych przekrojów $s_1, ...s_k$ wiązki E wyznacza przekrój s wiązki $V_k(E)$ ($s(x) := (s_1(x), ..s_k(x))$ dla każego $x \in X$). Ciągłość s wystarczy sprawdzać na pokryciu trywializacyjnym, gdzie wynika ona bezpośrednio z ciągłości przekrojów $s_1, ...s_k$.
□

Zatem do badania istnienia k liniowo niezależnych przekrojów wiązki wektorowej wystarczy badać przekroje wiązki Stiefela. Aby użyć do tego teorii przeszkód potrzebujemy pokazać iż wiązka $V_k(E)$ ma proste (lub posiadające skończenie wiele homeomorficznych, prostych składowych spójności) włókna, oraz dowiedzieć się jak najwięcej o systemie lokalnych współczynników, a więc o grupach homotopii rozmaitości Stiefela.

W tym rozdziale zajmiemy się przypadkiem rzeczywistym

Lemat 4.1.2. *Rozmaitość Stiefela $V_k(\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią prostą dla $k < n$. Rozmaitość $V_n(R^n)$ ma dwie homeomorficzne spójne składowe będących przestrzeniami prostymi. Ponadto:*

$$\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n), v) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } i \leqslant n-k-1 \\ \mathbb{Z}_2 \text{ gdy } i = n-k \text{ jest parzyste, lub } k = 1 \\ \mathbb{Z} \text{ gdy } i = n-k \text{ jest nieparzyste i } k > 1 \end{cases}$$

Dowód. Rozpatrzmy ciąg rozwłóknienia:

$$V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \to V_k(\mathbb{R}^n) \to V_1(\mathbb{R}^n) \ \simeq \ S^{n-1}.$$

Z długiego ciągu grup homotopii dla rozwłóknienia otrzymujemy ciąg dokładny:

$$\pi_{i+1}(S^{n-1}) \to \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \to \pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) \to \pi_i(S^{n-1}).$$

Zatem dla $i < n-2$ zachodzi $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$. A więc dla $i \leqslant n-k-1$ zachodzi:

$$\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \simeq ... \simeq \pi_i(V_1(\mathbb{R}^{n-k+1})) \simeq \pi_i(S^{n-k}) = 0.$$

Ponadto, dla $i = n-k$:

$$\pi_{n-k}(V_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_{n-k}(V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})) \simeq ... \simeq \pi_{n-k}(V_2(\mathbb{R}^{n-k+2})).$$

Oznaczmy $m := n-k+2$ wówczas $\pi_{n-k}(V_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \pi_{m-2}(V_2(\mathbb{R}^m))$.
Obliczymy te ostatnie grupy.
Z długiego ciągu grup homotopii dla rozwłóknienia

$$S^{m-2} \to V_2(\mathbb{R}^m) \to S^{m-1}$$

wynika, iż $\pi_{m-2}(V_2(\mathbb{R}^m))$ jest kojądrem przekształcenia $\partial\colon \pi_{m-1}(S^{m-1}) \to \pi_{m-2}(S^{m-2})$. Pokażę, iż $\partial(1) = 1 + (-1)^{m-1}$.
Niech S_+ i S_- będą sferą z usuniętym odpowiednio dolnym biegunem e_- i górnym biegunem e_+. Niech punktem wyróżnionym sfery będzie górny biegun. Niech e będzie pewnym punktem z równika. Wtedy rozwłóknienie $V_2(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{p} S^{m-1}$ jest trywialne nad S_+ i S_-. Niech h_+ i h_- będą trywializacjami rozwłóknienia, $h_+\colon S_+ \times S^{m-2} \to p^{-1}(S_+)$ dane przez $h_+(a,b) = (a; \varphi(e_-, x)(b))$ gdzie $\varphi(e_-, x)$ jest obrotem w płaszczyźnie $\mathrm{span}(e_-, x)$ przekształcającym e_- na x. Analogicznie niech $h_-(a,b) = (a; \varphi(e_+, x)(b))$
Z definicji przekształcenia ∂, aby policzyć $\partial(1)$ musimy znaleźć podniesienie przekształcenia $(D^{m-1}, S^{m-2}) \xrightarrow{q} (S^{m-1}, e_+)$ ze względu na $V_2(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{p} S^{m-1}$.

Niech $\widetilde{q}\colon (D^{m-1}, S^{m-2}) \to V_2(\mathbb{R}^m)$; $\widetilde{q}(x) = \begin{cases} h_-(\pi(x), e) \text{ dla } |x| \leqslant 1/2 \\ h_+(\pi(x), (h_+^{-1} \circ h_-)(\frac{x}{|x|}, e)) \text{ dla } |x| \geqslant 1/2 \end{cases}$

