1 Szeregi potęgowe

Poszukiwanie rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych, zwane metodą Frobeniusa, jest bardzo ogólną metodą. Rozważmy równanie

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{1}$$

Z rozwiązywaniem równań przez szeregi potęgowe związane są pewne definicje.

Definicja 1.1 *Funkcja $f(t)$ jest analityczna w punkcie t_0, jeśli w otoczeniu tego punktu jest ona równa sumie swojego szeregu Taylora*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k$$

dla $|t - t_r| < R$, gdzie R jest pewną nieujemną liczbą rzeczywistą.

Definicja 1.2 *Punktem nieosobliwym równania (1) nazywamy taki punkt t_0, w otoczeniu którego funkcje $p(t)$ oraz $q(t)$ są analityczne.*

Definicja 1.3 *Regularnym punktem osobliwym równania (1) nazywamy taki punkt t_0 ,w otoczeniu którego funkcje $p(t)$ i $q(t)$ nie są analityczne, ale już funkcje $(t - t_0)p(t)$ oraz $(t - t_0)^2 q(t)$ są analityczne.*

Jeśli t_0 jest punktem nieosobliwym równania (1), to istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania. Aby je znaleźć, wystarczy rozwinąć w szeregi potęgowe funkcje $p(t)$ oraz $q(t)$, a następnie wstawić je do rozważanego równania. Oczywiście postulujemy rozwiązanie również w postaci szeregu potęgowego. O tym, że takie rozumowanie jest poprawne mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 *Jeśli t_0 jest punktem nieosobliwym równania (1), to istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania. Rozwiązania te są analityczne na przedziale $|t - t_0| < R$, gdzie R jest mniejszym z promieni zbieżności szeregów Taylora (w otoczeniu t_0) funkcji $p(t)$ oraz $q(t)$.*

Jednak w równaniach postaci (1), które modelują pewne zjawiska fizyczne, zazwyczaj występują osobliwości. Następujące twierdzenie mówi jak postępować w takiej sytuacji.

Twierdzenie 1.2 *Jeśli t_0 jest regularnym punktem osobliwym równania różniczkowego (1) oraz funkcje $(t-t_0)p(t)$, $(t-t_0)^2q(t)$ są analityczne na przedziale $|t-t_0|<R$ i mają rozwinięcia w szeregi potęgowe*

$$(t-t_0)p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t-t_0)^k=p_0+p_1(t-t_0)+p_2(t-t_0)^2+\dots \quad ,$$

$$(t-t_0)^2q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t-t_0)^k=q_0+q_1(t-t_0)+q_2(t-t_0)^2+\dots \quad ,$$

a $r_1 \geqslant r_2$ (o ile są liczbami rzeczywistymi) są pierwiastkami równania indeksowego

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0,$$

to dla $t_0<t<t_0+R$ równanie różniczkowe (1) ma dwa liniowo niezależne rozwiązania, które przyjmują jedną z trzech postaci

<u>*Przypadek 1. $r_1-r_2\neq N$, $N\in\mathbb{N}$*</u>
Jeśli r_1-r_2 nie jest liczbą naturalną, to mamy

$$y_1(t)=(t-t_0)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k,$$

$$y_2(t)=(t-t_0)^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(t-t_0)^k.$$

<u>*Przypadek 2. $r_1=r_2$*</u>
Jeśli mamy pierwiastek podwójny $r_1=r_2$, to otrzymujemy

$$y_1(t)=(t-t_0)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k,$$

$$y_2(t)=y_1(t)\ln(t-t_0)+(t-t_0)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(t-t_0)^k.$$

<u>*Przypadek 3. $r_1-r_2=N$, $N\in\mathbb{N}$*</u>
Jeśli r_1-r_2 jest liczbą naturalną, to

$$y_1(t)=(t-t_0)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k,$$

$$y_2(t) = cy_1(t)\ln(t-t_0) + (t-t_0)^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(t-t_0)^k,$$

gdzie c jest dowolną stałą (może być również równa zero).

