Dodatkowe wyjaśnienia o łańcuchach Markowa

RPiS – Grupa 3

Styczeń 2021

Na zajęciach przeanalizowaliśmy *Model Ehrenfestów*, czyli zadanie 9. z serii zadań o łańcuchach Markowa. Doszliśmy tam do pewnej konsternacji spowodowanej nieostrością pojęć rozkład graniczny i rozkład stacjonarny. W szczególności autor zadania na *Smurfie* sugeruje, że są to pojęcia równoważne. Okazuje się, że literatura podaje inaczej.

Niech $X_1, X_2, \ldots$ to łańcuch Markowa na przestrzeni stanów S, który ma macierz przejścia M. Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jeśli:

$$\pi M = \pi,$$

czyli gdy $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ oraz dla każdego $j \in S$ zachodzi $\pi_j \geqslant 0$ i $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{i,j}$.

Niech znów $X_1, X_2, \ldots$ to łańcuch Markowa na przestrzeni stanów S. Powiemy, że $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ jest rozkładem granicznym tego łańcucha, jeśli dla każdych $i, j \in S$ zachodzi:

$$\lim_{n \to \infty} p_{i,j}(n) = \pi_j.$$

Twierdzenie ergodyczne w wersji z notatek do wykładu (8.21) mówi, że dla każdego nieprzywiedlnego i nieokresowego łańcucha Markowa o skończonej przestrzeni stanów istnieje rozkład graniczny (oczywiście taki rozkład może być tylko jeden) i jest on zarazem rozkładem stacjonarnym. W mocniejszej wersji pokazuje się czasem również, że taki łańcuch ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny.

Można udowodnić, że nieprzywiedlny łańcuch Markowa na skończonej przestrzeni stanów ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny (nie jest potrzebne założenie nieokresowości). To dość nietrudne zadanie, które można spróbować rozwiązać samodzielnie (wskazówka: skorzystać z powyższego wzmocnienia twierdzenia ergodycznego). Oczywiście na rozkład graniczny nie ma szans, co jest również wyjaśnione na *Smurfie* (8.23).

W notatkach do wykładu jest sformułowane jeszcze jedno ciekawe twierdzenie – dla danego nieprzywiedlnego i nieokresowego łańcucha Markowa o skończonej przestrzeni stanów i rozkładzie stacjonarnym $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ zachodzi $\mu_{j,j} = \frac{1}{\pi_j}$ dla każdego stanu $j \in S$ (8.24). Pojawia się dość naturalne pytanie, czy w tym twierdzeniu założenie nieokresowości jest istotne. Wszakże wiemy, że łańcuchy okresowe także mają rozkład stacjonarny. Okazuje się, że rzeczywiście jest to prawdą (znów nietrudne ćwiczenie w podobnym duchu, co poprzednie).

Resumując – mimo, że w omawianym zadaniu łańcuch Markowa opisujący ilość cząsteczek w pierwszej komorze jest okresowy, to nie sprawia nam to większych kłopotów. Możemy poszukać rozkładu stacjonarnego (wiemy, że istnieje taki dokładnie jeden i spełnia $\pi = \pi M$), a następnie średni czas powrotu do stanu, gdy wszystkie cząstki są w pierwszej komorze to $\mu_{n,n} = \frac{1}{\pi_n}$. Dokładne wyliczenia pozostawiam do samodzielnego przeprowadzenia.

Literatura

[1] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*

[2] Post w dyskusji na *Cross Validated*, `https://stats.stackexchange.com/q/105358`

[3] Wykład ze *Smurfa*, `http://smurf.mimuw.edu.pl/node/713`