Łatwo sprawdzić, iż funkcja g jest dobrze zdefiniowana. Ponadto jest ciągła na skończonym pokryciu domkniętym D^{m-1}, a zatem jest ciągła na całej przestrzeni. Tak więc z definicji:

$$\partial(1) = g|_{|x|=1} = (h_+^{-1} \circ h_-)(\frac{x}{|x|}, e),$$

(gdzie 1 jest generatorem $\pi_{m-1}(S^{m-1})$). Z definicjii h_+ i h_- punkt $\partial(1)(x)$ jest symetrią punktu e przez płaszczyznę prostopadłą do wektora x. Takie przeształcenie jest homotopijne z sumą przekształcenia identycznościowego i antypodyzmu.

$$\text{Zatem: } \partial(1) = 1 + (-1)^{m-1} \Rightarrow \pi_{m-2}(V_2(\mathbb{R}^m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ gdy } 2|m \\ \mathbb{Z}_2 \text{ w pp.} \end{cases}$$

Z powyższych rozważań, dla $k \leqslant (n-2)$, wynika, iż $\pi_0(V_k(\mathbb{R}^n)) = \pi_1(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0$, a zatem $V_k(\mathbb{R}^n)$ jest przestrznią prostą.
Gdy $k = n-1$ to:

$$V_{n-1}(\mathbb{R}^n) \simeq O(n)/O(1) \simeq SO(n)$$

jest spójną H-przestrzenią (działanie mnożenia macierzy), a zatem jest przestrzenią prostą (lemat 1.1.1).
Gdy $k = n$ to:

$$V_n(\mathbb{R}^n) \simeq O(n)$$

jest H-przestrzenią (działanie mnożenia macierzy), a zatem działanie $\pi_1(V_n(\mathbb{R}^n), Id)$ na wyższsych grupach homotopii $V_n(\mathbb{R}^n)$ jest trywialne. $O(n)$ posiada dwie homeomorficzne składowe spójności. $\square$

Niech $E \to X$ będzie rzeczywistą wiązką wektorową, a $V_k(E)$ stowarzyszoną z nią wiązką rozmaitości Stiefela. Z lematu 3.2.6 i 4.1.2 wynika, iż $V_k(E)$ posiada przekrój s_{n-k} na $(n-k)$-szkielecie X i gdy $k < n$ to każde dwa takie przekroje są włókniście homotopijne na $(n-k-1)$-szkielecie X. Zatem z wniosku 3.2.1 wynika iż ich przeszkody wyznaczają ten sam element $[c(s_{n-k})]$ w kohomologiach. Z twierdzenia 3.2.5 klasa kohomologii $[c(s_{n-k})] = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przekrój na $(n-k+1)$-szkielecie X.

Definicja 4.1.3. Oznaczmy $j = n - k + 1$ wtedy przy oznaczeniach jak powyżej j-tą przeszkodą nazywamy:

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} = [c(s_{n-k})] \in H^j(X; \{\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\})$$

Lemat 4.1.3. *Przeszkody $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}$ są funktorialne ze względu na przeciągnięcia. Dokładniej dla wiązki $E \to X$ i przekształcenia $f\colon Y \to X$ zachodzi $f^*\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(f^!E)$.*

Dowód. Z aproksymacji komórkowego wynika, że f jest homotopijne z pewnym przekształceniem komórkowym g. Przeciągając wiązkę $V_k(E)$ przez g otrzymuję wiązkę $V_k(g^!E) \simeq V_k(f^!E)$. Zatem z twierdzenia 3.1.2 i faktu iż dowolne dwa przekroje $V_k(g^!E)$ na $(n-k)$-szkielecie X wyznaczają tą samą przeszkodę wynika, iż:

$$f^*\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E) = g^*\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(g^!E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(f^!E).$$

□

Lemat 4.1.4. *Przeszkody $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}$ są stabilne w następującym sensie: dla dowolnej rzeczywistej wiązki wektorowej E, lokalne systemy $\{\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}$ i $\{\pi_{j-1}(V_{n-j+2}((E \oplus \theta)_x))\}$ są naturalnie izomorficzne. Izomorfizm indukowany na kohomologiach przeprowadza przeszkodę $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E)$ na $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E \oplus \theta)$.*

Dowód. Z dowodu lematu 4.1.2 wynika, iż inkluzja

$$\iota\colon V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n) = V_{n-j+1}(E_x) \to V_{n-j+2}((E \oplus \theta)_x) = V_{n-j+2}(\mathbb{R}^{n+1})$$

zadaje izomorfizm grup homotopii π_{j-1}. Niech ι_* będzie indukowanym przekształceniem:

$$\iota_*\colon\ H^j(X; \{\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}) \to H^j(X; \{\pi_{j-1}(V_{n-j+2}((E \oplus \theta)_x))\})$$

Aby pokazać $\iota_*(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E \oplus \theta)$ wystarczy pokazać, iż oba kocykle mają te same wartości na dowolnym elemencie $\alpha \in \pi_j(\widetilde{X}^j, \widetilde{X}^{j-1}, \widetilde{x}_0)$. Niech s będzie pewnym przekrojem wiązki $V_{n-j+1}(E)$ na j-szkielecie X. Niech s' będzie definiowanym przez s przekrojem wiązki $V_{n-j+2}(E \oplus \theta)$. Po przeciągnięciu wiązki nad dysk otrzymuje się następujący diagram przemienny (oznaczenia jak na pierwszym diagramie z dowodu twierdzenia 3.1.1).