2 Równanie Eulera

Wiele zagadnień fizycznych sprowadza się do równań różniczkowych cząstkowych. Jednym ze sposobów ich rozwiązywania jest metoda rozdzielania zmiennych, która przekształca dane równanie w układ równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązania powstałych równań zaliczamy do funkcji specjalnych fizyki matematycznej. Mają one bardzo szerokie zastosowania, nie tylko w fizyce, ale także w innych dziedzinach, np. w statystyce i teorii prawdopodobieństwa.

Jedną ze szczególnych klas równań są równania Eulera, które możemy otrzymać rozwiązując równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych. Równanie Eulera (drugiego rzędu) jest dane wzorem

$$at^2y'' + bty' + cy = 0.$$

Zauważmy, że punkt $t_0 = 0$ jest punktem osobliwym tego równania.

Załóżmy, że $t > 0$ oraz że poszukiwane rozwiązania będą postaci

$$y(t) = t^r.$$

Wstawiając postulowane rozwiązanie do równania, dostajemy

$$(ar(r-1) + br + c)t^r = 0.$$

Z założenia o t wynika, że ostatnia równość jest spełniona, o ile $ar(r-1)+b(r)+c = 0$. Analogicznie jak w przypadku równań jednorodnych o stałych współczynnikach, rozpatrywać należy trzy przypadki wartości pierwiastków tego równania. Niekiedy można rozwiązać to równanie dla $t < 0$. Stosując podstawienie

$$\eta = -t \quad ,$$

możemy sprowadzić ten przypadek do przypadku, gdy $t > 0$.

Możemy zatem zebrać razem rozwiązania dla ujemnych i dodatnich t

- dla dwóch pierwiastków rzeczywistych

$$y(t) = c_1|t|^{r_1} + c_2|t|^{r_2}, \ \ dla \ \ t \neq 0\,.$$

- dla pierwiastka podwójnego

$$y(t) = c_1|t|^r + c_2 t^r \ln|t|,$$

- dla pierwiastków zespolonych

$$y(t) = |t|^\lambda (c_1 \cos(\mu \ln|t|) + c_2 \sin(\mu \ln|t|))$$

.

Powyższe rozwiązania są prawdziwe dla każdego przedziału niezawierającego 0.

Równanie Eulera pojawia się jako krok pośredni przy rozwiązywaniu liniowych jednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu przez rozwijanie w szeregi potęgowe. Istotnie, rozważmy równanie

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{2}$$

gdzie $t = 0$ jest regularnym punktem osobliwym. Zakładamy dodatkowo, że funkcje

$$tp(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ... \quad ,$$

$$t^2 q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + ...$$

są analityczne dla pewnego przedziału $|t| < R$. Mnożąc równanie (2) przez t^2 dostajemy

$$t^2 y'' + t^2 p(t) y' + t^2 q(t) y = 0 \quad ,$$

co jest równoważne

$$t^2 y'' + t(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ...)y' + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + ...)y = 0 \quad .$$

Dla wartości bliskich zeru, rozwiązania tego równania będą zachowywać się jak rozwiązania równania

$$t^2 g'' + t p_0 g' + q_0 g = 0 \quad .$$

Jest to równanie Eulera drugiego rzędu, którego rozwiązanie, zgodnie z zaprezentowaną teorią, sprowadza się do znalezienia pierwiastków równania

$$r(r-1) + r p_0 + q_0.$$

Powyższe równanie to równanie indeksowe, pojawiające się w twierdzeniach dotyczących metody Frobeniusa.

Równania Eulera (drugiego rzędu) można napotkać także przy rozwiązywaniu stacjonarnego równania Schrödingera (stosowanego np. do opisu atomu wodoru) czy podczas analizy potencjału pola elektrostatycznego. Inne zastosowanie tego równania różniczkowego możemy zauważyć przy modelowaniu struktury gwiazd.

