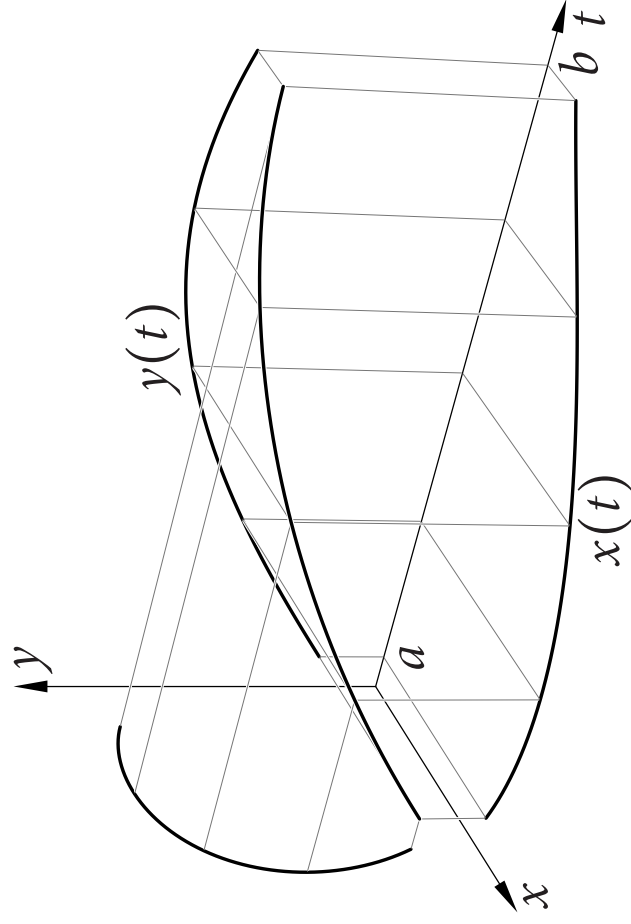


Modelowanie geometryczne

Przemysław Kiciak

Wiadomości wstępne

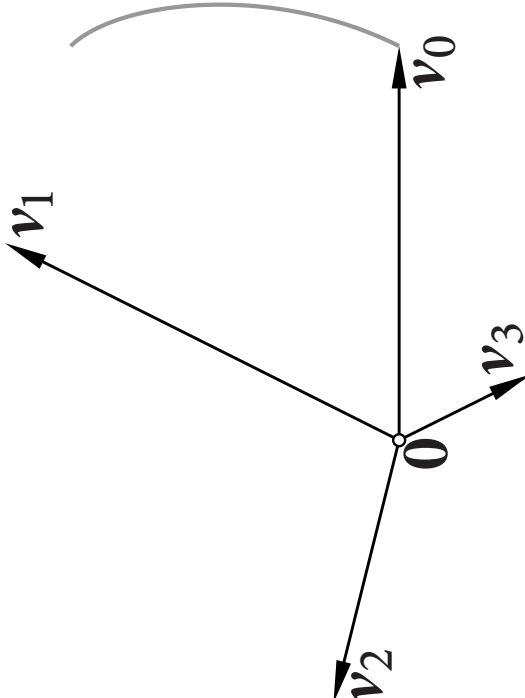
Krzywa parametryczna



$$y \uparrow \mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$$

A 2D diagram showing a curve in a coordinate system with axes x and y . The curve is a smooth, concave-down shape, starting from the y -axis and ending near the x -axis.

Reprezentacja w bazie potęgowej — niewygodna


$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3$$
$$t \in [0, 1]$$

Algorytm Aitkena

Dane są węzły interpolacyjne u_0, \dots, u_n i punkty $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$.

Jeśli krzywe \mathbf{q} i \mathbf{r} stopnia $n - 1$ są rozwiązaniami zadań odpowiednio dla węzłów u_0, \dots, u_{n-1} oraz u_1, \dots, u_n , to krzywa wielomianowa stopnia n

$$\mathbf{p}(t) = \frac{u_n - t}{u_n - u_0} \mathbf{q}(t) + \frac{t - u_0}{u_n - u_0} \mathbf{r}(t)$$

jest rozwiązaniem zadania interpolacyjnego $\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{p}_i$:

$$\mathbf{p}(u_0) = 1 \cdot \mathbf{q}(u_0) + 0 \cdot \mathbf{r}(u_0) = \mathbf{p}_0,$$

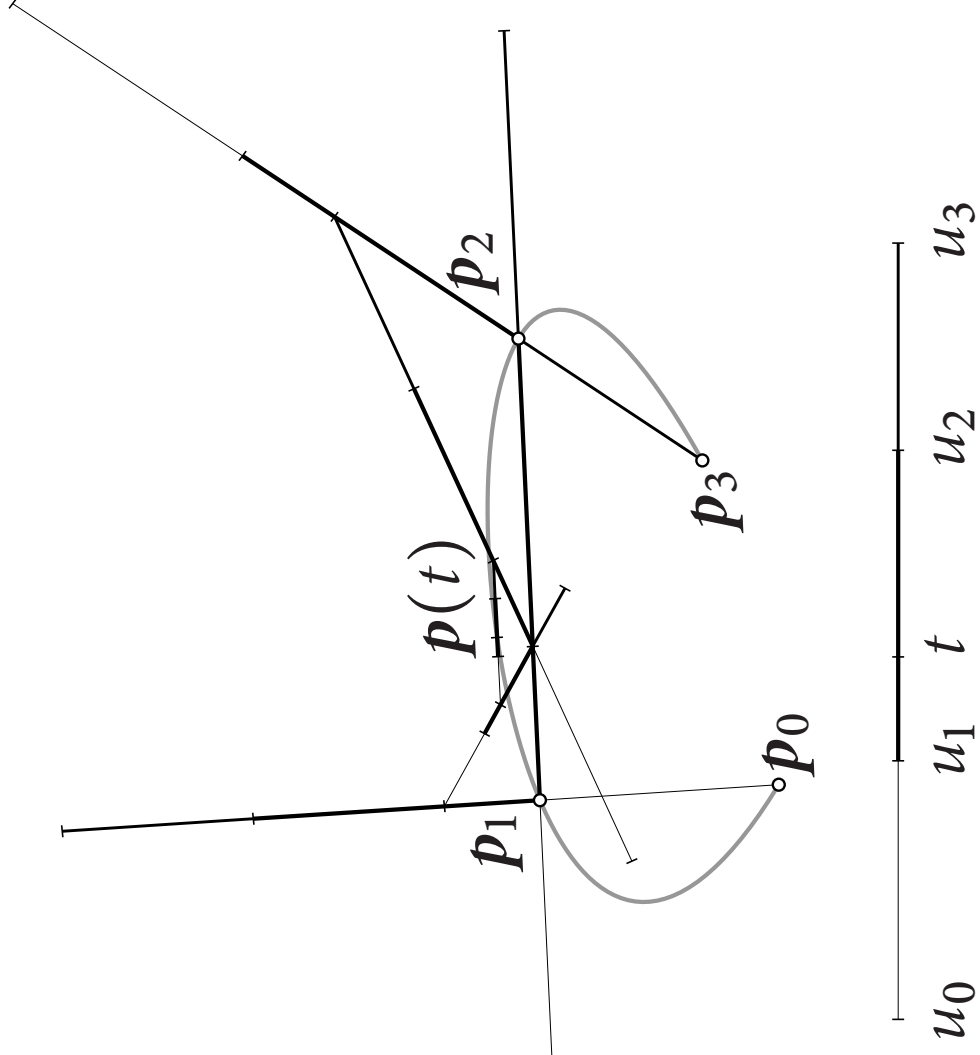
$$\mathbf{p}(u_i) = \frac{u_n - u_i}{u_n - u_0} \mathbf{p}_i + \frac{u_i - u_0}{u_n - u_0} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n - 1,$$

$$\mathbf{p}(u_n) = 0 \cdot \mathbf{q}(u_n) + 1 \cdot \mathbf{r}(u_n) = \mathbf{p}_n.$$

Algorytm:

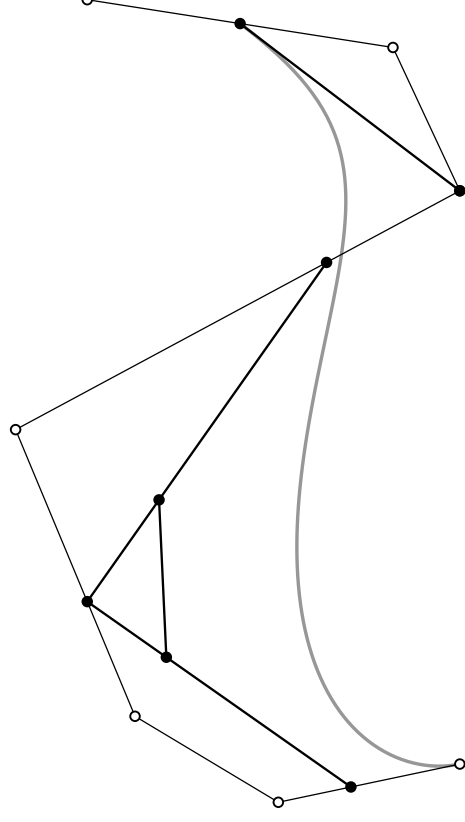
```
/*  $p_i^{(0)} = p_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ . */  
for (  $j = 1; j \leq n; j++$  )  
  for (  $i = 0; i \leq n - j; i++$  )  
     $p_i^{(j)} = \frac{u_{i+j} - t}{u_{i+j} - u_i} p_i^{(j-1)} + \frac{t - u_i}{u_{i+j} - u_i} p_{i+1}^{(j-1)}$  ;  
/*  $p(t) = p_0^{(n)}$ . */
```


Ilustracja:



Obcinanie narożników

Na danej łamanej wybieramy dwa dowolne punkty i fragment łamanej między nimi zastępujemy odcinkiem. Jeśli początkowa łamana ma skończoną długość, to ten proces jest zawsze zbieżny (de Boor, 1987).

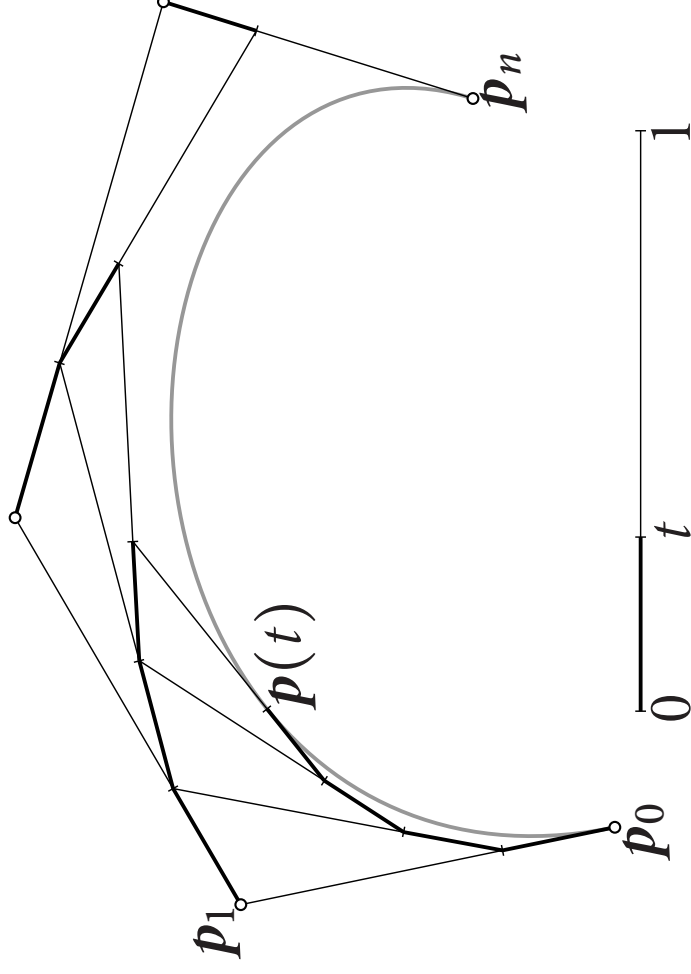


Wszystkie krzywe otrzymane przez obcinanie narożników mają **własność zmniejszania wariacji**: liczba przecięć krzywej z dowolną hiperpłaszczyzną (np. prostą na płaszczyźnie lub płaszczyzną w przestrzeni trójwymiarowej) nie jest większa niż liczba przecięć początkowej łamanej z tą hiperpłaszczyzną.

Uwaga: Mowa tu o miejscach przecięcia, nie punktach, bo obcinanie może wytworzyć odcinek położony w rozpatrywanej hiperpłaszczyźnie, który będzie częścią granicznej krzywej.

Krzywe Béziera

Algorytm de Casteljau



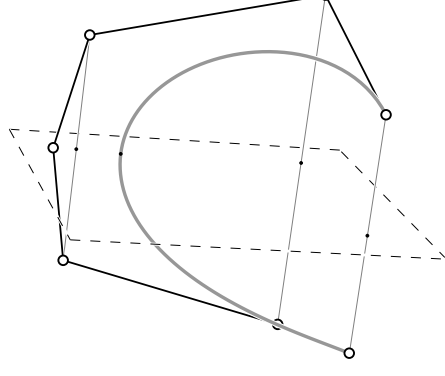
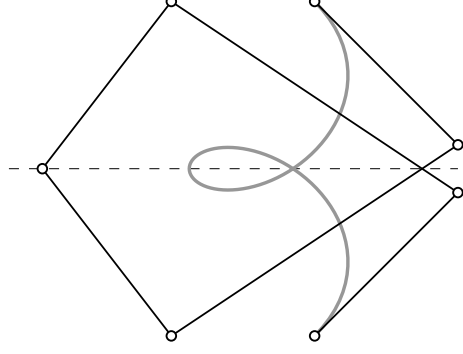
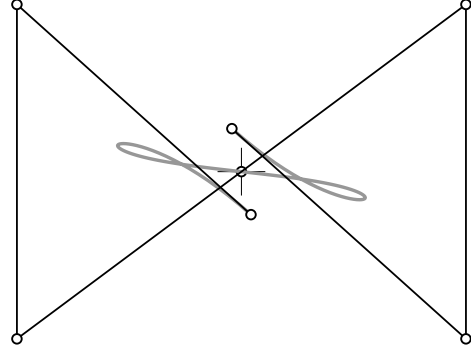
Algorytm:

```
/*  $p_i^{(0)} = p_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ . */  
for (  $j = 1; j \leq n; j++$  )  
    for (  $i = 0; i \leq n - j; i++$  )  
         $p_i^{(j)} = (1 - t)p_i^{(j-1)} + t p_{i+1}^{(j-1)}$  ;  
/*  $p(t) = p_0^{(n)}$ . */
```

Własności wynikające z algorytmu natychmiast:

- **Krzywa wielomianowa:** krzywa Béziera z $n + 1$ punktami kontrolnymi ma parametryzację wielomianową stopnia n .
- **Własność otoczki wypukłej:** dla $t \in [0, 1]$ punkty $\mathbf{p}(t)$ leżą w otoczce wypukłej łamanej kontrolnej.
- **Afiniczna niezmienniczość reprezentacji:** dla dowolnego przekształcenia afinicznego f obraz krzywej \mathbf{p} w tym przekształceniu jest reprezentowany przez punkty kontrolne $f(\mathbf{p}_0), \dots, f(\mathbf{p}_n)$.
- **Interpolacja skrajnych punktów kontrolnych:** $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_n$.

- **Symetria:** jeśli łamana kontrolna jest symetryczna względem pewnego punktu, prostej lub płaszczyzny, to krzywa jest symetryczna, co więcej, parametryzacja jest symetryczna względem tego punktu, prostej lub płaszczyzny.



Baza wielomianów Bernsteina

$$B_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{dla } i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

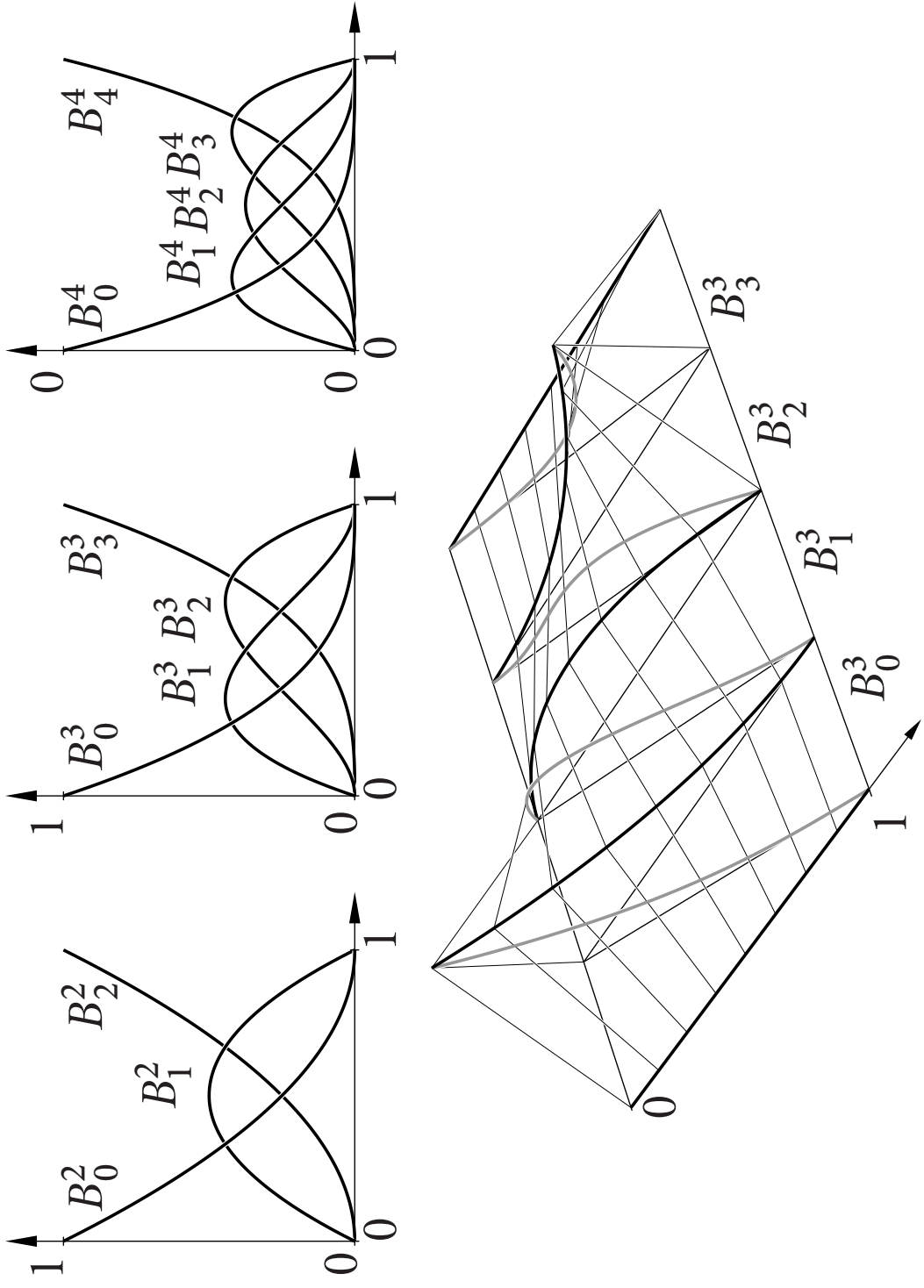
Przyjmujemy umowę, że $B_i^n(t) = 0$ dla $i < 0$ oraz $i > n$.

Zależność rekurencyjna:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (2)$$

Dowód: $B_0^0(t) = 1$ dla każdego t . Dla $n > 0$ podstawiamy

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) &= \\ (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} &= \\ \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} &= B_i^n(t). \quad \square \end{aligned}$$



Punkty kontrolne są współczynnikiemami krzywej w bazie Bernsteina.

Dowód indukcyjny: Dla $n = 0$ to jest oczywiste. Dla $n > 0$ oznaczamy symbolami \mathbf{q} i \mathbf{r} krzywe reprezentowane przez punkty kontrolne $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$ i $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Wtedy z algorytmu de Casteljau i wzoru (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (1-t)\mathbf{q}(t) + t\mathbf{r}(t) = \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} B_i^{n-1}(t) = \\ &= \mathbf{p}_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)) + \mathbf{p}_n t B_{n-1}^{n-1}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t). \quad \square \end{aligned}$$

Własności wielomianów Bernsteina i krzywych Béziera:

- Rozkład jedynki: $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
- Dodatniość: $B_i^n(t) \geq 0$ dla $t \in [0, 1]$.
- Pochodna: $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$
(dla $i = 0$ oraz $i = n$ tu korzystamy z umowy).
- Ekstrema: Wartość maksymalną na odcinku $[0, 1]$ wielomian B_i^n przyjmuje w punkcie $\frac{i}{n}$.
Dla $i = 1, \dots, n - 1$ jest ona równa $\frac{n!}{n^n} \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{i! (n-i)!}$.

- Całka: Dla $i = 0, \dots, n$ jest $\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$.

Dowód:

$$\int_0^1 B_n^n(t) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Niech $i < n$. Z założenia indukcyjnego, $\int_0^1 B_{i+1}^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$.

Całkując przez części, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_i^n(t) dt &= \int_0^1 \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} dt \\ &= \int_0^1 \binom{n}{i} \frac{n-i}{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} dt \\ &= \int_0^1 \binom{n}{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} dt = \int_0^1 B_{i+1}^n(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

- Podwyższenie stopnia:

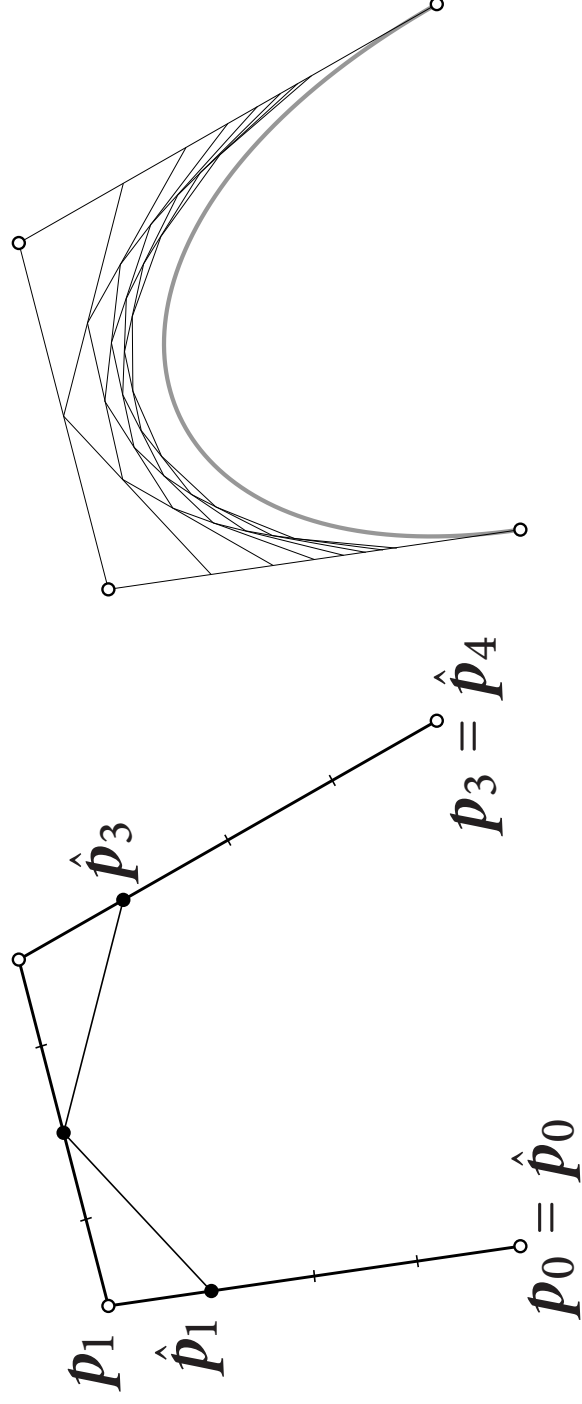
$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{\mathbf{p}}_i B_i^{n+1}(t), \quad \hat{\mathbf{p}}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{p}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{p}_i.$$

Uwaga: Nieokreślone punkty \mathbf{p}_{-1} i \mathbf{p}_{n+1} są mnożone przez 0.

Dowód:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= ((1-t) + t) \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i (1-t) B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i t B_i^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Podwyższenie stopnia jest obcinaniem narożników.



Wniosek: Odcinek sparametryzowany ze stałą prędkością ma punkty kontrolne $\mathbf{p}_i = \frac{n-i}{n}\mathbf{p}(0) + \frac{i}{n}\mathbf{p}(1)$.

Dowód: Dla $n = 1$ to jest oczywiste.

Założenie indukcyjne dla $n > 1$, że parametryzacja stopnia $n - 1$ ma punkty kontrolne $\tilde{\mathbf{p}}_i = \frac{n-1-i}{n-1}\mathbf{p}(0) + \frac{i}{n-1}\mathbf{p}(1)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_i &= \frac{i}{n}\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} + \frac{n-i}{n}\tilde{\mathbf{p}}_i \\
 &= \frac{i}{n}\left(\frac{n-1-i+1}{n-1}\mathbf{p}(0) + \frac{i-1}{n-1}\mathbf{p}(1)\right) + \frac{n-i}{n}\left(\frac{n-1-i}{n-1}\mathbf{p}(0) + \frac{i}{n-1}\mathbf{p}(1)\right) \\
 &= \left(\frac{i}{n}\frac{n-i}{n-1} + \frac{n-i}{n}\frac{n-1-i}{n-1}\right)\mathbf{p}(0) + \left(\frac{i}{n}\frac{i-1}{n-1} + \frac{n-i}{n}\frac{i}{n-1}\right)\mathbf{p}(1) \\
 &= \left(\frac{i(n-i)}{n(n-1)} + \frac{(n-i)(n-1-i)}{n(n-1)}\right)\mathbf{p}(0) + \left(\frac{i(i-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-i)i}{n(n-1)}\right)\mathbf{p}(1) \\
 &= \frac{(n-i)(n-1)}{n(n-1)}\mathbf{p}(0) + \frac{(n-1)i}{n(n-1)}\mathbf{p}(1). \quad \square
 \end{aligned}$$

Wielokrotnie powtarzane podwyższanie stopnia wytwarza ciąg łamanych kontrolnych zbiegających jednostajnie do łuku krzywej Béziera odpowiadającego $t \in [0, 1]$, reprezentowanej przez wszystkie te łamane.

Dowód jest dosyć żmudny. Zbieżność tego procesu obcinania narożników jest dosyć wolna, ale istotny jest fakt, że krzywą Béziera można otrzymać z łamanej kontrolnej przez obcinanie narożników.

Pochodna krzywej Béziera

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i n B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i n B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} n B_i^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i n B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) B_i^{n-1}(t).\end{aligned}$$

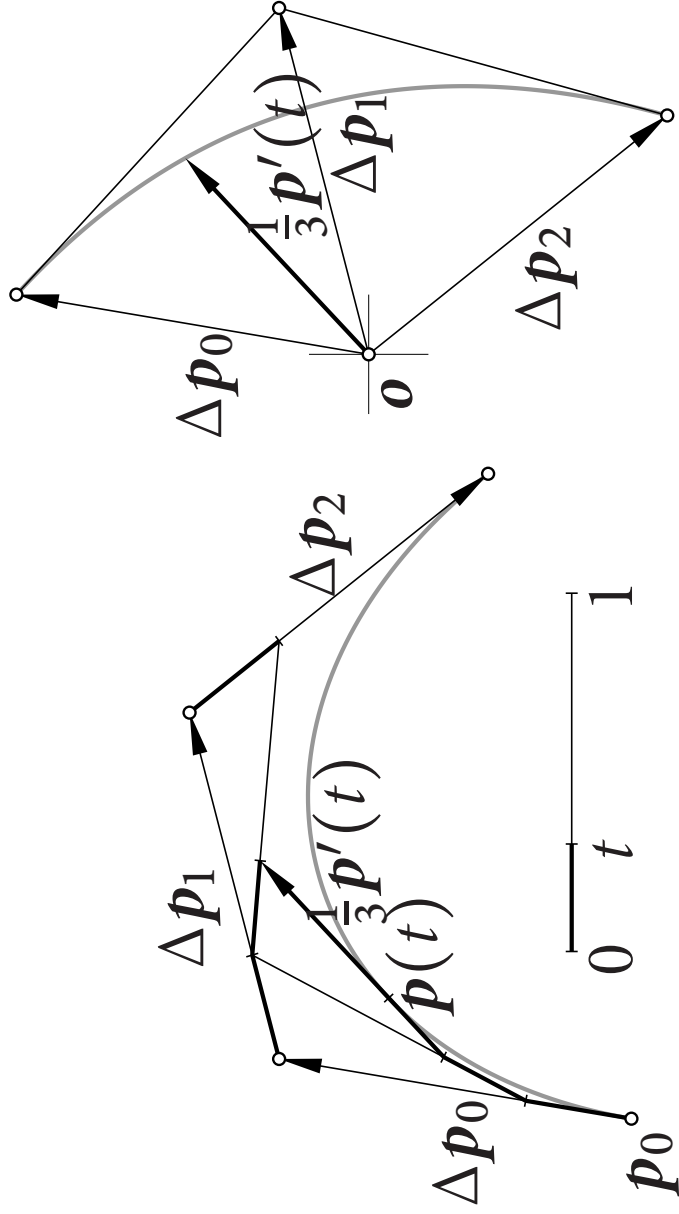
Wektory $n\Delta\mathbf{p}_i = n(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$ są punktami kontrolnymi krzywej Béziera opisującej pochodną parametryzacji \mathbf{p} .

Dla ustalonego t wektor $\mathbf{p}'(t)$ można otrzymać za pomocą punktów $\mathbf{p}_0^{(n-1)}$ i $\mathbf{p}_1^{(n-1)}$ otrzymanych w przedostatnim kroku algorytmu de Casteljau. Pamiętamy, że dla

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i B_i^n(t), \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_1^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_{i+1} B_i^n(t),$$

jest $\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{q}(t) + t\mathbf{r}(t)$, a zatem jest

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = n(\mathbf{r}(t) - \mathbf{q}(t)) = n(\mathbf{p}_1^{(n-1)} - \mathbf{p}_0^{(n-1)}) = n\Delta\mathbf{p}_0^{(n-1)}.$$



Pochodna funkcji wektorowej, tj. parametryzacji krzywej jest nazywana **hodografem**.

Własność hodografu krzywej Béziera wynika z własności otoczki wypukłej: dla $t \in [0, 1]$ wektor $\mathbf{p}'(t)$ jest kombinacją liniową wektorów $\Delta \mathbf{p}_0, \dots, \Delta \mathbf{p}_{n-1}$ o nieujemnych współczynnikach.

Możemy na tej podstawie znajdować ograniczenia kierunku stycznej do krzywej.

Jeśli otoczka wypukła zbioru $\{\Delta \mathbf{p}_0, \dots, \Delta \mathbf{p}_{n-1}\}$ nie zawiera wektora zerowego, to parametryzacja krzywej dla $t \in [0, 1]$ jest **niezdegenerowana**, tj. pochodna nie znika. Taka krzywa jest gładka.

Pochodne wyższych rzędów

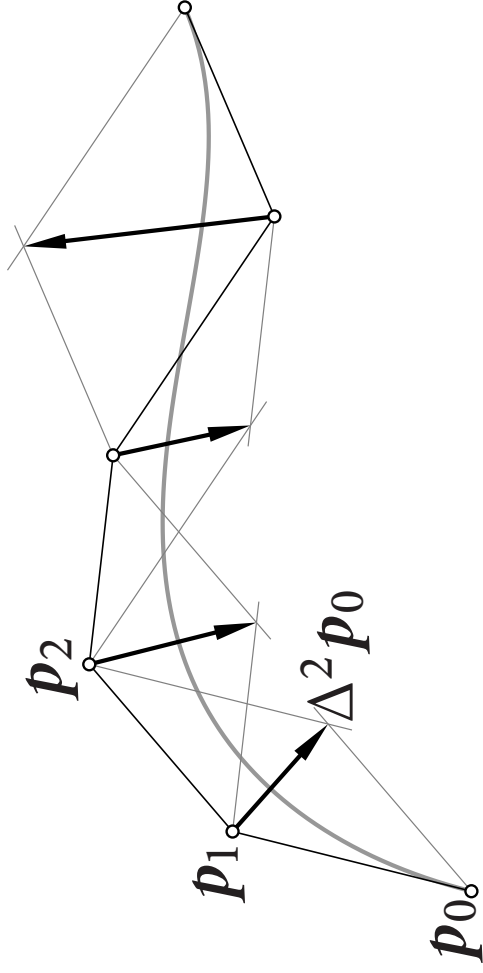
Określimy operatory różnic wyższego rzędu. Dla $k > 1$:

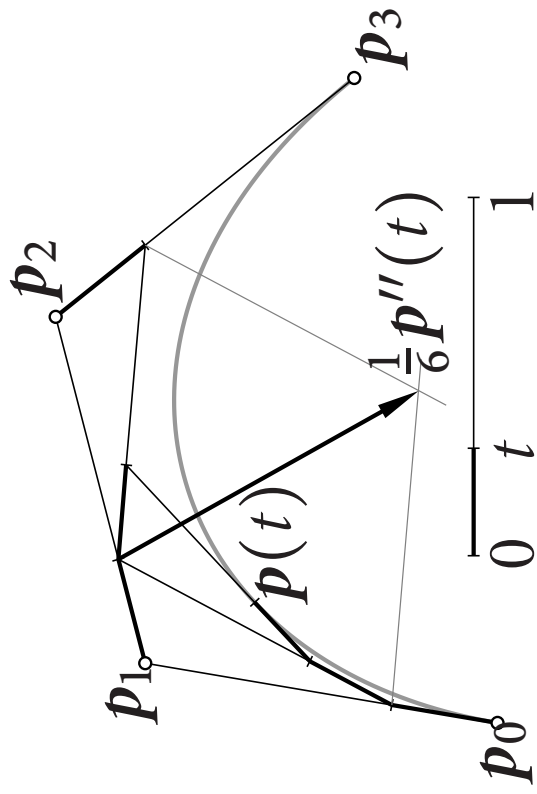
$$\Delta^k \mathbf{p}_i = \Delta^{k-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \mathbf{p}_{i+j}.$$

Przy ich użyciu możemy zapisać wzór

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{p}_i B_i^{n-k}(t),$$

obowiązujący dla $k \leq n$; pochodna rzędu większego niż stopień krzywej jest zerowa.

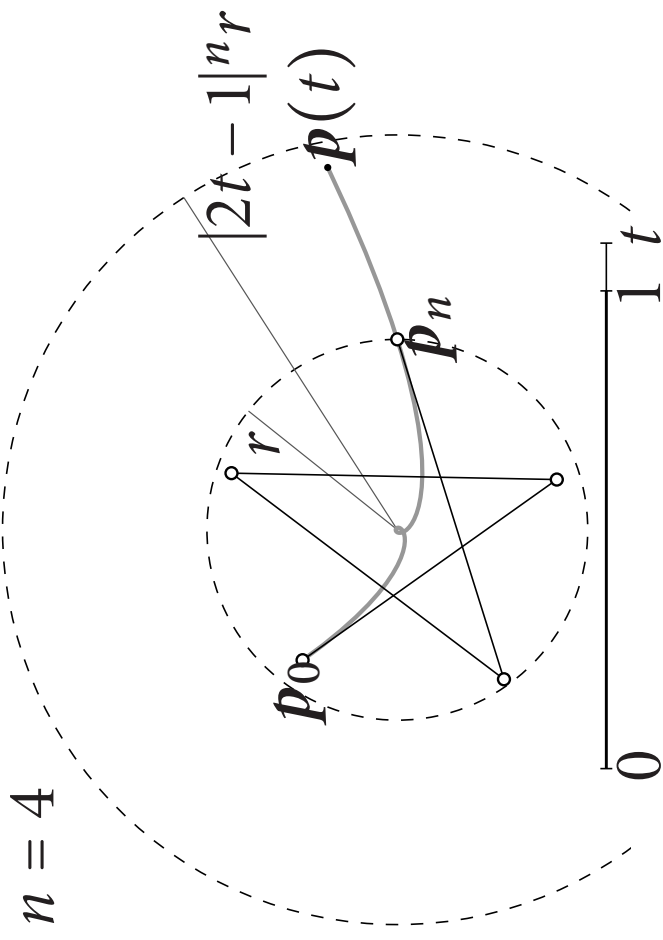




- Własność rozszerzonej otoczki: Jeśli $t < 0$ lub $t > 1$, to

$$\left| \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) \right| \leq |2t - 1|^n \max_i |p_i|.$$

Z tego oszacowania wynika, że jeśli łamana kontrolna krzywej Béziera stopnia n mieści się w kuli o promieniu r , to dla $t \notin [0, 1]$ punkt $\mathbf{p}(t)$ leży w kuli o tym samym środku i promieniu $|2t - 1|^n r$.



Dowód: Wykażemy, że

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} B_i^n(t) = (2t-1)^n.$$

Łatwo to sprawdzić dla $n = 0$. Załóżmy, że

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} B_i^{n-1}(t) = (2t-1)^{n-1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} (2t-1)^n &= ((t-1) + t) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} B_i^{n-1}(t) \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (1-t) B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} t B_i^{n-1}(t) \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1}^n(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t) \\
&= (-1)^n B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \left(\frac{n-i}{n} + \frac{i}{n} \right) B_i^n(t) + (-1)^0 B_n^n(t).
\end{aligned}$$

Dla $t > 1$, jeśli $n - i$ jest parzyste, to $B_i^n(t) > 0$, a jeśli $n - 1$ jest nieparzyste, to $B_i^n(t) < 0$. Jeśli zatem $t > 1$, to wielomian $p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t)$, o współczynnikach p_i takich, że $|p_i| \leq r$, ma największą wartość w punkcie t , jeśli $p_i = (-1)^{n-i} r$. Podobnie sprawdzamy przypadek $t < 0$. \square

- **Schemat Hornera.** Algorytm de Casteljau oblicza punkt $\mathbf{p}(t)$ kosztem rzędu n^2 . To samo można dostać kosztem rzędu n .

Niech $s = 1 - t$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_0 \binom{n}{0} s^n + \mathbf{p}_1 \binom{n}{1} t s^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1} s + \mathbf{p}_n \binom{n}{n} t^n = \\ &= (\dots (\mathbf{p}_0 \binom{n}{0} s + \mathbf{p}_1 \binom{n}{1} t) s + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1}) s + \mathbf{p}_n \binom{n}{n} t^n. \end{aligned}$$

Dla $n > 0$ współczynniki dwumianowe możemy obliczać ze wzorów

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{i+1} = n, \binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{i}.$$

```
s = 1 - t;  
p = p0;  
e = t; b = n;  
for ( i = 1; i ≤ n; i++ ) {  
    p = sp + bep_i;  
    e *= t;  
    b = (b(n - i))/(i + 1);  
}  
/* p(t) = p. */
```

Algorytmu Hornera możemy użyć do obliczenia jednocześnie punktu $\mathbf{p}(t)$ i wektora $\mathbf{p}'(t)$:

```
 $s = 1 - t;$   
 $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{r} = \mathbf{p}_1;$   
 $e = t; \quad b = n - 1;$   
for (  $i = 1; i < n; i++$  ) {  
     $\mathbf{q} = s\mathbf{q} + b\mathbf{e}\mathbf{p}_i; \quad \mathbf{r} = s\mathbf{r} + b\mathbf{e}\mathbf{p}_{i+1};$   
     $e *= t;$   
     $b = (b(n - 1 - i))/(i + 1);$   
}  
 $\mathbf{p} = (1 - t)\mathbf{q} + t\mathbf{r}; \quad \mathbf{v} = n(\mathbf{r} - \mathbf{p});$   
 $/* \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \mathbf{p}'(t) = \mathbf{v}. */$ 
```

Obliczenie po zakończeniu pętli jest ostatnim krokiem algorytmu de Casteljau. Możemy to dalej zmodyfikować, aby obliczać pochodne wyższych rzędów.

Blossoming

Wielomianowi $p(t)$ stopnia n można przyporządkować wielomian n zmiennych stopnia 1 ze względu na każdą zmienną, $b(t_1, \dots, t_n)$, taki że

- $p(t) = b(t, \dots, t)$,
- $b(t_1, \dots, t_n) = b(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ dla każdej permutacji σ .

Taki wielomian b jest nazywany formą biegunową wielomianu p .

Ramshaw w 1987 r. wprowadził dla formy biegunowej nazwę *blossom*. *Blossoming*, czyli „rozkwitanie” ma oznaczać ujawnienie wewnętrznego piękna w wielomianach.

Przykład: wielomianowi $p(t) = 2t^3 + 3t^2 - 5t + 1$ odpowiada

$$b(t_1, t_2, t_3) = 2t_1t_2t_3 + (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) - \frac{5}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + 1.$$

W ogólności, jeśli $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$, to

$$b(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} t_{j_1} \dots t_{j_i}$$

(wewnętrzna suma ma $\binom{n}{i}$ składników; dla $i = 0$ jedyny jej składnik jest równy 1).

Przyporządkowanie formy biegunowej z n argumentami wielomianowi stopnia co najwyżej n jest jednoznaczne. Aby to wykazać, wystarczy pokazać, że różne formy biegunowe odpowiadają różnym wielomianom. Ale różnica dwóch form biegunowych, jeśli nie jest wektorem zerowym, reprezentuje niezerowy wielomian stopnia co najwyżej n .

Zatem, przestrzenie $\mathbb{R}[t]_n$ (wielomianów stopnia $\leq n$) i $\mathbb{S}\mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]_{1, \dots, 1}$ (form biegunowych, tj. symetrycznych wielomianów n zmiennych stopnia ≤ 1 ze względu na każdą zmienną) są izomorficzne — obie mają wymiar $n + 1$.

Dla krzywej wielomianowej $\mathbf{p}(t)$ stopnia $\leq n$ możemy wskazać wektorową funkcję wielomianową $\mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$ (o wartościach w tej samej przestrzeni), symetryczną i taką że $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(t, \dots, t)$. Zinterpretujemy uogólniony algorytm de Casteljau jako sposób obliczania wartości formy biegunowej. Przypuśćmy, że $\mathbf{p}_i^{(0)} = \mathbf{b}(\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$ dla $i = 0, \dots, n$.

