RPiS – notatki z ćwiczeń 12

Grupa 3

Styczeń 2021

Zadanie o ruinie gracza

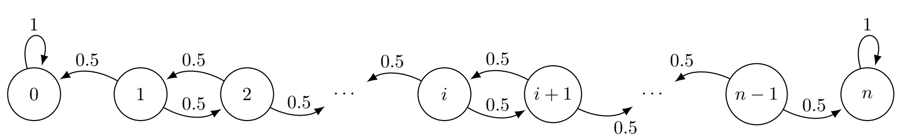
Treść

Gracz rozpoczyna grę z kapitałem k zł. W każdym kroku gry wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ i z tym samym prawdopodobieństwem $1 - p = \frac{1}{2}$ przegrywa 1 zł. Gracz kończy grę, gdy albo wygra fortunę ($= n$ zł) albo zbankrutuje. Oblicz:

1. prawdopodobieństwo wygrania fortuny oraz
2. średnią liczbę kroków do zakończenia gry.

Rozwiązanie

Opisaną sytuację możemy modelować łańcuchem Markowa o $n+1$ stanach oznaczających aktualny kapitał gracza (czyli zbiór stanów $S = \{0, 1, \dots, n\}$). Ponadto ze stanu $0 < i < n$ przechodzimy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ do stanu $i - 1$ i z tym samym prawdopodobieństwem do stanu $i+1$. Aby modelować, że po bankructwie lub wygraniu fortuny kończymy rozgrywkę, przyjmujemy, że ze stanu 0 z prawdopodobieństwem 1 w nim zostajemy i analogicznie dla stanu n. Poniższy rysunek przedstawia opisany łańcuch:



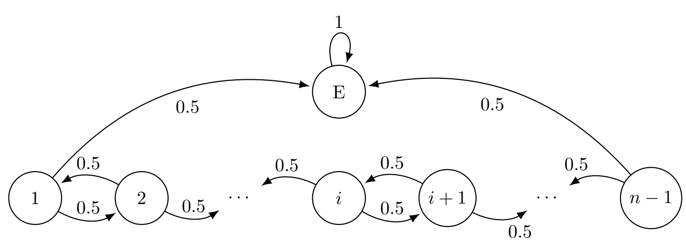
Wiemy, że tylko stany 0 i n są powracające – pozostałe są chwilowe. W związku z tym, używając oznaczenia z wykładu, zachodzi $f_{i,0} + f_{i,n} = 1$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n$. W takim razie chcemy policzyć $f_{k,n}$ – prawdopodobieństwo, że grę zakończymy wygrywając fortunę (wtedy $f_{k,0} = 1 - f_{k,n}$).

Zauważmy, że ten łańcuch nie jest łańcuchem nieprzywiedlnym – nie możemy więc stosować twierdzenia ergodycznego. Możemy jednak użyć wzorów z wykładu i zapisać:

$$
\begin{aligned}
f_{1,n} =& \frac{1}{2} f_{0,n} + \frac{1}{2} f_{2,n} = \frac{1}{2} f_{2,n} \\
& \dots \\
f_{i,n} =& \frac{1}{2} f_{i-1,n} + \frac{1}{2} f_{i+1,n} \\
& \dots \\
f_{n-1,n} =& \frac{1}{2} f_{n-2,n} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} f_{n-2,n} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Zauważamy, że mamy do czynienia z układem $n-1$ niezależnych liniowo równań z $n-1$ niewiadomymi, tak więc istnieje jednoznaczne rozwiązanie. Żeby je znaleźć, w zasadzie najłatwiej jest je zgadnąć i sprawdzić, że działa. Ręczne rozwiązanie tego układu dla małych n pozwala przypuszczać, że zachodzi $f_{i,n} = \frac{i}{n}$. Bezpośrednie sprawdzenie pozwala potwierdzić, że rzeczywiście te liczby spełniają wszystkie równania. Ostatecznie więc szansa na wygranie fortuny to $\frac{k}{n}$.

