

Lemat Higmana

Oznaczmy: $x \preceq y$ jeśli słowo x jest podciągiem y , np. $ab \preceq aabb$. Jest to częściowy porządek.

Lemat 1. [Lemat Higmana]

Jeśli $|\Sigma| < \infty$ to to dla każdego zbioru $X \subseteq \Sigma^*$ zbiór jego podstów minimalnych w sensie \preceq jest skończony.

Dowód.

Przypuśćmy, że teza jest fałszywa. Wtedy istnieje nieskończony ciąg słów x_1, x_2, \dots spełniający warunki:

1. $w_i \in \Sigma^*$ (niektóre ze słów w_i mogą nie należeć do L)
2. $i < j \rightarrow \text{not } (x_i \preceq x_j)$ (zauważmy, że może być $x_j \prec x_i$).

Wyberzmy spośród ciągów spełniających warunki 1-2 "minimalny" w sensie długości, tzn. $|x_1|$ minimalne, jeśli x_1 ustalone to $|x_2|$ minimalne itd.

Wyberzmy podciąg nieskończony x_{i_1}, x_{i_2}, \dots wszystkich słów z tego ciągu zaczynających się na pewną taką samą literę a . Usuńmy tę literę z początku każdego z tych słów otrzymując ciąg $x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots$. Wtedy ciąg $x_1, x_2, \dots, x_{i_1-1}, x'_{i_1}, x'_{i_2}, x'_{i_3}, \dots$ spełnia te same warunki co początkowy ciąg i jest "mniejszy", sprzeczność.