Po wykonaniu algorytmu

```

for (  $j = 1; j \leq n; j++$  )
  for (  $i = 0; i \leq n - j; i++$  )
     $\mathbf{p}_i^{(j)} = (1 - t_j)\mathbf{p}_i^{(j-1)} + t_j\mathbf{p}_{i+1}^{(j-1)}$ ;

```

dostaniemy $\mathbf{p}_0^{(n)} = \mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$.

Dowód: Z założenia indukcyjnego, w j -tym kroku mamy dane punkty

$$p_i^{(j-1)} = \mathbf{b}(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-j-i}) \quad \text{dla } i = 0, \dots, n+1-j.$$

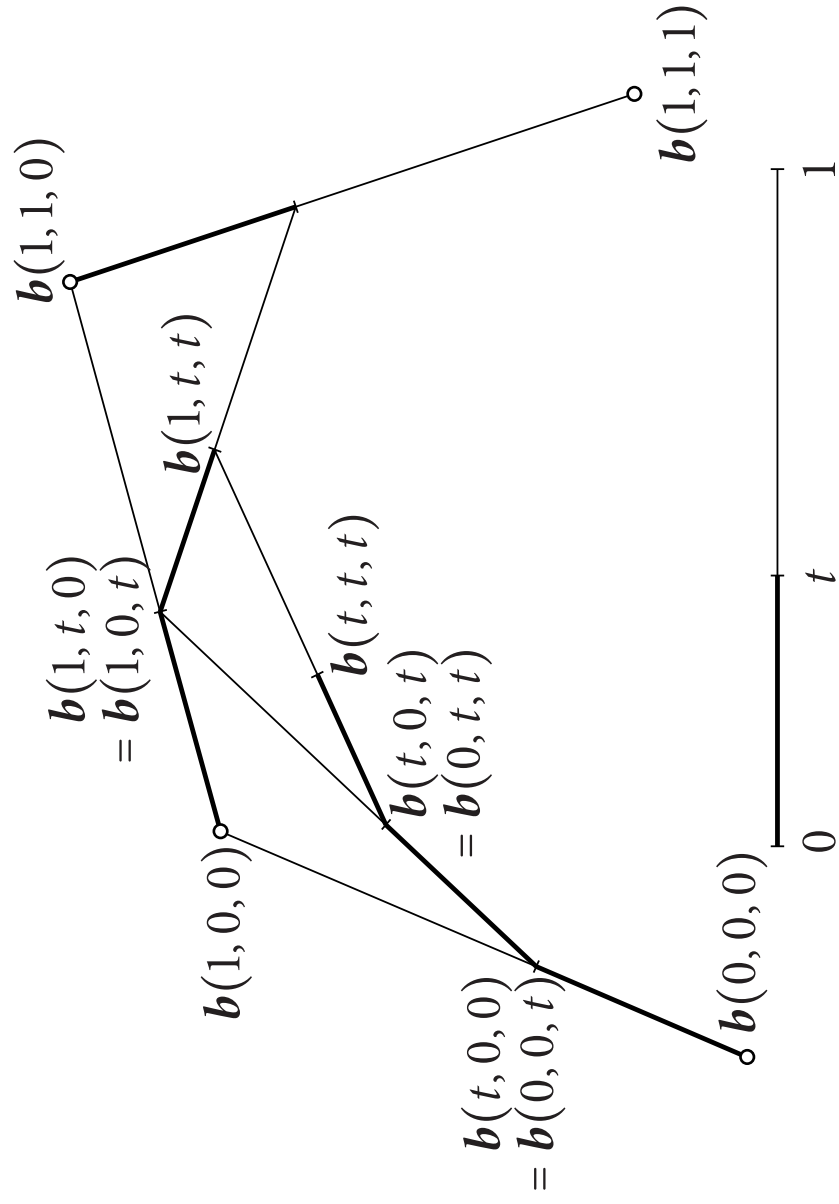
Dla $i = 0, \dots, n-j$ obliczamy

$$\begin{aligned} p_i^{(j)} &= \mathbf{b}(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j-i})(1-t_j) + \\ &\quad \mathbf{b}(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-j-i})t_j \\ &= \mathbf{b}(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, t_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j-i}). \end{aligned}$$

Korzystając z symetrii, możemy przestawić argument t_j na pozycję j , co kończy krok indukcyjny. \square

Trzy przypadki szczególne:

- Jeśli $t_1 = \dots = t_n = 0$, to $\mathbf{p}_i^{(j)} = \mathbf{p}_i^{(0)}$,
- Jeśli $t_1 = \dots = t_n = 1$, to $\mathbf{p}_i^{(j)} = \mathbf{p}_{n-j+i}^{(0)}$
- Jeśli $t_1 = \dots = t_n = t$, to $\mathbf{p}_0^{(n)} = \mathbf{b}(t, \dots, t) = \mathbf{p}(t)$ — otrzymamy punkt krzywej Béziera reprezentowanej przez punkty kontrolne $\mathbf{p}_0^{(0)}, \dots, \mathbf{p}_n^{(0)}$.



Punkty kontrolne krzywej Béziera są zatem wartościami formy biegunowej jej parametryzacji w punktach $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (oraz we wszystkich punktach otrzymanych przez przestawianie współrzędnych), przy czym liczba jedynek jest numerem punktu kontrolnego \mathbf{p}_i .

Algorytm de Casteljau jest obliczeniem wartości formy biegunowej w punkcie (t, \dots, t) . Ale w szczególności otrzymujemy też punkty

$$\mathbf{p}_0^{(0)}, \mathbf{p}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{p}_0^{(n)} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{p}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{p}_n^{(0)},$$

które są wartościami formy biegunowej:

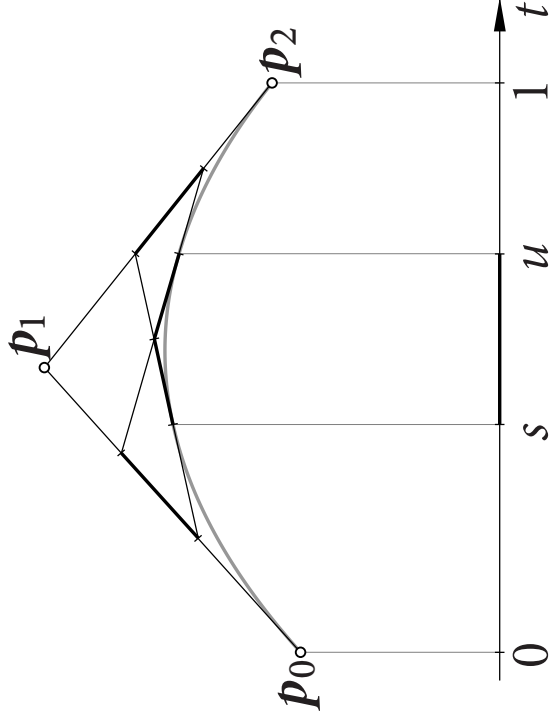
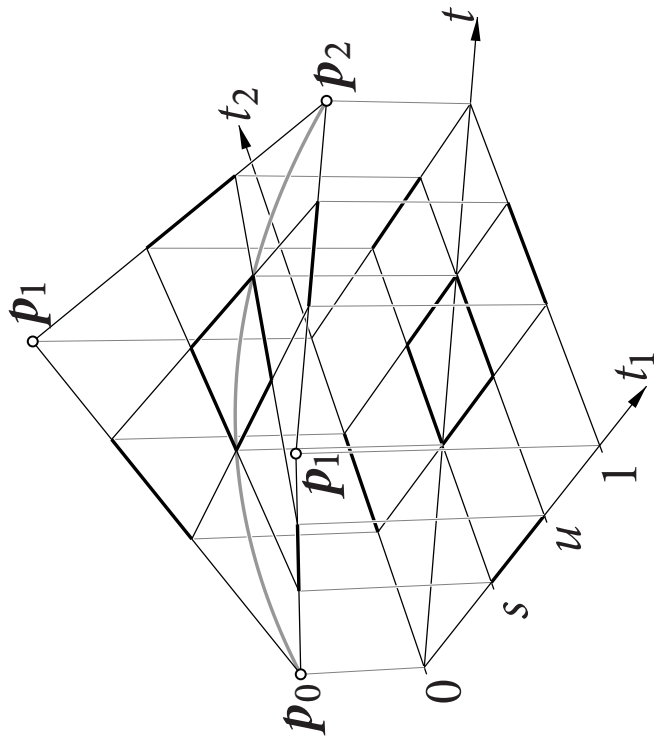
$$\mathbf{p}_0^{(j)} = \mathbf{b}(\underbrace{t, \dots, t}_{j}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j}), \quad \text{oraz} \quad \mathbf{p}_j^{(n-j)} = \mathbf{b}(\underbrace{1, \dots, 1}_j, \underbrace{t, \dots, t}_{n-j}).$$

Sąsiednie punkty w obu tych ciągach są wartościami formy biegunowej w punktach różniących się tylko jedną współrzędną — jeśli zatem $t \neq 0$ i $t \neq 1$, to na podstawie każdego ciągu można obliczyć wartości formy biegunowej w dowolnym punkcie, czyli w szczególności odtworzyć całą krzywą.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy algorytm de Casteljau dla pewnego $t_0 \notin \{0, 1\}$. Wprowadzając nowe, „lokalne” parametry $s = t/t_0$ i $u = (t - t_0)/(1 - t_0)$, możemy sprawdzić, że

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_0^{(i)} B_i^n(s) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^{(n-i)} B_i^n(u).$$

Algorytm de Casteljau obliczył reprezentacje Béziera łuków danej krzywej odpowiadające przedziałom $[0, t_0]$ i $[t_0, 1]$, czyli dokonał podziału krzywej.



Wniosek: Algorytm de Casteljau jest kolejnym (po podwyższaniu stopnia) sposobem obcinania narożników prowadzącym do otrzymania krzywej (tj. łuku dla $t \in [0, 1]$) z łamanej kontrolnej.

Jeśli rekurencyjnie dzielimy wszystkie łuki i punkt podziału wybieramy zawsze w środku przedziału lokalnego parametru, to zbieżność ciągu łamanych do krzywej jest tak szybka, że ma to znaczenie praktyczne.

Blossoming i podwyższanie stopnia krzywej

Formę biegunową $\mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$ krzywej Béziera możemy potraktować jak funkcję $n + 1$ argumentów, t_1, \dots, t_{n+1} . *Nie jest ona formą biegunową reprezentacji stopnia $n + 1$, bo nie jest symetryczna, ale spełnia dwa pozostałe warunki — jest wielomianem stopnia ≤ 1 ze względu na każdy argument i podstawienie $t_1 = \dots = t_{n+1} = t$ jest wielomianową parametryzacją krzywej. Formę biegunową otrzymamy przez symetryzację:*

$$\hat{\mathbf{b}}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{b}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

W szczególności możemy obliczyć w ten sposób wartości formy w punktach $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, czyli punkty kontrolne $\hat{\mathbf{p}}_0, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{n+1}$ krzywej stopnia $n + 1$.

Wymierne krzywe Béziera

Wszystkie krzywe stożkowe oprócz paraboli nie mają parametryzacji wielomianowych, ale mają parametryzacje wymierne. Co więcej, rzuty perspektywiczne krzywych wielomianowych mają na ogół parametryzacje wymierne.

Parametryzacja wymierna składa się z dwóch lub trzech funkcji wymiernych, dla których zawsze można znaleźć wspólny mianownik (wielomian podzielny przez mianowniki wszystkich tych funkcji). Funkcję wektorową, której początkowe współrzędne są opisane przez liczniki a ostatnia jest wspólnym mianownikiem funkcji opisujących daną krzywą wymierną nazywamy **krzywą jednorodną**.

Zatem, krzywą płaską o parametryzacji wymiernej

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \frac{X(t)}{W(t)} \\ \frac{Y(t)}{W(t)} \end{bmatrix}$$

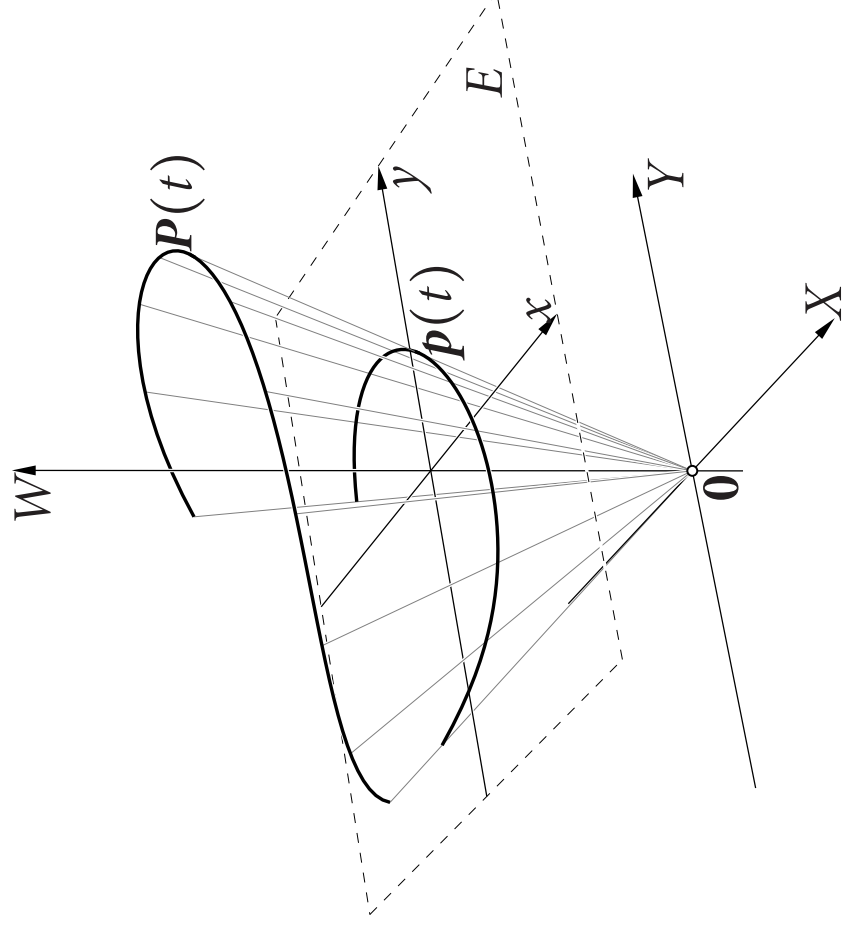
możemy reprezentować za pomocą krzywej wielomianowej

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ W(t) \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, ta reprezentacja nie jest jednoznaczna, bo możemy parametryzację \mathbf{P} pomnożyć przez dowolną stałą lub wielomian różny od zera, otrzymując reprezentację tej samej krzywej \mathbf{P} .

Podobnie możemy reprezentować krzywe w przestrzeni o dowolnym wymiarze.

Krzywą wymierną otrzymamy z krzywej jednorodnej jako rzut perspektywiczny na hiperpłaszczyznę $W = 1$.



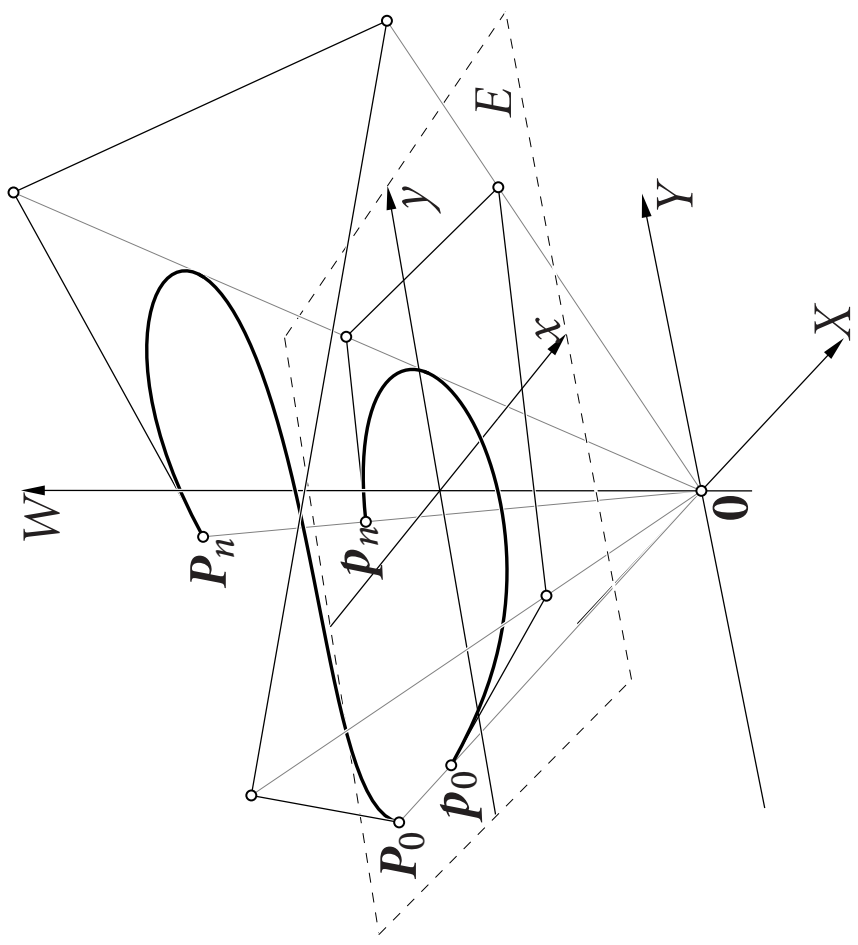
Jeśli liczniki i wspólny mianownik współrzędnych parametryzacji krzywej wymiernej przedstawimy w bazie wielomianów Bernsteina, to otrzymamy wymierną krzywą Béziera i jej reprezentację jednorodną, która jest krzywą Béziera w przestrzeni o wymiarze o 1 większym:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

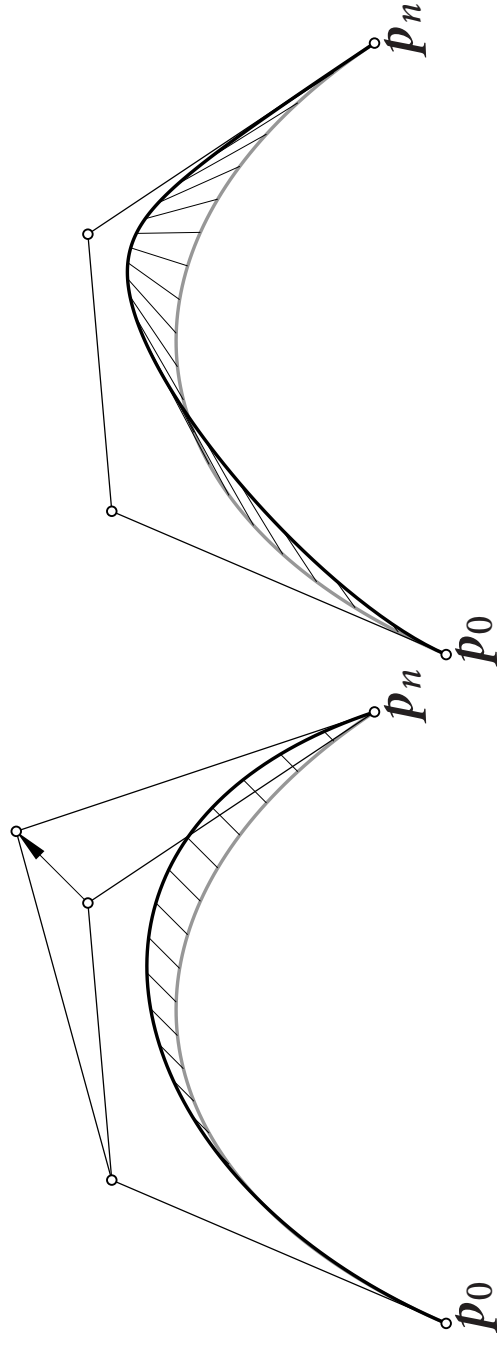
Są tu punkty kontrolne \mathbf{p}_i i współczynniki wagowe (albo wagi) w_i .
Reprezentacja jednorodna

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)$$

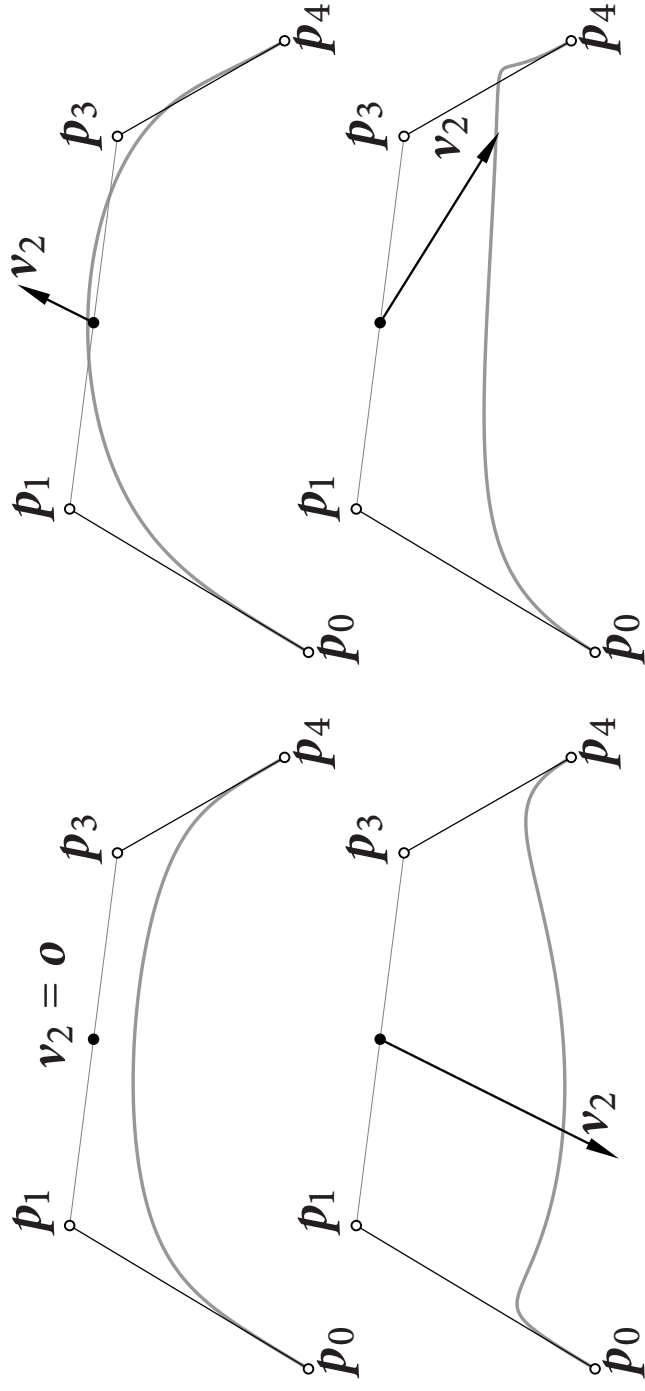
ma punkty kontrolne $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} w_i \mathbf{p}_i \\ w_i \end{bmatrix}$.



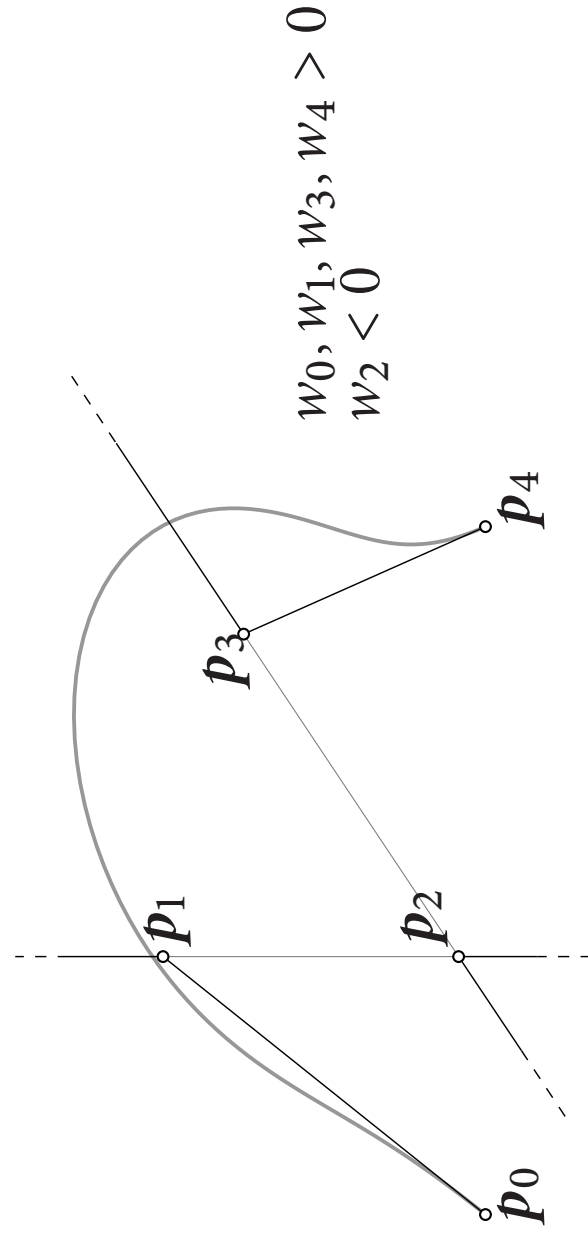
Zwiększanie wagi w_i powoduje „przyciąganie” łuku krzywej dla $t \in (0, 1)$ do punktu \mathbf{p}_i i zwiększa zmiany krzywej powodowane przesuwaniami tego punktu.



Jeśli $w_i = 0$, to punkt p_i nie ma wpływu na kształt krzywej. W takim przypadku można wprowadzić wektor kontrolny v_i i przyjąć punkt kontrolny reprezentacji jednorodnej $P_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}$.



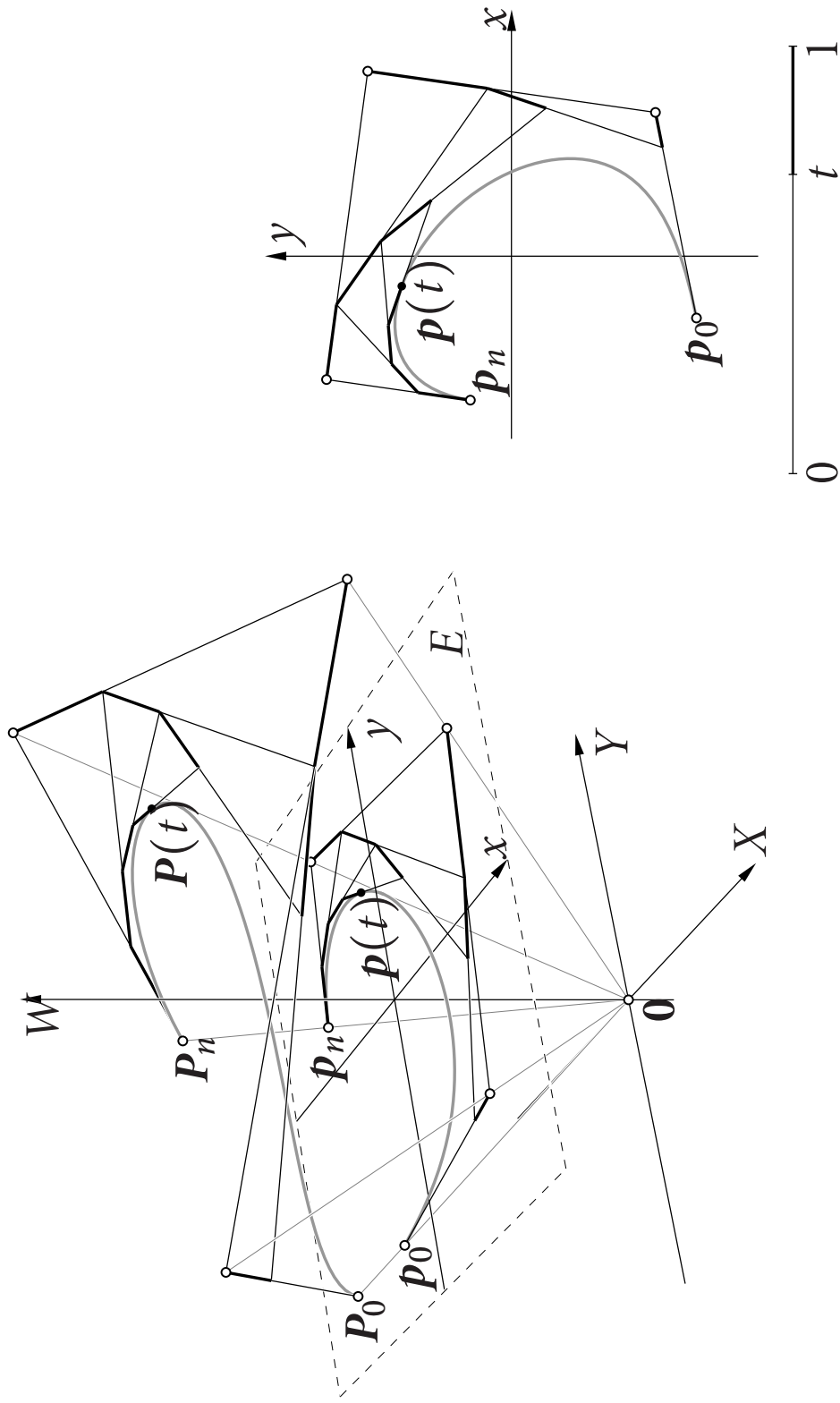
Można wybierać wagi o różnych znakach. Łamana kontrolna ma wtedy odcinki zawierające punkty niewłaściwe.



Uwaga: Nie mogą wszystkie wagi być równe 0. Najlepiej, aby jednak wszystkie miały ten sam znak, wtedy (z własności otoczki wypukłej) mianownik nie ma miejsc zerowych w przedziale $[0, 1]$.

Wymierny algorytm de Casteljau

```
/*  $p_i^{(0)} = p_i, w_i^{(0)} = w_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ . */  
for (  $j = 1; j \leq n; j++$  )  
  for (  $i = 0; i \leq n - j; i++$  ) {  
     $w_i^{(j)} = (1 - t)w_i^{(j-1)} + tw_{i+1}^{(j-1)}$ ;  
     $s_i^{(j)} = tw_{i+1}^{(j-1)} / w_i^{(j)}$ ;  
     $p_i^{(j)} = (1 - s_i^{(j)})p_i^{(j-1)} + s_i^{(j)}p_{i+1}^{(j-1)}$ ;  
  }  
/*  $p(t) = p_0^{(n)}$ . */
```



Zamiast algorytmu wymiernego można użyć dowolnego algorytmu przetwarzania krzywych wielomianowych Béziera do reprezentacji jednorodnej (np. schematu Hornera). Po otrzymaniu punktu $\mathbf{P}(t)$ wystarczy obliczyć współrzędne punktu $\mathbf{p}(t)$, dzieląc liczby $X(t)$ i $Y(t)$ (i ewentualnie $Z(t)$) przez $W(t)$.

Własności wymiernych krzywych Béziera

- **Uogólnienie krzywych wielomianowych:** Jeśli wszystkie wagi są jednakowe, to mianownik jest funkcją stałą i parametryzacja \mathbf{p} jest wielomianowa.
- **Jednorodność układu wag:** Pomnożenie wszystkich wag przez tę samą stałą nie zmienia parametryzacji, a więc też kształtu krzywej. Jeśli pewne wagi są równe 0, to przez wspomnianą stałą trzeba pomnożyć wektory kontrolne, aby nie zmienić krzywej.
- **Własność otoczki wypukłej:** Jeśli wszystkie wagi mają ten sam znak, to łuk $\{ \mathbf{p}(t) : t \in [0, 1] \}$ jest zawarty w otoczce wypukłej zbioru $\{ \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \}$.

- **Interpolacja skrajnych punktów kontrolnych:** Jeśli $w_0 \neq 0$, to $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Jeśli $w_n \neq 0$, to $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_n$.
- **Podział łuku:** Wymierny algorytm de Casteljau dla ustalonego t wytwarza punkty $\mathbf{p}_0^{(0)}, \dots, \mathbf{p}_0^{(n)}$ i ich wagi $w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n)}$ oraz $\mathbf{p}_n^{(0)}, \dots, \mathbf{p}_n^{(n)}$ z wagami $w_n^{(0)}, \dots, w_n^{(n)}$, które reprezentują łuki odpowiadające przedziałom $[0, t]$ i $[t, 1]$.

Można też dokonać podziału krzywej jednorodnej („zwykłym” algorytmem de Casteljau), otrzymując jednorodne reprezentacje tych łuków.

- **Krzywa jest styczna do skrajnych odcinków łamanej kontrolnej:**
Jeśli wagi w_0 i w_n nie są zerem i odcinki mają niezerową długość, to leżą na prostych stycznych do krzywej wymiernej w punktach $\mathbf{p}(0)$ i $\mathbf{p}(1)$. Prosta, na której leżą punkty $\mathbf{p}_0^{(n-1)}$ i $\mathbf{p}_1^{(n-1)}$ otrzymane w przedostatnim kroku wymiernego algorytmu de Casteljau (jeśli są różne) jest styczna do krzywej w punkcie $\mathbf{p}(t)$. Łatwo można to uzasadnić na podstawie pokazanej ilustracji algorytmu.
- **Podwyższenia stopnia** można łatwo dokonać przez podwyższenie stopnia krzywej jednorodnej. Ale można też pomnożyć krzywą jednorodną przez dowolny niezerowy wielomian.

Obliczanie pochodnych

Najprostszy sposób polega na obliczeniu pochodnych krzywej jednorodnej i znalezieniu na ich podstawie pochodnych parametryzacji. Niech $\mathbf{q}(t)$ oznacza wielomianową funkcję wektorową otrzymaną przez odrzucenie ostatniej (wagowej) współrzędnej parametryzacji $\mathbf{P}(t)$.

Różniczkując $\mathbf{q}(t) = w(t)\mathbf{p}(t)$, otrzymamy

$$\mathbf{q}'(t) = w'(t)\mathbf{p}(t) + w(t)\mathbf{p}'(t) \Rightarrow \mathbf{p}'(t) = \frac{1}{w(t)}(\mathbf{q}'(t) - w'(t)\mathbf{p}(t)),$$

$$\mathbf{q}''(t) = w''(t)\mathbf{p}(t) + 2w'(t)\mathbf{p}'(t) + w(t)\mathbf{p}''(t) \\ \Rightarrow \mathbf{p}''(t) = \frac{1}{w(t)}(\mathbf{q}''(t) - 2w'(t)\mathbf{p}'(t) - w''(t)\mathbf{p}(t))$$

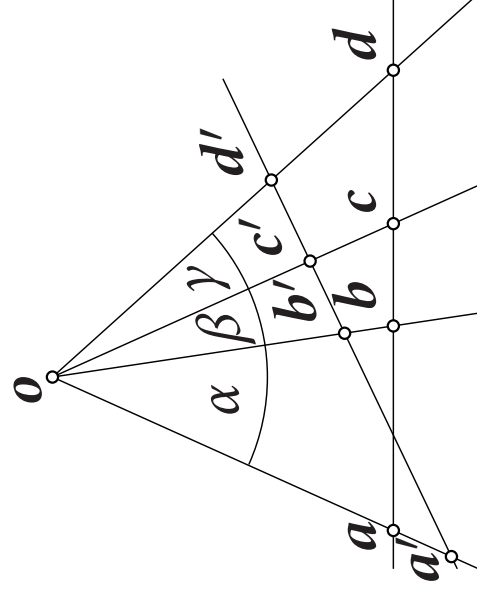
itd. Pochodne funkcji $\mathbf{q}(t)$ i $w(t)$ otrzymamy, wybierając odpowiednie współrzędne wektorów $\mathbf{P}'(t)$, $\mathbf{P}''(t)$ itd.

Zasadnicze Twierdzenie Geometrii Rzutowej

Dwustosunek czwórki punktów współliniowych a, b, c, d ($a \neq d$) jest to wielkość określona wzorem

$$\eta(a, b, c, d) = \frac{b-a}{d-b} : \frac{c-a}{d-c}.$$

Dwustosunek jest zachowany przez przekształcenia afiniczne i przez rzuty środkowe na prostą.



Dla dowodu tej własności rzutów środkowych zauważmy, że dwustosunek można wyrazić przez pola trójkątów, które mają wspólną wysokość:

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= \frac{|\Delta oba|}{|\Delta odb|} : \frac{|\Delta oca|}{|\Delta odc|} \\ &= \frac{|ob||oa| \sin \alpha}{|od||ob| \sin(\beta + \gamma)} : \frac{|oc||oa| \sin(\alpha + \beta)}{|od||oc| \sin \gamma} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)} : \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma}. \end{aligned}$$

Dwustosunek zależy tylko od kątów między prostymi na których leży środek rzutowania \mathbf{o} i punkty \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , więc będzie taki sam dla punktów przecięcia tych prostych z dowolną inną prostą nieprzechodzącą przez \mathbf{o} .

Zasadnicze twierdzenie geometrii rzutowej jest wnioskiem z zachowania dwustosunku: *Dowolne trzy różne punkty na prostej i ich (różne) obrazy na tej samej lub innej prostej określają jednoznacznie przekształcenie rzutowe pierwszej prostej na drugą.*

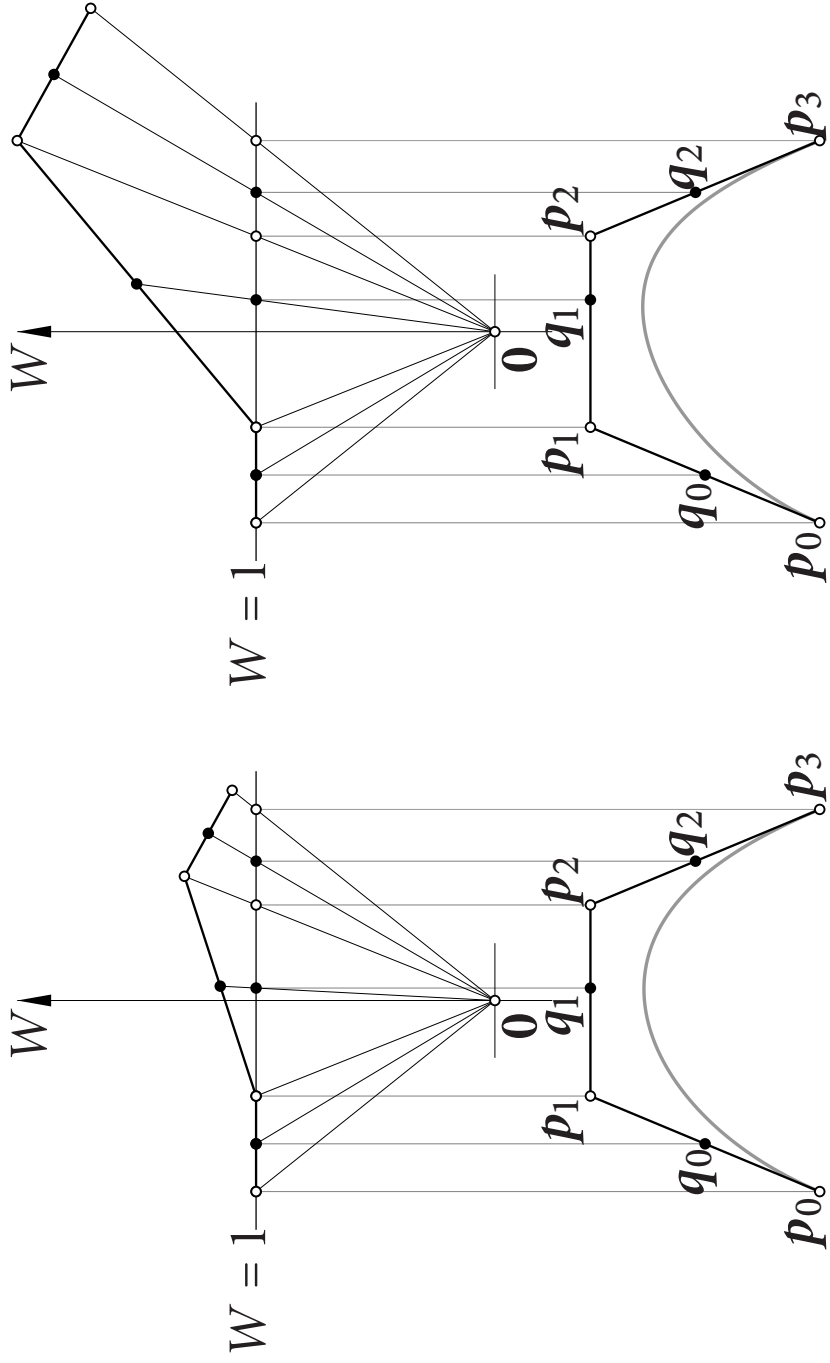
(Uogólnienie na przestrzeń o dowolnym wymiarze d : *Dane $d + 2$ punkty, z których żadne $d + 1$ nie leżą w podprzestrzeni o wymiarze $d - 1$ oraz obrazy tych punktów spełniające takie samo ograniczenie określają jednoznacznie przekształcenie rzutowe pierwszej przestrzeni na drugą.*)

Reprezentowanie wag przy użyciu punktów pomocniczych

W 1983 r. Gerald Farin, zainspirowany zasadniczym twierdzeniem geometrii rzutowej, zaproponował „rysunkowy” sposób wprowadzania wag (jako alternatywę do wklepywania liczb): na każdym odcinku $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ łamanej kontrolnej należy wybrać punkt pomocniczy \mathbf{q}_i . Punkty \mathbf{p}_i i \mathbf{p}_{i+1} są rzutami środkowymi punktów kontrolnych krzywej jednorodnej \mathbf{P}_i i \mathbf{P}_{i+1} . Przy założeniu, że punkt \mathbf{q}_i jest obrazem w tym rzucie środka odcinka $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, to pozwala to obliczyć

$$\mathbf{q}_i = \frac{w_i\mathbf{p}_i + w_{i+1}\mathbf{p}_{i+1}}{w_i + w_{i+1}}, \quad \frac{w_{i+1}}{w_i} = \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{q}_i}.$$

Jeśli przyjmiemy $w_0 = 1$, to możemy stąd obliczyć wszystkie wagi.