3 Model budowy gwiazd

Pierwszym pytaniem, jakie powstaje w związku z konstrukcją modelu wewnętrznej budowy gwiazdy, jest: czym jest gwiazda? Intuicyjnie, gwiazda powinna być przedstawiona jako pewnego rodzaju kula zbudowana z powiązanej grawitacyjnie materii. Siła grawitacji, która działa w kierunku środka (jądra) gwiazdy, nadaje obiektowi kształt właśnie zbliżony do kulistego; materia dąży do tego, aby znaleźć się jak najbliżej ośrodka masy, jakim jest jądro. W terminach fizycznych taki obiekt nazywamy sferycznie symetrycznym polem grawitacyjnym. Podstawową teorią, która dobrze opisuje zachowanie pola grawitacyjnego jest ogólna teoria względności. Określa ona zależności pomiędzy geometrią czasoprzestrzeni tak zdefiniowanej gwiazdy a rozkładem materii wewnątrz pola grawitacyjnego. Einstein w swojej teorii względności rozpatruje czasoprzestrzeń jako czterowymiarową różniczkowalną rozmaitość. Potrzebny jest zatem nowy układ współrzędnych; powszechnie stosuje się współrzędne Schwarzschilda (t, r, θ, φ). Możemy zdefiniować metrykę Schwarzschilda poprzez formę

$$ds^2 = -e^{2v(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\ .$$

Rozważany modele budowy wewnętrznej gwiazd stanowi pewną klasę rozwiązań równania pola grawitacyjnego ogólnej teorii względności. Jest to równanie tensorowe. Ze względu na charakter naszych rozważań, pominiemy pojawiającą się w równaniu stałą kosmologiczną, a także będziemy używać jednostek, które zapewnią nam równość tensorów bez mnożenia przez stałą.

Równanie pola Einsteina ma postać

$$G^{**} = T^{**}\ ,$$

gdzie G^{**} jest tensorem Einsteina, a T^{**} jest tensorem energii-pędu.

Tensor Einsteina określa krzywiznę czasoprzestrzeni, związaną ze skalarem długości zdefiniowanym powyżej (nie uwzględniamy modeli dynamicznych).

Tensor energii-pędu używany jest do opisu materii i energii wypełniającej pole grawitacyjne, jakim jest gwiazda. Niesie on informację o przestrzennym rozkładzie energii i ciśnienia. W celu poznania najprostszego modelu, rozważamy tylko przypadek izotropowości ciśnienia.

Oba te tensory są w postaci macierzy

$$\begin{bmatrix} G^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{44} \end{bmatrix} \quad .$$

Wyrażenia na poszczególne elementy tensora G^{**} są w postaci równań różniczkowych. Aby otrzymać cztery równania różniczkowe, przyrównujemy do siebie kolejne składowe

$$G^{ii} = T^{ii}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad .$$

Aby wyliczyć kolejne elementy tensora G^{**}, trzeba przejść przez szereg różniczkowań elementów tensora metrycznego, zatem ze względu na przejrzystość przykładu, obliczenia pomijamy. Ostatecznie z równania tensorowego dostajemy trzy różne równania

$$\frac{1}{r^2}(r(1 - e^{-2\lambda}))' = \rho,$$

$$-\frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\lambda}) + \frac{2v'}{r}e^{-2\lambda} = p,$$

$$e^{-2\lambda}(v'' + v'^2 + \frac{v'}{r} - v'\lambda' - \frac{\lambda}{r}) = p,$$

gdzie ρ jest gęstością energii, a p jest ciśnieniem.
Rozważmy teraz podstawienie

$$x = Cr^2,$$

$$Z(x) = e^{-2\lambda(r)},$$

$$A^2y^2(x) = e^{2v(r)}.$$

Oczywiście przy takim podstawieniu zmienia się tensor metryczny, dostajemy nowy element długości i po wielu przekształceniach, otrzymamy nowy równoważny układ równań

$$\frac{1-Z}{x} - 2Z' = \frac{\rho}{C},$$

$$4Z\frac{y'}{y} + \frac{Z-1}{x} = \frac{p}{C},$$

$$4Zx^2y'' + 2Z'x^2y' + (Z'x - Z + 1)y = 0.$$

gdzie $'$ oznacza różniczkowanie względem x. Pole grawitacyjne jest tutaj reprezentowane przez potencjał grawitacyjny, oznaczony jako $Z(x)$.