Zajmiemy się teraz obliczeniem średniego czasu gry. Interesuje więc nas średni czas dojścia do zbioru $\{0, n\}$. Żeby łatwiej wykonywać analizę i używać oznaczeń z wykładu sklejmy stany 0 i n w jeden nowy stan E. Tracimy w ten sposób informację o przyczynie zakończenia gry (bankructwo czy wygrana fortuny), ale nie jest ona potrzebna do rozwiązania zadania. Nasz nowy łańcuch wygląda następująco:



Znów, używając oznaczeń z wykładu, chcemy policzyć $\mu_{k,E}$. Spróbujmy to zrobić ponownie zapisując odpowiedni układ równań:

$$
\begin{aligned}
\mu_{1,E} =& \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mu_{2,E}) = 1 + \frac{1}{2}\mu_{2,E} \\
\mu_{2,E} =& \frac{1}{2}(1 + \mu_{1,E}) + \frac{1}{2}(1 + \mu_{3,E}) = 1 + \frac{1}{2}\mu_{1,E} + \frac{1}{2}\mu_{3,E} \\
& \dots \\
\mu_{i,E} =& 1 + \frac{1}{2}\mu_{i-1,E} + \frac{1}{2}\mu_{i+1,E} \\
& \dots \\
\mu_{n-1,E} =& 1 + \frac{1}{2}\mu_{n-2,E}.
\end{aligned}
$$

Znów mamy do czynienia z układem $n-1$ niezależnych liniowo równań z $n-1$ niewiadomymi, więc ma on jednoznaczne rozwiązanie. Ponownie moglibyśmy zgadnąć rozwiązanie i sprawdzić, że ono działa, ale dla odmiany postaramy się uargumentować jak tego rozwiązania szukać. Rozpatrzmy najpierw przypadek n parzystego, to jest $n = 2m$ dla pewnego naturalnego m. Łatwo zobaczyć, że przez symetrię $\mu_{l,E} = \mu_{n-l,E}$, czyli także $\mu_{m-l,E} = \mu_{m+l,E}$. Upraszcza to na przykład środkowe równanie:

$$\mu_{m,E} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{m-1,E} + \frac{1}{2}\mu_{m+1,E} = 1 + \mu_{m-1,E}$$

i możemy pójść tym tropem jeszcze dalej:

$$\mu_{m-1,E} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{m-2,E} + \frac{1}{2}\mu_{m,E} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{m-2,E} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_{m-1,E},$$

czyli:

$$\mu_{m-1,E} = 3 + \mu_{m-2,E}.$$

Analogicznie dostajemy:

$$\mu_{m-2,E} = 5 + \mu_{m-3,E}$$

i tak dalej. Jako że kolejne liczby nieparzyste sumują się do kwadratów liczb naturalnych, to dostajemy z tych rozważań:

$$\mu_{m,E} = \mu_{m-l,E} + l^2.$$

Zobaczmy teraz co dzieje się w równaniu na $\mu_{1,E}$. Tam powinniśmy mieć:

$$\mu_{m,E} - (m-1)^2 = \mu_{1,E} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{2,E} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{m,E} - \frac{1}{2}(m-2)^2,$$

a to jest równoważne do:

$$\mu_{m,E} = 2(m-1)^2 + 2 - (m-2)^2 = m^2.$$

Po prostych obliczeniach dostajemy więc

$$\mu_{i,E} = i(n-1).$$

Te obliczenia nie były może tak bardzo formalne, jak być powinny, ale nie musieliśmy przesadnie dbać o formalizm. Istotnie, zauważyliśmy już, że nasz układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. W takim razie wystarczy tylko sprawdzić, że tak *obliczone* współczynniki go spełniają. Łatwe rachunki to potwierdzają. Swoją drogą, dla n nieparzystego można powtórzyć powyższe rozumowanie, odpowiednio je oczywiście modyfikując, i dostać podobne wyniki. Nie musimy jednak tego robić – mamy jakiegoś kandydata i możemy zweryfikować, że jest on poprawny także dla n nieparzystych. Ostatecznie więc średni czas rozgrywki wynosi $k(n-k)$.