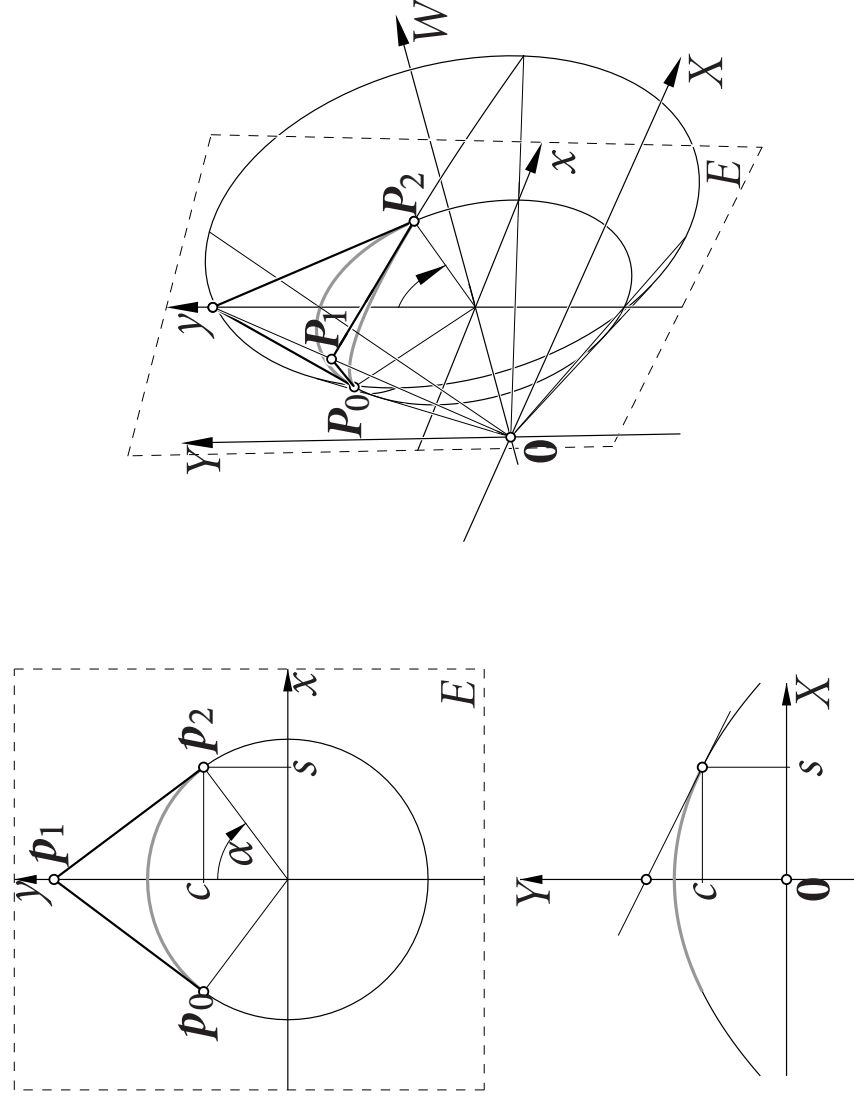
Reprezentacje krzywych stożkowych

Prawie dowolny łuk krzywej stożkowej można reprezentować jako wymierną krzywą Béziera drugiego stopnia. Można przyjąć wagi $w_0 = w_2 = 1$ i manipulować punktami \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 i wagą w_1 .

Jeśli punkty \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 nie leżą na jednej prostej, to mamy

$w_1 > 1$	łuk hiperboli
$w_1 = 1$	łuk paraboli (krzywa wielomianowa)
$0 < w_1 < 1$	krótszy łuk elipsy (lub okręgu)
$w_1 = 0$	odcinek $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2$ (sparametryzowany ze zmienną prędkością)
$-1 < w_1 < 0$	dłuższy łuk elipsy (lub okręgu)
$w_1 = -1$	dwa łuki paraboli
$w_1 < -1$	trzy łuki hiperboli

Okrąg otrzymamy, dokonując rzutu perspektywicznego paraboli leżącej na stożku obrotowym na płaszczyznę prostopadłą do osi tego stożka. Do konstrukcji wygodnie jest przyjąć stożek $X^2 + Y^2 - W^2 = 0$.



Okazuje się, że trzeba przyjąć $w_1 = \cos \alpha$ (jest $\mathbf{P}_1 = [0, 1, \cos \alpha]^T$).

Możemy w ten sposób reprezentować łuk odpowiadający dowolnemu kątowi 2α , z wyjątkiem $\alpha = \pi/2$ i $\alpha = \pi$, ale jeśli kąt α jest bliski jednej z tych „zabronionych” wartości, to reprezentacja jest bardzo niewygodna. Półokrąg albo okrąg możemy poskładać z kilku krótszych łuków. Inna możliwość to użycie reprezentacji stopnia większego niż 2.

Dokonując podwyższenia stopnia reprezentacji jednorodnej półokręgu, dostaniemy łamaną kontrolną $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$, której odcinki są trzema bokami kwadratu, a wagi to $w_0 = w_3 = 1$, $w_1 = w_2 = 1/3$.

Znajdziemy reprezentację całego okręgu: parabola $C(u) = [2u, 1 - u^2, 1 + u^2]$ dla $u \in \mathbb{R}$ jest jego reprezentacją jednorodną, bez jednego punktu. Podstawiając $u = \frac{2t-1}{1-(2t-1)^2}$, dokonujemy takiej reparametryzacji, że dla $t \in (0, 1)$ zmienna u przebiega cały zbiór \mathbb{R} . Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika współrzędnych zreparametryzowanej paraboli i odrzuceniu go, otrzymamy parametryzację wielomianową pewnej krzywej położonej na stożku $X^2 + Y^2 = W^2$. Można ją reprezentować w bazie wielomianów Bernsteina stopnia 4: wtedy

$$P_0 = P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7/3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jak widać, dwa punkty kontrolne mają zerową współrzędną wagową. Kłopotów z tym związanych pozbywamy się przez podwyższenie stopnia do 5.

Reparametryzacja homograficzna i postać standardowa krzywej

Niech $\rho > 0$ i niech

$$t = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u}, \quad \text{wtedy} \quad 1-t = \frac{1-u}{(1-u) + \rho u}.$$

Wtedy $u = 0 \Rightarrow t = 0$, $u = 1 \Rightarrow t = 1$ i u rośnie monotonicznie ze wzrostem t . Mamy

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} \frac{\rho^i u^i (1-u)^{n-i}}{((1-u) + \rho u)^n} = \frac{\rho^i}{((1-u) + \rho u)^n} B_i^n(u),$$

skąd dalej otrzymamy

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{p}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i \mathbf{p}_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i B_i^n(u)}.$$

Zatem, zastąpienie wag w_0, w_1, \dots, w_n przez $w_0, \rho w_1, \dots, \rho^n w_n$ daje (z tymi samymi punktami kontrolnymi) inną parametryzację tej samej wymiernej krzywej Béziera.

Jeśli wagi w_0 i w_n mają ten sam znak, to możemy przyjąć wagi $u_i = w_i \rho^i / w_0$, gdzie $\rho = \sqrt[n]{w_0 / w_n}$. Otrzymamy w ten sposób ciąg wag u_0, \dots, u_n , w którym wagi punktów p_0 i p_n są równe 1. Taka reprezentacja krzywej wymiernej nazywa się standardowa.

Tensorowe płaty Béziera

Iloczyn tensorowy dwóch funkcji, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o dziedzinie $A \times B$, określoną wzorem

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v).$$

Dla funkcji należących do pewnych przestrzeni liniowych V_1 i V_2 rozpatruje się iloczyn tensorowy tych przestrzeni, tj. przestrzeń liniową

$$V_1 \otimes V_2 = \text{lin}\{f \otimes g: f \in V_1, g \in V_2\}.$$

Bazę tej przestrzeni otrzymamy, biorąc wszystkie iloczyny tensorowe par elementów (dowolnie wybranych) baz przestrzeni V_1 i V_2 — zatem wymiar przestrzeni $V_1 \otimes V_2$ jest równy $\dim V_1 \dim V_2$.

Iloczyn tensorowy można określić dla więcej niż dwóch przestrzeni.

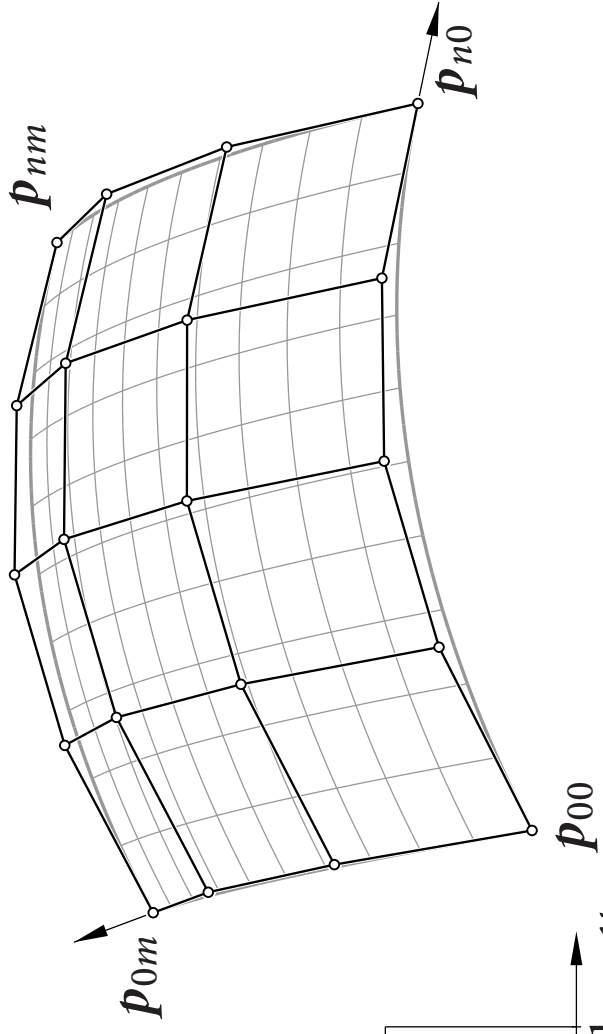
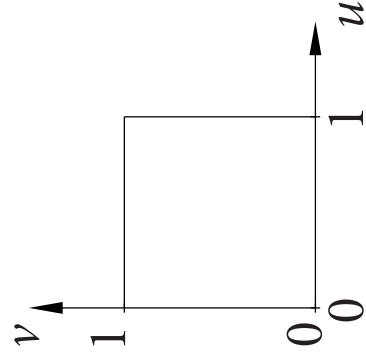
Biorąc przestrzenie $\mathbb{R}[x]_n$ i $\mathbb{R}[x]_m$ (wielomianów stopnia co najwyżej n i m), otrzymamy przestrzeń wielomianów dwóch zmiennych. Z baz wielomianów Bernsteina dostaniemy bazę tensorową. Wzór

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

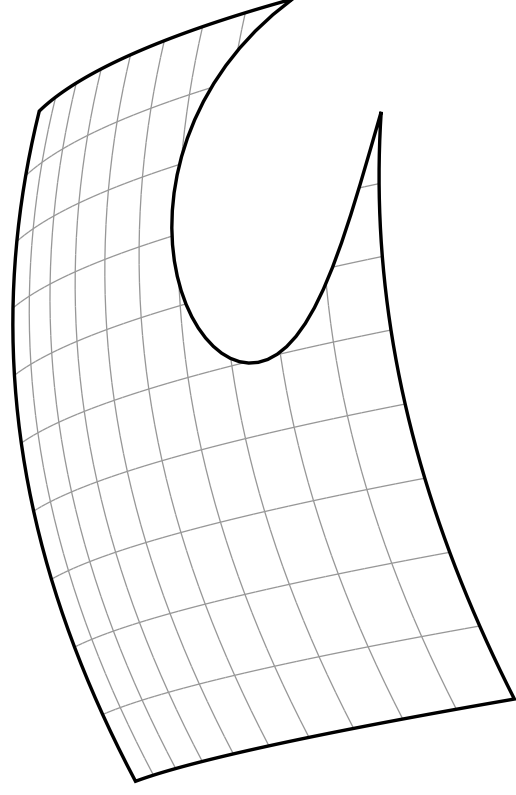
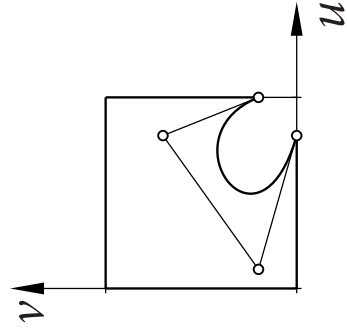
określa tensorowy płat Béziera stopnia (n, m) z punktami kontrolnymi \mathbf{p}_{ij} . Odcinki $\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{i+1,j}$ oraz $\mathbf{p}_{ij}\mathbf{p}_{i,j+1}$ tworzą siatkę kontrolną, w której wyróżniamy wiersze i kolumny.

Kształtowanie płata polega na rozmieszczaniu punktów kontrolnych.

Zazwyczaj przyjmujemy, że dziedziną tak określonego płata jest kwadrat $[0, 1]^2$.



Można też przyjąć za dziedzinę dowolny obszar, np. wielokąt krzywoliniowy. Jeśli jest zawarty w kwadracie $[0, 1]^2$, to mamy płat obcięty.



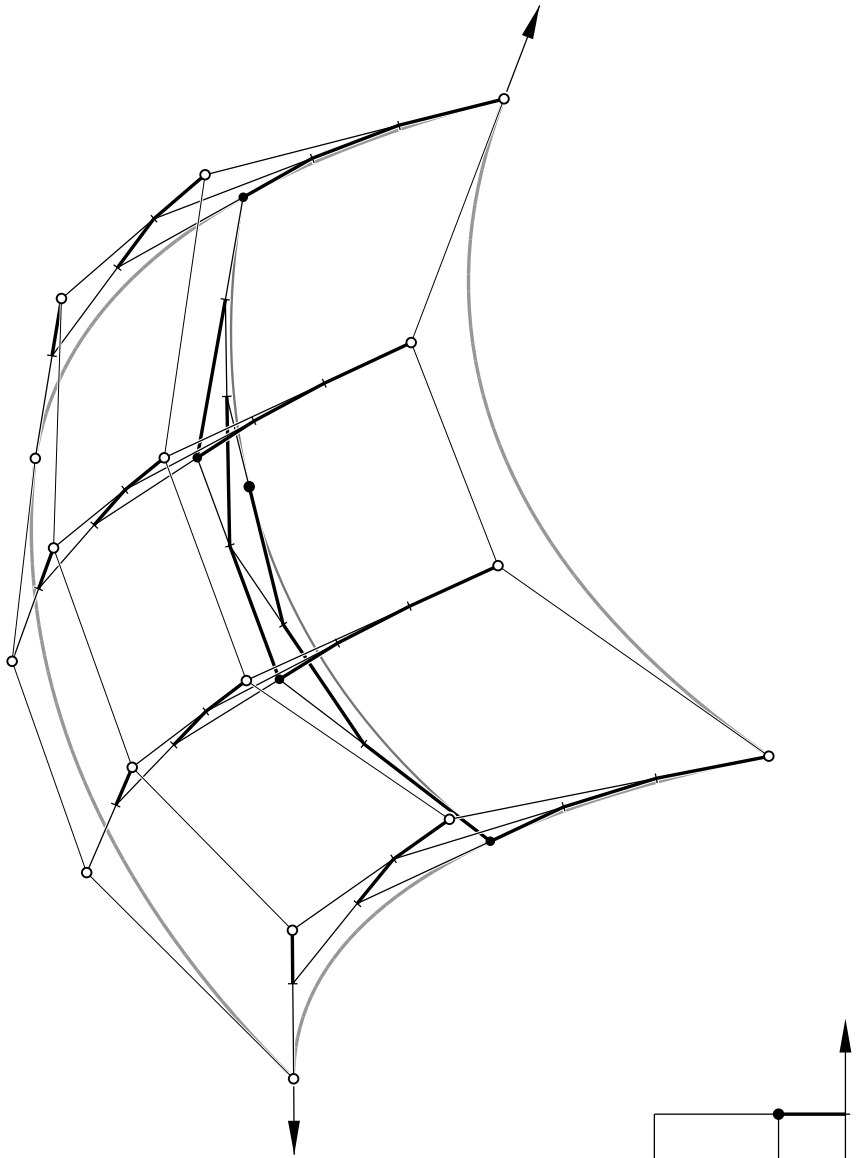
Aby obliczyć punkt $\mathbf{p}(u, v)$ dla danych liczb u, v , możemy przepisać wzór w postaci

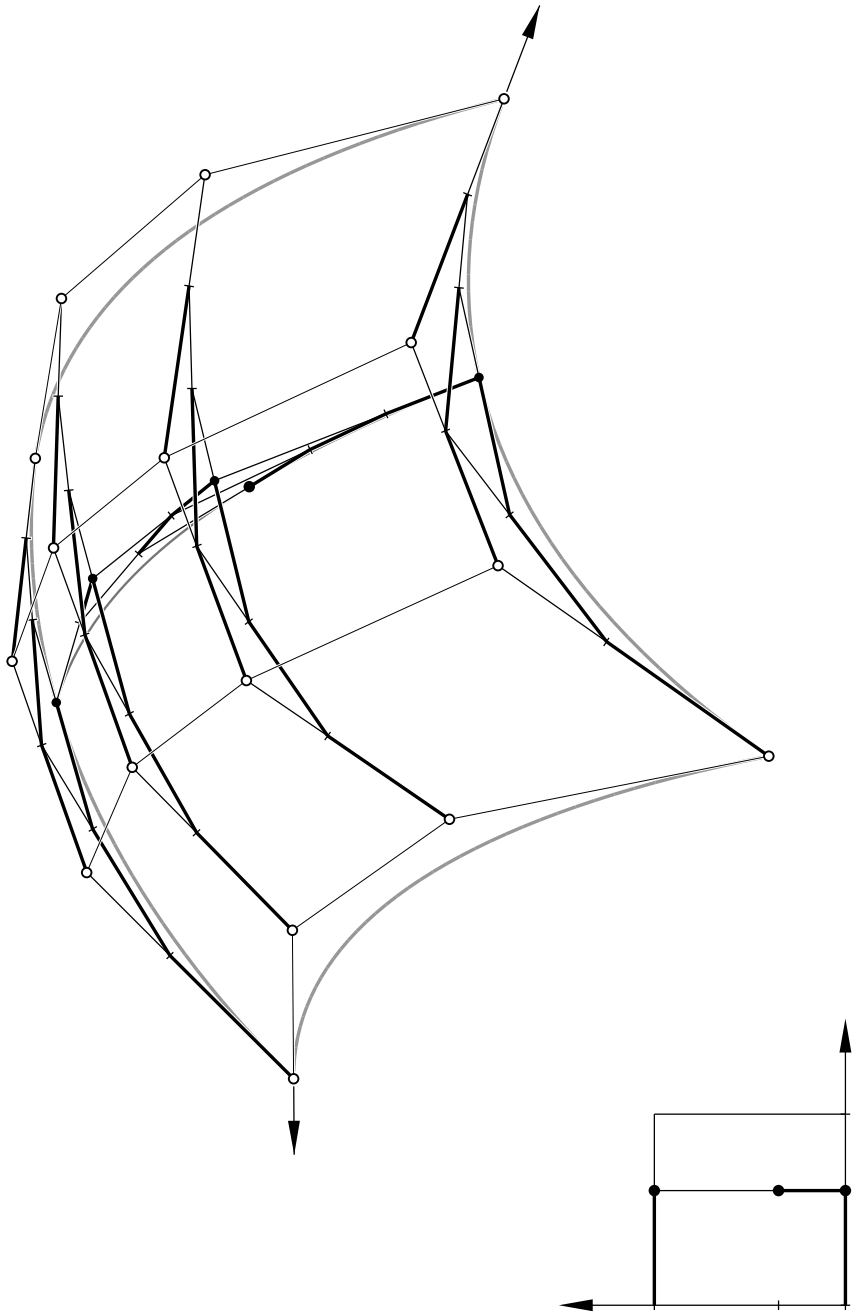
$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{q}_i B_i^n(u),$$

albo

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{r}_j B_j^m(v).$$

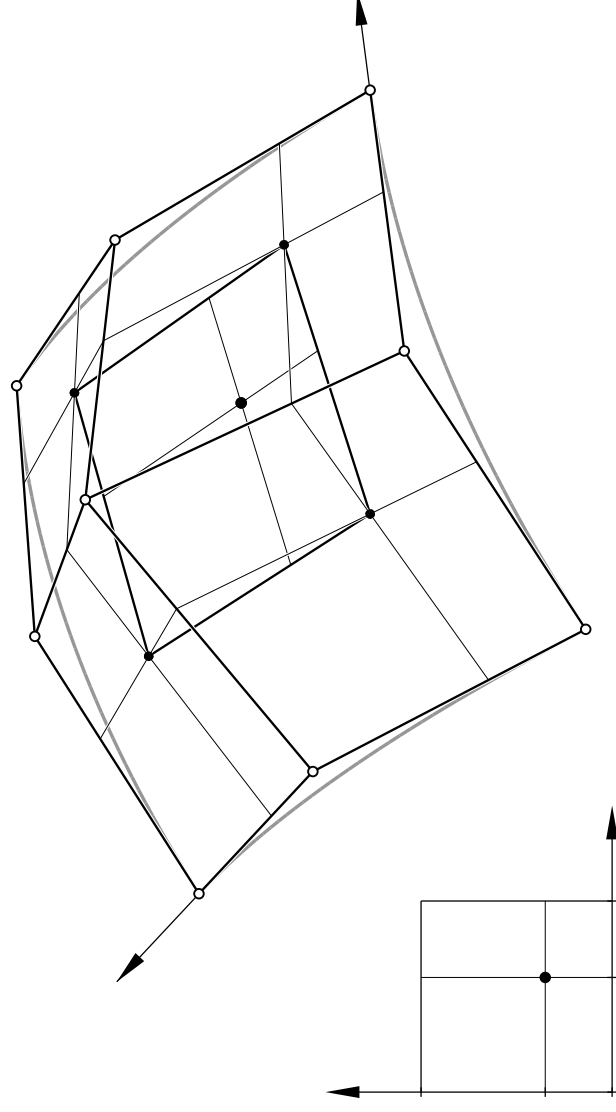
Punkty \mathbf{q}_i są punktami krzywych Béziera, których łamanymi kontrolnymi są kolumny siatki kontrolnej płata. Punkty \mathbf{r}_i są punktami krzywych reprezentowanych przez wiersze. Oba wzory umożliwiają sprowadzenie obliczenia do znalezienia punktów pewnej liczby krzywych Béziera.





Każdy krok algorytmu de Casteljau wykonywanego na wierszach siatki kontrolnej jest działaniem przemiennym z dowolnym krokiem algorytmu wykonywanego na kolumnach. Dotyczy to też wielu innych algorytmów przetwarzania prostokątnych tablic współczynników funkcji w bazie tensorowej. Dlatego mając w sumie n kroków do wykonania na wierszach i m kroków przetwarzania kolumn, można te kroki wykonać w dowolnej kolejności.

W szczególności można połączyć jeden krok „na wierszach” z jednym krokiem „na kolumnach”, otrzymując krok algorytmu przetwarzającego ściany siatki kontrolnej.



Własności tensorowych płatów Béziera

- Afiniczna niezmienniczość reprezentacji. Dla każdego u, v jest

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \cdot \sum_{j=0}^m B_j^m(v) = 1 \cdot 1 = 1$$

zatem dla każdego przekształcenia afinicznego f jest

$$f(\mathbf{p}(u, v)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(\mathbf{p}_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v).$$

- Własność otoczki wypukłej. Dla $(u, v) \in [0, 1]^2$ punkt $\mathbf{p}(u, v)$ jest kombinacją wypukłą zbioru punktów kontrolnych \mathbf{p}_{ij} .

- Interpolacja elementów brzegowych siatki.

$$\mathbf{p}(0, v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{0j} B_j^m(v), \quad \mathbf{p}(1, v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{nj} B_j^m(v),$$

$$\mathbf{p}(u, 0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{i0} B_i^n(u), \quad \mathbf{p}(u, 1) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_{im} B_i^n(u),$$

a ponadto $\mathbf{p}(0, 0) = \mathbf{p}_{00}$, $\mathbf{p}(0, 1) = \mathbf{p}_{0m}$, $\mathbf{p}(1, 0) = \mathbf{p}_{n0}$, $\mathbf{p}(1, 1) = \mathbf{p}_{nm}$.

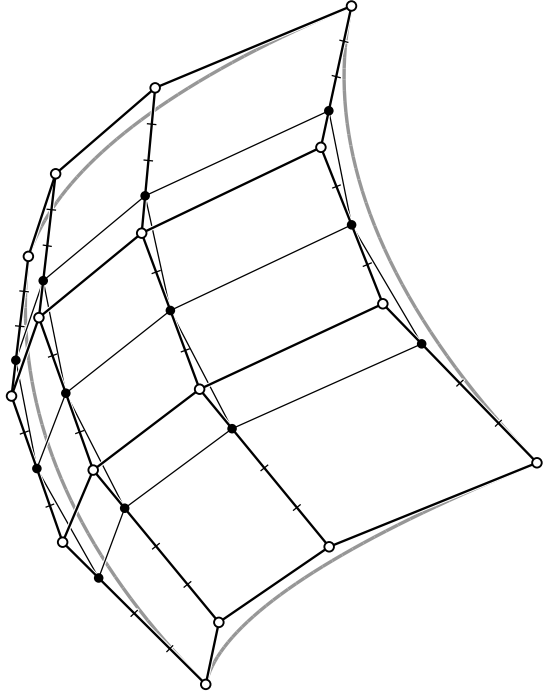
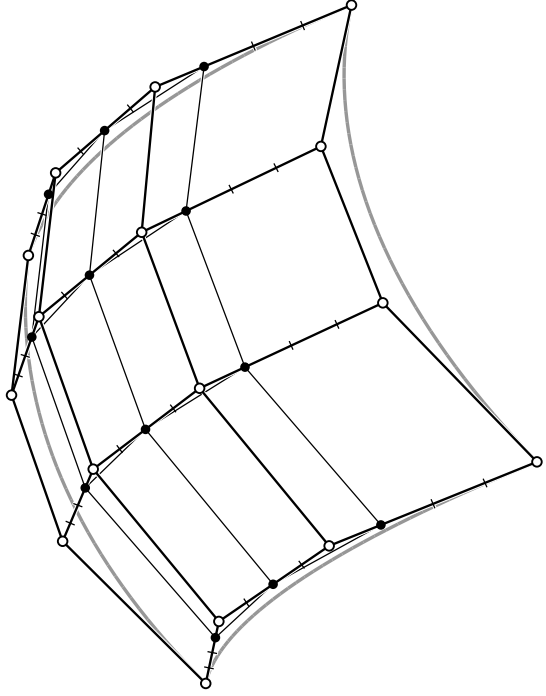
Tensorowa definicja płata umożliwia stosowanie dowolnych algorytmów przetwarzania krzywych do płatów. Można zatem

- Obliczyć punkt płata, za pomocą algorytmu de Casteljau lub schematu Hornera,
- Dokonać podwyższenia stopnia ze względu na każdy z parametrów:

$$\begin{aligned} p(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^m \hat{p}_{ij} B_i^{n+1}(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^{m+1}(v), \end{aligned}$$

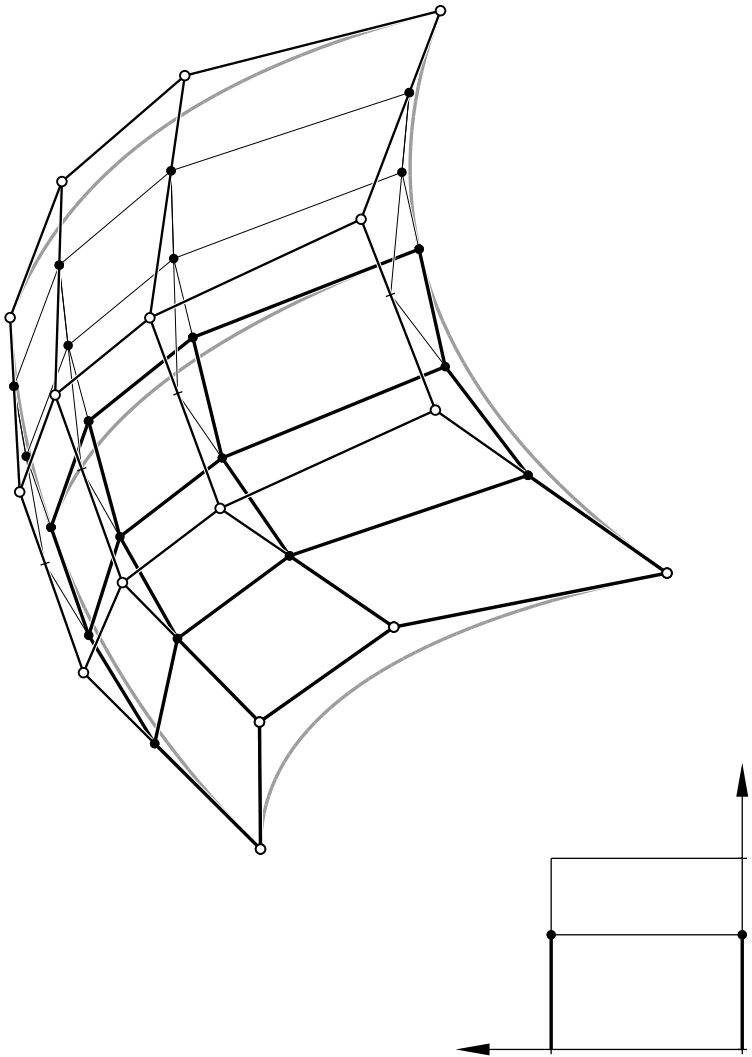
gdzie

$$\hat{p}_{ij} = \frac{i}{n+1} p_{i-1,j} + \frac{n+1-i}{n+1} p_{ij}, \quad \tilde{p}_{ij} = \frac{j}{m+1} p_{i,j-1} + \frac{m+1-j}{m+1} p_{ij}.$$



- **Dokonać podziału płata** za pomocą algorytmu de Casteljau — kwadrat $[0, 1]^2$ dzielimy odcinkiem poziomym albo pionowym na dwa prostokąty, które możemy rekurencyjnie dzielić dalej.

W pierwszym przypadku dokonujemy podziału krzywych reprezentowanych przez kolumny siatki kontrolnej (i dostajemy kolumny siatek części podzielonego płata), a w drugim przypadku dzielimy krzywe reprezentowane przez wiersze.



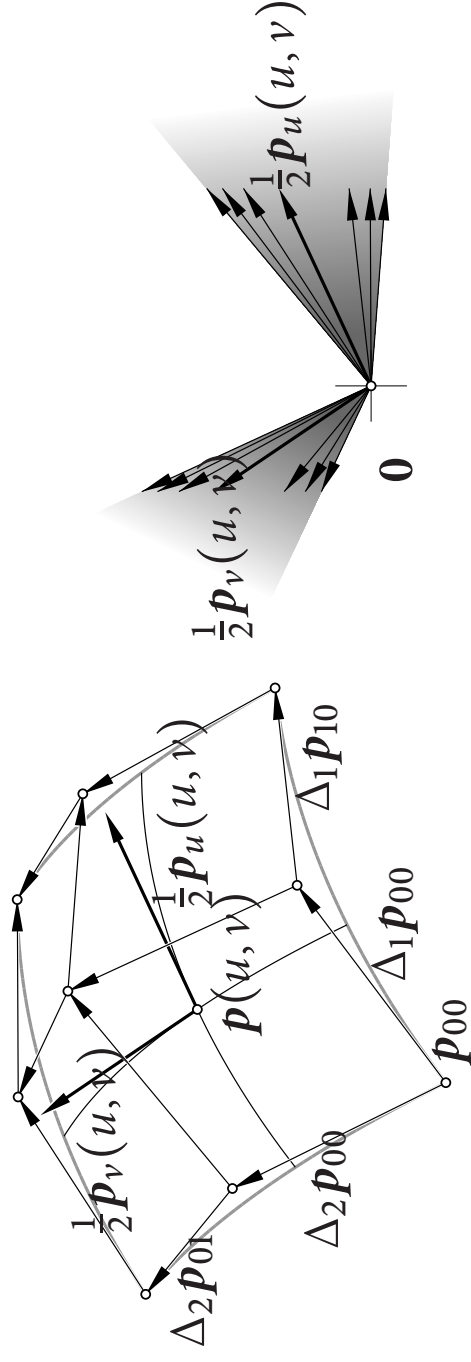
- Obliczyć pochodne cząstkowe parametryzacji:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m n(\mathbf{p}_{i+1, j} - \mathbf{p}_{ij}) B_i^{n-1}(u) B_j^m(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} m(\mathbf{p}_{i, j+1} - \mathbf{p}_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v).$$

Obliczenie pochodnych sprowadza się do obliczania punktów i pochodnych krzywych Béziera (w szczególności możemy użyć schematu Hornera).

Dla siatki złożonej z wierszy i kolumn wprowadzimy dwa operatory różnic: $\Delta_1 \mathbf{p}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_{i+1, j} - \mathbf{p}_{ij}$ oraz $\Delta_2 \mathbf{p}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_{i, j+1} - \mathbf{p}_{ij}$.



- Własność hodografu jest przeniesieniem analogicznej własności krzywych Béziera, tj. zastosowaniem własności otoczki wypukłej do funkcji wektorowych opisujących pochodne cząstkowe. Dla $(u, v) \in [0, 1]^2$ wektory $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{p}(u, v)$ i $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{p}(u, v)$ są odpowiednio kombinacjami wypukłymi wektorów $n\Delta_1 \mathbf{p}_{ij}$ oraz $m\Delta_2 \mathbf{p}_{ij}$.

Stosując rekurencyjnie wzory na pochodne cząstkowe, możemy otrzymać pochodne cząstkowe i mieszane dowolnych rzędów.

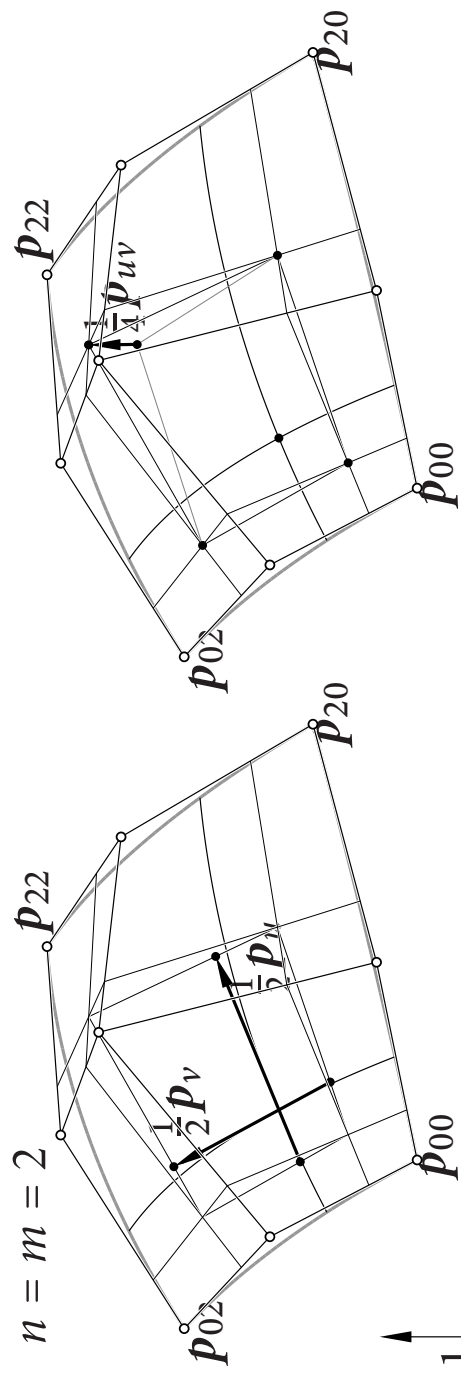
Operatory Δ_1 i Δ_2 są przemienne, tj. $\Delta_1 \Delta_2 \mathbf{p}_{ij} = \Delta_2 \Delta_1 \mathbf{p}_{ij}$, zatem wektor $\Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{ij}$ nie zależy od kolejności obliczania różnic. Możemy zatem napisać ogólny wzór

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial^k u \partial^l v} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m-l} \frac{n!}{(n-k)! (m-l)!} \Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{ij} B_i^{n-k}(u) B_j^{m-l}(v).$$

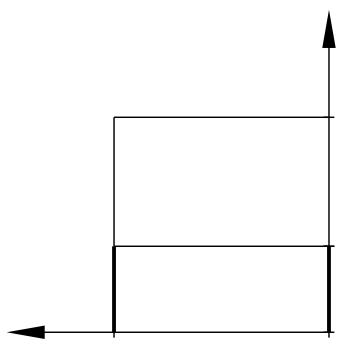
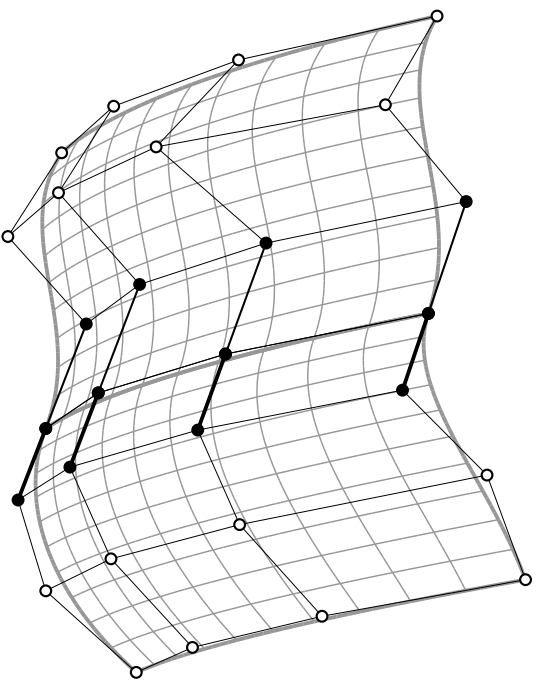
Co więcej, po wykonaniu $n - k$ kroków algorytmu de Casteljau na wierszach i $m - l$ kroków na kolumnach, otrzymamy siatkę złożoną z $k + 1$ kolumn i $l + 1$ wierszy; oznaczmy wierzchołki tej siatki symbolami $\mathbf{p}_{ij}^{(n-k, m-l)}$. Można wtedy obliczyć tylko jeden wektor różnicy rzędu (k, l) i podstawić go do wzoru

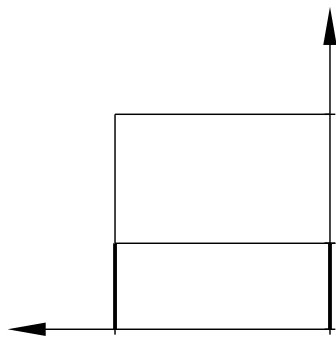
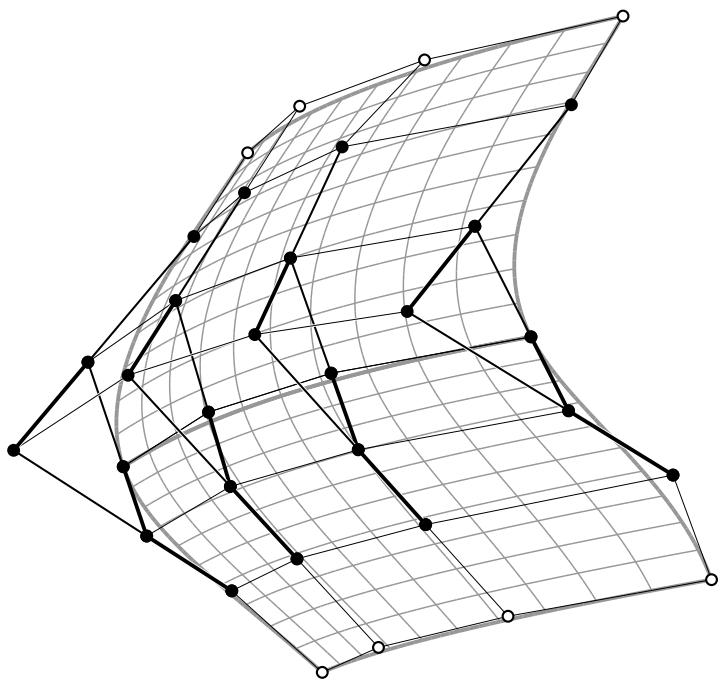
$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u \partial^l v} \mathbf{p}(u, v) = \frac{n!}{(n-k)! (m-l)!} \frac{m!}{(m-l)!} \Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{00}^{(n-k, m-l)}.$$

Warto tu powtórzyć, że poszczególne kroki algorytmu de Casteljau na wierszach i kolumnach komutują, tj. możemy je wykonywać w dowolnej kolejności. Przemienność dotyczy też wszelkich innych algorytmów przetwarzania kolumn i wierszy, jakie poznaliśmy dla krzywych Béziera (np. podwyższania stopnia).



Gładkie połączenie dwóch płatów Béziera można osiągnąć przez połączenie wierszy (albo kolumn) ich siatek kontrolnych tak, aby osiągnąć gładkość połączenia krzywych Béziera reprezentowanych przez te wiersze (albo kolumny), ale proporcje odległości punktów współliniowych na odpowiednich odcinkach *muszą* być te same dla wszystkich wierszy (kolumn).