$$\begin{tikzcd}
(S^{j-1}, 1) \arrow[r, "s_\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, "s'_\alpha"] & (p \circ \alpha)^! V_{n-j+1}(E) \arrow[d] & ((p \circ \alpha)^! V_{n-j+1}(E))_1 \arrow[l, "i_\alpha"'] \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d] & V_{n-j+1}(E)_x \arrow[d, "\iota"] \\
(D^j, S^{j-1}) & (p \circ \alpha)^! V_{n-j+2}((E \oplus \theta) \arrow[l, "q'_\alpha"'] & ((p \circ \alpha)^! V_{n-j+2}((E \oplus \theta))_1 \arrow[l, "i'_\alpha"'] \arrow[r, "\tau'_\alpha"] & V_{n-j+2}((E \oplus \theta)_x
\end{tikzcd}$$

Z przemienności powyższego diagramu i definicji kocyklu przeszkody wynika, iż

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E \oplus \theta)(\alpha) = \tau'^*_\alpha (i'^*_\alpha)^{-1}[s'_\alpha] = \iota_*(\tau^*_\alpha (i^*_\alpha)^{-1}[s_\alpha]) = \iota_* \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E)$$

□

Z ograniczeń na k wynika, iż przeszkody $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}$ są zdefiniowane dla $j \in \{1; 2; 3...; n\}$.
Z lematu 4.1.2 grupy występujące w loklnych systemach $\{\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}$ to $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{Z}_2$ z pewnym działaniem $\pi_1(X, x_0)$. Obydwa te systemy mają jedyny morfizm do systemu zadanego przez $\mathbb{Z}_2$ (z trywialnym działaniem). Ten morfizm z lematu 2.2.2 zadaje przekształcenie:

$$\text{mod } 2\colon H^j(X; \{\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}) \to H^j(X; \mathbb{Z}_2).$$

4.2. Klasy Stiefela Whitney'a

Rozpatrzmy rzeczywistą wiązkę wektorową $E \to X$. Rozważania z poprzedniego podrozdziału pozwalają rozpatrywać obrazy zadanych przez nią przeszkód przy przekształceniu mod 2 w $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$. W tym rozdziale pokaże iż są one klasami Stiefela-Whitney'a wiązki E.

Definicja 4.2.1 (Klasy Stiefela Whitney'a)**.** Klasami Stiefela Whitney'a nazywamy przyporządkowanie każdej rzeczywistej wiązce wektorowej $E \to X$ ciągu elementów $w_i(E) \in H^i(X; \mathbb{Z}_2)$ takich, że:

1. $w_0(E) = 1 \in H^0(X; \mathbb{Z}_2)$ i $w_j(E) = 0$ dla $j > dim(E)$
2. Klasy w_i zachowują się naturalnie ze względu na przeciągnięcia, czyli dla $f\colon Y \to X$ zachodzi
$$f^*(w_i(E)) = w_i(f^! E)$$
3. Dla wiązek E i E' nad tą samą przestrzenią bazową X zachodzi:
$$w_k(E \oplus E') = \sum_{i=0}^{k} w_i(E) w_{k-i}(E')$$
4. Dla jednowymiarowej wiązki kanonicznej γ nad $\mathbb{R}P(\infty)$ zachodzi:
$$w_1(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}_2 \simeq H^1(\mathbb{R}P(\infty))$$

Twierdzenie 4.2.1. *Klasy Stiefela Whitneya istnieją i są wyznaczone jednoznacznie. ([1] rozdział 8)*

Twierdzenie 4.2.2. *Dla każdej rzeczywistej wiązki wektorowe $E \to X$ zachodzi*

$$w_j(E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} \ mod\ 2.$$

Innymi słowami: j-ta klasa Stiefela-Whitney'a wiązki E jest redukcją modulo 2 przeszkody do rozszerzenia $n - (j-1)$ liniowo niezależnych przekrojów zdefiniowanych na $(j-1)$-szkielecie X do liniowo niezależnych przekrojów na j-szkielecie X.

Dowód. Zarówno klasy Stiefela Whitney'a jak i przeszkody są naturalne ze względu na przeciągnięcia, więc wystarczy pokazać równość z tezy dla wiązek uniwersalnych nad grassmanianami $G_n := G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Wiemy iż $H^*(G_n;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[w_1, ..., w_n]$, zatem

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} \bmod 2 = f_j(w_1, ...w_{j-1}) + a_{n,j}w_j \text{ dla pewnego } a_{n,j} \in \mathbb{Z}_2.$$

Z niezmienniczości ze względu na przeciągnięcia ta równość zachodzi dla każdej n-wymiarowej wiązki E. Rozpatrzmy kanoniczne włożenie $BO(j-1) \to BO(n)$ odpowiadające wiązce $\gamma^{j-1} \oplus \theta^{n-j+1}$ nad $BO(j-1)$ (gdzie γ^{j-1} jest wiązką kanoniczną). Ta wiązka posiada $n-j+1$ liniowo niezależnych przekrojów, więc jej j-przeszkoda i j-ta klasa Stiefela-Whitney'a znikają. Zatem:

$$0 = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} \bmod 2 = f_j(w_1, ...w_{j-1}).$$