Gwiazdy charakteryzują się zróżnicowaną aktywnością magnetyczną. Z tego powodu musimy uwzględnić obecność nie tyle pola magnetycznego, co pola elektromagnetycznego, gdyż pola elektryczne i magnetyczne są wzajemnie związane. Relację tych pól opisują równania Maxwella. Aby nasz model był kompletny, przechodzimy więc do układu równań Einsteina-Maxwella. W zdefiniowanych powyżej zmiennych, przyjmuje on postać

$$\frac{1-Z}{x} - 2Z' = \frac{\rho}{C} + \frac{E^2}{2C},$$

$$4Z\frac{y'}{y} + \frac{Z-1}{x} = \frac{p}{C} - \frac{E^2}{2C},$$

$$4Zx^2y'' + 2Z'x^2y' + (Z'x - Z + 1 - \frac{E^2x}{C})y = 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{C} = \frac{4Z}{x}(xE' + E)^2,$$

gdzie σ jest gęstością ładunku, natomiast $E(= E(x))$- natężeniem pola elektrycznego.

Ostatecznie dostaliśmy układ opisujący zachowanie pola grawitacyjnego dla naładowanego płynu idealnego. Zauważmy, że w przypadku gdy $E = 0$ równania Einsteina-Maxwella redukują się do układu równań Einsteina, zdefiniowanych uprzednio. Widzimy zatem, że otrzymany model jest bardzo ogólnym przypadkiem.

Mamy cztery równania z sześcioma niewiadomymi: y, ρ, p, Z, σ i E. Możemy na podstawie pewnych założeń fizycznych określić potencjał grawitacyjny Z oraz natężenie pola elektrycznego E tak, żeby trzecie równanie układu można było scałkować. To równanie jest warunkiem ogólnym na izotropowość ciśnienia i całe zagadnienie sprowadza się do scałkowania tego właśnie równania, dlatego będziemy je nazywać równaniem głównym.

<u>MODEL 1.</u>

Zdefiniujmy potencjał grawitacyjny Z jako

$$Z = \frac{1+ax}{1+bx},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Tak określone Z jest funkcją regularną w $x = 0$, czyli w centrum gwiazdy i z fizycznego punktu widzenia dobrze zachowuje się we wnętrzu gwiazdy dla wielu wartości a i b. Zatem ten wybór Z z fizycznego punktu widzenia jest dobry.

Wstawiając tak zdefiniowane Z do równania głównego, dostajemy

$$4(1+ax)(1+bx)y'' + 2(a-b)y' + \left(b(b-a) - \frac{E^2(1+bx^2)}{Cx}\right)y = 0\,.$$

W celu uproszczenia nowopowstałego równania zastosujmy podstawienie

$$\begin{aligned} &X = 1 + bx, \qquad b \neq 0 \\ &Y(X) = y(x). \end{aligned}$$

Wtedy

$$4X\left(aX - (a-b)\right)\frac{d^2Y}{dX^2} + 2(a-b)\frac{dY}{dX} + \left((b-a) - \frac{E^2X^2}{C(X-1)}\right)Y = 0\,.$$

Rozwiązanie tego równania będzie możliwe, o ile określimy funkcję E. Niech

$$E^2 = \frac{\alpha C(X-1)}{X^2} = \frac{\alpha Cbx}{(1+bx)^2}\,,$$

gdzie α jest stałą. Wzór ten w znacznym stopniu uprości nasze rozważane równanie różniczkowe. Również z fizycznego punktu widzenia tak określone natężenie pola elektrycznego E jest dobrze zdefiniowane. Znika ono w centrum gwiazdy ($x = 0$) i pozostaje ciągłe i ograniczone dla wszystkich punktów wewnętrznych gwiazdy.

Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$4X\left(aX - (a-b)\right)\frac{d^2Y}{dX^2} + 2(a-b)\frac{dY}{dX} + \left((b-a) - \alpha\right)Y = 0\,.$$

Przejdźmy teraz do rozwiązań. Rozważamy dwa przypadki.

<u>Przypadek 1. $a = b$</u>

Nasze równanie sprowadza się wtedy do równania Eulera

$$X^2\frac{d^2Y}{dX^2} - \frac{\alpha}{4a}Y = 0\,.$$

Rozwiązujemy je, korzystając z teorii równań Eulera. Znajdźmy zatem pierwiastki równania

$$r^2 - r - \frac{\alpha}{4a} = 0$$

Jeśli $\alpha > 0$, to istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste

$$r_1 = \tfrac{1+\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}, \qquad r_2 = \tfrac{1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}$$

i rozwiązanie ogólne jest postaci

$$Y = c_1X^{r_1} + c_2X^{r_2} = c_1X^{\frac{1+\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}} + c_2X^{\frac{1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}}\,.$$