Wymierne płaty Béziera

Wzór

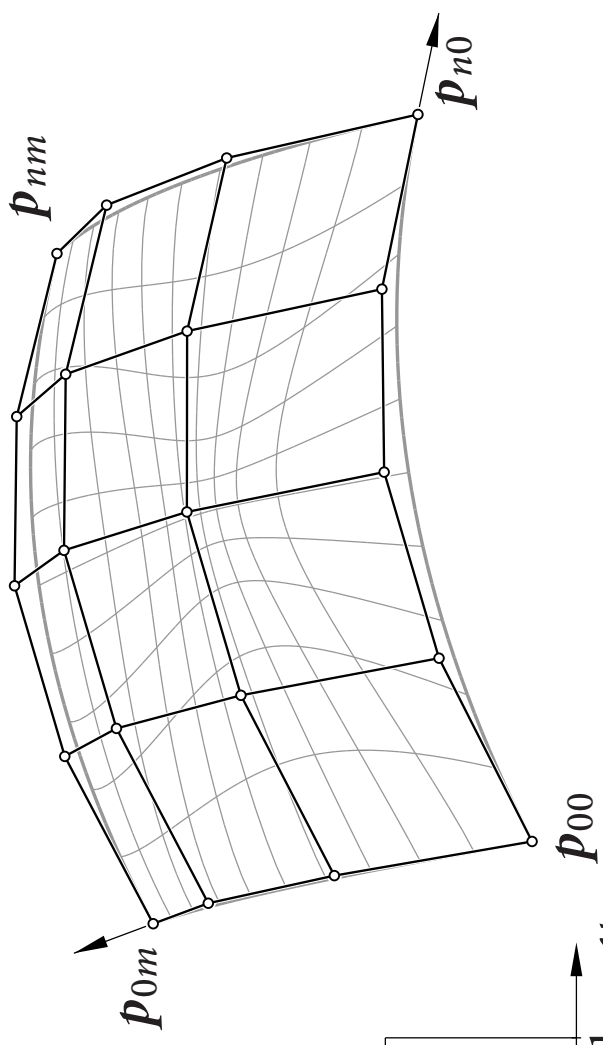
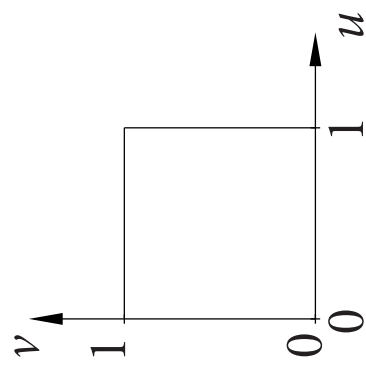
$$\mathbf{p}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$$

określa wymierny płat Béziera; ma on tyle samo punktów kontrolnych, co płat wielomianowy stopnia (n, m) , ale należy jeszcze podać wagi w_{ij} .

Płat wymierny można reprezentować za pomocą wielomianowego płata jednorodnego, znajdującego się w przestrzeni o wymiarze o 1 większym. Jest to tensorowy płat Béziera

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

z punktami kontrolnymi $\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} w_{ij} \mathbf{P}_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix}$.



Wymierny algorytm de Casteljau można uogólnić, aby obliczać punkty płata wymiernego, ale wygodniej jest, mając punkt (u, v) , obliczyć punkt $P(u, v)$, a potem podzielić jego początkowe współrzędne przez współrzędną wagową.

Do przetwarzania wymiernych płatów Béziera możemy użyć wszystkich „wielomianowych” algorytmów, stosując je do płata jednorodnego. Możemy m.in. dokonywać podwyższania stopnia, rekurencyjnego podziału itd.

Podstawowe własności płatów wymiernych

- Interpolacja elementów brzegowych siatki. Jeśli $w_{00}, w_{n0}, w_{0m}, w_{nm} \neq 0$, to $\mathbf{p}(0, 0) = \mathbf{p}_{00}$, $\mathbf{p}(1, 0) = \mathbf{p}_{n0}$, $\mathbf{p}(0, 1) = \mathbf{p}_{0m}$, $\mathbf{p}(1, 1) = \mathbf{p}_{nm}$, a ponadto skrajne wiersze i kolumny siatki kontrolnej (razem z podanymi wagami) są reprezentacjami wymiernych krzywych Béziera będących krzywymi brzegowymi płata.

- Pochodne cząstkowe płata można obliczać na podstawie pochodnych płata jednorodnego, podobnie jak pochodne wymiernych krzywych Béziera. Jeśli $\mathbf{q}(u, v) = w(u, v)\mathbf{p}(u, v)$ jest funkcją wektorową otrzymaną przez odrzucenie współrzędnej wagowej parametryzacji $\mathbf{P}(u, v)$, to na przykład

$$\mathbf{q}_u = w\mathbf{p}_u + w_u\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_u = \frac{1}{w}(\mathbf{q}_u - w_u\mathbf{p}).$$

- **Brak własności hodografu!** W ogólności wektory $\mathbf{p}_u(u, v)$ i $\mathbf{p}_v(u, v)$ dla $(u, v) \in [0, 1]^2$ nie są kombinacjami liniowymi o nieujemnych współczynnikach zbiorów wektorów

$$\{ \Delta_1 \mathbf{p}_{ij} : i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m \}$$
 i

$$\{ \Delta_2 \mathbf{p}_{ij} : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m-1 \}$$
 (choć wymierne krzywe Béziera o dodatnich wagach analogiczną własność mają).

Własność hodografu ma miejsce w szczególnym przypadku, gdy istnieją ciągi liczb o stałych znakach (np. dodatnich) a_0, \dots, a_n i b_0, \dots, b_m takie że $w_{ij} = a_i b_j$.

- **Pochodne cząstkowe rzędu k** dla $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ i $v = 1$ są określone odpowiednio przez $k + 1$ pierwszych i ostatnich kolumn i wierszy siatki kontrolnej i przez wagi punktów kontrolnych w tych kolumnach i wierszach. Umożliwia to m.in. gładkie łączenie płatów wymiernych, podobnie jak płatów wielomianowych.

- **Płaszczyznę styczną do płata wymiernego w punkcie $\mathbf{p}(u, v)$** możemy znaleźć bezpośrednio na podstawie punktu i pochodnych cząstkowych płata wymiernego. Wektor

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}(u, v) \wedge \mathbf{P}_v(u, v) \wedge \mathbf{P}_u(u, v)$$

jest wektorem normalnym hiperpłaszczyzny w \mathbb{R}^4 zawierającej mnożone w powyższym wzorze wektory. Blok \mathbf{n} powstały z \mathbf{N} przez odrzucenie ostatniej współrzędnej (w_N) jest wektorem normalnym płaszczyzny stycznej do płata \mathbf{p} .

Dowód. Wektor

$$\mathbf{R} = \frac{1}{w}\mathbf{P}_u - \frac{w_u}{w^2}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{w}(\mathbf{q}_u - w\mathbf{p}) \\ \frac{1}{w}w_u - \frac{w_u w}{w^2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{p}_u \\ 0 \end{array} \right]$$

jest kombinacją liniową wektorów \mathbf{P} i \mathbf{P}_u , a zatem jest prostopadły do N .

Stąd

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{R}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{p}_u, \mathbf{n} \rangle + 0 \cdot w_N.$$

Taki sam rachunek dowodzi, że $\langle \mathbf{p}_v, \mathbf{n} \rangle = 0$. \square

Punkt $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{o} - \frac{w_N}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}$ jest punktem płaszczyzny stycznej położonym najbliższej początku układu współrzędnych \mathbf{o} .

Krzywe B-sklejane

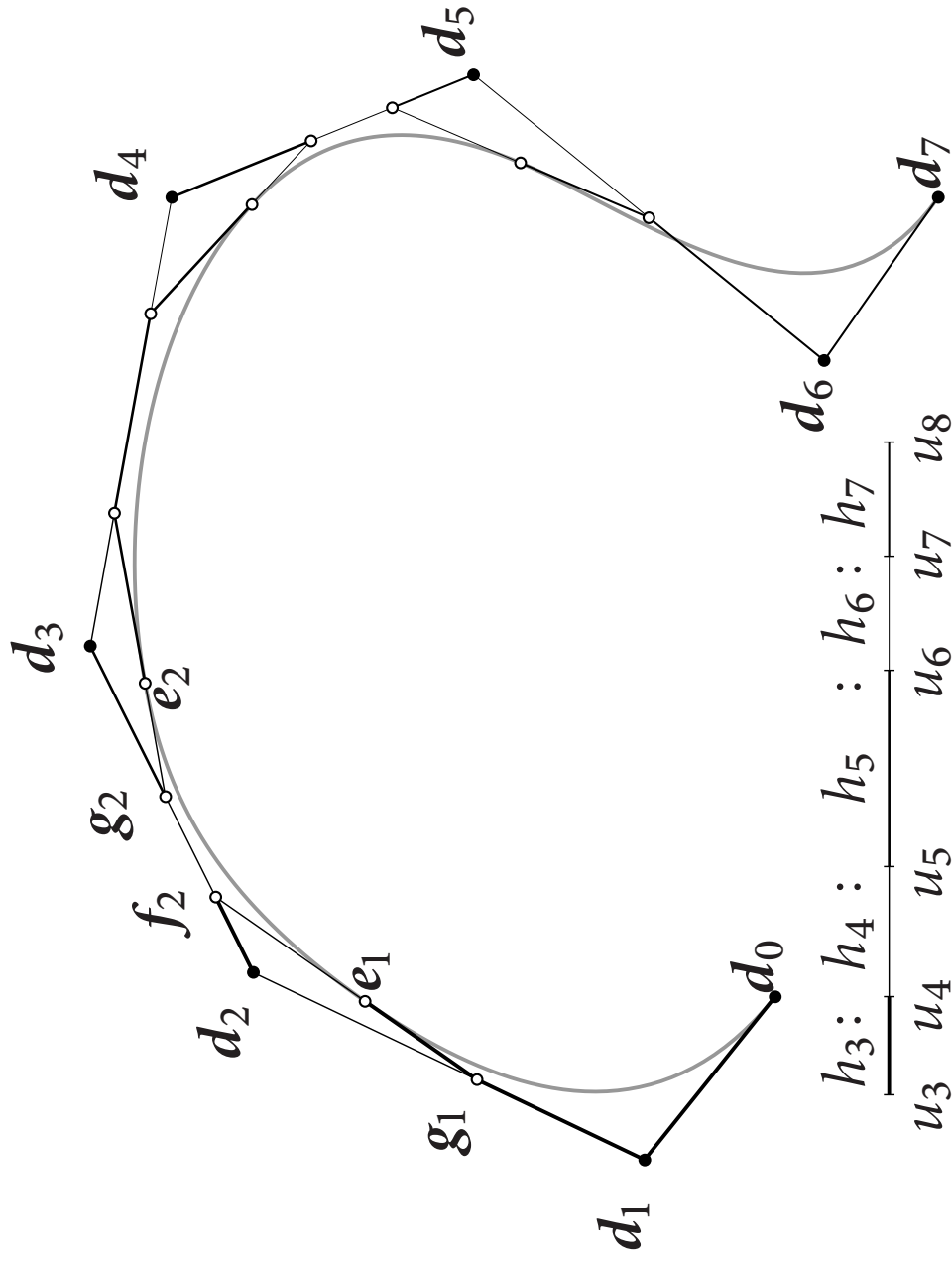
Krzywe Béziera są szczególnym przypadkiem krzywych B-sklejanych, które mogą składać się z dowolnie wielu łuków wielomianowych, połączonych w taki sposób, aby w każdym węźle była ustalona liczba ciągłych pochodnych.

Parametryzacja jest opisana wzorem

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{d}_i N_i^n(t), \quad t \in [u_n, u_{N-n}),$$

w którym występują unormowane funkcje B-sklejane N_i^n , określone przez niemalejący ciąg węzłów u_0, \dots, u_N oraz punkty kontrolne \mathbf{d}_i . W każdym przedziale $[u_k, u_{k+1})$ funkcja N_i^n jest wielomianem stopnia n lub zerem.

Stopień krzywej, która ma dużo punktów kontrolnych może być niski, a kształt skomplikowany.



Definicji (równoważnych) funkcji B-sklejanych jest wiele, na początek przedstawiam najstarszą (klasyczną) — przy użyciu ilorazów różnicowych.

Ilorazy różnicowe

Do zdefiniowania funkcji, a potem krzywych B-sklejanych przydadzą się ilorazy różnicowe. Niech $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $u_0, \dots, u_n \in A$ będą różnymi liczbami. Wzór rekurencyjny

$$\begin{aligned} f[u_i] &\stackrel{\text{def}}{=} f(u_i). \\ f[u_i, \dots, u_{i+k}] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[u_i, \dots, u_{i+k-1}] - f[u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]}{u_i - u_{i+k}} \end{aligned}$$

określa ilorazy różnicowe rzędu $k \leq n$ funkcji f na punktach (węzłach) u_0, \dots, u_n .

- Dla ustalonej funkcji f iloraz różnicowy rzędu k jest funkcją $k + 1$ zmiennych. Funkcja ta jest symetryczna, tj. jej argumenty można dowolnie przestawiać, nie zmieniając wartości.
- Dla ustalonych węzłów u_i, \dots, u_{i+k+1} iloraz różnicowy jest funkcjonalem liniowym (na przestrzeni funkcji ciągłych w zbiorze A), a dokładniej kombinacją liniową (o współczynnikach zależnych od węzłów) wartości funkcji f w węzłach.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja f ma w przedziale A , do którego należą węzły u_i, \dots, u_{i+k} , ciągłą pochodną rzędu $k \geq 1$, to*

$$f[u_i, \dots, u_{i+k}] = \int_{S_k} \dots \int f^{(k)}(t_0 u_i + t_1 u_{i+1} + \dots + t_k u_{i+k}) dt_1 \dots dt_k,$$

gdzie $S_k = \{ (t_0, \dots, t_k) : \sum_{j=0}^k t_j = 1, t_0, \dots, t_k \geq 0 \}$.

Podany w tym twierdzeniu wzór Hermite'a–Genocchiego umożliwia określenie ilorazów różnicowych także dla węzłów pokrywających się (ale funkcja f musi mieć odpowiednie pochodne ciągłe).

Wynikający z niego wniosek, że

$$\lim_{u_{i+1}, \dots, u_{i+k} \rightarrow u_i} f[u_i, \dots, u_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(u_i)}{k!},$$

umożliwia przyjęcie dla wszystkich węzłów jednakowych

$$f[\underbrace{u_i, \dots, u_i}_{k+1}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^{(k)}(u_i)}{k!},$$

a jeśli tylko niektóre węzły pokrywają się, to można użyć wzoru dla węzłów jednokrotnych (jeśli w ciągu u_i, \dots, u_{i+k} są choć dwa różne) i wzoru podanego wyżej (gdy już wszystkie są jednakowe).

- Dla dowolnego ustalonego ciągu węzłów iloraz różnicowy $f[u_i, \dots, u_{i+k}]$ jest funkcjonalem liniowym, którego wartość jest kombinacją liniową wartości funkcji f i jej pochodnych w węzłach, przy czym jeśli pewien węzeł w tym ciągu występuje r -krotnie, to kombinacja liniowa obejmuje wartości pochodnych rzędu $1, \dots, r-1$ funkcji f w tym węźle.
- **Wzór Leibniza** dla ilorazów różnicowych: niech g i h będą funkcjami odpowiednio gładkimi i niech $f = gh$. Wtedy

$$f[u_0, \dots, u_k] = \sum_{i=0}^k g[u_0, \dots, u_i] h[u_i, \dots, u_k].$$

W otoczeniu węzła o krotności r funkcje g i h muszą być klasy C^{r-1} .

Funkcje B-sklejane

Obcięta funkcja potęgowa stopnia n jest określona wzorem

$$(t - u)_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (t - u)^n & \text{dla } t \geq u, \\ 0 & \text{dla } t < u. \end{cases}$$

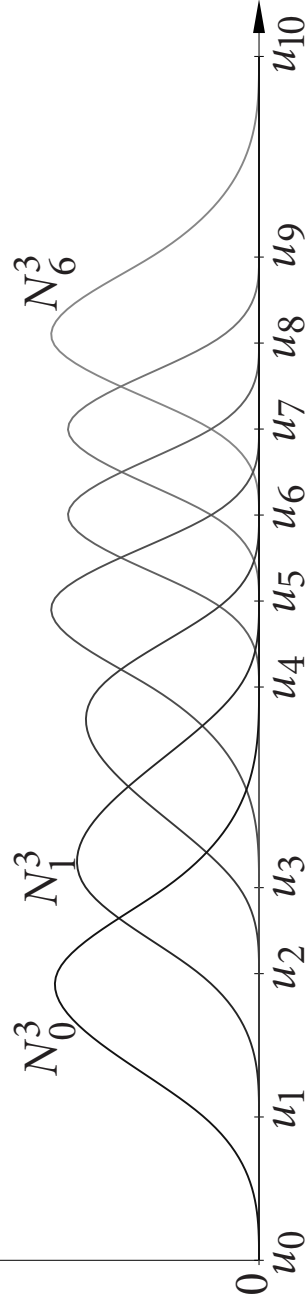
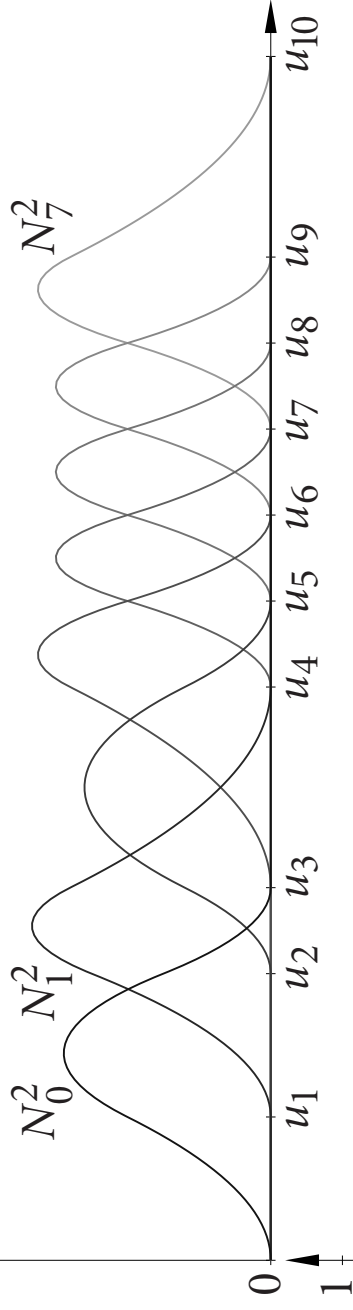
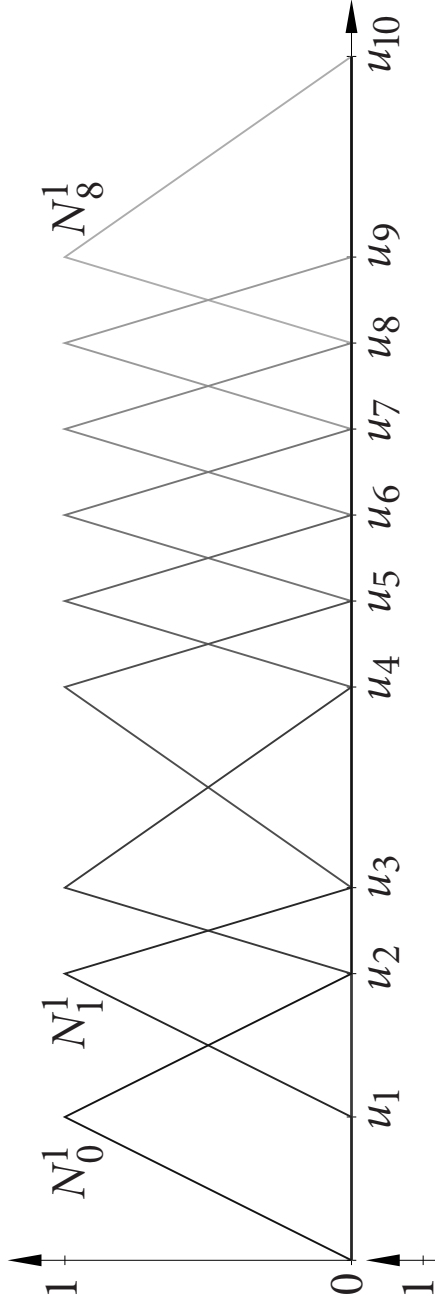
Dla ustalonego u funkcja ta jest klasy $C^{n-1}(\mathbb{R})$. Możemy zauważyć, że jeśli dwa wielomiany stopnia n , $p_1(t)$ i $p_2(t)$, mają w punkcie u tę samą wartość i pochodne rzędu $\leq n - 1$, to istnieje stała c , taka że $p_2(t) = p_1(t) + c(t - u)^n$, a zatem funkcja $s(t) = p_1(t) + c(t - u)_+^n$ jest funkcją sklejaną klasy C^{n-1} , opisaną w przedziałach $(-\infty, u]$ i $[u, +\infty)$ odpowiednio przez wielomiany p_1 i p_2 .

Def. Niech $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{N-1} \leq u_N$. Niech $f_t(u) = (t - u)_+^n$. Unormowana funkcja B-sklejana stopnia n z węzłami u_i, \dots, u_{i+n+1} jest określona wzorem

$$N_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) f_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}].$$

Jeśli $u_i = \dots = u_{i+n+1}$, to przyjmujemy, że funkcja N_i^n jest zerowa.

Nazwa wzięła się z dwóch źródeł: *basis spline*, bazowe funkcje sklejane, i *bell-shaped functions*, funkcje o kształcie dzwonu (wykresu).



Własność 1. Funkcja N_i^n poza przedziałem $[u_i, u_{i+n+1}]$ ma wartość 0.

Dowód. Liczby u_i i u_{i+n+1} to najmniejszy i największy argument różnicy dzielonej w definicji funkcji N_i^n . Jeśli zatem $t < u_i$, to funkcja f_t ma wartość 0 dla każdego $u \in \{u_i, \dots, u_{i+n+1}\}$ i jej różnica dzielona jest różnicą dzieloną funkcji zerowej. Z drugiej strony, dla $u \leq t$ funkcja $f_t(u)$ jest wielomianem stopnia n . Jeśli więc $t \geq u_{i+n+1} \geq \dots \geq u_i$, to jej różnica dzielona rzędu $n + 1$ też jest równa 0. \square

Jeśli $u_i = u_{i+n+1}$, to funkcja N_i^n jest funkcją zerową. Dlatego zwykle, mając ustalony stopień n , narzucamy na ciąg węzłów warunek **progresywności**: ma być $u_i < u_{i+n+1}$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$.

Własność 2. Wartości funkcji N_i^n można obliczać za pomocą wzoru *Mansfielda-de Boora-Coxa*:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(t) + \frac{u_{i+n+1} - t}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t).$$

Dowód. Dla funkcji N_i^0 mamy $f_t(u) = (t - u)_+^0$, skąd wynika

$$N_i^0(t) = -(u_{i+1} - u_i) \frac{(t - u_i)_+^0 - (t - u_{i+1})_+^0}{u_i - u_{i+1}},$$

i wystarczy zbadać trzy przypadki: $t < u_i$, $u_i \leq t < u_{i+1}$ i $u_{i+1} \leq t$.

Jeśli $n > 0$, to możemy przedstawić funkcję $f_t(u)$ w postaci iloczynu funkcji $g(u) = t - u$ i $h(u) = (t - u)_+^{n-1}$ i skorzystać ze wzoru Leibniza:

$$f_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] = \sum_{k=0}^{n+1} g[u_i, \dots, u_{i+k}] h[u_{i+k}, \dots, u_{i+n+1}].$$

Ponieważ pierwszy czynnik jest wielomianem stopnia 1, jego różnice dzielone rzędów wyższych niż 1 są równe 0, stąd

$$f_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] = g[u_i] h[u_i, \dots, u_{i+n+1}] + g[u_i, u_{i+1}] h[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}],$$

przy czym $g[u_i, u_{i+1}] = -1$.

Na podstawie definicji funkcji B-sklejanych

$$h[u_i, \dots, u_{i+n}] = \frac{(-1)^n N_i^{n-1}(t)}{u_{i+n} - u_i},$$

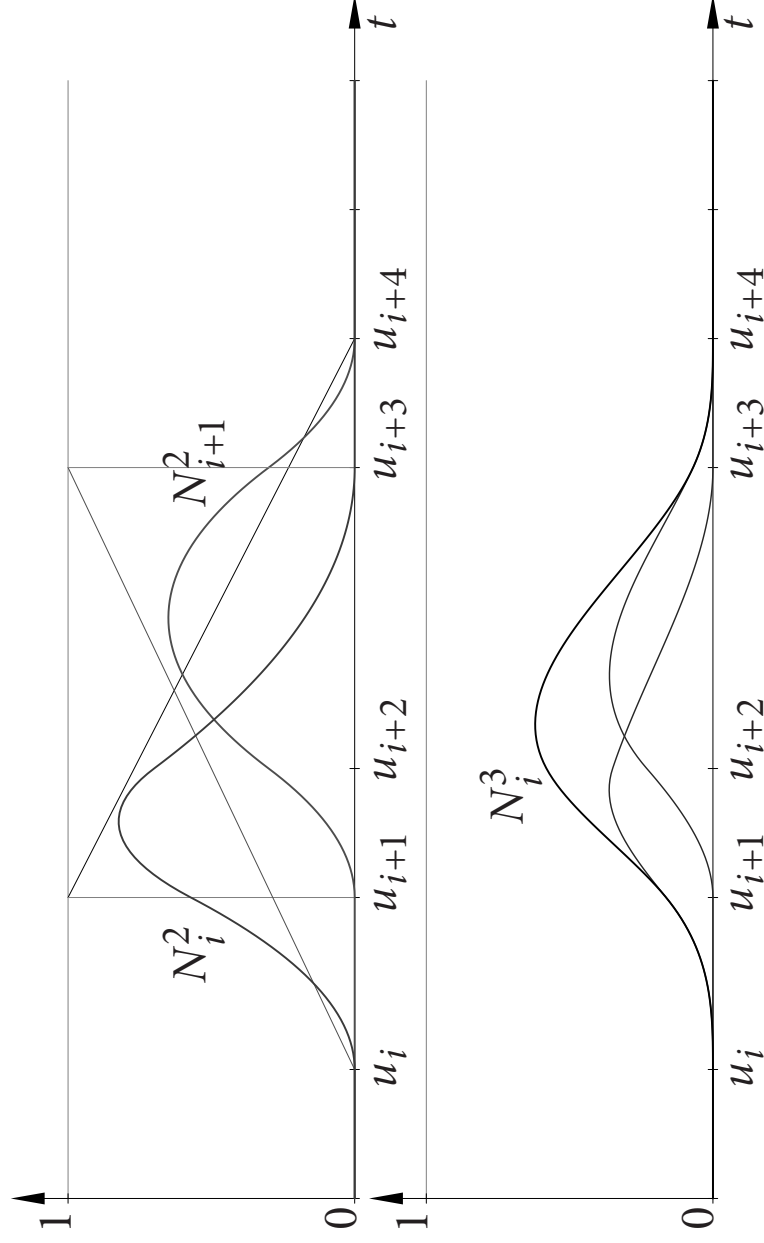
$$h[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}] = \frac{(-1)^n N_{i+1}^{n-1}(t)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}}.$$

Możemy na tej podstawie obliczyć

$$N_i^n(t) = (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) \times$$

$$\times \left((t - u_i) \frac{u_{i+n} - u_i}{u_i - u_{i+n+1}} - \frac{(-1)^n N_i^{n-1}(t)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} - \frac{(-1)^n N_{i+1}^{n-1}(t)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} \right).$$

Aby dokończyć dowód, wystarczy uporządkować wyrażenie po prawej stronie powyższej równości. \square



W wielu książkach, zwłaszcza na temat grafiki komputerowej, wzór Mansfelda-de Boora-Coxa jest użyty do zdefiniowania funkcji B-sklejanych.

Własność 3. W każdym przedziale $(u_j, u_{j+1}) \subset [u_i, u_{i+n+1}]$ funkcja $N_i^n(t)$ jest wielomianem stopnia n . Jeśli liczba u_j w ciągu u_i, \dots, u_{i+n+1} występuje r razy, to funkcja N_i^n ma w punkcie u_j ciągłe pochodne rzędu $1, \dots, n - r$.

Dowód. To, że między sąsiednimi węzłami funkcja B-sklejana jest wielomianem stopnia co najwyżej n , natychmiast wynika ze wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa. Fakt, że stopień wielomianu opisującego funkcję N_i^n w takim przedziale jest równy n można udowodnić, badając jej pochodną rzędu n (odpowiedni wzór będzie dalej).

Jeśli pewien węzeł ma krotność $r > 1$, to różnica dzielona funkcji f_t ma składniki, które są iloczynami stałych i pochodnych funkcji $f_t(u)$ rzędu $1, \dots, r - 1$ w punkcie u_j . Dla $k \leq n$ pochodna rzędu k funkcji f_t w punkcie u_j jest równa $(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (t - u_j)^{n-k}$. Ponieważ dla każdego składnika jest $k < r$, wszystkie składniki mają pochodną rzędu $n - r$ względem t ciągłą w u_j . \square

Własność 4 (rozkład jedynki). Funkcje N_i^n są nieujemne i jeśli

$t \in [u_n, u_{N-n})$, to

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} N_i^n(t) = 1.$$

Co więcej, jeśli $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$, to

$$\sum_{i=k-n}^k N_i^n(t) = 1.$$

Dowód polecam jako ćwiczenie. \square

Osiągnięciu tej własności służy czynnik $(-1)^{n+1}(u_{i+n+1} - u_i)$ w definicji funkcji N_i^n i w tym sensie funkcje te są „unormowane”.

Własność 5 (otoczki wypukłej). Jeśli $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$, to wartość funkcji sklejanej

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t)$$

jest kombinacją wypukłą współczynników d_{k-n}, \dots, d_k .

Dowód. To jest natychmiastowy wniosek z własności 4. \square

Z uwagi na te własności zwykle w zastosowaniach używa się funkcji B-sklejanych określonych dla ciągu węzłów wybranego tak, aby przedział $[u_n, u_{N-n}]$ był potrzebną w konkretnym zastosowaniu dziedziną (dziedzinę domykamy z prawej strony, przyjmując, że wartość funkcji sklejanej w u_{N-n} jest wartością wielomianu opisującego tę funkcję w przedziale $[u_{N-n-1}, u_{N-n})$).

Własność 6. Pochodna funkcji B-sklejanej stopnia $n > 0$, w punktach t , w których istnieje, wyraża się wzorem

$$\frac{d}{dt}N_i^n(t) = \frac{n}{u_{i+n} - u_i}N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}}N_{i+1}^{n-1}(t).$$

Dowód. Aby otrzymać pochodną funkcji N_i^n , możemy we wzorze ją definiującym zastąpić funkcję $f_t(u)$ przez jej pochodną ze względu na parametr t , tj. przez funkcję $p_t(u) = n(t - u)_+^{n-1}$. Dostajemy wtedy równość

$$\begin{aligned} N_i^{n'}(t) &= (-1)^{n+1}(u_{i+n+1} - u_i)p_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] \\ &= (-1)^{n+1}(u_{i+n+1} - u_i) \times \\ &\quad \times \frac{p_t[u_i, \dots, u_{i+n}] - p_t[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}]}{u_i - u_{i+n+1}}, \end{aligned}$$

której przekształcenie do potrzebnej postaci pozostawiam jako ćwiczenie.

□

Pochodna funkcji N_i^n nie istnieje, jeśli liczba t występuje $n + 1$ razy w ciągu u_i, \dots, u_{i+n+1} .

Z własności 6 wynika, że jeśli $s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t)$ oraz $t \in (u_n, u_{N-n})$, to

$$s'(t) = \sum_{i=0}^{N-n-2} \frac{n(d_{i+1} - d_i)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t),$$

przy czym jeśli $t \in (u_k, u_{k+1}) \subset (u_n, u_{N-n})$, to

$$s'(t) = \sum_{i=k-n}^{k-1} \frac{n(d_{i+1} - d_i)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t). \quad (\square)$$

Dowód tych wzorów też polecam jako ćwiczenie. Trzeba w nim skorzystać ze spostrzeżenia, że funkcje N_0^{n-1} i N_{N-n}^{n-1} są w przedziale $[u_n, u_{N-n})$ równe 0.

Własność 7 (lokalna liniowa niezależność). Jeśli $u_k < u_{k+1}$, to funkcje N_{k-n}^n, \dots, N_k^n w przedziale $[u_k, u_{k+1})$ są wielomianami liniowo niezależnymi.

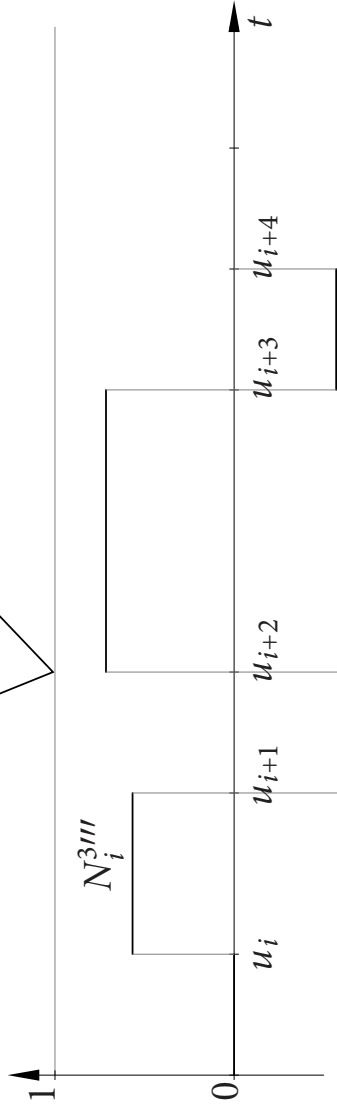
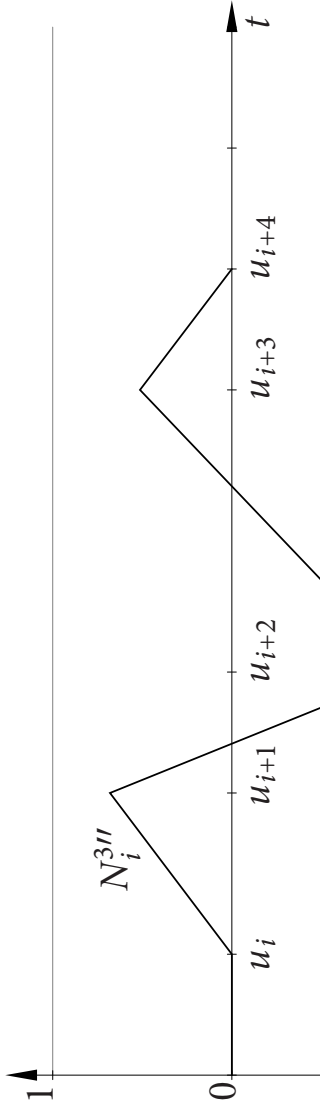
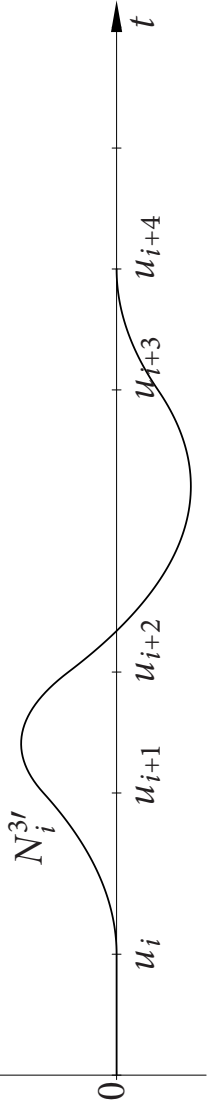
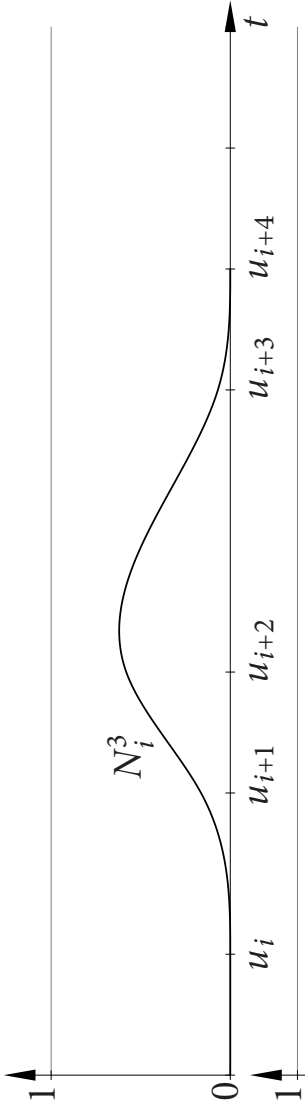
Dowód. Wystarczy wykazać, że jeśli funkcja $s(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t)$ jest w całym przedziale $[u_k, u_{k+1})$ równa zero, to $d_{k-n} = \dots = d_k = 0$. Dla $n = 0$ to jest oczywiste. Przypuśćmy zatem, że $n > 0$ i że funkcje $N_{k-n+1}^{n-1}, \dots, N_k^{n-1}$ w przedziale $[u_k, u_{k+1})$ są liniowo niezależnymi wielomianami stopnia $n - 1$. Jeśli funkcja s znika w tym przedziale, to również jej pochodna jest w nim równa 0, ale ze wzoru (\square) i z przypuszczenia wynika, że $d_{i+1} - d_i = 0$ dla $i = k - n, \dots, k - 1$. Stąd funkcja zerowa s ma współczynniki $d_{k-n} = \dots = d_k$. Ale z własności otoczki wypukłej wynika, że dla każdego $t \in [u_k, u_{k+1})$ jest $\sum_{i=k-n}^k d_k N_i^n(t) = d_k$, więc musi być $d_k = 0$ i tym sposobem krok indukcyjny został zrobiony. \square

Na podstawie własności 7 łatwo jest dowieść (ćwiczenie), że zbiór funkcji $N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n$ określony dla progresywnego ciągu węzłów u_0, \dots, u_N jest liniowo niezależny, a nawet że zbiór nieskończony $\{ N_i^n : i \in \mathbb{Z} \}$ funkcji określonych dla nieskończonego progresywnego ciągu węzłów jest liniowo niezależny. Zatem zbiór funkcji B-sklejanych jest istotnie bazą przestrzeni funkcji sklejanych, którą rozpina.

Własność 8 (minimalnego nośnika). *Nie istnieje niezerowa funkcja sklejana stopnia $\leq n$ z węzłami u_i, \dots, u_{i+n+1} , która w otoczeniu każdego węzła o krotności r jest klasy C^{n-r} i której nośnik (domknięcie zbioru, w którym funkcja przyjmuje niezerowe wartości) jest podzbiorem właściwym przedziału $[u_i, u_{i+n+1}]$, tj. nośnika funkcji N_i^n .*

Dowód. Przypadki $n = 0$ i $n = 1$ są trywialne. Niech $n > 1$. Załóżmy, że wszystkie węzły są jednokrotne i przypuśćmy, że taka funkcja f (klasy $C^{n-1}(\mathbb{R})$) istnieje i przyjmuje wartość dodatnią w pewnym punkcie $t_0^{(0)} \in (u_i, u_{i+n+1})$. Ponieważ $f(u_i) = f(u_{i+n+1}) = 0$, w pewnym przedziale funkcja f jest rosnąca, a po nim następuje przedział, w którym f maleje. To oznacza, że istnieją punkty $t_0^{(1)}$ i $t_1^{(1)}$, takie że $u_i < t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < u_{i+n+1}$ i $f'(t_0^{(1)}) > 0$, $f'(t_1^{(1)}) < 0$. Z ciągłości f' jest też $f'(u_i) = f'(u_{i+n+1}) = 0$.

Stosując to rozumowanie do kolejnych ciągłych pochodnych (rzędu $2, \dots, n - 1$), stwierdzamy, że $f^{(n-1)}$ ma co najmniej $n + 1$ przedziałów wewnątrz $[u_i, u_{i+n+1}]$, w których jest na przemian rosnąca i malejąca. Ale pochodna rzędu $n - 1$ funkcji sklejaną stopnia n jest funkcją sklejaną stopnia 1; pochodna rzędu n jest funkcją kawałkami stałą, która musi w co najmniej $n + 1$ przedziałach przyjmować na przemian wartości dodatnie i ujemne. Jedynymi punktami nieciągłości funkcji $f^{(n)}$ mogą być węzły u_i, \dots, u_{i+n+1} , które wyznaczają potrzebne $n + 1$ przedziałów. Ich suma (po domknięciu) daje cały przedział $[u_i, u_{i+n+1}]$. Dowód dla przypadku, gdy pewne węzły mają krotność większą niż 1, zostawiam jako ćwiczenie. \square



Algorytm de Boora ma na celu obliczenie, dla danego $t \in [u_n, u_{N-n})$ obliczenie wartości w tym punkcie funkcji B-sklejanych określonych przez ciąg węzłów u_0, \dots, u_N . Dokładniej, dla $k \in \{n, \dots, N-n-1\}$ algorytm oblicza wartości wielomianów opisujących funkcje N_{k-1}^n, \dots, N_k^n , które w przedziale $[u_k, u_{k+1})$ mają wartości niezerowe.

Obliczenie jest wykonywane na podstawie wzoru Mansfielda–de Boora–Coxa.

```

/* t ∈ [uk, uk+1) ⊂ [un, uN-n) */
b[k] = 1; /* Nk0 = 1 */
for ( j = 1; j ≤ n; j++ ) {
    β = (uk+1 - t) / (uk+1 - uk-j+1); /* β = βk-j+1(j) */
    b[k-j] = β * b[k-j+1]; /* Nk-jj = β Nk-j+1j-1 */
    for ( i = k-j+1; i < k; i++ ) {
        α = 1 - β; /* α = αi(j) */
        β = (ui+j+1 - t) / (ui+j+1 - ui+1); /* β = βi+1(j) */
        b[i] = α * b[i] + β * b[i+1]; /* Nij = α Nij-1 + β Ni+1j-1 */
    }
    b[k] *= (1 - β); /* Nkj = α Nkj-1 */
}
/* b[i] = Nin(t) dla i = k - n, ..., k */

```

Drugi algorytm de Boora (zwany czasami uogólnionym algorytmem de Casteljau) na podstawie ciągu węzłów u_0, \dots, u_N , ciągu punktów kontrolnych d_0, \dots, d_{N-n-1} i liczby $t \in [u_n, u_{N-n})$ znajduje punkt krzywej B-sklejanej odpowiadający punktowi t .