Ponieważ klasy Stiefela-Whitney'a wiązki kanonicznej są algebraicznie niezależne to $f_j = 0$. Tak więc:

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} \bmod 2 = a_{n,j} * w_j \text{ gdzie } a_{n,j} \in \mathbb{Z}_2.$$

Aby dokończyć dowód wystarczy pokazać iż istnieje wiązka E, dla której

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(E) \bmod 2 \neq 0.$$

Zajmijmy się najpierw przypadkiem $n = j$.
Rozpatrzmy wiązkę Hopfa H nad $\mathbb{R}P(n)$ i jej dopełnienie E_n (takie iż $E_n \oplus H = \theta^{n+1}$). Wybierzmy CW strukturę na $\mathbb{R}P(n)$ tak, że

$$\mathbb{R}P(n)^{(n-1)} = \{[a_1, ...a_{n+1}] | a_1 = 0\}.$$

Wówczas na $(n-1)$-szkielecie $\mathbb{R}P(n)$ mamy oczywisty przekrój dany przez

$$s([0, a_2, ...a_{n+1}]) = (1, 0, ..., 0).$$

Niech $\widetilde{\sigma}_n$ będzie górną półsferą S^n - komórką nakrycia uniwersalnego $\mathbb{R}P(n)$. Pokażę, iż $c(s)(\widetilde{\sigma}_n)$ jest generatorem $\mathbb{Z}$. Przeciągnięcie wiązki E_n nad $\widetilde{\sigma}_n$, daje wiązkę styczną do półsfery, której obcięcie do równika jest wiązką $E' = \tau_{S^{n-1}} \oplus \theta$ (gdzie $\tau_{S^{n-1}}$ jest wiązką styczną do równika, a θ odpowiada prostej prostopadła do płaszczyzny, w której leży równik). Przekrój s przeciąga się na równik do przekroju $s_{\widetilde{\sigma}_n}$ dającego w każdym punkcie wektor jednostkowy wiązki trywialnej. Trywializacja wiązki E' jest dana przez $h(v, r) = v + rN$, gdzie N jest wektorem normalnym do równika leżącym w płaszczyźnie równika. Zatem $\psi \circ h \circ s_{\widetilde{\sigma}_n}$ (gdzie ψ jest rzutem na włókno w wiązce trywialnej) zadający element $c(s)(\widetilde{\sigma}_n)$ jest przekształceniem $S^{n-1} \to (\mathbb{R}^n - 0)$ przyporządkowującym każdemu punktowi sfery wektor normalny w tym punkcie. Zatem c(s)($\widetilde{\sigma}_n$)=$\psi \circ h \circ s_{\widetilde{\sigma}_n}$ jest generatorem grupy $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)$. Tak więc:

$$\langle \mathfrak{o}_n^{\mathbb{R}}(E_n); \widetilde{\sigma}_n \rangle = \pm 1 \Rightarrow \langle \mathfrak{o}_n^{\mathbb{R}}(E_n) \bmod 2; \widetilde{\sigma}_n \rangle = 1 \Rightarrow \mathfrak{o}_n(E_n) \bmod 2 \neq 0.$$

Zatem $a_{n,n} = 1$ i $w_n(E) = \mathfrak{o}_n^{\mathbb{R}}$ mod 2 dla każdej n-wymiarowej wiązki E.

W przypadku $j < n$ rozpatrzmy wiązkę $E = \gamma^j \oplus \theta^{n-j}$ nad $BO(j)$. Z twierdzenia dla przypadku $n = j$ i lematu 4.1.4 wynika, iż:

$$\text{mod } 2\ \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(\gamma^j \oplus \theta^{n-j}) = \text{mod } 2\ \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}(\gamma^j) = w_j(\gamma^j) = w_j(\gamma^j \oplus \theta^{n-j})$$

Zatem $a_{n,j} = 1$ i $w_j(E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}}$ mod 2 dla każdej n-wymiarowej wiązki E.
□

Wniosek 4.2.1. Gdy j jest parzyste i mniejsze od n to $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{R}} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $w_j = 0$.

Dowód. Przy założeniach wniosku $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$. Wtedy z lematu 2.2.2 przekształcenie mod 2 jest izomorfizmem,i wniosek jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 4.2.2. □

Rozdział 5

Klasy Cherna jako przeszkody

W poprzednim rozdziale związałem klasy Stiefela-Whitney'a rzeczywistej wiązki wektorowej z istnieniem liniowo niezależnych przekrojów. W tym rozdziale postaram się przeprowadzić podobne rozumowanie w przypadku zespolonym.