Wracając teraz do zmiennych początkowych

$$y = c_1(1+ax)^{\frac{1+\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}} + c_2(1+ax)^{\frac{1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}},$$

o ile $\alpha > 0$.
Jeśli $\alpha < 0$, to mamy dwa pierwiastki urojone

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}.$$

W tym przypadku

$$Y = \sqrt{X}\left(c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln X\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln X\right)\right),$$

czyli w początkowych zmiennych

$$y = \sqrt{1+ax}\left(c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln(1+ax)\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln(1+ax)\right)\right).$$

Zatem, podsumowując zaprezentowane wyniki, otrzymujemy

$$y = \begin{cases} c_1(1+ax)^{\frac{1+\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}} + c_2(1+ax)^{\frac{1-\sqrt{1+\frac{\alpha}{a}}}{2}} & ,\alpha > 0 \\ \sqrt{1+ax}\left(c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln(1+ax)\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{a+\alpha}{4a}}\ln(1+ax)\right)\right) & ,\alpha < 0 \end{cases}$$

<u>Przypadek 2. $a \neq b$</u>

Stosujemy metodę Frobeniusa rozwijania w szereg potęgowy wokół $X = 0$. Rozważamy szereg

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^{n+r},$$

gdzie $c_0 \neq 0$. Wstawiając postulowane rozwiązanie do naszego równania głównego, dostajemy

$$2(a-b)c_0 r\left(-2(r-1)+1\right)X^{r-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2(a-b)c_{n+1}(n+r+1)\left(-2(n+r)+1\right) + c_n\left(4a(n+r)(n+r-1) - (a-b+\alpha)\right)\right)X^{n+r}$$
$$= 0.$$

Znajdujemy równanie indeksowe

$$(a-b)c_0 r(2(r-1)-1)=0\,.$$

Z założeń wynika, że musi być $r=0$ lub $r=\frac{3}{2}$.

Przyrównujemy współczynniki do zera przy wszystkich potęgach X, co prowadzi do następującej zależności rekurencyjnej

$$c_{n+1}=\frac{4a(n+r)(n+r-1)-(a-b+\alpha)}{2(a-b)(n+1+r)(2(n+r)-1)}c_n\,,$$

dla każdego $n\geqslant 0$. Stąd

$$c_{n+1}=\prod_{p=0}^{n}\frac{4a(p+r)(p+r-1)-(a-b+\alpha)}{2(a-b)(p+1+r)(2(p+r)-1)}c_0\,.$$

Możemy teraz znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania układu. Dla $r=0$, mamy rozwiązanie

$$Y_1=c_0\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{4ap(p-1)-(a-b+\alpha)}{2(a-b)(p+1)(2p-1)}X^{n+1}\right]\,,$$

czyli

$$y_1=c_0\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{4ap(p-1)-(a-b+\alpha)}{2(a-b)(p+1)(2p-1)}(1+bx)^{n+1}\right]\,.$$

Otrzymujemy drugie rozwiązanie, opowiadające wartości $r=\frac{3}{2}$

$$Y_2=c_0X^{\frac{3}{2}}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{a(2p+3)(2p+1)-(a-b+\alpha)}{(a-b)(2p+5)(2p+2)}X^{n+1}\right]\,,$$

co jest równoważne

$$y_2=c_0(1+bx)^{\frac{3}{2}}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{a(2p+3)(2p+1)-(a-b+\alpha)}{(a-b)(2p+5)(2p+2)}(1+bx)^{n+1}\right]\,.$$

Zatem rozwiązanie ogólne dane jest wzorem

$$y=d_1y_1+d_2y_2=d_1c_0\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{4ap(p-1)-(a-b+\alpha)}{2(a-b)(p+1)(2p-1)}(1+bx)^{n+1}\right]$$

$$+d_2c_0(1+bx)^{\frac{3}{2}}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{p=0}^{n}\frac{a(2p+3)(2p+1)-(a-b+\alpha)}{(a-b)(2p+5)(2p+2)}(1+bx)^{n+1}\right]\,,$$

gdzie d_1 i d_2 - dowolne stałe.

Można oczywiście przyjąć także inne założenia o Z i E.