Niech $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$. Wtedy mamy również

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t),$$

Jeśli $n > 0$, to na podstawie wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa

$$\begin{aligned}
s(t) &= \sum_{i=k-n}^k \mathbf{d}_i \left(\underbrace{\frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i}}_{\alpha_i^{(n)}} N_i^{n-1}(t) + \underbrace{\frac{u_{i+n+1} - t}{u_{i+n+1} - u_{i+1}}}_{1 - \alpha_{i+1}^{(n)}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \\
&= \sum_{i=k-n+1}^k \alpha_i^{(n)} \mathbf{d}_i N_i^{n-1}(t) + \sum_{i=k-n}^{k-1} (1 - \alpha_{i+1}^{(n)}) \mathbf{d}_i N_{i+1}^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-n+1}^k \alpha_i^{(n)} \mathbf{d}_i N_i^{n-1}(t) + \sum_{i=k-n+1}^k (1 - \alpha_i^{(n)}) \mathbf{d}_{i-1} N_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-n+1}^k (\alpha_i^{(n)} \mathbf{d}_i + (1 - \alpha_i^{(n)}) \mathbf{d}_{i-1}) N_i^{n-1}(t).
\end{aligned}$$

Oznaczmy $\mathbf{d}_i^{(1)} = \alpha_i^{(n)} \mathbf{d}_i + (1 - \alpha_i^{(n)}) \mathbf{d}_{i-1}$. Jeśli $n > 1$, to takie przekształcenie możemy zastosować rekurencyjnie i otrzymać

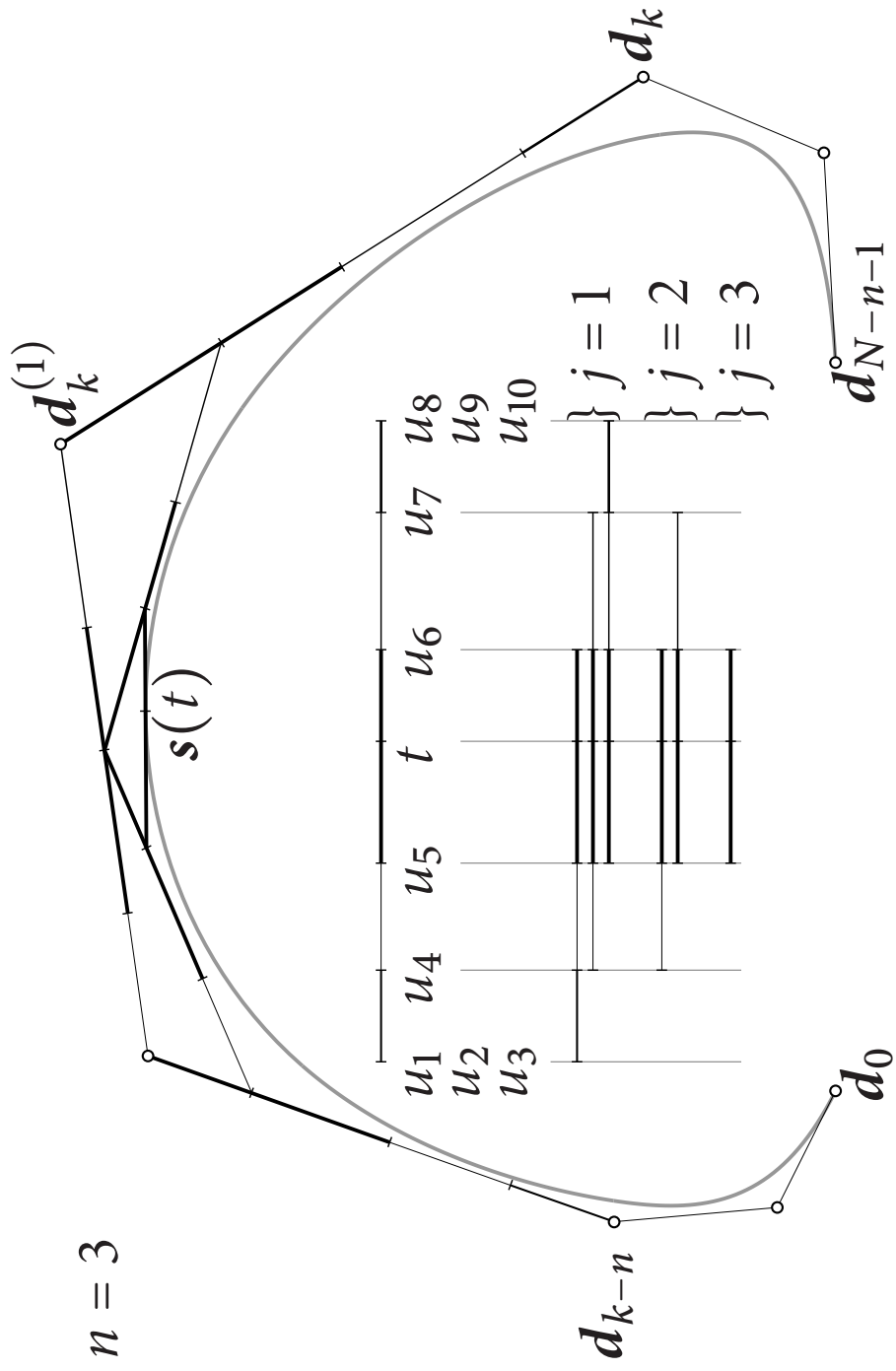
$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=k}^k \mathbf{d}_i^{(n)} N_i^0(t) = \mathbf{d}_k^{(n)}.$$

Na tym rachunku opiera się algorytm obliczania punktu $\mathbf{s}(t)$:

```

/*  $\mathbf{d}_i^{(0)} = \mathbf{d}_i$  dla  $i = k - n, \dots, k$ ,  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$  */
for ( j = 1; j ≤ n j++ )
    for ( i = k - n + j; i ≤ k; i++ ) {
         $\alpha = (t - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$ ; /*  $\alpha = \alpha_i^{(n+1-j)}$  */
         $\mathbf{d}_i^{(j)} = (1 - \alpha) * \mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)} + \alpha * \mathbf{d}_i^{(j-1)}$ ;
    }
/*  $\mathbf{d}_k^{(n)} = \mathbf{s}(t)$  */

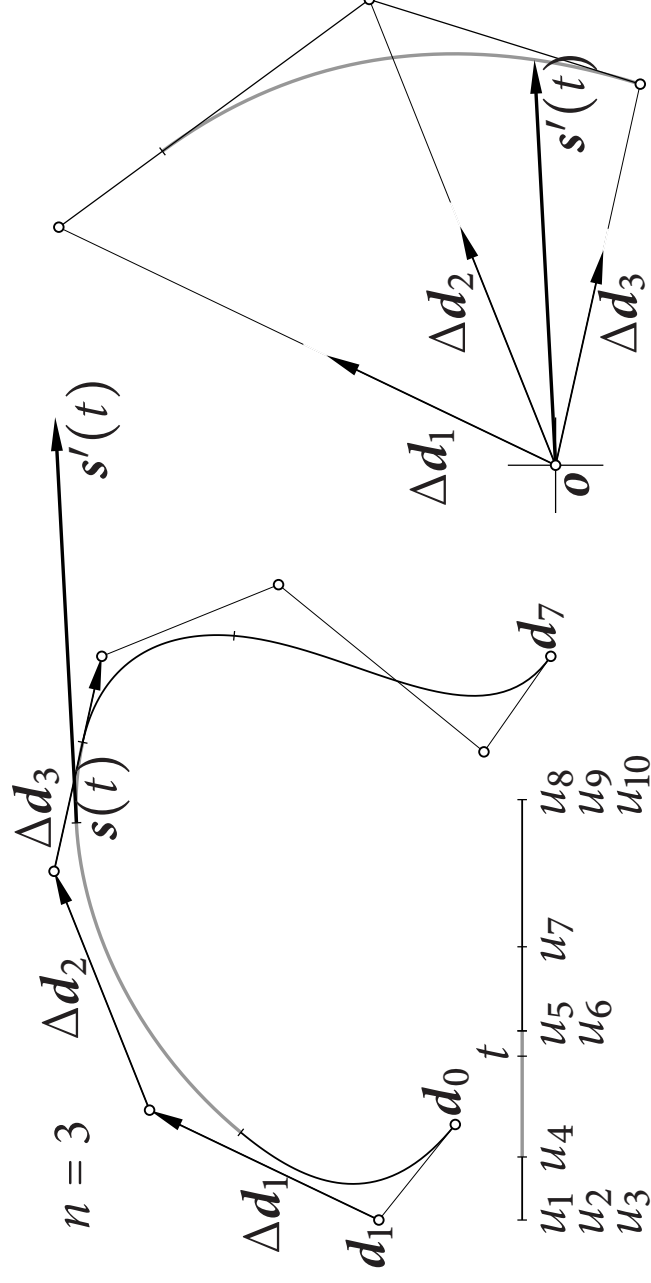
```



Własności krzywych B-sklejanych

- **Afiniczna niezmienniczość reprezentacji:** Jeśli f jest dowolnym przekształceniem afinicznym, to obraz krzywej \mathbf{s} w tym przekształceniu jest reprezentowany przez punkty kontrolne $f(\mathbf{d}_i)$.
- **Niezmienniczość ze względu na afiniczne przekształcenia ciągu węzłów:** Biorąc węzły $u'_i = au_i + b$, gdzie $a > 0$, otrzymamy nową parametryzację (o dziedzinie $[u'_n, u'_{N-n}]$) krzywej, której kształt się nie zmieni.
- **Silna własność otoczki wypukłej:** Łuk $\mathbf{s}(t)$ dla $t \in [u_k, u_{k+1})$ jest położony w otoczce wypukłej zbioru $\{\mathbf{d}_{k-n}, \dots, \mathbf{d}_k\}$.

- Silna własność hodografu: Wektor $\mathbf{s}'(t)$ dla $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$ jest kombinacją liniową o dodatnich współczynnikach wektorów $\Delta \mathbf{d}_{k-n}, \dots, \Delta \mathbf{d}_{k-1}$.



- **Lokalna kontrola kształtu krzywej:** Zmiana punktu d_i powoduje odkształcenie tylko łuku odpowiadającego parametrom $t \in [u_i, u_{i+n+1})$, czyli co najwyżej $n + 1$ łuków wielomianowych, z których składa się krzywa.
- **Krzywe Béziera jako szczególny przypadek:** Jeśli $N = 2n + 1$ i $u_1 = \dots = u_n = 0, u_{n+1} = \dots = u_{2n}$, to $N_i^n = B_i^n$ (unormowane funkcje B-sklejane w przedziale $[0, 1)$ są wielomianami Bernsteina) i krzywa B-sklejana jest krzywą Béziera stopnia n .
Co więcej, jeśli $u_{k-n+1} = \dots = u_k < u_{k+1} = \dots = u_{k+n}$, to punkty d_{k-n}, \dots, d_k reprezentują łuk $s(t)$ dla $t \in [u_k, u_{k+1})$ w bazie Bernsteina lokalnego parametru przyjmującego w przedziale $[u_k, u_{k+1})$ wartości od 0 do 1.

- **Możliwość wcześniejszego obliczenia punktu $s(t)$:** Jeśli parametr t pokrywa się z węzłem o krotności r , to możemy algorytm de Boora zakończyć po wykonaniu $n - r$ przebiegów zewnętrznej pętli; jest $s(t) = \mathbf{d}_{k-r}^{(k-r)}$. W dalszych przebiegach zawsze będzie $\alpha = 0$, więc nie otrzymamy żadnego nowego punktu.

W szczególności, jeśli $u_{k-n+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$ (tj. węzeł u_k ma krotność n lub większą), to $s(t) = \mathbf{d}_{k-n}$.

- **Ciągłość pochodnych parametryzacji jest opisana prostą regułą:** Jeśli węzeł u_k (dla $k \in \{n + 1, \dots, u_{N-n-1}\}$) ma krotność r , to krzywa B-sklejana ma w tym węźle ciągłe pochodne do rzędu $n - r$ włącznie. Ciągłość pochodnych wyższych rzędów zależy od punktów kontrolnych.

Wstawianie węzłów

Przestrzeń funkcji sklejanых określonego stopnia z danymi węzłami jest podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcji sklejanых, które mają wszystkie te węzły i jeszcze węzły dodatkowe. Operacja wstawiania węzła (W. Boehm, 1980 r.) ma na celu obliczenie, na podstawie węzłów i punktów kontrolnych krzywej B-sklejanej, reprezentacji tej krzywej w bazie B-sklejanej przestrzeni, której elementy mają jeden dodatkowy węzeł.

Jedna z definicji krzywych B-sklejanych opiera się na tej konstrukcji.

Dla ustalonych węzłów u_1, \dots, u_{N-1} określimy współrzędne Greville'a:

$$\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}(u_{i+1} + \dots + u_{i+n}). \quad (3)$$

Zauważmy, że węzły u_0 i u_N nie mają wpływu na krzywą i nie są tu potrzebne. Jeśli ciąg węzłów jest progresywny, tj. dla każdego i jest $u_i < u_{i+n+1}$, to ciąg współrzędnych Greville'a jest ściśle rosnący.

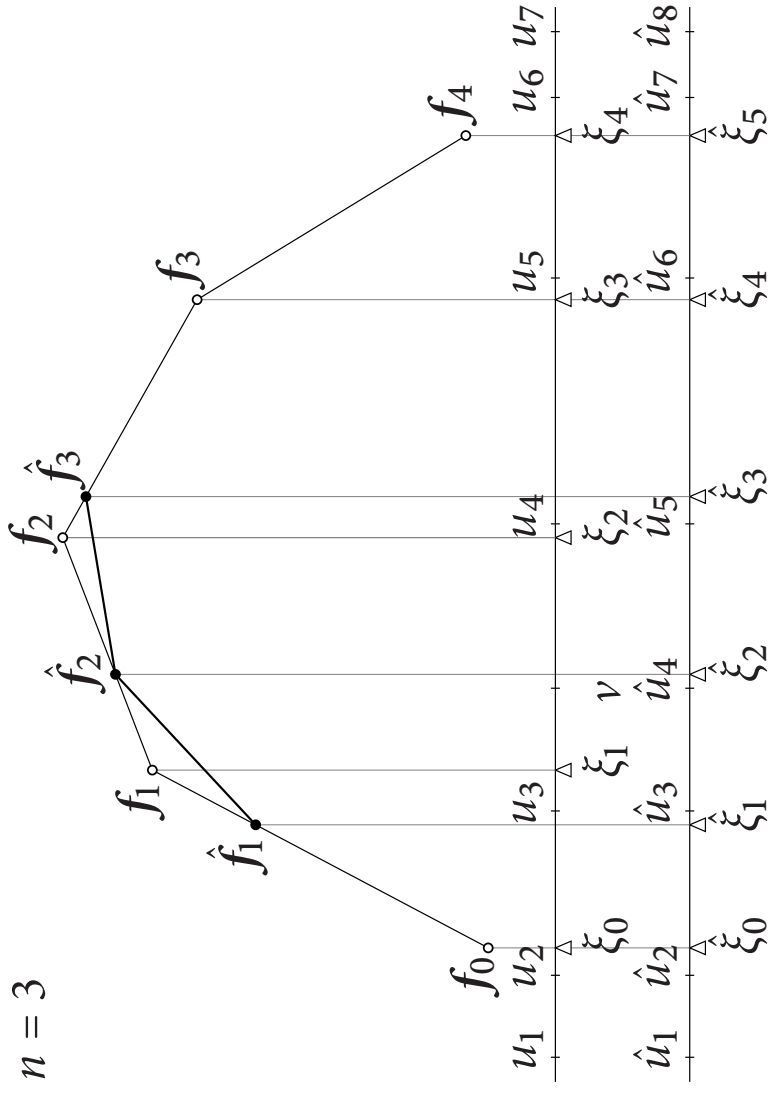
Współrzędnych Greville'a jest tyle, ile punktów kontrolnych (tj. ich liczba jest wymiarem przestrzeni). Dla krzywej B-sklejanej $\mathbf{s}(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{d}_i N_i^n(t)$ będziemy rozpatrywać punkty (ξ_i, \mathbf{d}_i) (albo dla uproszczenia ilustracji (ξ_i, d_i)), gdzie d_i to współczynniki skalarnej funkcji sklejanej $s(t)$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$.

Rozważmy funkcję sklejaną pierwszego stopnia, $d(t)$, której wykres jest łamaną o wierzchołkach $(\xi_0, d_0), \dots, (\xi_{N-n-1}, d_{N-n-1})$.

Niech $v \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$. Wstawienie liczby v do ciągu węzłów z zachowaniem uporządkowania daje ciąg $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N+1}$. Możemy obliczyć współrzędne Greville'a dla tego ciągu, a następnie wartości $\hat{d}_0 = d(\xi_0), \dots, \hat{d}_{N-1} = d(\xi_{N-n})$. Liczby \hat{d}_v są współczynnikami funkcji $s(t)$ w bazie B-sklejanej $\{\hat{N}_0^n, \dots, \hat{N}_{N-n}^n\}$ odpowiadającej nowemu ciągowi węzłów:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=0}^{N-n} \hat{d}_i \hat{N}_i^n(t).$$

Zanim to wykażemy, zobaczmy rysunek.



Dla $v \in [u_k, u_{k+1})$ nowe są tylko współrzędne Greville'a $\hat{\xi}_i$ i nowe liczby \hat{d}_i dla $i = k - n + 1, \dots, k - r$, gdzie $r = 0$ jeśli $v > u_k$, a jeśli $v = u_k$, to r jest krotnością węzła u_k . Przy tym mamy $\hat{\xi}_{i-1} < \hat{\xi}_i^v < \hat{\xi}_i$, skąd wynika, że każdy nowy punkt f_i^t leży na innym odcinku $\overline{f_{i-1}f_i}$. To zjawisko jest nazywane **przesiewaniem**. Dla $i > k$ jest $\hat{d}_i = d_{i-1}$ (zatem zmieniła się tylko numeracja punktów kontrolnych). Jest

$$\begin{aligned} d_i^t &= \frac{\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_i^t}{\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\hat{\xi}_i^t - \hat{\xi}_{i-1}}{\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_{i-1}} d_i \\ &= \frac{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_{i+1} + \dots + u_{i+n-1} + t)/n}{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n} d_{i-1} + \\ &= \frac{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n}{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n} d_i \\ &= \frac{u_{i+n} - t}{u_{i+n} - u_i} d_{i-1} + \frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i} d_i, \end{aligned}$$

zatem wstawianie węzła jest wykonalne bez obliczania współrzędnych Greville'a.

```

/* u[i] = ui dla i = 1, ..., N-1, */
/* d[i] = di dla i = 0, ..., N-n-1, t ∈ [un, uN-n]. */
k = N-1;
while ( t < u[k] )
    k --;
r = 0; i = k;
while ( i ≥ 1 && t == u[i] )
    { i --; r ++; }
for ( i = N-n-1; i ≥ k-r; i -- )
    d[i+1] = d[i];
for ( i = k-r; i > k-n; i -- )
    d[i] = ((u[i+n]-t)d[i-1] + (t-u[i])d[i]) / (u[i+n] - u[i]);
for ( i = N-1; i > k; i -- )
    u[i+1] = u[i];
u[k+1] = t;
N = N+1;
/* zmienna N oraz tablice u i d zawierają wynik
wstawiania węzła. */

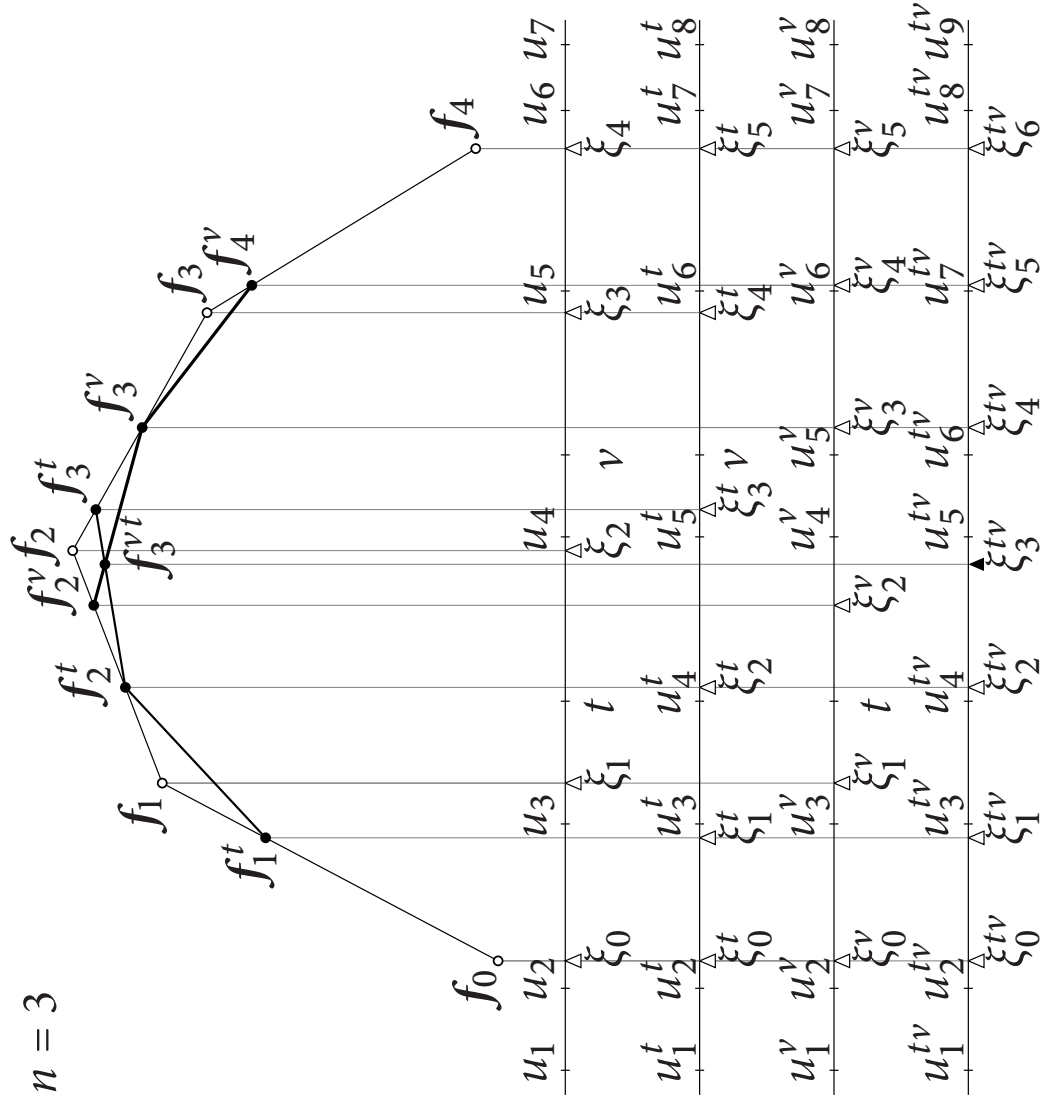
```


Wykażemy, że wstawienie kolejno kilku węzłów daje ten sam końcowy wynik, niezależnie od kolejności, w jakiej są one wstawiane. Wystarczy to pokazać dla dwóch różnych węzłów, t i v .

Współrzędne Greville'a otrzymane po wstawieniu węzła t oznaczmy symbolem ξ_i^t , otrzymane po wstawieniu węzła v symbolem ξ_i^v , a wstawienie drugiego węzła da ten samy wynik niezależnie od kolejności: $\xi_i^{tv} = \xi_i^{vt}$ dla każdego i . Trzeba wykazać, że także $d_i^{tv} = d_i^{vt}$ dla każdego i .

Niech $t < v$ i niech $t \in [u_k, u_{k+1})$ oraz $v \in [u_l, u_{l+1})$; wtedy $k \leq l$. Jeśli $l - k \geq n - 1$, to żaden współczynnik d_i^{vt} nie zależy od obu nowych węzłów, a więc można je wstawić w dowolnej kolejności, otrzymując ten sam wynik.

$n = 3$



Współrzędne Grevillèa, które zależą od obu wstawionych węzłów to ξ_i^{tv} dla $i = l - n, \dots, k$. Rozważmy punkty $f_{i-1}^t, f_{i-1}^v, f_i^t, f_i^v, f_i^{tv}$ i f_i^{vt} . Wtedy, ponieważ żaden wektor w wyrażeniu po lewej stronie nie jest pionowy, ma miejsce równość

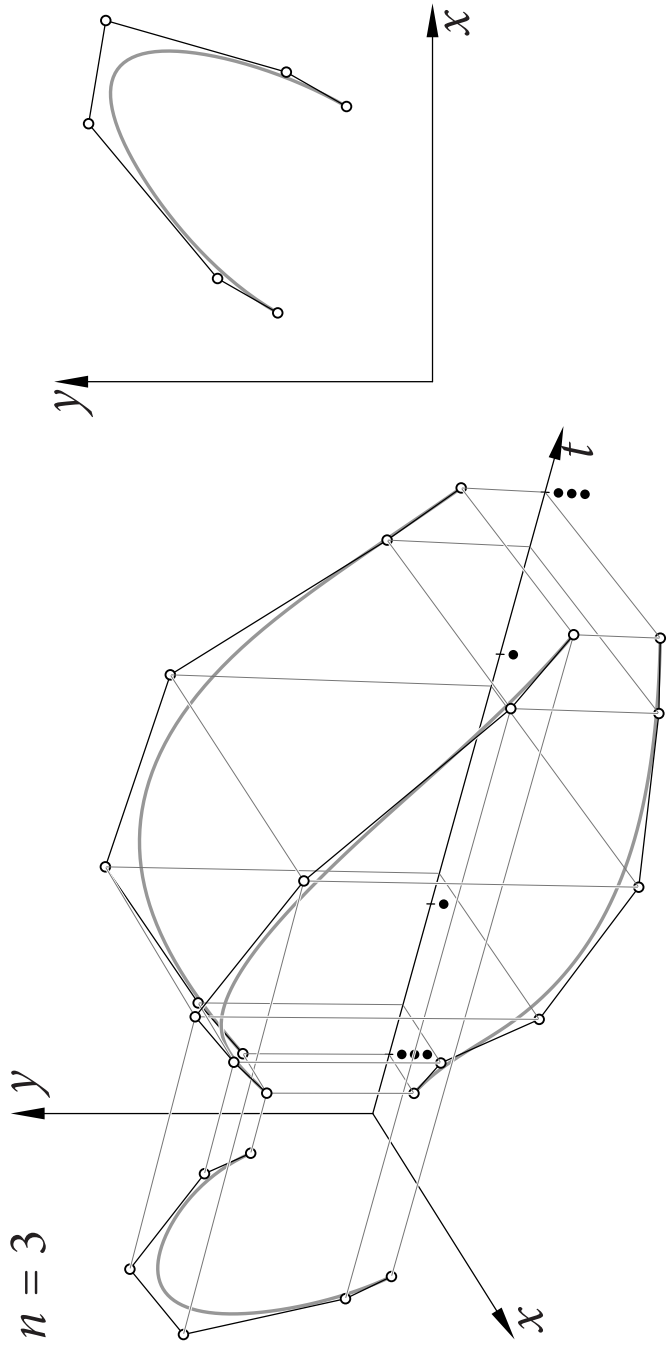
$$\frac{f_{i-1}^t - f_{i-1}^v}{f_{i-1}^v - f_{i-1}^t} \cdot \frac{f_i^{vt} - f_{i-1}^v}{f_i^v - f_i^{vt}} \cdot \frac{f_i^t - f_i^v}{f_{i-1}^t - f_i^t} = \frac{\xi_{i-1}^t - \xi_{i-1}^v}{\xi_{i-1}^v - \xi_{i-1}^t} \cdot \frac{\xi_i^{vt} - \xi_i^v}{\xi_i^v - \xi_i^{vt}} \cdot \frac{\xi_i^t - \xi_i^v}{\xi_{i-1}^t - \xi_i^t}.$$

Podstawiając węzły, których współrzędne Grevillèa są średnimi arytmetycznymi, wyrażenie po prawej stronie przekształcimy do postaci

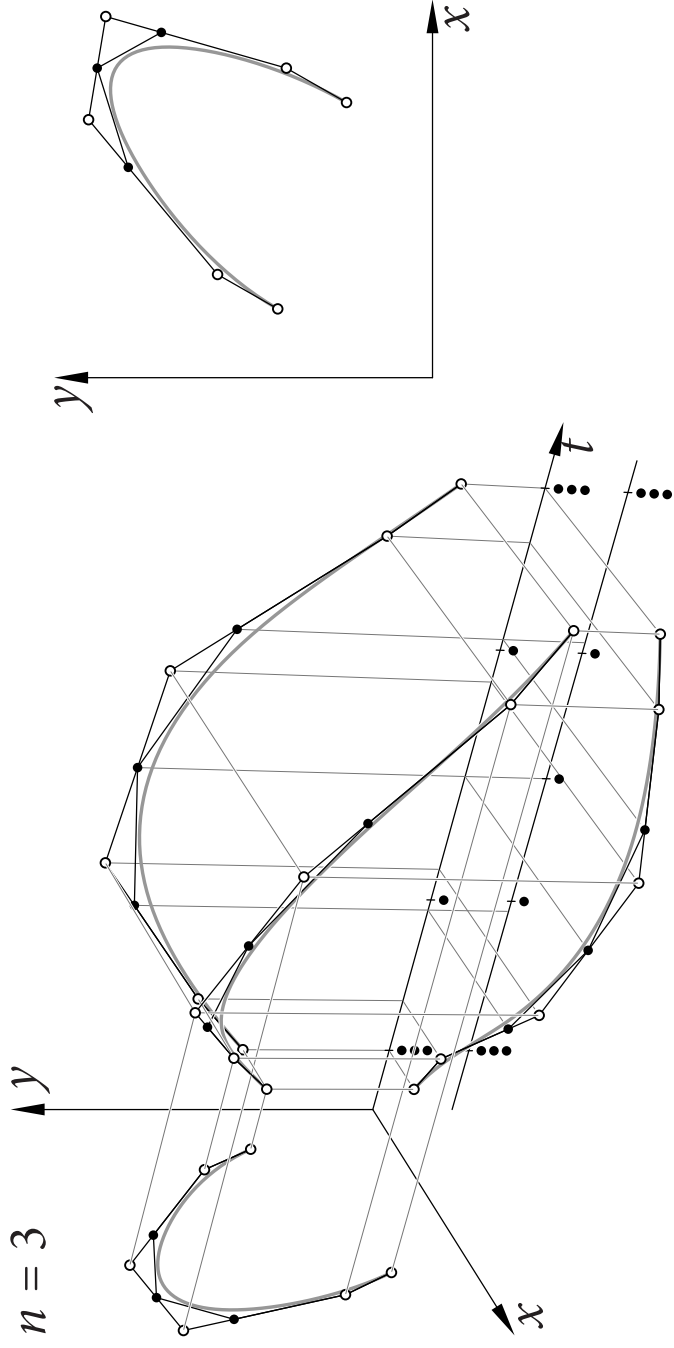
$$\frac{t - u_{i+n-1}}{v - t} \cdot \frac{t - u_i}{u_{i+n-1} - t} \cdot \frac{t - v}{u_i - t} = -1.$$

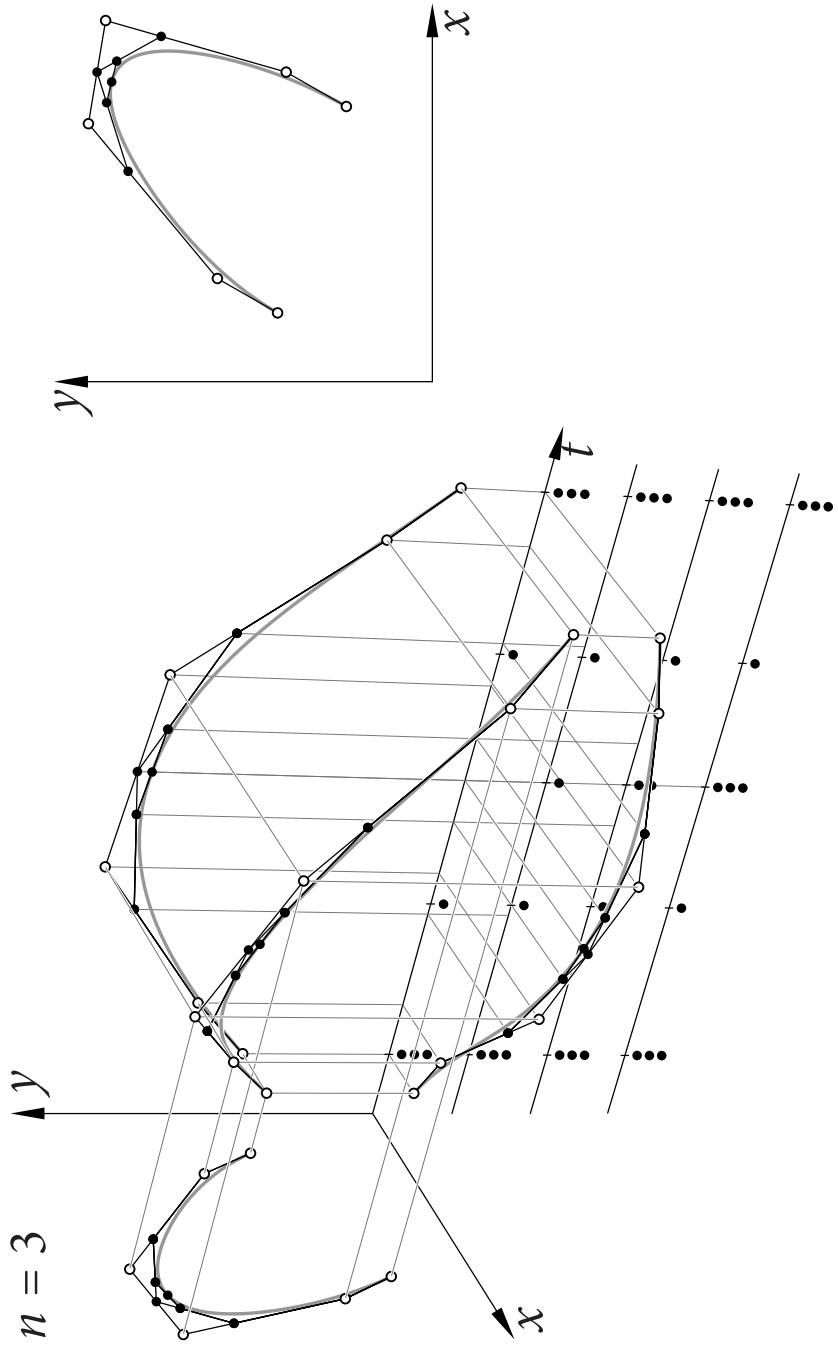
Stąd i z twierdzenia Menelaosa wynika, że punkt f_i^{tv} jest punktem wspólnym odcinków $\overline{f_{i-1}^t f_i^t}$ i $\overline{f_{i-1}^v f_i^v}$. Punkt f_i^{vt} też i ma tę samą współzrzedną ξ_i^{tv} , a więc $f_i^{tv} = f_i^{vt}$. \square

Porównując wstawianie wężła z pierwszym krokiem algorytmu de Boora, możemy zauważyć, że w trakcie obliczeń powstają te same liczby (albo punkty). Kolejne kroki algorytmu de Boora wytwarzają te same wyniki, co wstawienie kolejno nowego wężła tyle razy, aby końcowa krotność była równa n (jeśli więc chcemy znaleźć punkt $s(t)$ krzywej B-sklejanej dla $t = u_k$, gdzie u_k jest wężłem o krotności r , trzeba wstawić wężel t $n - r$ -krotnie).



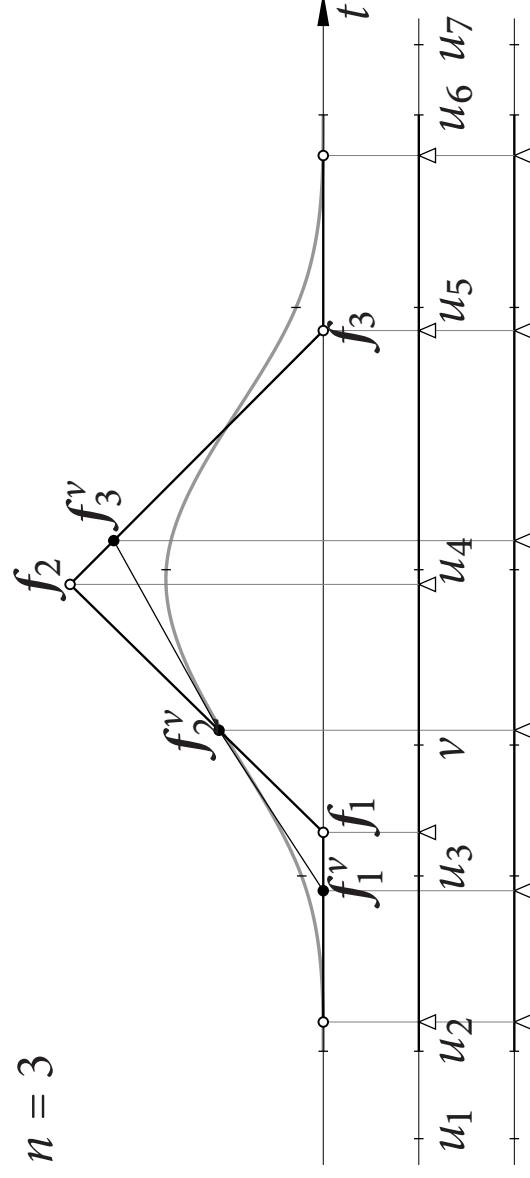
$n = 3$





Baza B-sklejana otrzymana po wstawieniu węzła v powstaje przez wymianę tych funkcji ze starej bazy, które w punkcie v są różne od zera. Podany niżej rysunek uwidocznia fakt, że każda z tych funkcji jest kombinacją liniową dwóch elementów nowej bazy.

$$n = 3$$



Niech $v \in [u_k, u_{k+1})$. Dla $i = k - n$ współrzędne tej kombinacji liniowej są równe 1 i $\frac{u_{k+1}^{-v}}{u_{k+1}^{-v} - u_{k-n+1}^{-v}}$ (na odcinku $f_{i-1}f_i$ nie powstaje nowy wierzchołek). Dla $i = k - n + 1, \dots, k - r - 1$ współrzędne są równe $\frac{v - u_i}{u_{i+n}^{-v} - u_i^{-v}}$ i $\frac{u_{i+n+1}^{-v}}{u_{i+n+1}^{-v} - u_{i+1}^{-v}}$. Jeśli $i = k - r$, to na odcinku $f_i f_{i+1}$ nie powstaje nowy wierzchołek i współrzędne funkcji N_k^n w nowej bazie są równe $\frac{v - u_{k-r}}{u_{k-r+n}^{-v} - u_{k-r}^{-v}}$ i 1.

Mamy zatem

$$N_{k-n}^n(t) = \hat{N}_{k-n}^n(t) + \frac{u_{k+1}^{-v}}{u_{k+1}^{-v} - u_{k-n+1}^{-v}} \hat{N}_{k-n+1}^n(t),$$

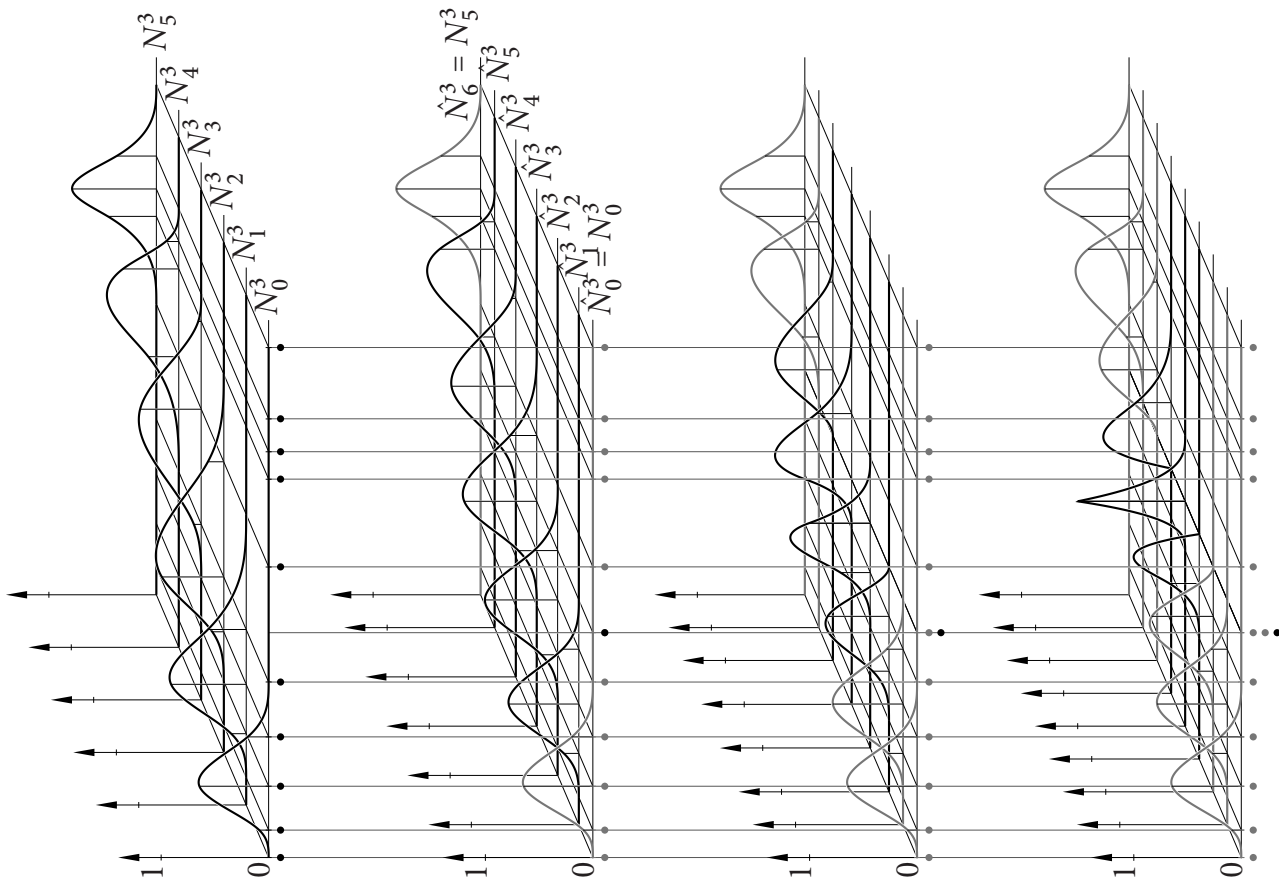
$$N_i^n(t) = \frac{v - u_i}{u_{i+n}^{-v} - u_i^{-v}} \hat{N}_i^n(t) + \frac{u_{i+n+1}^{-v}}{u_{i+n+1}^{-v} - u_{i+1}^{-v}} \hat{N}_{i+1}^n(t)$$

dla $i = k - n + 1, \dots, k - r - 1$,

$$N_{k-r}^n(t) = \frac{v - u_{k-r}}{u_{k-r+n}^{-v} - u_{k-r}^{-v}} \hat{N}_{k-r}^n(t) + \hat{N}_{k-r+1}^n(t).$$

Mamy również $N_i^n(t) = \hat{N}_i^n(t)$ dla $i < k - n$ i $N_i^n(t) = \hat{N}_{i+1}^n(t)$ dla $i > k - r$. Na tej podstawie możemy napisać ogólny wzór (wzór Boehma):

$$\begin{cases} N_i^n(t) = \alpha_i \hat{N}_i^n(t) + (1 - \alpha_{i+1}) \hat{N}_{i+1}^n(t), \\ \alpha_i = \max\left(0, \min\left(1, \frac{t_0 - u_i}{u_{i+n} - u_i}\right)\right) \end{cases} \quad \text{dla } i = 0, \dots, N - n - 1.$$



Usuwanie węzła bez zmiany krzywej jest możliwe, jeśli węzeł ten ma krotność r , a w jego otoczeniu krzywa ma ciągłą pochodną rzędu $n + 1 - r$. Można zatem usunąć węzeł, który dopiero co został wstawiony. Jeśli pochodna rzędu $n + 1 - r$ jest nieciągła, to zadanie usuwania węzła jest zadaniem aproksymacyjnym. Jednym ze sposobów jego rozwiązania jest potraktowanie układu równań

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{k-n} = \hat{\mathbf{d}}_{k-n}, \\ (1 - \alpha_i)\mathbf{d}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{d}_i = \hat{\mathbf{d}}_i, & i = k - n + 1, \dots, k - r, \\ \mathbf{d}_{k-r} = \hat{\mathbf{d}}_{k-r+1} \end{cases}$$

jak liniowego zadania najmniejszych kwadratów.