5.1. Przeszkody a przekroje wiązek zespolonych

Lemat 5.1.1. *Dla $k \leqslant n$ zespolona rozmaitość Stiefela $V_k(\mathbb{C}^n)$ jest przestrzenią prostą. Ponadto:* $\pi_i(V_k(\mathbb{C}^n), v) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } i \leqslant 2(n-k) \\ \mathbb{Z} \text{ gdy } i = 2(n-k)+1 \end{cases}$

Dowód. Rozpatrzmy ciąg rozwłóknienia:

$$V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1}) \to V_k(\mathbb{C}^n) \to V_1(\mathbb{C}^n) \ \simeq \ S^{2n-1}.$$

Z długiego ciągu grup homotopii dla rozwłóknienia otrzymujemy ciąg dokładny:

$$\pi_{i+1}(S^{2n-1}) \to \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \to \pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) \to \pi_i(S^{2n-1}).$$

Zatem dla $i < 2n-2$ zachodzi $\pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) \simeq \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1}))$. Tak więc dla $i \leqslant 2(n-k)+1$ zachodzi:

$$\pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) \simeq \pi_i(V_{k-1}(\mathbb{C}^{n-1})) \simeq ... \simeq \pi_i(V_1(\mathbb{C}^{n-k+1})) \simeq \pi_i(S^{2(n-k)+1})$$

Zatem dla $i \leqslant 2(n-k)$, grupa $\pi_i(V_k(\mathbb{C}^n)) = 0$. Ponadto dla $i = 2(n-k)+1$ zachodzi:

$$\pi_{2(n-k)+1}(V_k(\mathbb{C}^n)) \simeq \pi_{2(n-k)+1}(S^{2*(n-k)+1}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Z powyższych rozważań wynika, iż przestrzeń $V_k(\mathbb{C}^n)$ jest jednospójna, a zatem prosta dla $k \leqslant n-1$.
Gdy $k = n$ to: $V_n(\mathbb{C}^n)$ jest grupą unitarną a zatem spójną H-przestrzenią (działanie mnożenia macierzy), więc jest przestrzenią prostą. $\square$
Niech $E \to X$ będzie zespoloną wiązką wektorową, a $V_k(E)$ stowarzyszoną z nią wiązką

Stiefela. Z lematów 3.2.6 i 5.1.1 wynika, iż $V_k(E)$ posiada przekrój $s_{2(n-k)+1}$ na $2(n-k)+1$-szkielecie X i że każde dwa takie przekroje są włókniście homotopijne na $2(n-k)$-szkielecie X. Zatem z wniosku 3.2.1 wynika, iż przeszkody do ich rozszerzenia na kolejny szkielet, wyznaczają ten sam element $[c(s_{2(n-k)+1})]$ w kohomologiach. Z twierdzenia 3.2.5 wynika, iż klasa kohomologii $[c(s_{2(n-k)+1})] = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przekrój na $2*(n-k)+2$-szkielecie X.

Definicja 5.1.1. Oznaczmy $j = n-k+1$ wtedy przy oznaczeniach jak powyżej j-tą przeszkodą nazywamy:

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}} = [c(s_{2(n-k)+1})] \in H^{2j}(X; \{\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\})$$

Powtarzając dowód z poprzedniego rozdziału otrzymuję:

Lemat 5.1.2. *Przeszkody $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}$ są funktorialne ze względu na przeciągnięcia. Dokładniej dla wiązki $E \to X$ i przekształcenia $f\colon Y \to X$ zachodzi $f^*\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(f^!E)$.*

Lemat 5.1.3. *Przeszkody $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}$ są stabilne w następującym sensie: dla zespolonej wiązki wektorowej E, lokalne systemy $\{\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}$ i $\{\pi_{2j-1}(V_{n-j+2}((E\oplus\theta)_x))\}$ są naturalnie izomorficzne. Izomorfizm indukowany na kohomologiach przeprowadza przeszkodę $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E)$ na $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E\oplus\theta)$.*

Dowód. Z dowodu lematu 5.1.1 wynika, iż inkluzja:

$$\iota\colon V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n) = V_{n-j+1}(E_x) \to V_{n-j+2}((E\oplus\theta)_x) = V_{n-j+2}(\mathbb{C}^{n+1})$$

zadaje izomorfizm na π_{2j-1}. Niech ι_* będzie indukowanym przekształceniem:

$$\iota_*\colon\ H^{2j}(X; \{\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}) \to H^{2j}(X; \{\pi_{2j-1}(V_{n-j+2}((E\oplus\theta)_x))\})$$

Aby pokazać $\iota_*(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E\oplus\theta)$ wystarczy pokazać, iż oba kocykle zwracają te same wartości na dowolnym elemencie $\alpha \in \pi_{2j}(\widetilde{X}^{2j}, \widetilde{X}^{2j-1}, \widetilde{x}_0)$. Niech s będzie pewnym przekrojem wiązki $V_{n-j+1}(E)$ na $2j$-szkielecie X. Niech s' będzie indukowanym przez s przekrojem wiązki $V_{n-j+2}((E\oplus\theta)$. Po przeciągnięciu wiązki nad dysk otrzymuje się następujący diagram przemienny (oznaczenia jak na pierwszym diagramie dowodu twierdzenia 3.1.1).

