RPiS- ćwiczenia 10

Grupa 3

Styczeń 2021

Przypomnienie

1. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły z gęstością $g_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ jeśli dla każdego (a,b) zachodzi $\int_a^b g_X(x)dx = \mathbb{P}(X \in (a,b))$.
2. Dystrybuanta zmiennej losowej X to funkcja $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$.
3. Własności dystrybuanty:
   - F_X niemalejąca;
   - prawostronnie ciągła (dla każdego ciągu malejącego $x_n \to x$ zachodzi $F_X(x_n) \to F_X(x)$);
   - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
4. Zmienna X ma rozkład jednostajny $X \sim Unif(a,b)$ jeśli jej gęstość $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ jeśli $x \in A, 0$ w p. p.), $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$
5. Zmienna X ma rozkład wykładniczy $X \sim Exp(\lambda)$ jeśli jej gęstość $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}$. $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$. $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
6. Zmienna X ma rozkład normalny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ jeśli jej gęstość $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Zachodzi $N(\mu,\sigma^2) = \mu + \sigma N(0,1)$.
7. $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$.
   $\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx$ gdzie g jakaś funkcja mierzalna o ile $\int_{\mathbb{R}} |g(x)f_X(x)|dx < \infty$.
8. Dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład prawdopodobieństwa, tzn. jeśli dla pewnych zmiennych losowych X, Y zachodzi $F_X = F_Y$, to również $X \sim Y$.
   Np. jeśli mamy zmienną losową Z i wiemy, że $F_Z(t) = 1 - e^{-42t}$ to z tego wynika $Z \sim Exp(42)$.

Zadanie 2

Oblicz wariancję rozkładu wykładniczego.

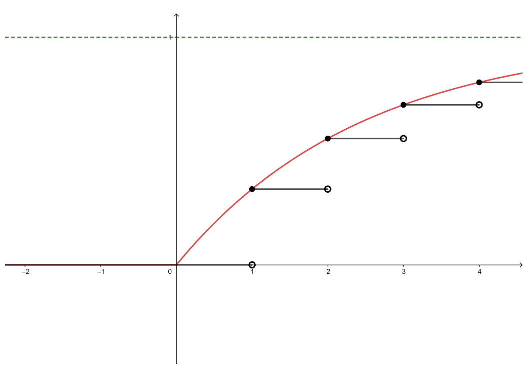
$X \sim Exp(\lambda)$, $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \\ \mathbb{E}X^2 &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ (-e^{-\lambda x})' &= \lambda e^{-\lambda x} \\ \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx &= \int_0^\infty x^2 (-e^{-\lambda x})' dx = [x^2(-e^{-\lambda x})]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}X = \frac{2}{\lambda^2} \\ Var(X) &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Zadanie 3

Uzasadnij nieformalne stwierdzenie, że rozkład wykładniczy jest "ciągłą wersją" rozkładu geometrycznego. W tym celu porównaj dystrybuanty tych rozkładów.

$X \sim Exp(\lambda)$ wtedy $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ dla $t \geqslant 0$.
$Y \sim Geom(p)$ wtedy $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{k-1} p$.
$\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - (1-p)^k$ dla $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(Y \leqslant 2.7) = \mathbb{P}(Y \leqslant 2)$
$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(Y \leqslant \lfloor t \rfloor) = 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ dla $t \in \mathbb{R}$
$1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor} = 1 - e^{\ln(1-p)\lfloor t \rfloor}$ czyli w punktach całkowitych mamy to samo dla $\lambda = -\ln(1-p)$



Porównanie dystrybuant rozkładów $Geom(1/3)$ i $Exp(-\ln \frac{2}{3})$

Zadanie 5

Oblicz wariancję rozkładu normalnego.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \mu + \sigma N(0,1)$.
$Y \sim N(0,1)$ - ile wynoszą $\mathbb{E}Y, \mathbb{E}Y^2$?

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{\mathbb{R}} x f_Y(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

bo całkujemy funkcję nieparzystą po całym $\mathbb{R}$, a ponadto

$$\int_0^\infty |xe^{-x^2/2}| dx < \int_0^\infty |e^x e^{-x^2/2}| dx = \int_0^\infty |e^{-x^2/2+x}| dx$$

a $e^{poly(x)}$ gdzie $poly(x) \to -\infty$ kiedy $x \to \infty$ jest całkowalna od 0 do ∞. Czyli $\mathbb{E}N(0,1) = 0$ oraz $\mathbb{E}N(\mu, \sigma^2) = \mathbb{E}[\mu + \sigma N(0,1)] = \mathbb{E}\mu + \sigma \mathbb{E}N(0,1) = \mu$.

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_Y(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$(-e^{-\frac{x^2}{2}})' = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = [x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-\frac{x^2}{2}})]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 + \int f_Y(x) dx = 1$$

$Var(Y) = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = 1 - 0 = 1$
$Var(X) = Var(\mu + \sigma Y) = Var(\mu) + Var(\sigma Y) = \sigma^2 Var(Y) = \sigma^2$.