Zastosowania

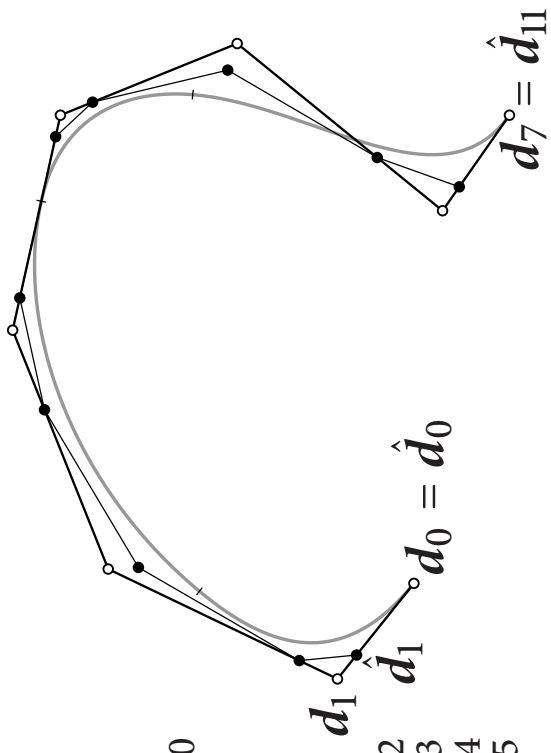
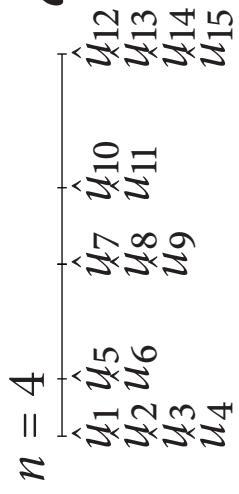
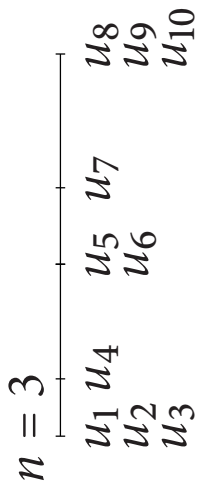
- **Zwiększenie swobody projektowania.** „Zgrubny” projekt można otrzymać, korzystając z reprezentacji mającej niewiele punktów kontrolnych. Po jego otrzymaniu można wstawić dodatkowe węzły i ukształtować szczegóły.
- **Zmniejszenie klasy ciągłości w wybranych punktach** — po wstawieniu węzła reprezentacja umożliwia „złamanie” kolejnej pochodnej w tym węźle.
- **Podział krzywej na łuki wielomianowe.** Wstawienie węzłów do krzywej stopnia n tak, aby wszystkie węzły miały krotność n daje łamaną kontrolną składającą się z łamanych kontrolnych Béziera poszczególnych łuków. Umożliwia to np. narysowanie krzywej B-sklejanej przy użyciu procedur rysowania krzywych Béziera.

- **Podwyższenie stopnia.** Zadanie polega na obliczeniu punktów $\hat{\mathbf{d}}_0, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{\hat{N}-n-2}$, takich że

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{d}_i N_i^n(t) = \sum_{i=0}^{\hat{N}-n-2} \hat{\mathbf{d}}_i \hat{N}_i^{n+1}(t),$$

przy czym funkcje B-sklejane stopnia $n + 1$ są oparte na takim ciągu węzłów $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{\hat{N}}$, w którym każdy węzeł u_k oryginalnej reprezentacji dla $k = n + 1, \dots, N - n - 1$ został zastąpiony przez węzeł o krotności o 1 większej.

Najprostszym sposobem podwyższenia stopnia polega na podwyższeniu krotności oryginalnych węzłów do n , podwyższeniu stopnia otrzymanych krzywych Béziera, dopisaniu po jednym egzemplarzu wymienionych wyżej węzłów (dla zwiększenia krotności) i usunięciu węzłów wstawionych w pierwszym kroku algorytmu.



- **Otrzymanie łamanej bliskiej krzywej, którą można narysować zamiast krzywej.** Później udowodnimy, że jeśli ciąg liczb v_1, v_2, \dots jest gęsty w przedziale $[u_n, u_{N-n})$, to otrzymany ciąg łamanych zbiega jednostajnie do krzywej reprezentowanej przez wszystkie te łamane, co więcej, odległość łamanej od krzywej jest proporcjonalna do kwadratu maksymalnej odległości między węzłami.
- **Implementacja działań algebraicznych na funkcjach i krzywych.** W szczególności mnożenie i dodawanie (skalarnych i wektorowych) funkcji sklejanych jest podstawowym elementem rozmaitych konstrukcji, np. płatów powierzchni. Działania algebraiczne są łatwe do wykonania na wielomianach (reprezentowanych w bazach Bernsteina), idea implementacji jest taka sama jak dla podwyższania stopnia.

Blossoming

Punkty kontrolne $\mathbf{d}_{k-n}, \dots, \mathbf{d}_k$, które określają łuk wielomianowy krzywej B-sklejanej $\mathbf{s}(t)$ dla $t \in [u_k, u_{k+1}]$, są wartościami formy biegunowej $\mathbf{b}_k(t_1, \dots, t_n)$ tego łuku; dokładniej,

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n}).$$

Algorytm de Boora dla $t \in [u_k, u_{k+1}]$ możemy zinterpretować jako obliczanie wartości tej formy biegunowej. Uogólniając, mamy

```
/*  $\mathbf{d}_i^{(0)} = \mathbf{b}_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$  dla  $i = k - n, \dots, k$  */
for ( j = 1; j ≤ n j++ )
    for ( i = k - n + j; i ≤ k; i++ ) {
        α = (tj - ui) / (ui+n+1-j - ui);
         $\mathbf{d}_i^{(j)} = (1 - \alpha) * \mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)} + \alpha * \mathbf{d}_i^{(j-1)}$ ;
    }
/*  $\mathbf{d}_k^{(n)} = \mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$  */
```

Aby to udowodnić, wystarczy zauważyć, że kolejne punkty, w których dane są wartości formy \mathbf{b}_k , różnią się tylko jedną współrzędną. Korzystając z symetrii formy, możemy przestawić tę współrzędną na koniec, a potem interpolować: w j -tym kroku, jeśli

$$\mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)} = \mathbf{b}(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}, t_1, \dots, t_{j-1}, u_i)$$

oraz $\mathbf{d}_i^{(j-1)} = \mathbf{b}(\underbrace{u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}}_{n-j}, \underbrace{t_1, \dots, t_{j-1}, u_{i+n+1-j}}_{j-1}),$

to $\mathbf{d}_i^{(j)} = \mathbf{b}(\underbrace{u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}}_{n-j}, \underbrace{t_1, \dots, t_{j-1}, t_j}_{j}).$

W tym obliczeniu występuje ułamek $\alpha = (t_j - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$, w którego mianowniku $u_i \leq u_k$ oraz $u_{i+n+1-j} \geq u_{k+1}$; zatem nie ma tu dzielenia przez 0 i wynik jest dobrze określony.

To jest krok indukcyjny dowodu następującego faktu:

Stwierdzenie 1 *Jeśli ciąg $u_{k-n+1}, \dots, u_{k+n}$ jest niemalejący, to aby forma biegunowa \mathbf{b} była jednoznacznie określona przez ciąg wartości $\mathbf{b}(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$ dla $i = k - n, \dots, k$, potrzeba i wystarczy, aby było $u_k < u_{k+1}$.*

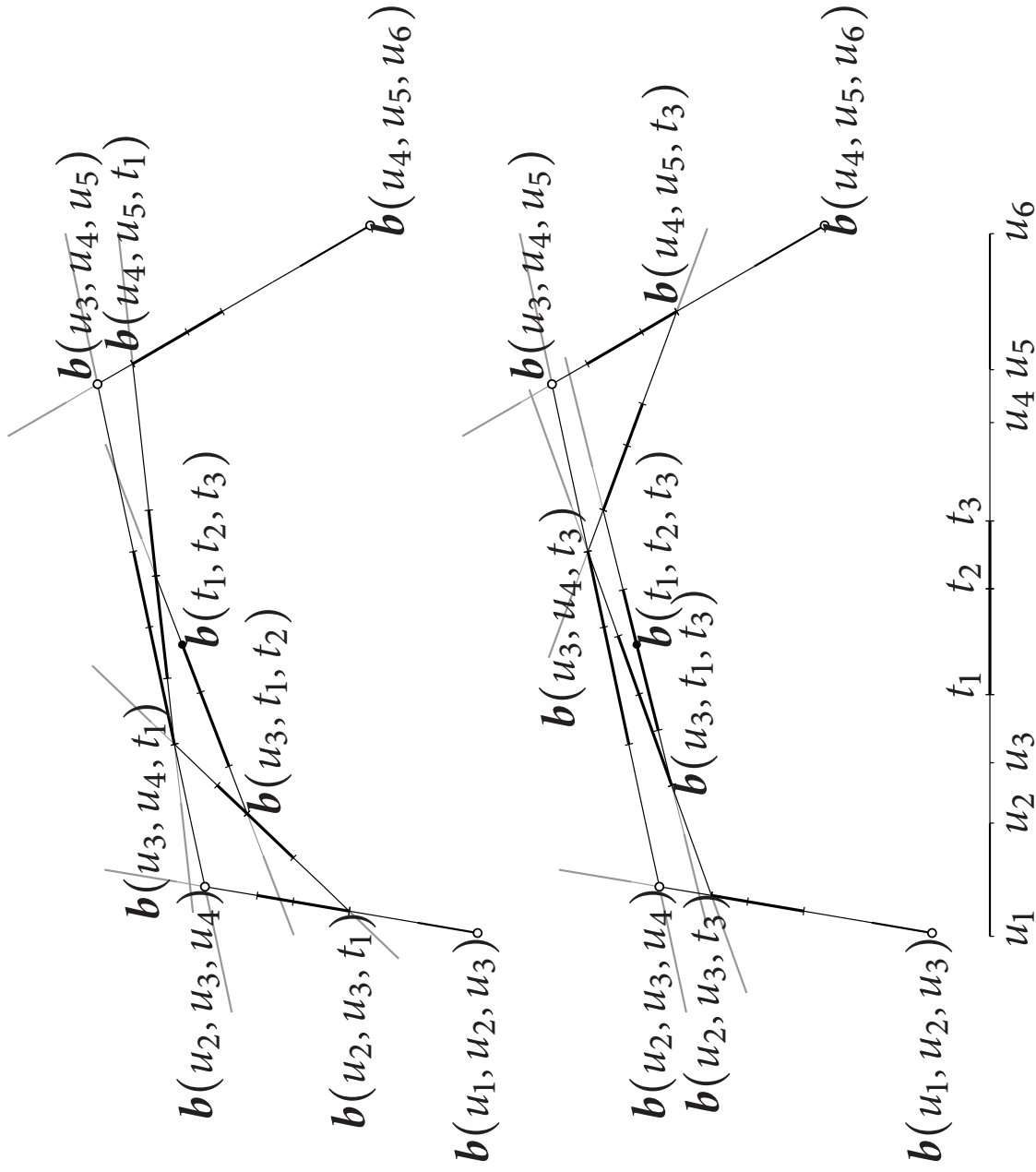
Rozważając wielomiany i ich formy biegunowe (o wartościach skalarnych), na podstawie jednoznaczności wyniku opisanego wyżej algorytmu, stwierdzamy, że przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}[t]_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dane wzorem $F(p) = [d_{k-n}, \dots, d_k]$ jest różnowartościowe, a więc ma odwrotność.

Stąd wynika

Twierdzenie 1 Dla dowolnych liczb $u_{k-n+1} \leq \dots \leq u_k < u_{k+1} \leq \dots \leq u_{k+n}$ i punktów $\mathbf{d}_{k-n}, \dots, \mathbf{d}_k$ istnieje jednoznacznie określona funkcja wielomianowa $\mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$, pierwszego stopnia ze względu na każdą zmienną, symetryczna i spełniająca równania $\mathbf{d}_i = \mathbf{b}(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$ dla $i = k-n, \dots, k$.

Wniosek 1 Wielomiany powstałe z obcięcia funkcji B-sklejanych N_{k-n}^n, \dots, N_k^n do przedziału $[u_k, u_{k+1})$ są liniowo niezależne (stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$).

Wniosek 2 Punkt $\mathbf{d}_k^{(n)}$, który jest wynikiem procedury rozpatrywanej w dowodzie stwierdzenia 1, nie zależy od uporządkowania liczb t_1, \dots, t_n .



Jeśli $u_{k-r} < u_{k-r+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$, tj. węzeł u_k ma krotność r , przy czym $r \leq n$, to formy biegunowe łuków wielomianowych krzywej s dla $t \in [u_{k-r}, u_{k-r+1})$ oraz $t \in [u_k, u_{k+1})$ mają wspólne wartości w punktach $(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, (u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+1})$. Wykażemy, że stąd wynika, że w punkcie u_k łuki te mają wspólny punkt i pochodne rzędu $1, \dots, n-r$, ale przedtem znajdziemy ogólny warunek ciągłości sklejenia pochodnych łuków wielomianowych wyrażony za pomocą form biegunowych.

Twierdzenie 2 Niech $\mathbf{b}_1(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathbf{b}_2(t_1, \dots, t_n)$ oznaczają formy biegunowe krzywych $\mathbf{p}_1(t)$ i $\mathbf{p}_2(t)$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym spełnienia przez te krzywe równań

$$\mathbf{p}_1(u) = \mathbf{p}_2(u), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}_1(u) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_2(u), \quad \dots, \quad \frac{d^m}{dt^m}\mathbf{p}_1(u) = \frac{d^m}{dt^m}\mathbf{p}_2(u) \quad (4)$$

dla ustalonego u oraz $m \leq n$ jest równość

$$\mathbf{b}_1(\underbrace{t_1, \dots, t_m}_{m}, \underbrace{u, \dots, u}_{n-m}) = \mathbf{b}_2(\underbrace{t_1, \dots, t_m}_{m}, \underbrace{u, \dots, u}_{n-m}) \quad (5)$$

dla każdego układu liczb t_1, \dots, t_m .

Dowód. Niech $\mathbf{b}(t_1, \dots, t_n)$ oznacza formę biegunową krzywej $\mathbf{p}(t)$.

Dla ustalonego u wprowadzimy nowe zmienne, $s = t - u$, $s_1 = t_1 - u, \dots$,

$s_n = t_n - u$. Istnieją wektory $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$, takie że

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s^i, \quad \mathbf{b}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\binom{n}{i}} \mathbf{a}_i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} s_{j_1} \dots s_{j_i}.$$

Znając wektory $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$, łatwo możemy wskazać pochodne krzywej \mathbf{p} w punkcie u :

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{p}(u) = k! \mathbf{a}_k. \quad (6)$$

Podstawiając $t_{m+1} = \dots = t_n = u$, czyli $s_{m+1} = \dots = s_n = 0$, otrzymujemy

$$\underbrace{\mathbf{b}(t_1, \dots, t_m, u, \dots, u)}_m = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\binom{n}{i}} \mathbf{a}_i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq m} s_{j_1} \dots s_{j_i}.$$

Funkcję \mathbf{b} obcięta do zbioru $t_{m+1} = \dots = t_n = u$ oznaczymy symbolem $\mathbf{b}_u^{m^*}$; jest ona formą biegunową pewnej krzywej $\mathbf{p}_u^{m^*}$ stopnia co najwyżej m , którą nazwalismy formą diagonalną stopnia m krzywej \mathbf{p} stopnia n w punkcie u .

Krzywe \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 i ich formy biegunowe przedstawimy w opisany wyżej sposób za pomocą wektorów odpowiednio $\mathbf{a}_{1,0}, \dots, \mathbf{a}_{1,n}$ i $\mathbf{a}_{2,0}, \dots, \mathbf{a}_{2,n}$. Funkcje otrzymane w wyniku podstawienia $t_{m+1} = \dots = t_n = u$ do form \mathbf{b}_1 i \mathbf{b}_2 oznaczymy symbolami $\mathbf{b}_{1,u}^{m^*}$ i $\mathbf{b}_{2,u}^{m^*}$.

Możemy teraz napisać cztery zdania, takie że równoważność każdego kolejnych dwóch z nich jest oczywista:

- Równania (4) są spełnione.
- Równania $\mathbf{a}_{1,0} = \mathbf{a}_{2,0}, \dots, \mathbf{a}_{1,m} = \mathbf{a}_{2,m}$ są spełnione.
- Funkcje $\mathbf{b}_{1,u}^{m*}$ i $\mathbf{b}_{2,u}^{m*}$ są identyczne.
- Równanie (5) jest spełnione dla wszystkich liczb t_1, \dots, t_m . \square

Twierdzenie 3 *Krzywa B-sklejana stopnia n w otoczeniu węzła r -krotnego ma ciągle pochodne do rzędu $n - r$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $u_{k-r} < u_{k-r+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$. Mamy wykazać odpowiednią regularność połączenia w punkcie u_k łuków wielomianowych $\mathbf{p}_{k-r}(t)$ i $\mathbf{p}_k(t)$, opisujących rozpatrywaną krzywą odpowiednio w przedziałach $[u_{k-r}, u_{k-r+1})$ i $[u_k, u_{k+1})$.

Zgodnie z twierdzeniem 1 łuk \mathbf{p}_{k-r} jest określony przez punkty kontrolne

$$\mathbf{d}_{k-n-r} = \mathbf{b}_{k-r}(u_{k-n-r+1}, \dots, u_{k-r}), \dots, \mathbf{d}_{k-r} = \mathbf{b}_{k-r}(u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+n}),$$

a łuk \mathbf{p}_k przez

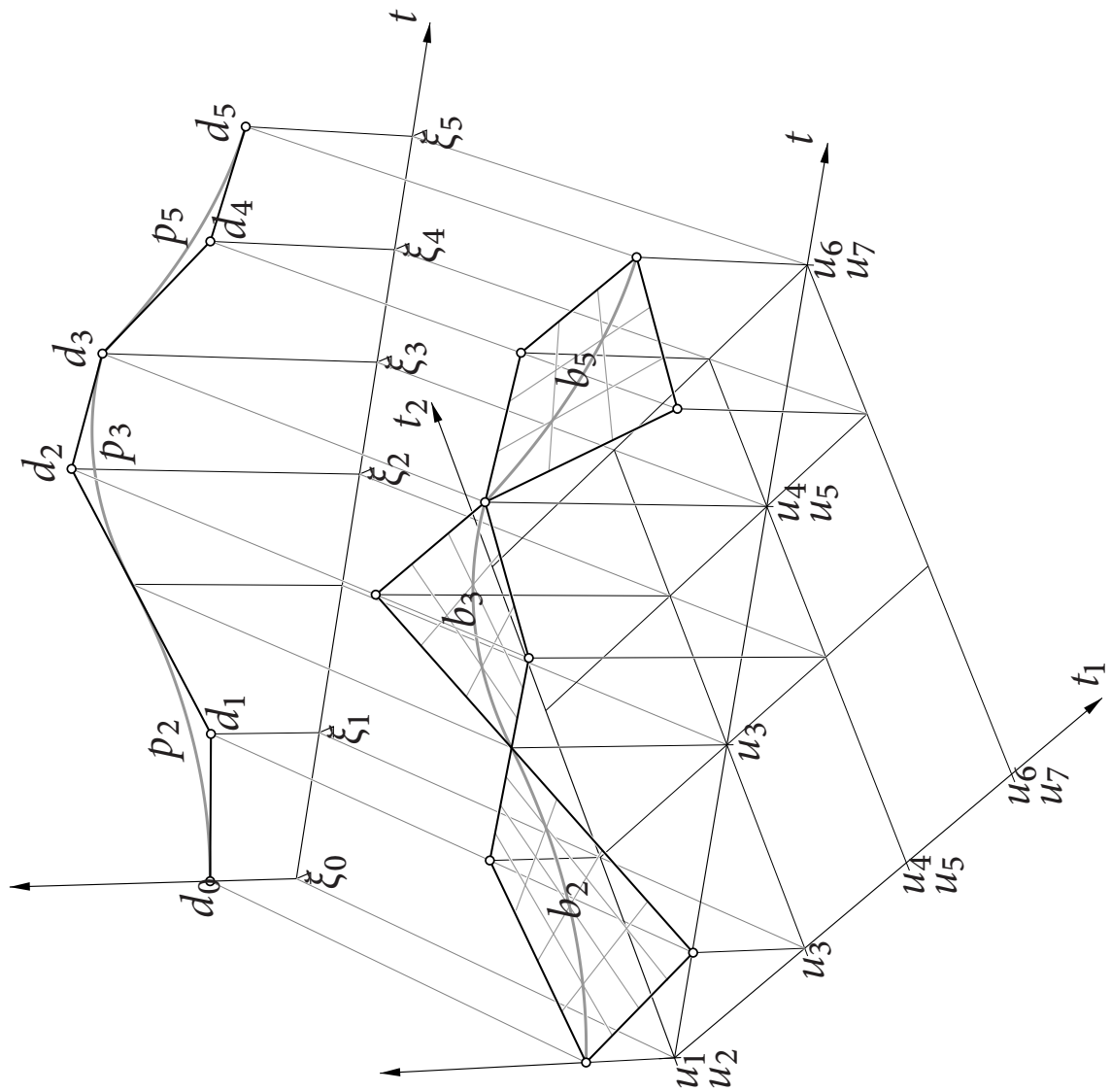
$$\mathbf{d}_{k-n} = \mathbf{b}_k(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, \mathbf{d}_k = \mathbf{b}_k(u_{k+1}, \dots, u_{k+n}).$$

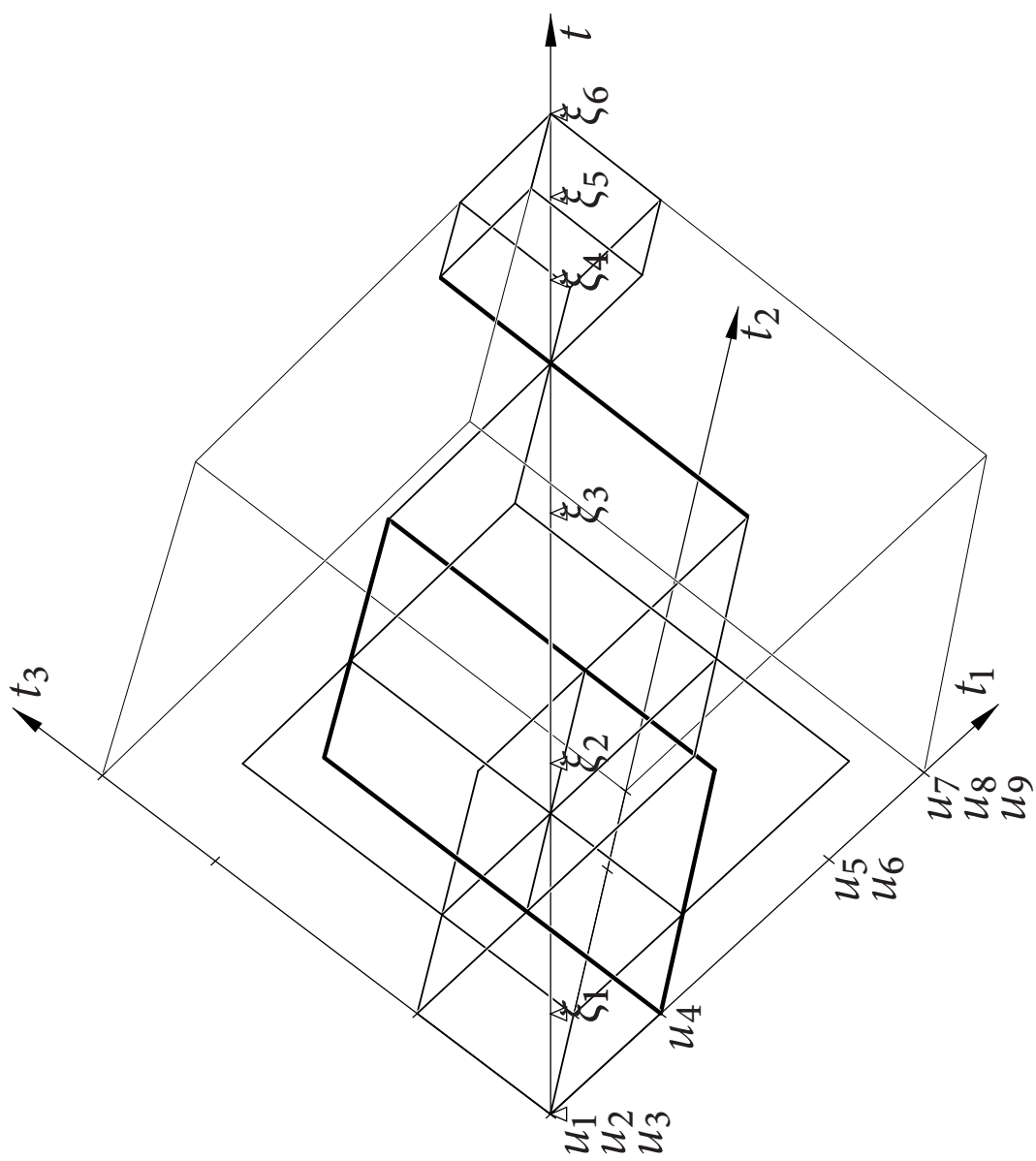
Punkty $\mathbf{d}_{k-n}, \dots, \mathbf{d}_{k-r}$ występują w reprezentacjach łuków \mathbf{p}_{k-r} i \mathbf{p}_k , a zatem reprezentacja B-sklejana krzywej \mathbf{s} jawnie zakłada równość form biegunowych \mathbf{b}_{k-r} i \mathbf{b}_k obu tych łuków w punktach $(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, (u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+n})$. Zauważmy, że w każdym ciągu liczb opisujących te punkty liczba $u = u_k$ występuje dokładnie r razy. Pozostałe liczby tworzą $(n-r)$ -elementowe podciągi kolejnych elementów niemalejącego ciągu węzłów $u_{k-n+1}, \dots, u_{k-r}, u_{k+1}, \dots, u_{k-r+n}$. Ponieważ $u_{k-r} < u_{k+1}$, więc (na mocy stwierdzenia 1) ciąg $n-r+1$ punktów $\mathbf{d}_{k-n}, \dots, \mathbf{d}_{k-r}$ jednoznacznie określa równe sobie formy

$$\mathbf{b}_{k-r, u_k}^{n-r*}(t_1, \dots, t_{n-r}) = \mathbf{b}_{k-r}(t_1, \dots, t_{n-r}, u_k, \dots, u_k)$$

$$\text{oraz } \mathbf{b}_{k, u_k}^{n-r*}(t_1, \dots, t_{n-r}) = \mathbf{b}_k(t_1, \dots, t_{n-r}, u_k, \dots, u_k).$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia pochodne rzędu co najmniej $n-r$ krzywych \mathbf{p}_{k-r} i \mathbf{p}_k w punkcie u_k są równe. \square





Wstawianie węzła $v \in [u_k, u_{k+1})$ polega na obliczeniu wartości formy biegunowej \mathbf{b}_k w nowych punktach; blossoming daje czytelną interpretację współrzędnych Greville'a i łamanej kontrolnej. Mianowicie, w przestrzeni $n + d$ -wymiarowej wyróżniony podprzestrzeń n -wymiarową (dziedzinę formy \mathbf{b}_k) z naturalnie określonym układem współrzędnych kartezyjskich (t_1, \dots, t_n) , oraz prostopadłą do niej przestrzeń E , w której znajduje się krzywa. Do wektorów współrzędnych wierzchołków łamanej kontrolnej doczepiamy wektory współrzędnych odpowiednich punktów w dziedzinie, w taki sposób, aby dla sąsiednich wierzchołków wektory te różniły się tylko na jednym miejscu. Wtedy dla dowolnego punktu $\mathbf{u} = (u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$ w dziedzinie jego rzut prostopadły na prostą $L = \{ (t_1, \dots, t_n) : t_1 = \dots = t_n \}$ ma wszystkie współrzędne równe średniej arytmetycznej współrzędnych tego punktu. Rzutując prostopadłe punkt $\mathbf{u} = (u_{i+1}, \dots, u_{i+n}, \mathbf{b}_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n}))$ na podprzestrzeń $L \times E$, otrzymamy punkt (ξ_i, \mathbf{d}_i) — wierzchołek łamanej rozpatrywanej w przedstawieniu algorytmu Boehma.

Algorytm Oslo

Mając wstawić wiele węzłów do krzywej sklejaney, można wielokrotnie użyć algorytmu Boehma. Alternatywą jest odkryty w 1980r. przez E. Cohen, T. Lyche i R.F. Riesenfelda algorytm Oslo, który dla danej krzywej B-sklejaney i docelowego ciągu węzłów $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{\hat{N}-1}$ (zawierającego podciąg węzłów oryginalnych u_1, \dots, u_{N-1}) jawnie oblicza punkty kontrolne \hat{d}_i ; końcowej reprezentacji, jako wartości form biegunowych odpowiednich łuków wielomianowych.


```

for ( l = 0; l <  $\hat{N} - n$ ; l ++ ) {
    . . . . . Znajdź k, takie że  $\hat{u}_l \in [u_k, u_{k+1})$ , albo  $k = 0$  jeśli  $\hat{u}_l < u_0$ ,
    lub  $k = N - n - 1$  jeśli  $\hat{u}_l \geq u_{N-n}$ ;
    for ( i = k - n; i  $\leq$  k; i ++ )
         $d_i^{(0)} = d_i$ ;
    for ( j = 1; j  $\leq$  n; j++ )
        for i = k - n + j; i  $\leq$  k; i ++ ) {
             $\alpha_i^{(j)} = (\hat{u}_{l+n+1-j} - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$ ;
             $d_i^{(j)} = (1 - \alpha_i^{(j)}) d_{i-1}^{(j-1)} + \alpha_i^{(j)} d_i^{(j-1)}$ ;
        }
     $\hat{d}_l = d_k^{(n)}$ ;
}

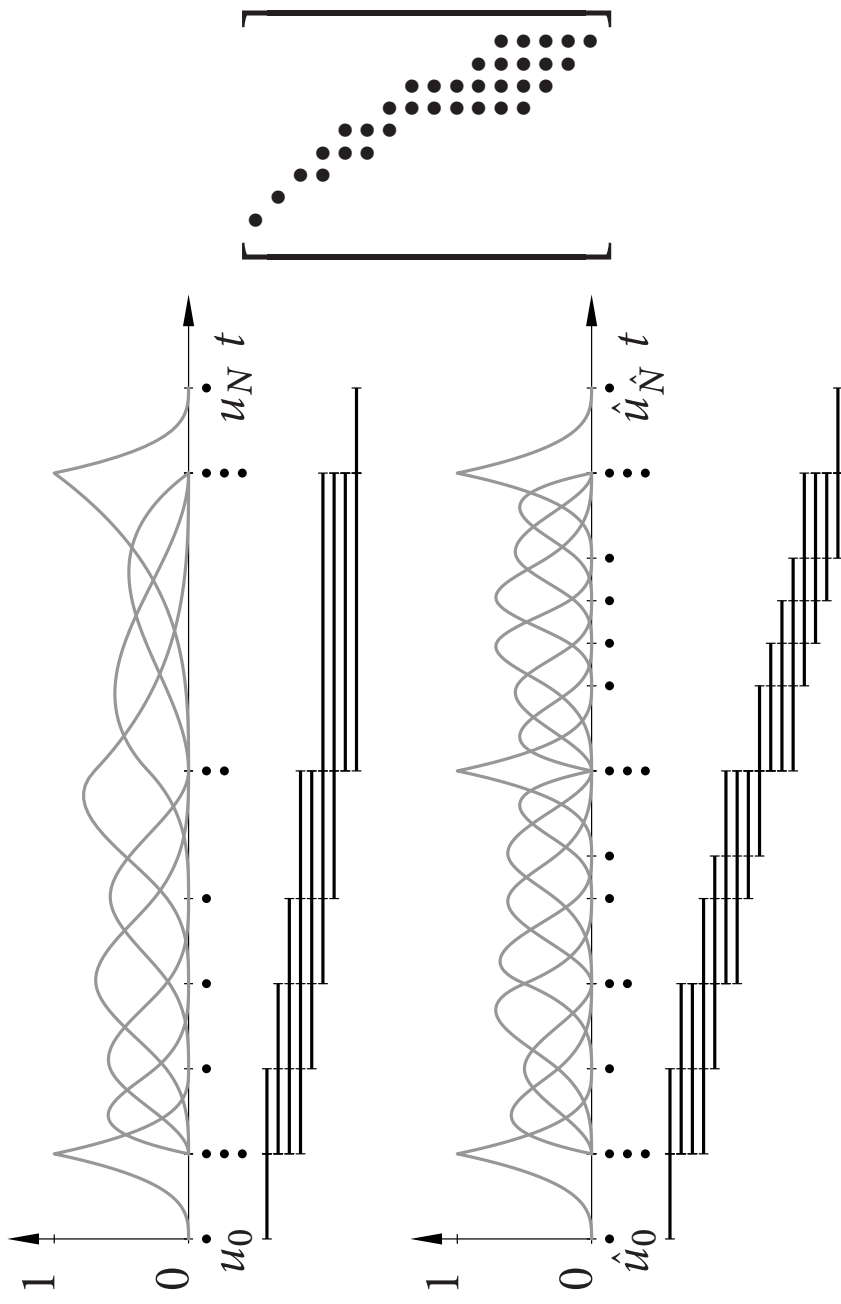
```

Jeśli trzeba wstawić wiele węzłów, to algorytm Oslo jest bardziej kosztowny niż wielokrotnie użyty algorytm Boehma, a ponadto ma wadę: niektóre wartości form biegunowych są obliczane przy użyciu ekstrapolacji (liczby $\alpha_i^{(j)}$ mogą być poza przedziałem $[0, 1]$), co narusza numeryczną stabilność algorytmu.

W algorytmie Boehma jest wykonywana tylko interpolacja, dzięki czemu zaburzenia spowodowane błędami zaokrągleń są podczas wstawiania kolejnych węzłów mnożone przez ułamki właściwe — końcowe wyniki są obliczone z dużą dokładnością.

Z drugiej strony, algorytm Oslo jest inspiracją dla rozwiązania zadania usuwania węzłów: jeśli ma być usunięte wiele węzłów z krzywej, która wskutek tego zmieni kształt (bo zmniejszamy krotności węzłów w sposób uniemożliwiający reprezentowanie nieciągłości pochodnych krzywej danej) przez rozwiązywanie liniowych zadań najmniejszych kwadratów, to końcowy wynik może zależeć od kolejności usuwania.

Na podstawie algorytmu Oslo można znaleźć macierz przejścia między reprezentacjami krzywych opartych na ciągach u_1, \dots, u_{N-1} i $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}$ i rozwiązać tylko jedno (duże) LZNK dla układu równań z taką macierzą. Ale algorytm Boehma też umożliwia znalezienie tej macierzy — ona jest iloczynem macierzy opisujących wstawianie węzłów po jednym. Macierz jest wstęgowa, można i warto reprezentować ją w sposób oszczędzający pamięć.



Zbieżność procesu wstawiania wielu węzłów

Twierdzenie 4 Niech \mathbf{s} oznacza ciągłą krzywą B -sklejaną stopnia n , której węzły skrajne mają krotność n . Jeśli wszystkie elementy ciągu v_1, v_2, \dots należą do przedziału (u_n, u_{N-n}) , a zbiór wartości tego ciągu jest w tym przedziale gęsty, to ciąg $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \dots$ zbiega jednostajnie do krzywej \mathbf{s} . Co więcej, istnieje stała L , taka że jeśli po wstawieniu węzłów v_1, \dots, v_m największa odległość węzłów nie przekracza $h < \frac{2}{n-1}$, to dla każdego $t \in [u_n, u_{N-n}]$ jest spełniona nierówność

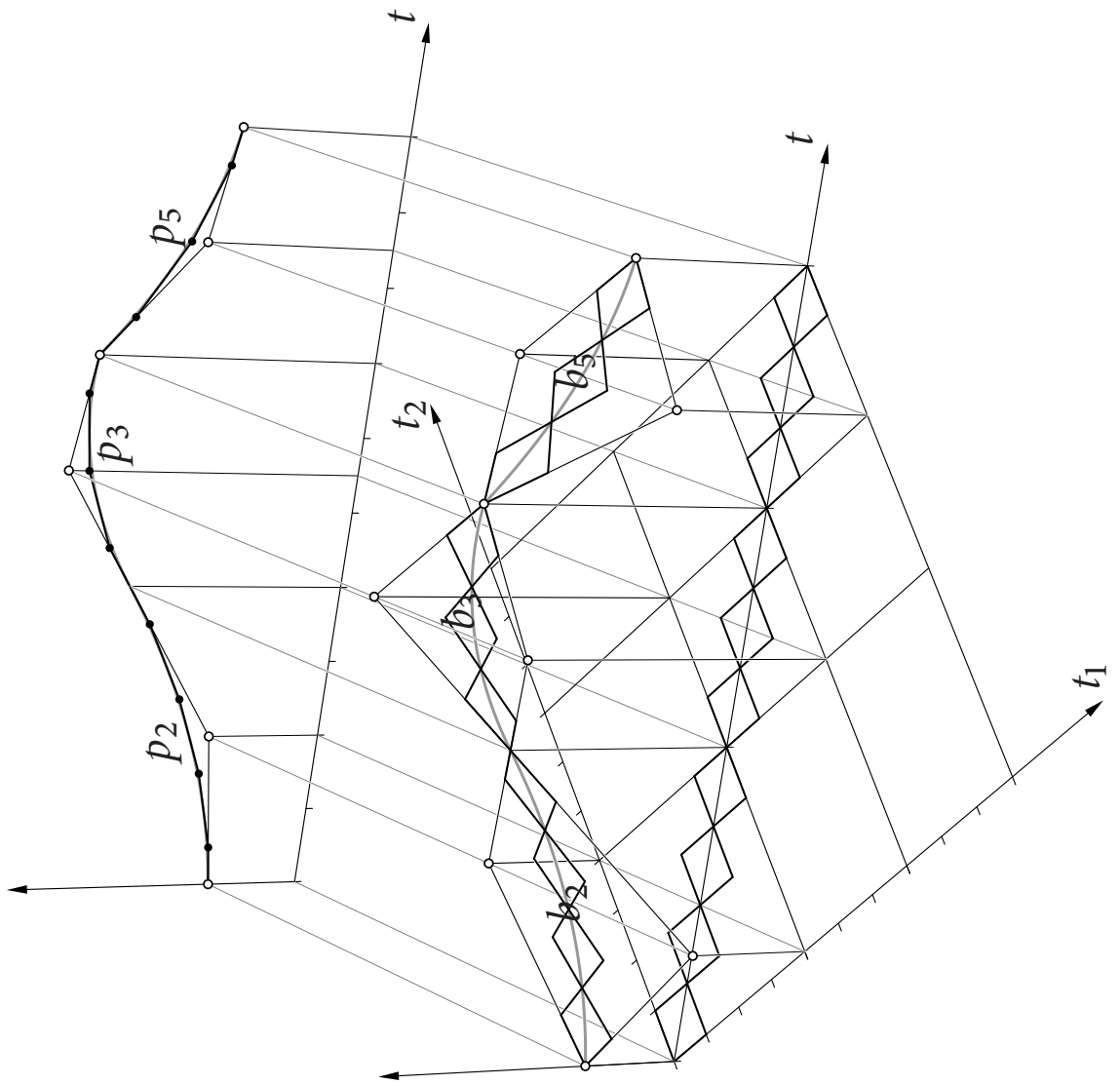
$$\|\mathbf{s}(t) - \mathbf{d}^{(m)}(t)\| \leq Lh^2.$$

Dowód przedstawię w zarysie. Podstawą jest

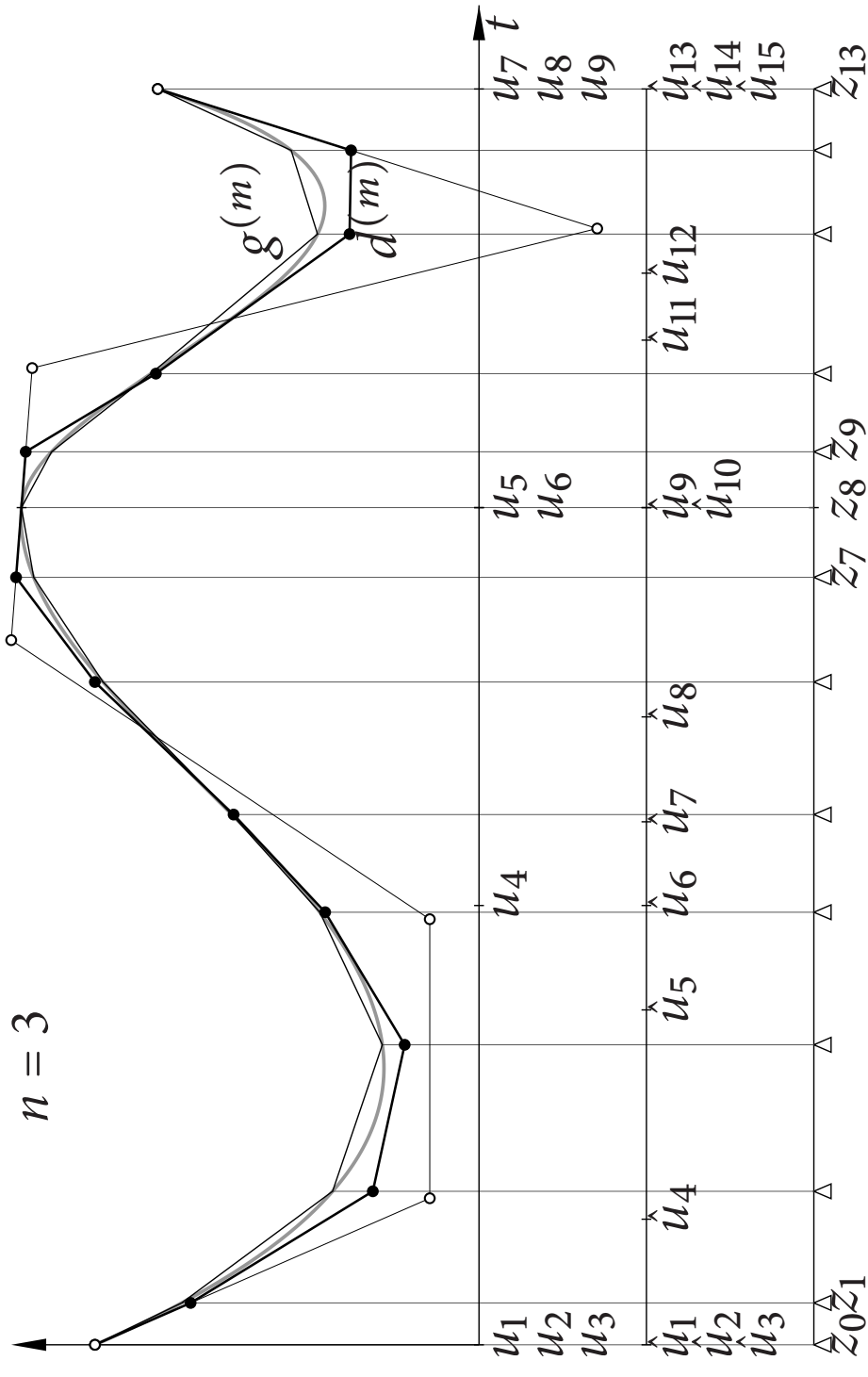
Lemat 1 Niech $b(t_1, \dots, t_n)$ będzie formą biegunową wielomianu $p(t)$ stopnia co najwyżej n ($n \geq 2$). Jeśli $0 \leq t_{i+1} - t_i \leq h \leq \frac{2}{n-1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$, to dla $\xi = \frac{1}{n}(t_1 + \dots + t_n)$ jest spełniona nierówność

$$|b(t_1, \dots, t_n) - p(\xi)| \leq \frac{(n-1)^2}{4} \sum_{i=2}^n \frac{1}{i!} \left| \frac{d^i}{dt^i} p(\xi) \right| h^2. \quad (7)$$

Jego też tu nie udowodnię, ale idea jest świetnie widoczna na rysunku.