$$\begin{tikzcd}
(S^{2j-1},1) \arrow[r, "s_\alpha"'] \arrow[d] \arrow[dr, "s'_\alpha"] & (p\circ\alpha)^! V_{n-j+1}(E) \arrow[d] & ((p\circ\alpha)^! V_{n-j+1}(E))_1 \arrow[l, "i_\alpha"'] \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d] & V_{n-j+1}(E)_x \arrow[d, "\iota"] \\
(D^{2j}, S^{2j-1}) & (p\circ\alpha)^! V_{n-j+2}((E\oplus\theta) \arrow[l, "q'_\alpha"] & ((p\circ\alpha)^! V_{n-j+2}((E\oplus\theta))_1 \arrow[l, "i'_\alpha"'] \arrow[r, "\tau'_\alpha"] & V_{n-j+2}((E\oplus\theta)_x
\end{tikzcd}$$

Z przemienności powyższego diagramu i definicji kocyklu przeszkody wynika, iż

$$\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E\oplus\theta)(\alpha) = \tau'^*_\alpha (i'^*_\alpha)^{-1}[s'_\alpha] = \iota_*(\tau^*_\alpha (i^*_\alpha)^{-1}[s_\alpha]) = \iota_*\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E)$$

□

Aby otrzymać twierdzenie podobne do 4.2.2 w przypadku zespolonym potrzebuję wykazać trywialność systemu lokalnego $\{\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))\}$ oraz zadać jego kanoniczne przekształcenie w $\mathbb{Z}$ (wybrać wyróżniony generator).

Lemat 5.1.4. *Wiązki rozmaitości Stiefela zespolonych wiązek wektorowych zadają trywialny system lokalny.*

Dowód. Wszystkie wiązki zespolone są przeciągnięciami wiązki kanonicznej, zatem wszystkie wiązki rozmaitości Stiefela zespolonych wiązek wektorowych są przeciągnięciami wiązki rozmaitości Stiefela wiązki kanonicznej. Z tego, iż zespolony grassmanian jest jednospójny wynika iż system lokalny generowany przez wiązkę rozmaitości Stiefela wiązki kanonicznej jest trywialny. Zatem wniosek wynika z lematu 2.1.3. □

Analogicznie mogę pokazać iż:

Lemat 5.1.5. *Wiązka sfer $S(E)$ rzeczywistej wiązki orientowalnej E, zadaje trywialny system lokalny.*

Dowód. Wszystkie wiązki orientowalne są przeciągnięciami kanonicznych wiązek orientowalnych, zatem wszystkie wiązki sfer orientowalnych wiązek wektorowych są przeciągnięciami wiązki sfer kanonicznych wiązek orientowalnych. Z tego, iż orientowalny grassmanian ($BSO(n)$) jest jednospójny wynika iż system lokalny generowany przez wiązkę sfer kanonicznej wiązki orientowalnej jest trywialny. Zatem wniosek wynika z lematu 2.1.3. □

Aby rozpatrywać przeszkody jako elementy $H^*(X;\mathbb{Z})$ wystarczy wybrać izomorfizmy ψ_j między $\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))$ a $\mathbb{Z}$ (czyli wyróżnić generator $\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x))$). Zauważmy, iż gdy $j = n$ to $V_1(E) = S(E)$ i orientacja wiązki E (pochodząca od struktury zespolonej) zadaje ψ_j.

$$\pi_{2j-1}(S(E)_x) \simeq H_{2j-1}(S(E)_x) \simeq H_{2j-1}(D(E)_x, S(E)_x) \simeq \mathbb{Z}$$

gdzie ostatni izomorfizm jest zadany przez orientację.
W przypadku gdy $j < n$ aby zadać ψ_j wybieram dowolną j-wymiarową podprzestrzeń zespoloną W przestrzeni E_x. Włożenie W w E_x zadaje włożenie $V_1(W)$ w $V_{n-j+1}(E_x)$ będące identycznością na pierwszym wektorze i stałe na wszystkich pozostałych. Zatem otrzymuję:

$$\psi_j \colon \pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(E_x)) \simeq \pi_{2j-1}(V_1(W)) \simeq H_{2j-1}(S(W)) \simeq H_{2j-1}(D(W), S(W)) \simeq \mathbb{Z}$$

gdzie ostatni izomorfizm jest zadany przez kanoniczną orientację przestrzeni zespolonej W. Tak zdefiniowane odwzorowanie nie zależy od wyboru włożenia $V_1(W)$ w $V_{n-j+1}(E_x)$ (bo grupa unitarna jest łukowo spójna) ani od wyboru podprzestrzeni W (bo grassmaniany zespolone są łukowo spójne).

Zauważmy, iż z definicji ψ_j oraz lematu 5.2 wynika, iż:

$$\psi_j(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}})(E) = \psi_j(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}})(E \oplus \theta).$$

Z definicji ψ_n, oraz lematu 5.1.5 wynika również, iż dla dowolnej n-wymiarowej wiązki orientowalnej E, $\psi_n \mathfrak{o}_n(E)$ jest dobrze zdefniowanym elementem $H^n(X;\mathbb{Z})$. Ponadto z definicji przeszkody (i równości $V_1(E) = V_1(E_{\mathbb{R}})$) wynika, iż dla dowolnej n-wymiarowej wiązki zespolonej E zachodzi:

$$\mathfrak{o}_n^{\mathbb{C}}(E) = \mathfrak{o}_{2n}^{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{R}}).$$

5.2. Klasy Cherna

Z powyższych rozważań wynika, iż dla wiązki zespolonej $E \to X$ mogę rozpatrywać $\psi_j \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}$ jako element $H^{2j}(X;\mathbb{Z})$, pokaże iż pokrywają się one z klasami Cherna.