Wierzchołki otrzymanej po wstawieniu węzłów łamanej kontrolnej przybliżają (z błędem ograniczonym przez wyrażenie proporcjonalne do h^2) punkty $s(\xi_i)$. Łamana, której te punkty są wierzchołkami, jest dla danej krzywej s interpolacyjną krzywą sklejaną stopnia 1. Druga część dowodu polega na wykazaniu, że *dowolną* odpowiednio gładką krzywą można przybliżyć łamaną (tj. krzywą sklejaną stopnia 1) z błędem proporcjonalnym do h^2 .



Wymierne krzywe B-sklejane (krzywe NURBS)

Wzór

$$\mathbf{s}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i \mathbf{d}_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)}, \quad t \in [u_n, u_{N-n})$$

określa parametryzację kawałkami wymierną krzywej, za pomocą funkcji B-sklejanych stopnia n określonych przez ciąg węzłów u_0, \dots, u_N i punktów kontrolnych $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{N-n-1}$ oraz wag w_0, \dots, w_{N-n-1} . Skrót NURBS pochodzi od określenia *non-uniform rational B-splines*, przy czym *non-uniform* (nierównomierne) oznacza, że węzły mogą być dowolne (niekoniecznie równoodległe).

Wagi powinny być niezerowe, przy czym minimalnym wymaganiem jest przyjęcie, że w każdym podciągu w_i, \dots, w_{i+n} co najmniej jedna waga nie jest zerem. Jeśli są zerowe wagi, to można użyć wzoru

$$s(t) = \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i \neq 0} w_i \mathbf{d}_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)} + \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i=0} \mathbf{v}_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)}.$$

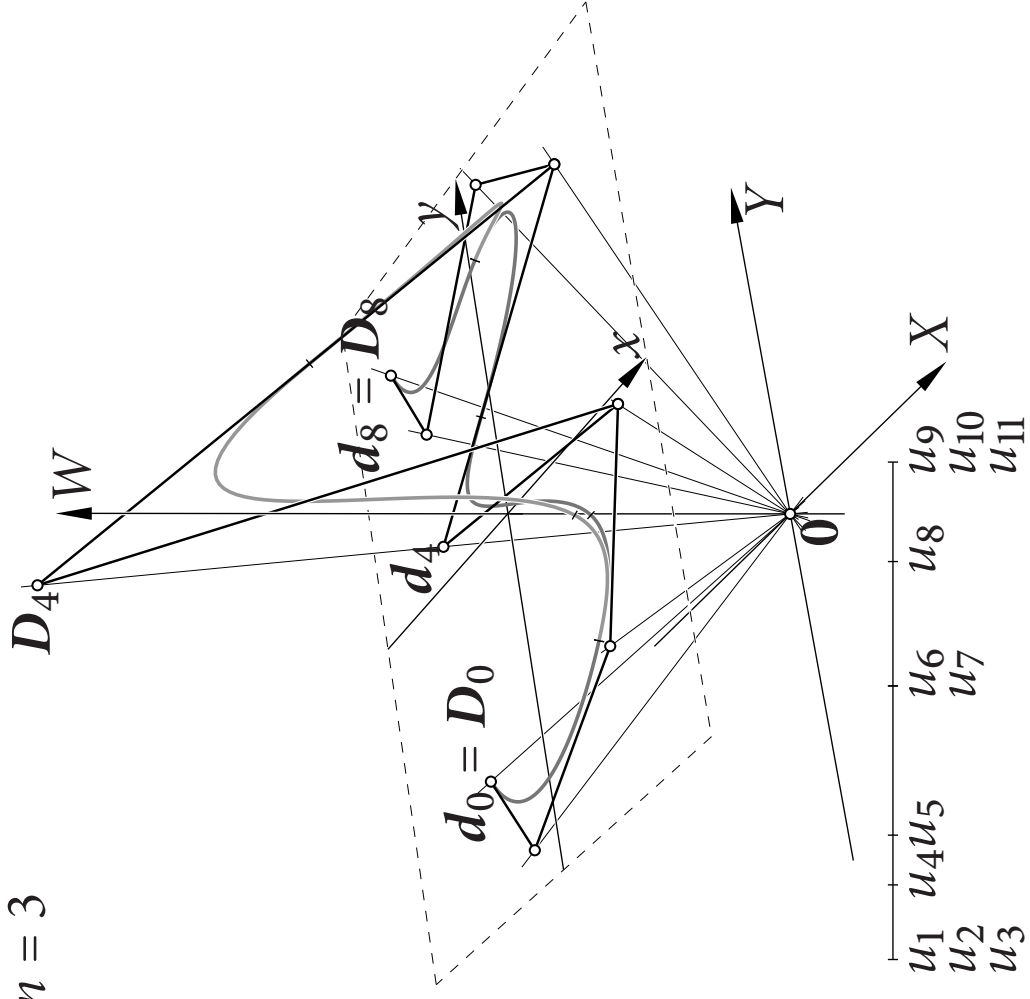
Zamiast punktów \mathbf{d}_i , których wagi są zerem, występują tu wektory kontrolne \mathbf{v}_i . Reprezentacja jednorodna krzywej NURBS jest zwykłą krzywą B-sklejaną w przestrzeni współrzędnych jednorodnych:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{D}_i N_i^n(t),$$

gdzie

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} w_i \mathbf{d}_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad \text{dla } w_i \neq 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla } w_i = 0.$$

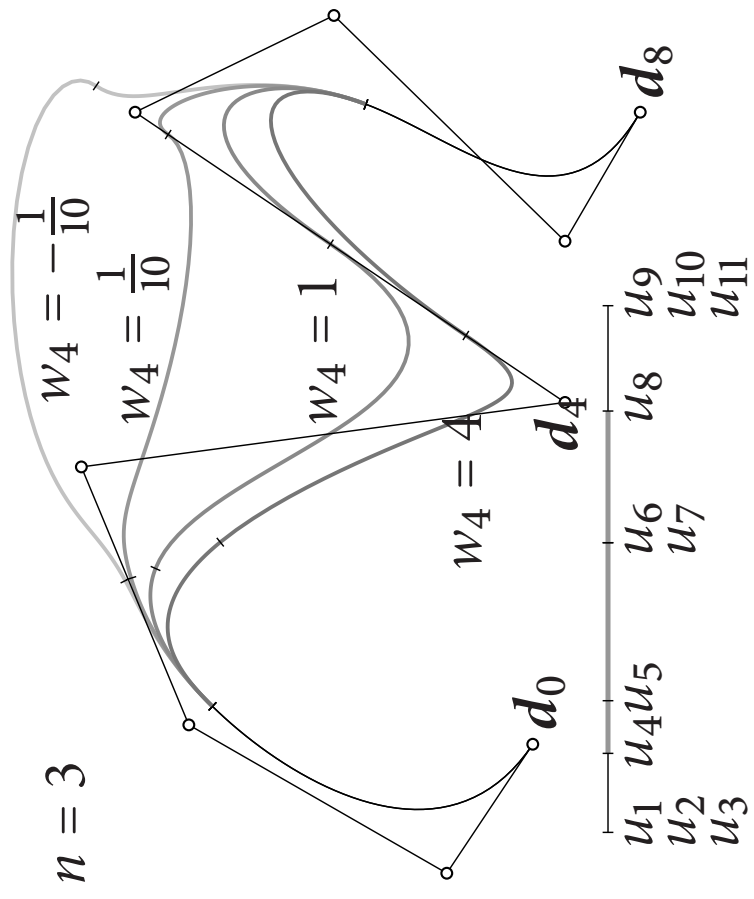
$n = 3$



Własności

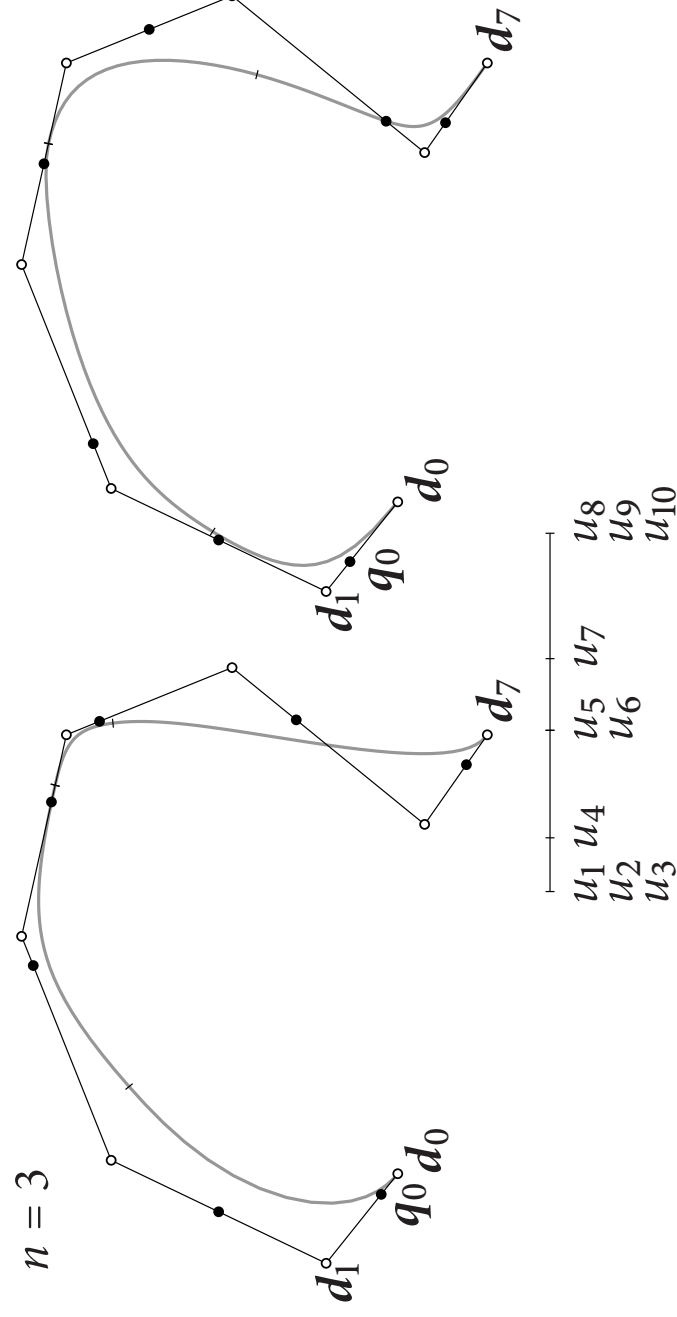
- **Uogólnienie krzywych B-sklejanych:** Jeśli wszystkie wagi mają tę samą wartość, to otrzymujemy krzywe B-sklejane kawałkami wielomianowe.
- **Jednorodność układu wag:** Pomnożenie wszystkich wag przez tę samą liczbę nie zmienia krzywej (ani jej parametryzacji). Jeśli pewne wagi są równe 0, to przez wspomnianą liczbę trzeba też pomnożyć odpowiednie wektory v_i .
- **Niezmienniczość afiniczna reprezentacji:** Aby przesunąć, obrócić lub przeskalować krzywą, wystarczy poddać temu przekształceniu punkty d_i ; wektory v_i (jeśli są) trzeba poddać przekształceniu liniowemu związanemu z tym przekształceniem afinicznym.

- **Niezmienniczość ze względu na reparametryzację afiniczną:**
Zastąpienie węzłów u_0, \dots, u_N przez $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N$, takie że $\hat{u}_i = au_i + b$, gdzie $a > 0$ nie zmienia kształtu krzywej, zmienia tylko jej parametryzację.
- **Lokalna kontrola kształtu:** Zmiana punktu d_i lub wagi w_i powoduje zmianę punktów $s(t)$ dla $t \in [u_n, u_{N-n}) \cap [u_i, u_{i+n+1})$.
- **Silna własność otoczki wypukłej,** jeśli wszystkie wagi mają ten sam znak.



- **Pochodna rzędu $n - r$** w otoczeniu węzła o krotności r jest ciągła, pod warunkiem, że węzeł ten nie jest miejscem zerowym funkcji $w(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)$. Pochodna rzędu k jest w ogólności sklejaną krzywą wymierną stopnia $(k + 1)n$.
Zazwyczaj nie wyznacza się jawnie reprezentacji NURBS pochodnych; w razie potrzeby zamiast tego lepiej jest obliczać pochodne krzywej jednorodnej (jej pochodna rzędu k jest krzywą stopnia $n - k$), a następnie obliczać pochodne krzywej wymiernej na podstawie pochodnych krzywej jednorodnej.
- **Silna własność hodografu:** jeśli wagi w_{k-n}, \dots, w_k mają ten sam znak, to dla $t \in (u_k, u_{k+1})$ wektor $s'(t)$ jest kombinacją liniową o dodatnich współczynnikach wektorów $\Delta \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i$ dla $i = k - n, \dots, k - 1$.

- **Możliwość reprezentowania wag za pomocą punktów pomocniczych:** Dla punktu q_i na odcinku $d_i d_{i+1}$ można przyjąć, że $w_{i+1} : w_i = \|q_i - d_i\| : \|d_{i+1} - q_i\|$ i zaczynając od $w_0 = 1$, obliczyć wszystkie wagi.



- Wszystkie algorytmy przetwarzania wielomianowych krzywych B-sklejanych mogą być użyte do przetwarzania krzywych jednorodnych, co umożliwia m.in. obliczanie punktów krzywych oraz pochodnych i wielkości przez nie określonych (np. krzywizn), a także wstawianie węzłów, podział na łuki wymierne w reprezentacji Béziera i podwyższanie stopnia.

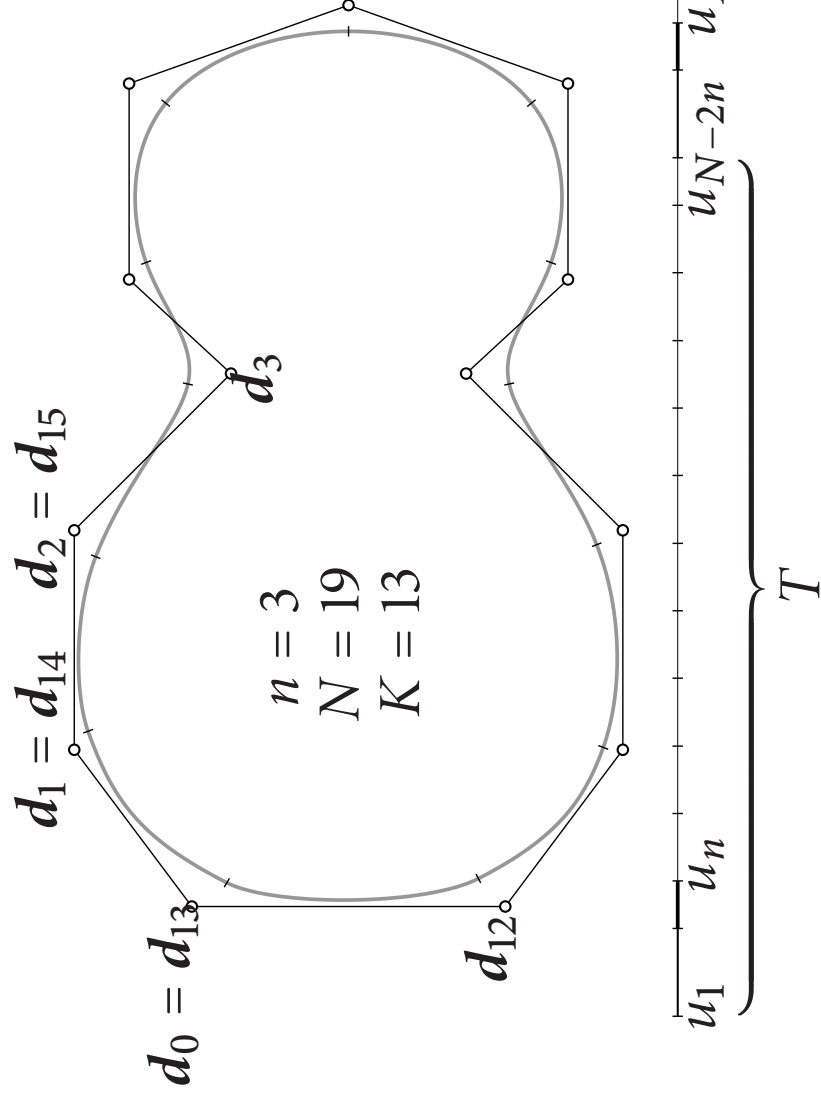
Wiele algorytmów ma warianty wymierne (np. algorytm de Boora lub algorytm Boehma wstawiania węzła). Dla celów praktycznych przetwarzanie krzywych jednorodnych wydaje się wygodniejsze.

Krzywe zamknięte

Przypuśćmy, że $u_{n-r+1} = \dots = u_n < u_{n+1}$, co oznacza, że pochodne rzędu $1, \dots, n-r$ krzywej sklejanej s są w węzle u_n lewostronnie ciągłe. Chcielibyśmy dobrać „końcowe” węzły i punkty kontrolne tak, aby było $s(u_{N-n}) = s(u_n)$ (tj. aby krzywa była zamknięta) oraz prawostronne pochodne rzędu $1, \dots, n-r$ w węzle u_{N-n} były takie, jak lewostronne w węzle u_n . Innymi słowy, chcemy umożliwić okresowe rozszerzenie parametryzacji określonej w przedziale $[u_n, u_{N-n})$ na cały zbiór liczb rzeczywistych, z okresem $T = u_{N-n} - u_n$.

Przyjmujemy, że węzeł u_{N-n} też ma krotność r , tj. $u_{N-n-1} < u_{N-n} = \dots = u_{N-n+r-1}$. Niech $K = N - 2n + r - 1$. Przyjmując $u_{i+K} = u_i + T$ dla $i = 1, \dots, 2n - r$, otrzymamy podciąg u_1, \dots, u_{N-1} będący podciągami kolejnych elementów nieskończonego ciągu liczb u_i spełniających warunek $u_{i+K} = u_i + T$ dla każdego $i \in \mathbb{Z}$.

Jeśli dla tak wybranego ciągu węzłów przyjmujemy punkty kontrolne $d_{i+K} = d_i$ dla $i = 0, \dots, n - r$, to otrzymamy poszukiwaną parametryzację.



Pewnym wyzwaniem dla programisty jest implementacja algorytmu wstawiania węzła zachowująca okresowość; jeśli nowy węzeł jest równy u_n lub leży w przedziale $[u_{N-2n+r-1}, u_{N-n})$, to po wstawieniu węzła algorytmem Boehma trzeba dokonać dodatkowych modyfikacji krzywej, aby podany warunek przywrócić.

Interpolacyjne krzywe kubiczne

Z uwagi na częstość i mnogość zastosowań przyjrzymy się sposobowi rozwiązywania następującego zadania interpolacyjnego: dany jest rosnący ciąg liczb u_3, \dots, u_{N-3} oraz punktów $\mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{N-3}$. Należy znaleźć kubiczną krzywą sklejaną \mathbf{s} , taką że $\mathbf{s}(u_i) = \mathbf{x}_i$ dla $i = 3, \dots, N-3$. Węzły interpolacyjne u_3, \dots, u_{N-3} mają być też węzłami tej krzywej sklejaney.

Zadanie można rozwiązać, korzystając z różnych baz przestrzeni funkcji sklejanych, tu użyjemy bazy B-sklejaney. Mając swobodę wyboru, przyjmiemy $u_1 = u_2 = u_3$ oraz $u_{N-1} = u_{N-2} = u_{N-3}$. Wtedy będzie $\mathbf{d}_0 = \mathbf{x}_3$ oraz $\mathbf{d}_{N-4} = \mathbf{x}_{N-3}$. Pozostałe warunki interpolacyjne możemy zapisać w postaci układu równań liniowych

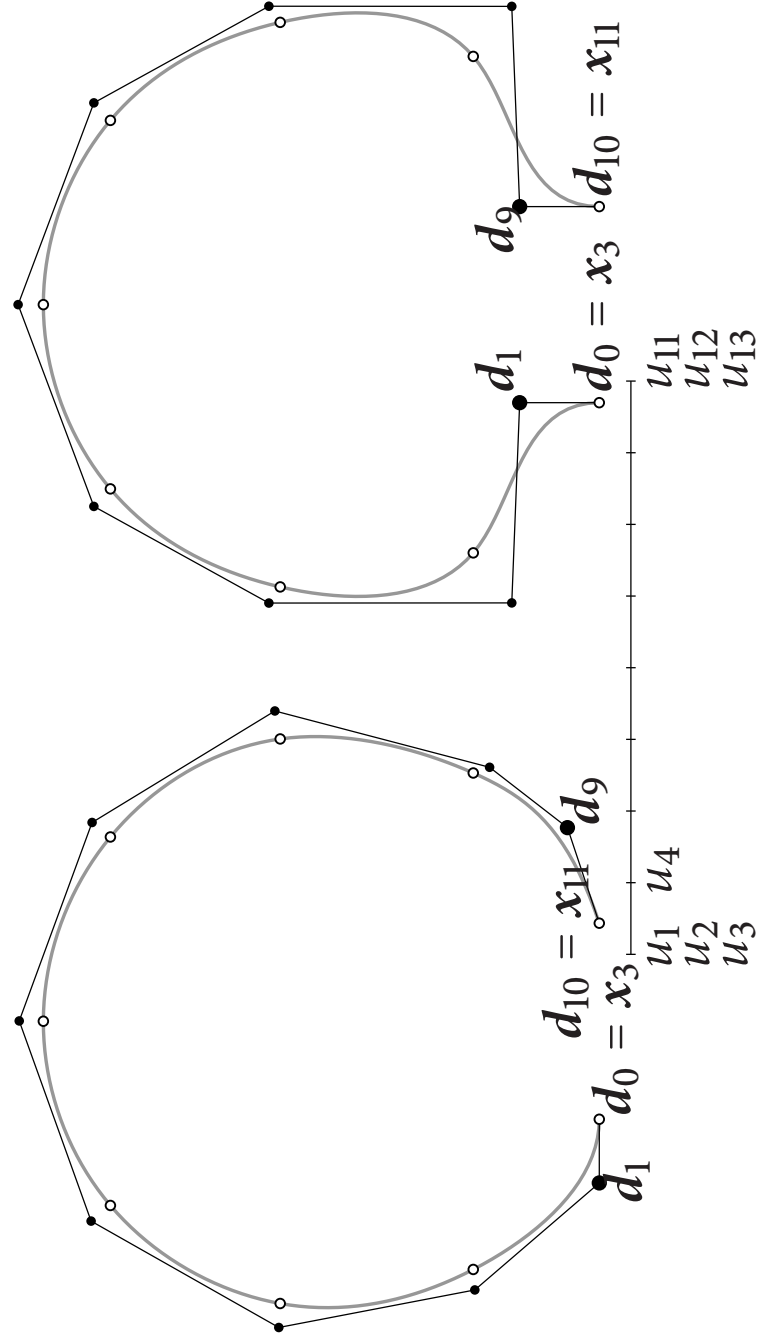
$$N_{k-3}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-3} + N_{k-2}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-2} + N_{k-1}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{x}_k \quad k = 4, \dots, N-4.$$

Wymiar przestrzeni funkcji sklejanych, $N - 3$, jest o 2 większy niż całkowita liczba warunków interpolacyjnych; mamy więc o 2 równania za mało. Jest wiele sposobów wybierania brakujących równań, wszystkie sensowne sposoby nakładają warunki brzegowe, tj. narzucają pewne własności konstruowanej krzywej w pobliżu węzłów u_3 i u_{N-3} .

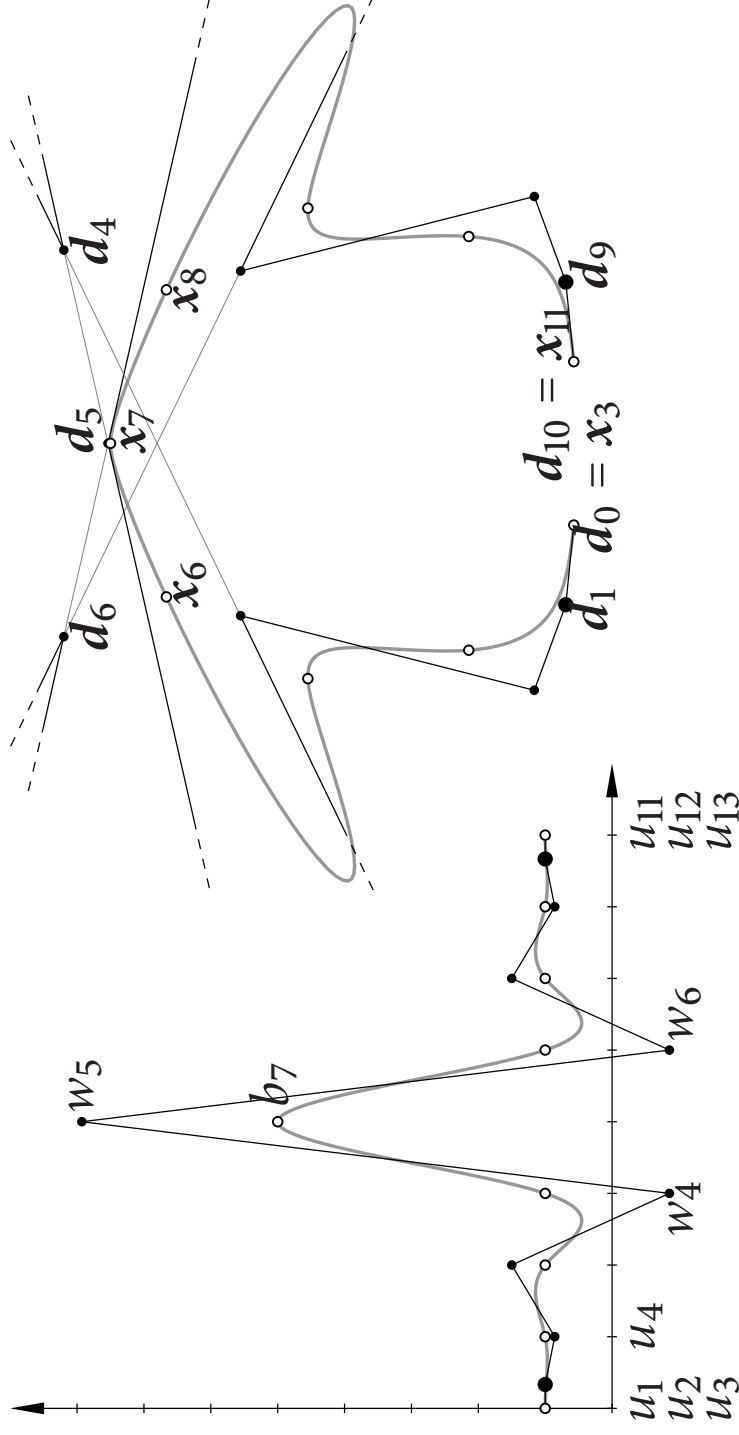
Można dowolnie przyjąć punkty kontrolne \mathbf{d}_1 i \mathbf{d}_{N-5} . W szczególności można je wybrać tak, aby narzucić warunki interpolacyjne na pochodną parametryzacji \mathbf{s} w punktach u_3 i u_{N-3} . Wystarczy rozwiązać równania

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'(u_3) &= \frac{3}{u_4 - u_1}(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0), \\ \mathbf{s}'(u_{N-3}) &= \frac{3}{u_{N-1} - u_{N-4}}(\mathbf{d}_{N-4} - \mathbf{d}_{N-5}). \end{aligned}$$

Jak widać, zmiany punktów d_1 i d_{N-n-2} mają znikomy wpływ na kształt krzywej w oddali od punktów końcowych.



Można postawić zadanie interpolacji wymiernej, dołączając indywidualne wagi do punktów x_i (konstruujemy wtedy interpolacyjną krzywą jednorodną). Ale wtedy, nawet jeśli wszystkie wagi są dodatnie, możemy otrzymać krzywą z niektórymi wagami ujemnymi.



Twierdzenie Schoenberga–Whitney

Zbadamy zadanie interpolacji sklejanej w pełnej ogólności: mając dany niemalejący ciąg węzłów u_0, \dots, u_N (który określa funkcje B-sklejane $N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n$) oraz ciąg węzłów interpolacyjnych v_0, \dots, v_{N-n-1} , które niekoniecznie pokrywają się z węzłami u_i , chcemy znaleźć warunek konieczny i dostateczny istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadania interpolacji Lagrange'a: ma być $s(v_i) = x_i$, gdzie liczby x_i są dane.

Twierdzenie. Niech v_0, \dots, v_{N-n-1} oznacza rosnący ciąg liczb. Dla dowolnych liczb x_0, \dots, x_{N-n-1} istnieje dokładnie jedna funkcja sklejana s stopnia n z węzłami u_0, \dots, u_N , taka że $s(v_i) = x_i$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy $N_i^n(v_i) \neq 0$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$.

Dowód: Niech A oznacza macierz układu równań interpolacyjnych. Jej współczynnik w k -tym wierszu i i -tej kolumnie jest równy $N_i^n(v_k)$. Jeśli $N_i^n(v_i) = 0$ dla pewnego i , to macierz A możemy przedstawić w postaci blokowo-trójkątnej

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix},$$

w której jedyny współczynnik bloku $A_{22} = [N_i^n(v_i)]$ jest równy 0.

Wyznacznik macierzy blokowo-trójkątnej jest równy iloczynowi wyznaczników bloków na diagonalu, więc macierz A jest osobliwa, a zatem nierówności $N_i^n(v_i) \neq 0$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$ stanowią warunek konieczny jej nieosobliwości.

Przyjmijmy $n > 0$ i załóżmy, że $u_j < v_j < u_{j+n+1}$ dla każdego j . Rozważmy macierz A . Jeśli $v_j \leq u_{j+1}$, to dla $k \leq j$ oraz $i > j$ mamy $N_i^n(v_k) = 0$. Jeśli $v_j \geq u_{j+n}$, to $N_i^n(v_k) = 0$ dla $i \leq j$, $k > j$. W wymienionych sytuacjach macierz A ma postać odpowiednio

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Jest też możliwe spełnienie obu nierówności, $v_j \leq u_{j+1}$ i $v_j \geq u_{j+n}$, wtedy, gdy $v_j = u_{j+1} = \dots = u_{j+n}$. Nieosobliwość macierzy blokowo-trójkątnej A jest równoważna nieosobliwości kwadratowych bloków diagonalnych A_{11} i A_{22} . Każdy z nich jest macierzą układu równań spełnianego przez współczynniki interpolacyjnych krzywych sklejanych w odpowiednich bazach B-sklejanych. Na przykład jeśli $v_j \leq u_{j+1}$, to blok A_{11} jest macierzą układu dla krzywej, której węzłami są liczby u_0, \dots, u_{j+n+1} , a węzłami interpolacyjnymi liczby v_0, \dots, v_j .

Jeśli ciąg v_0, \dots, v_j , odpowiadający blokowi A_{11} , jest jednoelementowy, to ten blok jest macierzą 1×1 , o dodatnim współczynniku. W przeciwnym razie, jeśli w tym ciągu występuje liczba v_k , taka że $v_k \leq u_{k+1}$ lub $v_k \geq u_{k+n}$, to blok A_{11} możemy dalej przedstawić w postaci blokowo-trójkątnej w podobny sposób. To samo dotyczy bloku A_{22} i bloków na diagonalu, wyróżnionych rekurencyjnie w A_{11} i A_{22} . W ten sposób macierz A możemy przedstawić w postaci blokowej, takiej że jeśli wszystkie bloki na jej diagonalu są nieosobliwe, to macierz A jest nieosobliwa. Każdy taki blok o wymiarach większych niż 1×1 jest macierzą układu równań, określającego interpolacyjną funkcję sklejającą stopnia n , z węzłami u_l, \dots, u_m (dla l i m takich, że $0 \leq l < l + n < m \leq N$) i węzłami interpolacyjnymi v_l, \dots, v_{m-n-1} , spełniającymi warunek $u_{j+1} < v_j < u_{j+n}$.

Mozemy teraz dowieść, że $N_i^n(v_i) \neq 0$ dla $i = 0, \dots, N - n - 1$ jest warunkiem dostatecznym, aby macierz A była nieosobliwa. Dla $n = 0$ twierdzenie jest oczywiste, przyjmijmy więc dowolne $n > 0$ i załóżmy, że zachodzi ono dla funkcji sklejanych stopnia mniejszego niż n .

Rozważmy ciąg węzłów $u_1 \leq \dots \leq u_m$, taki że dla $j = l, \dots, m - n - 1$ jest spełniony warunek $u_{j+1} < v_j < u_{j+n}$. Funkcje N_i^n dla $i = l, \dots, m - n - 1$ są określone tylko przez te węzły. Ponieważ krotność żadnego z nich nie przewyższa $n - 1$, dowolna funkcja sklejana $s(t) = \sum_{i=l}^{m-n-1} d_i N_i^n(t)$ ma ciągłą pochodną. Załóżmy, że $s(v_j) = 0$ dla $j = l, \dots, m - n - 1$, a ponadto mamy $s(u_1) = s(u_m) = 0$. Na podstawie twierdzenia Rolle'a istnieją liczby $w_1 \in (u_l, v_l)$, $w_{j+1} \in (v_j, v_{j+1})$ dla $j = l, \dots, m - n - 2$ oraz $w_{m-n} \in (v_{m-n-1}, u_m)$, takie że $s'(w_j) = 0$ dla $j = l, \dots, m - n$.

Ale pochodna funkcji s jest funkcją sklejaną stopnia $n - 1$, którą możemy opisać wzorem $s'(t) = \sum_{i=1}^{m-n} e_i N_i^{n-1}(t)$, z pewnymi liczbami e_i . Dla $j = 1, \dots, m - n$ jest $w_j \in (u_j, u_{j+n})$, więc na mocy założenia indukcyjnego tylko jedna funkcja s' spełnia równania $s'(w_j) = 0$ dla $j = 1, \dots, m - n$. Funkcja s ma miejsca zerowe i pochodną tożsamościowo równą 0, zatem $s(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Ponieważ jedynym rozwiązaniem układu równań $\sum_{i=1}^{m-n-1} d_i N_i^n(v_j) = 0$ dla $j = 1, \dots, m - n - 1$ jest wektor współrzędnych d_i funkcji zerowej, odpowiedni blok na diagonalu macierzy A jest nieosobliwy, co kończy dowód. \square

Choć twierdzenie rozstrzyga problem z punktu widzenia algebry, tak postawione zadanie interpolacyjne może być bardzo źle uwarunkowane. Dlatego należy wybierać węzły tak, aby dla każdego i funkcja N_i^n w punkcie v_i miała jak największą wartość.

Istnieje twierdzenie ogólniejsze, orzekające o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zadań interpolacyjnych Hermite'a.

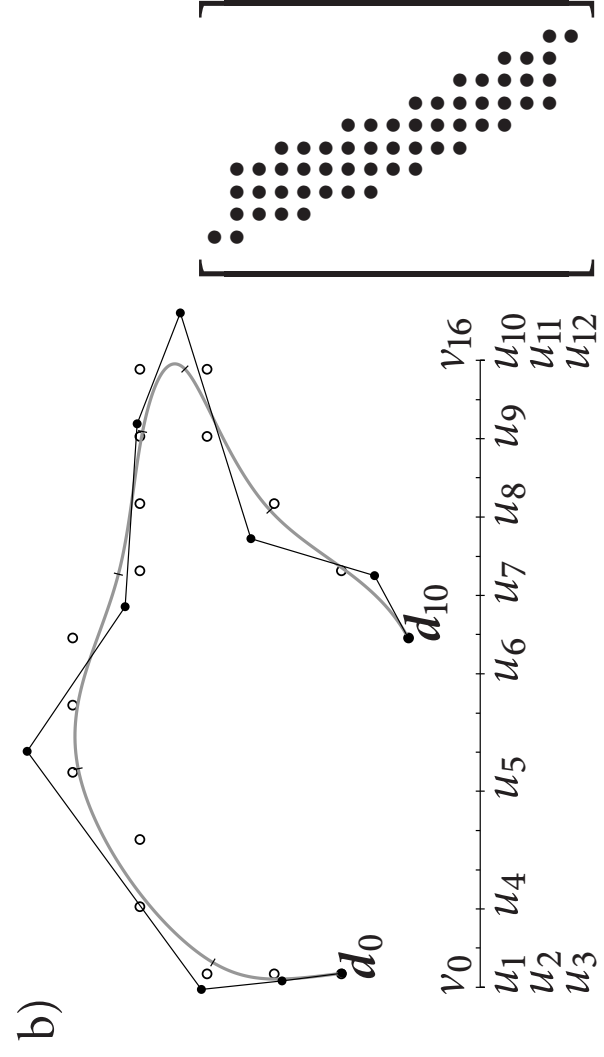
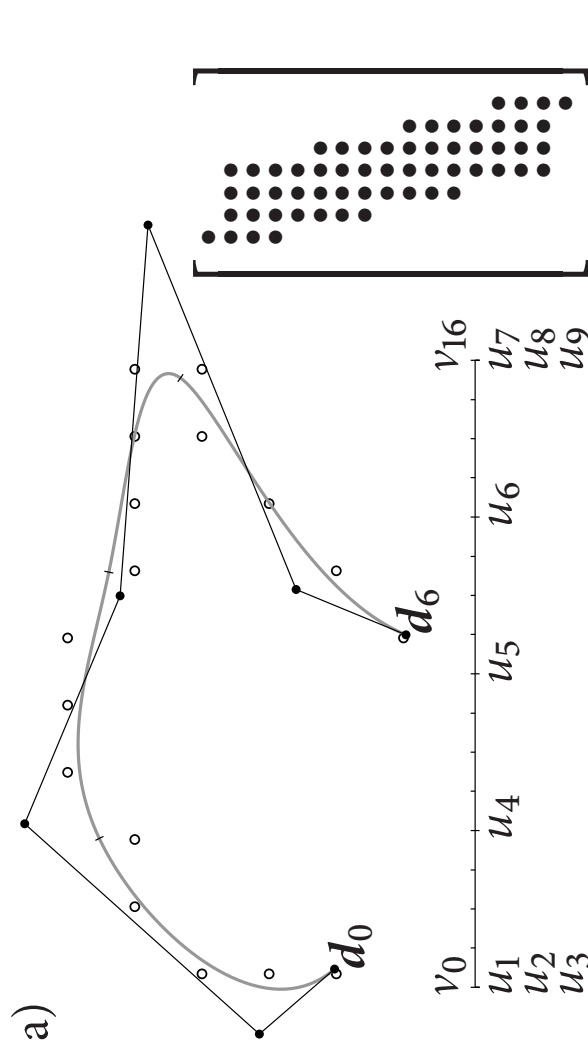
Krzywe aproksymacyjne

Mając dane warunki interpolacyjne, których liczba jest znacznie większa niż wymiar przestrzeni, w której chcemy wybrać krzywą, możemy rozwiązać zadanie aproksymacyjne, w którym zminimalizujemy sumę kwadratów odległości punktów krzywej od punktów danych. Pozwoli to „wygładzić” dane. W tym celu, po wybraniu węzłów funkcji sklejaney, napiszemy układ równań liniowych

$$s(v_j) = x_j, \quad j = 0, \dots, M.$$

Układ ten będzie na ogół sprzeczny, przy czym jeśli da się z niego wybrać równania spełniające założenia twierdzenia Schoenberga–Whitney, to liniowe zadanie najmniejszych kwadratów postawione dla całego układu będzie regularne.