Definicja 5.2.1 (Klasy Cherna)**.** Klasami Cherna nazywamy przyporządkowanie każdej zespolonej wiązce wektorowej $E \to X$ ciągu elementów $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ takich, że:

1. $c_0(E) = 1 \in H^0(X;\mathbb{Z}_2)$ i $c_j(E) = 0$ dla $j > dim(E)$
2. Klasy c_i są niezmiennicze ze względu na przeciągnięcia, czyli dla $f\colon Y \to X$ zachodzi
$$f^*(c_i(E)) = c_i(f^! E)$$
3. Dla wiązek E i E' nad tą samą przestrzenią bazową X zachodzi:
$$c_k(E \oplus E') = \Sigma_{i=0}^{k} c_i(E) c_{k-i}(E')$$
4. Dla jednowymiarowej zespolonej wiązki kanonicznej γ zachodzi:
$$c_1(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z} \simeq H^2(\mathbb{C}P(\infty)),$$
gdzie 1 jest wyróżnionym generatorem $H^2(\mathbb{C}P(\infty))$.

Twierdzenie 5.2.1. *Klasy Cherna istnieją i są wyznaczone jednoznacznie. ([1] rozdział 14)*

Twierdzenie 5.2.2. *Dla każdej zespolonej wiązki wektorowej $E \to X$, zachodzi*

$$c_j(E) = \psi_j(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E)).$$

Przed rozpoczęciem dowodu uzasadnię prawdziwość mocniejszy rezultat przy założeniu iż $j = n$.

Twierdzenie 5.2.3. *Dla każdej rzeczywistej, zorientowanej, n-wymiarowej wiązki $E \to X$, zachodzi:*

$$e(E) = \psi_n \mathfrak{o}_n.$$

gdzie $e(E)$ jest klasą Eulera zdefiniowaną tak jak w rozdziale 9 książki Milnora [1].

Dowód. Niech E_0 będzie wiązką E z wyjętym przekrojem zerowym. Wiązka przeciągnięta przez przekształcenie $\pi_0\colon E_0 \to X$ ma oczywisty, nigdzie nie znikający przekrój, zatem:

$$\pi_0^* \mathfrak{o}_n(E) = \mathfrak{o}_n(\pi_0^* E) = 0.$$

Z dokładności ciągu Gysina dla wiązki E zachodzi równość:

$$H^0(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e} H^n(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^n(E_0;\mathbb{Z}) \text{ zachodzi równość}$$
$$e(E) \cup \lambda = \psi_n \mathfrak{o}_n \text{ gdzie } \lambda \in H^0(X;\mathbb{Z}).$$

Biorąc za E wiązkę kanoniczną nad zorientowanym grassmanianem ($BSO(n)$) otrzymujemy, iż istnieje $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ takie, iż dla każdej rzeczywistej, zorientowanej, n-wymiarowej wiązki $E \to X$, jest prawdą iż:

$$\lambda_n e(E) = \psi_n \mathfrak{o}_n. \tag{5.1}$$

Wystarczy więc wykazać $\lambda_n e(E) = e(E)$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

Gdy 2 nie dzieli n to element $e(E)$ jest rzędu 2 i wystarczy pokazać, iż 2 nie dzieli λ. Z twierdzenia 4.2.2 po redukcji modulo 2 obydwu stron równości 5.1 otrzymuję

$$\lambda_n \cdot w_n(E) = w_n(E).$$

Ponieważ istnieje wiązka n-wymiarowa orientowalna o nietrywialnej najwyższej klasie Stiefela-Whitney'a to 2 nie dzieli λ_n, co dowodzi twierdzenia dla nieparzystego n.

Gdy $n = 2t$ to należy wykazać iż $\lambda_n = 1$. Rozpatrzmy wiązkę τ styczną do sfery $2t$-wymiarowej. Niech μ będzie fundamentalną klasą homologii S^n. Rozpatrzmy na sferze CW strukturę z jedej komórki 0-wymiarowej, jednej komórki $(n-1)$-wymiarowej - równika i dwóch komórek n-wymiarowych. Nazwijmy przekształcenia charakterystyczne komórek n wymiarowych α_1 i α_2: $(D^n, S^{n-1}) \to S^n$. Niech s będzie przekrojem τ na równiku przyporządkowującym każdemu punktowi wektor "w górę".
Wówczas:

$$2 = \chi(S^n) = \langle e(\tau), \mu \rangle. \text{([1] rozdział 11)}$$

Wystarczy zatem pokazać $\langle \psi_n \mathfrak{o}_n, \mu \rangle = 2$. Zauważmy iż

$$\langle \psi_n \mathfrak{o}_n, \mu \rangle = \langle \psi_n \mathfrak{o}_n, [\alpha_1] - [\alpha_2] \rangle = \psi_n \mathfrak{o}_n(\alpha_1) - \psi_n \mathfrak{o}_n(\alpha_2).$$

Z definicji przeszkody i rozumowania analogicznego do dowodu twierdzenia 4.2.2 wynika, iż $\mathfrak{o}_n(\alpha_1) = c(s)(\alpha_1)$ jest przekształceniem $S^{n-1} \to S^{n-1}$, które przyporządkowywuje punktowi sfery wektor normalny "na zewnątrz", czyli identyczność na sferze. Ponadto, na drugiej półsferze rozumowanie z twierdzenia 4.2.2 pokazuje że $\mathfrak{o}_n(\alpha_2) = c(s)(\alpha_2)$ jest przekształceniem $S^{n-1} \to S^{n-1}$, które zwraca wektor normalny do sfery "do wewnątrz". Tak więc $c(s)(\alpha_2)$ jest antypodyzmem sfery nieparzyście wielowymiarowej, czyli przekształceniem rzędu (-1).Zatem przekształcenie $\psi_n \mathfrak{o}_n(\alpha_1) - \psi_n \mathfrak{o}_n(\alpha_2)$ jest rzędu 2.

Tak więc $< \psi_n \mathfrak{o}_n), \mu >= 2$, czyli $\lambda_n = 1$. $\square$

Teraz możemy udowodnić twierdzenia 5.2.2.

Dowód. Pokażę, iż dla dowolnej n-wymiarowej wiżaki E oraz $j \leqslant n$:

$$\psi_j(\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}})(E) = a_{n,j} * c_j(E) \text{ gdzie } a_{n,j} \in \mathbb{Z}.$$

Zarówno klasy Cherna jak i przeszkody są naturalne ze względu na przeciągnięcie, więc wystarczy pokazać równość z tezy dla wiązki uniwersalnej nad grassmanianem n-wymiarowym G_n. Wiadomo, iż $H^*(G;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, ..., c_n]$, zatem

$$\psi_j \mathfrak{o}_j = f_j(c_1, ...c_{j-1}) + a_{n,j} * c_j.$$

Z niezmienniczości ze względu na przeciągnięcia taka równość zachodzi dla każdej n-wymiarowej zespolonej wiązki wektorowej E. Rozpatrzmy kanoniczne włożenie

$$BU(j-1) \to BU(n)$$

odpowiadające wiązce $\gamma^{j-1} \oplus \theta^{n-j+1}$ nad $BU(j-1)$ (gdzie γ^{j-1} jest wiązką kanoniczną). Ta wiązka posiada $n-j+1$ liniowo niezależnych przekrojów, więc jej j-przeszkoda i j-ta klasa Cherna znikają. Zatem

$$0 = \psi_j \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}} = f_j(c_1, ...c_{j-1}).$$

Ponieważ klasy Cherna wiązki kanonicznej są algebraicznie niezależne to $f_j = 0$. Zatem dla każdej wiązki zespolonej E zachodzi $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}} = a_{n,j} * c_j$, gdzie $a_{n,j} \in \mathbb{Z}$.
Z twierdzenia 5.2.3 wynika iż dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_{n,n} = 1$.
Rozpatrzmy wiązkę $E = \gamma^j \oplus \theta^{n-j}$ nad $BU(j)$. Z twierdzenia 5.2.3 i lematu wynika, iż:

$$\psi_j \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(\gamma^j \oplus \theta^{n-j}) = \psi_j \mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(\gamma^j) = e(\gamma^j) = c_j(\gamma^j) = c_j(\gamma^j \oplus \theta^{n-j})$$

Zatem $a_{n,j}$= 1 (bo $H^j(BU(j))$ jest beztorsyjna). Tak więc $c_j(E) = \psi_j \mathfrak{o}_j$ dla każdej n-wymiarowej wiązki zespolonej E.
$\square$

Wniosek 5.2.1. $\mathfrak{o}_j^{\mathbb{C}}(E) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $c_j(E) = 0$.

Dowód. Przekształcenie ψ_j jest izomorfizmem, zatem wniosek jest bezpośrednią kosekwencją twierdzenia 5.2.2. $\square$

Bibliografia

[1] John W.Milnor, James D. Stasheff *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, Number 76 (1974).

[2] Stefan Jackowski *Notes on fibre bundles and characteristic classes*, Warszawa, 2016.

[3] Agnieszka Bojanowska, Stefan Jackowski *Topologia Algebraiczna 1, Pomocnik Studenta*, Warszawa, 2016.

[4] Edwin H. Spanier *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1966.

[5] George W. Whitehead *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, (1978).

[6] N. Steenrod *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press (1951).

[7] A. T. Fomenko, D. B. Fuchs, V. L. Gutenmacher *Homotopic Topology* (1986).

[8] Glen E. Bredon *Topology and geometry*, Graduated texts in Mathematics 139 (1993).