Przykłady pokażę na obrazkach.



Tensorowe płaty B-sklejane

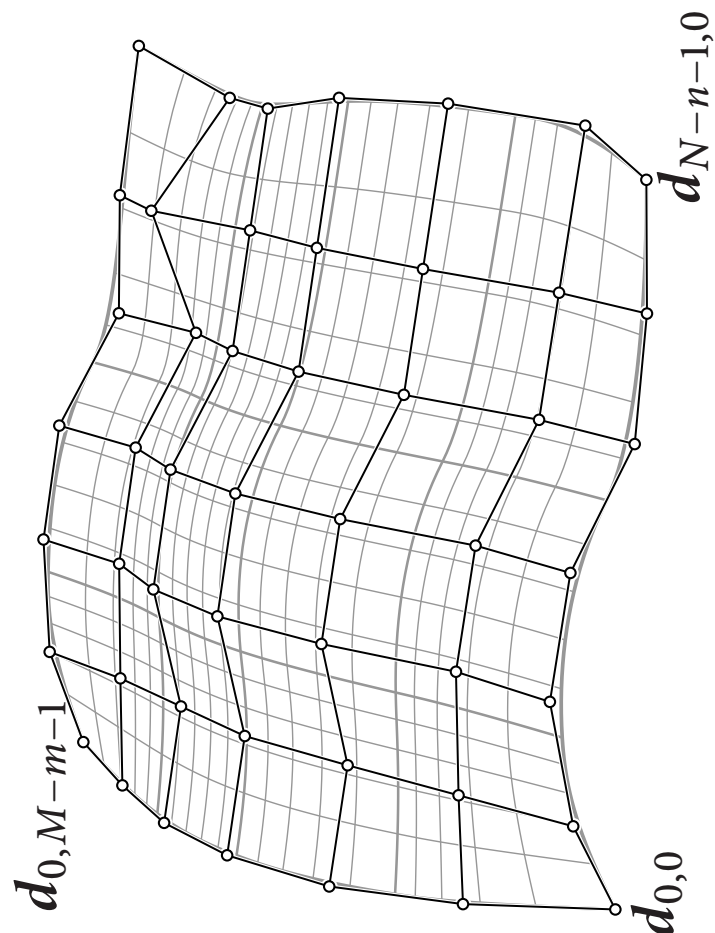
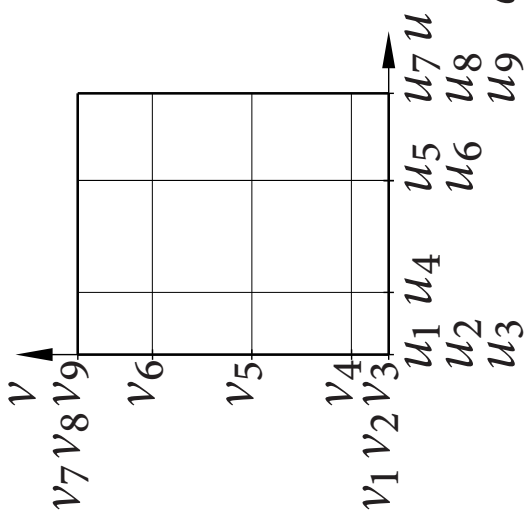
Z baz $\{N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n\}$ i $\{N_0^m, \dots, N_{M-m-1}^m\}$ przestrzeni funkcji sklejaných stopni n i m , określonych przez węzły u_0, \dots, u_N oraz v_0, \dots, v_M można otrzymać bazę tensorową i użyć jej do określenia tensorowego płata B-sklejanego stopnia (n, m) :

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v).$$

Dziedzina określonej wyżej parametryzacji jest prostokąt $[u_n, u_{N-n}] \times [v_m, v_{M-m}]$, w którym funkcje bazowe określają rozkład jedyński.

Punkty kontrolne \mathbf{d}_{ij} wyznaczają siatkę kontrolną, w której można wyróżnić wiersze i kolumny.

$$n = m = 3$$



Podstawowe własności

- Węzły u_0, u_N, v_0, v_M , potrzebne do określenia funkcji bazowych, nie mają wpływu na kształt płata i są w zasadzie „dekoracją”.
- **Niezmienniczość afiniczna reprezentacji:** Suma funkcji bazowych w dziedzinie płata jest równa 1. Stąd aby poddać płat dowolnemu przekształceniu afinicznemu, wystarczy zastosować to przekształcenie do punktów kontrolnych.
- **Niezmienniczość płata ze względu na afiniczne reparametryzacje:** Ciągi węzłów u_0, \dots, u_N oraz v_0, \dots, v_M można zastąpić przez $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N$ i $\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_M$, gdzie $\hat{u}_i = au_i + b$, $\hat{v}_i = cv_i + d$, $a, c > 0$. Zmieni się wtedy parametryzacja (z zachowaniem własności analitycznych), ale nie zmieni się płat.

- Krzywe stałego parametru są krzywymi sklejanymi: Reprezentację B-sklejaną krzywej $\mathbf{c}(u) = \mathbf{s}(u, \mathbf{v})$ dla ustalonego $\mathbf{v} \in [v_m, v_{M-m})$ można otrzymać, obliczając punkty

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j=0}^{M-m-1} \mathbf{d}_{ij} B_j^m(\mathbf{v}).$$

Wtedy

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{c}_i N_i^n(u).$$

Podobnie możemy wyznaczyć krzywe stałego parametru u .

To oznacza, że do przetwarzania płata tensorowego można użyć wszystkich znanych algorytmów przetwarzania krzywych B-sklejanych.

- **Silna własność otoczki wypukłej:** Płat wielomianowy będący częścią płata B-sklejanego dla $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}) \times [v_l, v_{l+1})$ jest zawarty w otoczce wypukłej zbioru punktów $\{ \mathbf{d}_{ij} : i = k - n, \dots, k, j = l - m, \dots, l \}$.
- **Lokalna kontrola kształtu:** Zmiana punktu \mathbf{d}_{ij} powoduje tylko zmianę punktów $\mathbf{s}(u, v)$ dla $(u, v) \in [u_i, u_{i+n+1}) \times [v_j, v_{j+m+1})$.
- **Pochodne cząstkowe** płata są płatami B-sklejanymi stopni $(n - 1, m)$ oraz $(n, m - 1)$:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-2} \sum_{j=0}^{M-m-1} \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} (\mathbf{d}_{i+1,j} - \mathbf{d}_{ij}) N_{i+1}^{n-1}(u) N_j^m(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-2} \frac{m}{v_{j+m+1} - v_{j+1}} (\mathbf{d}_{i,j+1} - \mathbf{d}_{ij}) N_i^n(u) N_{j+1}^{m-1}(v).$$

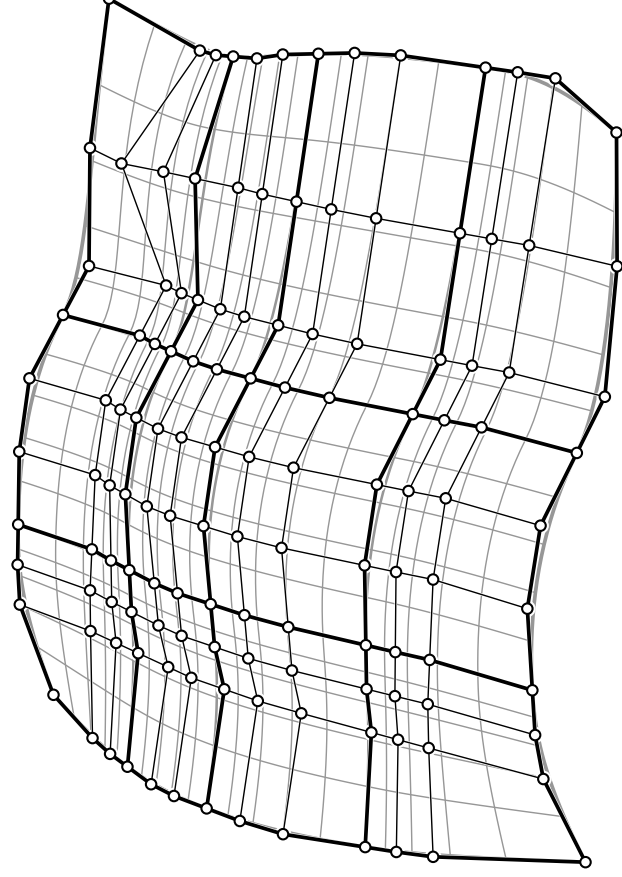
- **Ciągłość pochodnych:** Jeśli płat jest ciągły i w ciągu u_1, \dots, u_{N-1} występuje węzeł o krotności $r \leq n$, to w otoczeniu odcinka $u = u_i$ pochodne cząstkowe płata względem u rzędu co najmniej $n - r$ są ciągłe. Podobne stwierdzenie dotyczy pochodnych cząstkowych względem v .
- **Silna własność hodografu:** Z podanych wzorów na pochodne wynika, że punktami kontrolnymi płatów opisujących pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są wektory o kierunkach i zwrotach $\Delta_1 \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{d}_{i+1,j} - \mathbf{d}_{ij}$ oraz $\Delta_2 \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{d}_{i,j+1} - \mathbf{d}_{ij}$. Stosując do tych płatów silną własność otoczki wypukłej, dostaniemy silną własność hodografu — jej dokładne sformułowanie zostawiam jako temat do zastanowienia.

- Jeśli $u_{i+1} = \dots = u_{i+n} < u_{i+n+1}$, to kolumna siatki kontrolnej złożona z punktów $\mathbf{d}_{i,0}, \dots, \mathbf{d}_{i,M-m-1}$ jest B-sklejaną reprezentacją krzywej stałego parametru $u = u_{i+n}$. W szczególności dla $i = 0$ jest to krzywa brzegowa płata, określona przez pierwszą kolumnę siatki, a dla $i = N - n - 1$ jest to krzywa brzegowa wyznaczona przez ostatnią kolumnę (tu nie musi być $u_N > u_{N-1}$).

Podobne stwierdzenie dotyczy węzłów v_0, \dots, v_M i wierszy siatki kontrolnej. Krotność dowolnego węzła możemy zwiększyć, wstawiając węzły.

- **Reprezentacje Béziera** płatów wielomianowych z których składa się płat B-sklejany, możemy otrzymać, wstawiając węzły tak, aby krotność każdego węzła w ciągu „ u ” była równa n , a w ciągu „ v ” była równ m . Siatka kontrolna płata B-sklejanego będzie się wyedt składać z połączonych siatek płatów Béziera.

W zasadzie lepiej jest podwyższyć krotność węzłów odpowiednio do $n + 1$ i $m + 1$, bo wtedy siatki kontrolne płatów Béziera będą rozłączne. Daje to możliwość znajdowania płatów reprezentujących pochodne płata B-sklejanego, które mogą być nieciągłe w otoczeniu odcinków wyznaczonych w dziedzinie przez węzły.



Wymierne tensorowe płaty B-sklejane (powierzchnie NURBS)

Wymierną powierzchnię sklejaną otrzymamy za pomocą wzoru

$$s(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}.$$

Do każdego punktu kontrolnego trzeba dołączyć wagę w_{ij} . Jeśli $w_{ij} = 0$, to zamiast punktu \mathbf{d}_{ij} można wybrać wektor \mathbf{v}_{ij} i podstawić go do wzoru

$$s(u, v) = \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, j=0, \dots, M-m-1, w_{ij} \neq 0} w_{ij} \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)} + \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, j=0, \dots, M-m-1, w_{ij}=0} \mathbf{v}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}.$$

Reprezentacją jednorodną wymiernego płata B-sklejanego jest płat jednorodny, opisany wzorem

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} \mathbf{D}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)$$

z punktami kontrolnymi

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} w_{ij} \mathbf{d}_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix}, \text{ jeśli } w_{ij} \neq 0, \text{ albo } \mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ jeśli } w_{ij} = 0.$$

Powierzchnie rozpinane

Rozpinanie (*lofting* albo *skinning*) jest to konstrukcja powierzchni interpolacyjnej, na podstawie pewnej liczby danych krzywych stałego parametru. Tensorowa definicja płata B-sklejanego jest podstawą tej konstrukcji przebiegającej podobnie jak konstrukcja sklejaney krzywey interpolacyjnej.

Zobaczmy przykład konstrukcji płata stopnia $(3, m)$ (dla dowolnego m) Dane krzywe sklejanego stopnia m , x_i , mają być krzywymi stałego parametru u , dla $u = u_i, i = 3, \dots, N - 3$. Krzywe te są *punktami* pewnej przestrzeni. Płat tensorowy jest krzywą interpolacyjną dla tych punktów.

Mamy zatem te same równania, co w konstrukcji krzywej trzeciego stopnia,

$$N_{k-3}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-3} + N_{k-2}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-2} + N_{k-1}^3(u_k)\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{x}_k, \quad k = 4, \dots, N-4.$$

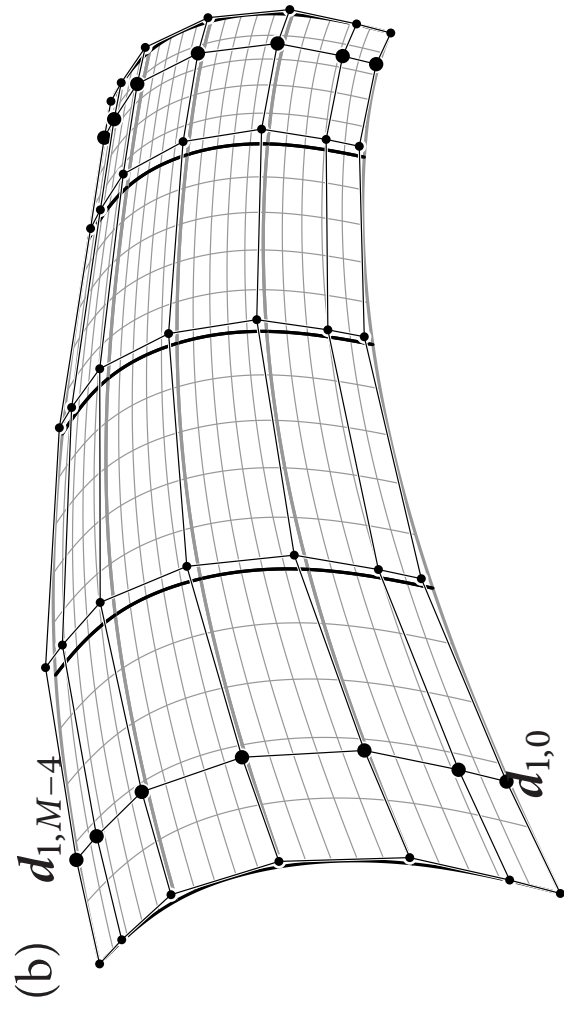
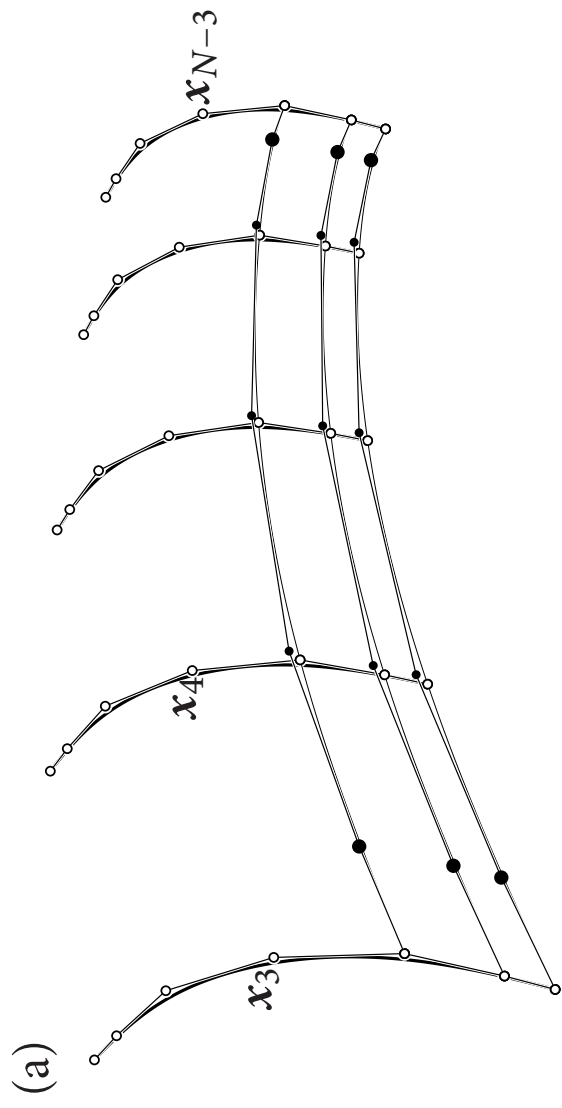
z warunkami brzegowymi a przykład określonymi przez pochodne,

$$\mathbf{s}'(u_3) = \frac{3}{u_4 - u_1}(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0),$$

$$\mathbf{s}'(u_{N-3}) = \frac{3}{u_{N-1} - u_{N-4}}(\mathbf{d}_{N-4} - \mathbf{d}_{N-5}),$$

ale teraz zarówno punkty dane $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(v)$, warunki brzegowe $\mathbf{s}'(u_3)$ i $\mathbf{s}'(u_{N-3})$ oraz niewiadome \mathbf{d}_i są krzywymi B-sklejanymi stopnia m . Wszystkie je można reprezentować w bazie B-sklejanej (dowolnej, ale tej samej).

Jeśli baza ta składa się z $M - m$ elementów, to przestrzeń, której punktami są krzywe dane i krzywe niewiadome, ma wymiar $3(M - m)$. Krzywe te utożsamiamy z łamanymi kontrolnymi. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy kolumny siatki kontrolnej płata rozpinanego.



Powierzchnie zakreślane

Zakreślanie (*sweeping*) polega na „przesuwaniu” krzywej \mathbf{q} (tzw. przekroju) wzdłuż (innej) krzywej \mathbf{p} (prowadnicy).

W najprostszym przypadku

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{p}(u) + (\mathbf{q}(v) - \mathbf{q}_0).$$

Do ogólniejszego wzoru

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{p}(u) + \mathbf{x}_2(u)x_{\mathbf{q}}(v) + \mathbf{x}_3(u)y_{\mathbf{q}}(v) + \mathbf{x}_1(u)z_{\mathbf{q}}(v)$$

trzeba podstawić jeszcze trzy kierownice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, tj. krzywe określające dodatkowe przekształcenia przekroju podczas przesuwania.

Wzór definiujący powierzchnię określaną można przepisać w postaci

$$\mathbf{s}(u, v) = [\mathbf{x}_2(u), \mathbf{x}_3(u), \mathbf{x}_1(u)] \mathbf{q}(v) + \mathbf{p}(u).$$

Dla każdego u prowadnica i kierownice określają pewne przekształcenie afiniczne; obraz przekroju w tym przekształceniu jest krzywą stałego parametru u powierzchni.

Jeśli wszystkie krzywe w tej konstrukcji są krzywymi B-sklejanymi, tj.

$$\mathbf{q}(v) = \sum_{j=0}^{M-m-1} \mathbf{q}_j N_j^m(v), \quad \mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{p}_i N_i^n(u),$$

$$\mathbf{x}_1(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{x}_{1,i} N_i^n(u), \quad \mathbf{x}_2(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{x}_{2,i} N_i^n(u),$$

$$\mathbf{x}_3(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{x}_{3,i} N_i^n(u),$$

dla pewnych ustalonych ciągów węzłów u_1, \dots, u_{N-1} i v_1, \dots, v_{M-1} to punkty kontrolne zakreslanego płata B-sklejanego są takie:

$$\mathbf{d}_{ij} = [\mathbf{x}_{2,i}, \mathbf{x}_{3,i}, \mathbf{x}_{1,i}] \mathbf{q}_j + \mathbf{p}_i.$$

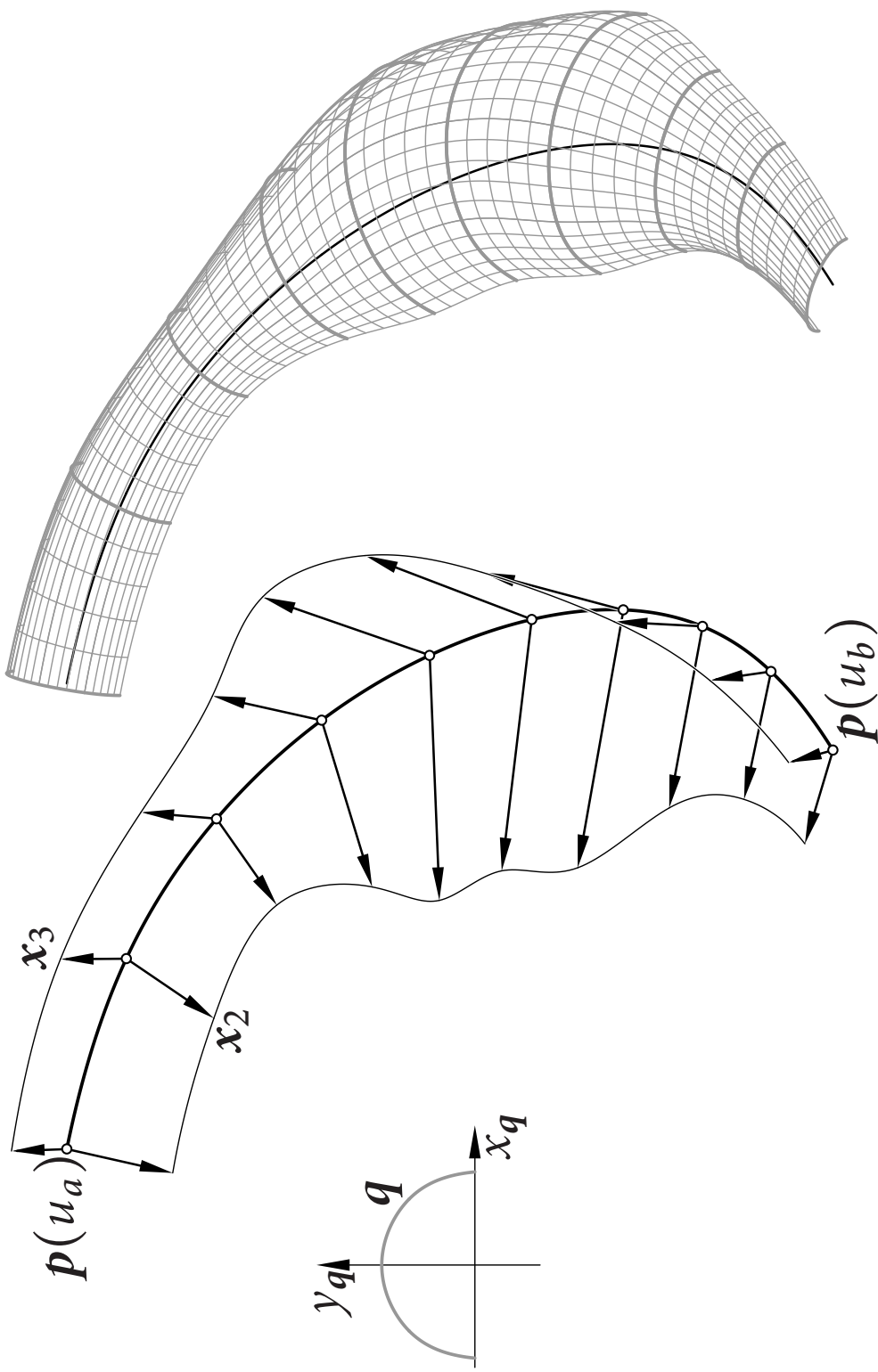
Często kierownice są konstruowane „automatycznie” na podstawie prowadnicy. Jeśli prowadnica jest gładką krzywą o niezerowej krzywiznie, jest możliwa konstrukcja kierownic na podstawie układu Freneta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(u) &= \frac{f_1(u)}{\|\mathbf{p}'(u)\|_2} \mathbf{p}'(u), \\ \mathbf{x}_2(u) &= \frac{f_2(u)}{\|\mathbf{p}'(u) \wedge \mathbf{p}''(u)\|_2} \mathbf{p}'(u) \wedge \mathbf{p}''(u), \\ \mathbf{x}_3(u) &= \frac{f_3(u)}{\|(\mathbf{p}'(u) \wedge \mathbf{p}''(u)) \wedge \mathbf{p}'(u)\|_2} (\mathbf{p}'(u) \wedge \mathbf{p}''(u)) \wedge \mathbf{p}'(u). \end{aligned}$$

Funkcje f_1 , f_2 i f_3 dla każdego u określają długości wektorów $\mathbf{x}_1(u)$, $\mathbf{x}_2(u)$ i $\mathbf{x}_3(u)$.

Inna możliwość to podstawienie do powyższych wzorów arbitralnie wybranej krzywej w miejsce $\mathbf{p}''(u)$ (w szczególności trzeba tak postąpić, jeśli krzywizna krzywej \mathbf{p} jest zerowa).

Podana konstrukcja wytwarza krzywe opisane przez funkcje przestępne, ale można je aproksymować funkcjami sklejanymi z błędem w granicach przyjętej tolerancji.

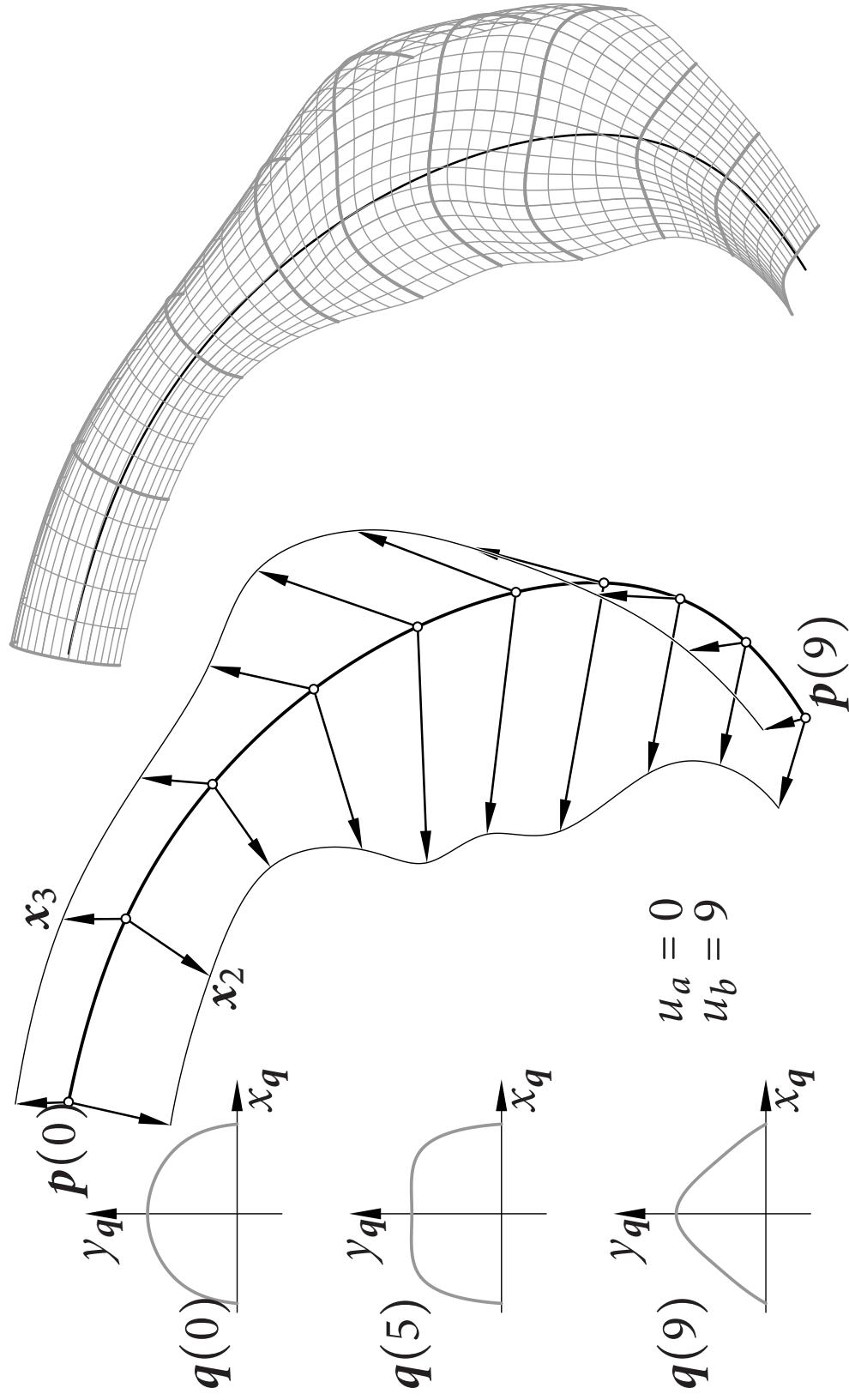


Konstrukcję powierzchni zakreślonej można jeszcze uogólnić, zmieniając przekrój w trakcie „przesuwania”. Taki przekrój jest jednoparametrową rodziną krzywych, czyli w zasadzie płatem tensorowym. Powierzchnia jest wtedy dana wzorem

$$\mathbf{s}(u, v) = [\mathbf{x}_2(u), \mathbf{x}_3(u), \mathbf{x}_1(u)]\mathbf{q}(u, v) + \mathbf{p}(u).$$

W tym przypadku potrzebne jest mnożenie funkcji sklejanych *tej samej* zmiennej, co jest działaniem trudniejszym do zaimplementowania niż iloczyn tensorowy.

W praktyce często wystarczy konstrukcja aproksymacyjna: dla odpowiednio wybranych węzłów u_i można znaleźć krzywe $\mathbf{q}(u_i, v)$, a następnie skonstruować powierzchnię rozpinaną na obrazach tych krzywych w przekształceniach afinicznych odpowiadających tym węzłom.



Iloczyn sferyczny

Dwie krzywe płaskie, zwane równoleżnikami i południkami umożliwiają konstrukcję płata tensorowego zwanego iloczynem sferycznym. Jeśli

$$\mathbf{r}(u) = \begin{bmatrix} x_r(u) \\ y_r(u) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(v) = \begin{bmatrix} x_q(v) \\ y_q(v) \end{bmatrix},$$

to

$$\mathbf{s}(u, v) = \begin{bmatrix} x_r(u)x_q(v) \\ y_r(u)x_q(v) \\ y_q(v) \end{bmatrix}.$$

Podstawiając odpowiednie funkcje trygonometryczne, otrzymamy parametryczny opis sfery, stąd nazwa tego działania. Jak widzimy, funkcje zmiennych u i v są mnożone tensorowo, co ułatwia znalezienie punktów kontrolnych płata, jeśli równoleżnik i południk są krzywymi B-sklejanymi.

Jeśli

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \begin{bmatrix} x_{ri} \\ y_{ri} \end{bmatrix} N_i^n(u), \quad \mathbf{q}(v) = \sum_{j=0}^{M-m-1} \begin{bmatrix} x_{qj} \\ y_{qj} \end{bmatrix} N_j^m(v),$$

to

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} \begin{bmatrix} x_{ri}x_{qj} \\ y_{ri}x_{qj} \\ y_{qj} \end{bmatrix} N_i^n(u)N_j^m(v).$$

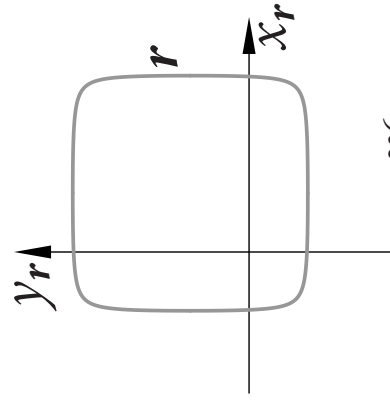
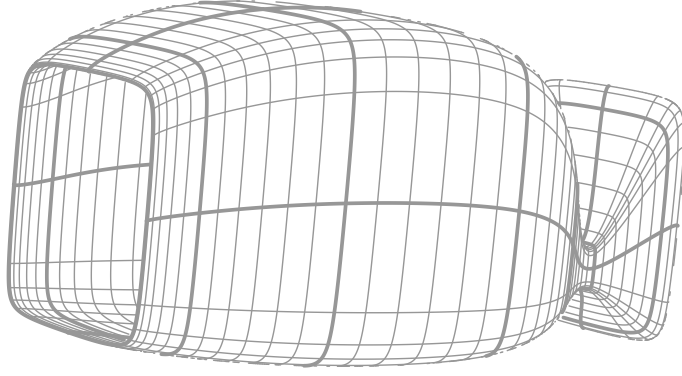
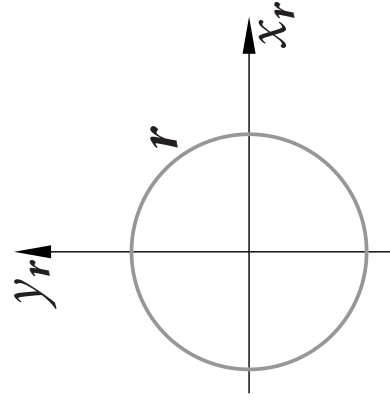
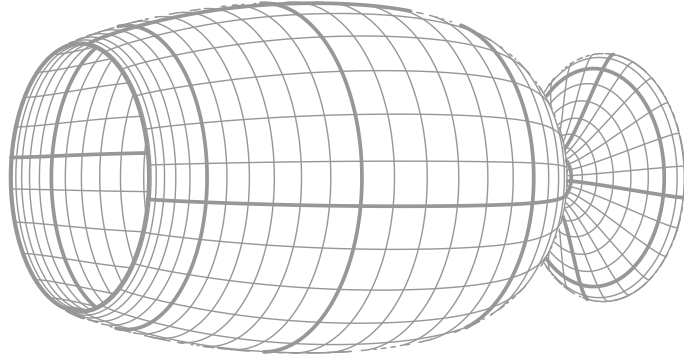
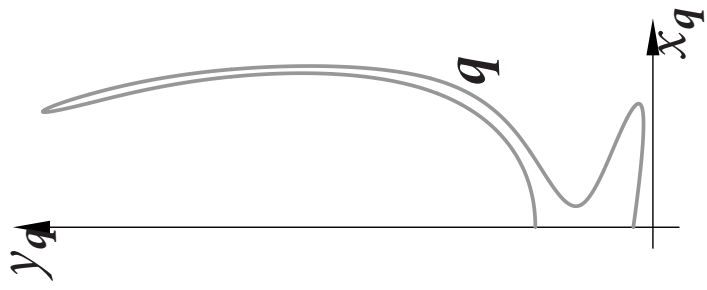
W praktyce warto rozważyć, czy lepiej jest utworzyć tablicę punktów kontrolnych płata tensorowego, czy też obliczać punkty płata na podstawie definicji iloczynu sferycznego i punktów równoleżnika i południka — ten drugi sposób daje mniejsze koszty czasowe i pamięciowe, ale wymaga osobnego oprogramowania tego przypadku.

Iloczyn sferyczny krzywych wymiernych stopni n i m jest wymiernym płatem B-sklejonym stopnia (n, m) . Łatwo można pokazać, że jeśli krzywe jednorodnie reprezentujące równoleżnik i południk mają punkty kontrolne

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} X_{ri} \\ Y_{ri} \\ W_{ri} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} X_{qj} \\ Y_{qj} \\ W_{qj} \end{bmatrix},$$

to iloczyn sferyczny jest reprezentowany przez płat jednorodny o punktach kontrolnych

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ri}X_{qj} \\ Y_{ri}X_{qj} \\ W_{ri}Y_{qj} \\ W_{ri}W_{qj} \end{bmatrix}.$$



Krzywe B-sklejane z węzłami równoodległymi

Ograniczenie ciągów węzłów do takich, że $u_{i+1} - u_i = h = \text{const}$ umożliwia przetwarzanie krzywych i płatów B-sklejanych z takimi węzłami za pomocą algorytmów specjalnych. Ponieważ można dokonać dowolnej afinicznej reparametryzacji krzywej bez zmiany kształtu, jeśli istotny jest tylko kształt, to można zrezygnować z przechowywania węzłów w pamięci komputera (i w razie potrzeby przyjmować, że węzły są kolejnymi liczbami całkowitymi).

Jeśli zatem $u_i = ih$ dla $i \in \mathbb{Z}$, to funkcje B-sklejane spełniają warunek

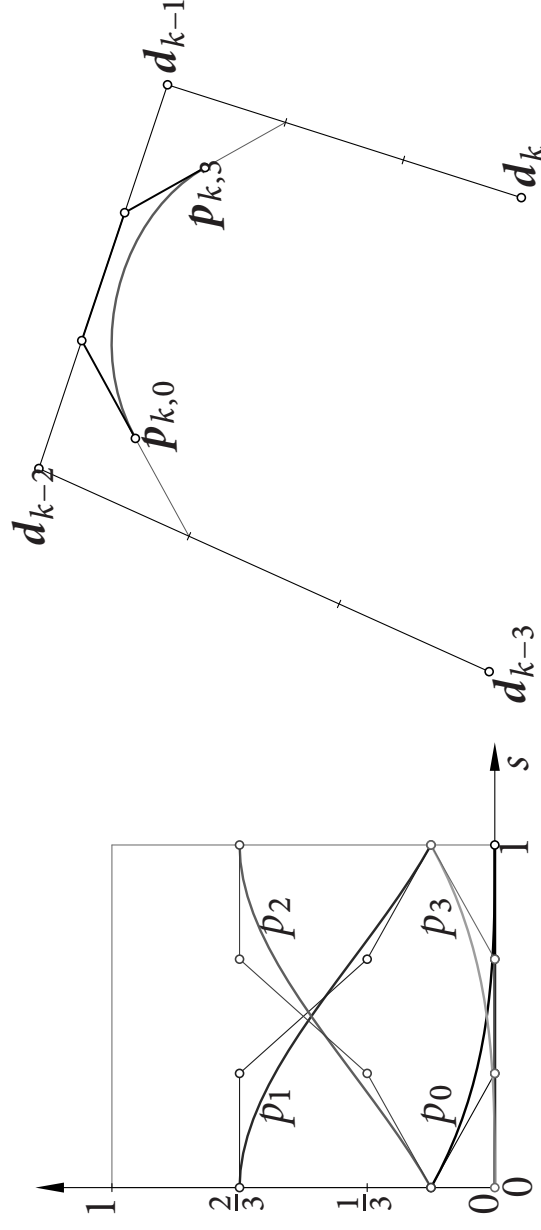
$$N_i^n(t) = N_{i+k}^n(t + kh)$$

dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Aby narysować krzywą, można znaleźć reprezentacje Béziera jej łuków wielomianowych i narysować te łuki. Punkty kontrolne każdego takiego łuku można obliczyć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k,0} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{k,n} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k-n} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix},$$

w którym macierz M zależy tylko od stopnia krzywej.



Algorytm Lanéa–Riesenfelda

Można też skorzystać z faktu, że wstawianie węzłów z ciągu gęstego w dziedzinie krzywej wytwarza ciąg łamanych kontrolnych zbiegających jednostajnie do krzywej. Nadają się do tego algorytmy Boehma i Oslo, ale istnieje algorytm wstawiania wielu węzłów naraz tak, aby zagęścić ciąg węzłów, zachowując jego równoodległość.

Wyprowadzenie zaczniemy od napisania wzoru na pochodną funkcji B-sklejanej stopnia n z węzłami $u_i = i$ dla $i \in \mathbb{Z}$:

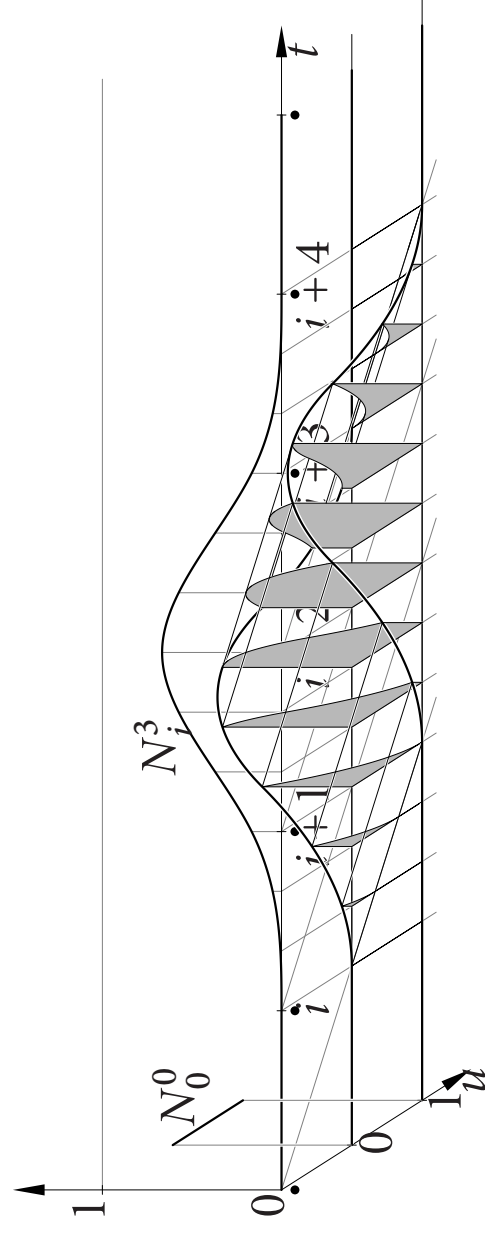
$$\frac{d}{dt}N_i^n(t) = N_i^{n-1}(t) - N_{i+1}^{n-1}(t).$$

Z pochodnej odtworzymy funkcję, obliczając całkę:

$$\begin{aligned} N_i^n(t) &= \int_{-\infty}^t N_i^{n-1}(u) - N_{i+1}^{n-1}(u) \, du = \int_{t-1}^t N_i^{n-1}(u) \, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} N_i^{n-1}(t-u) N_0^0(u) \, du. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie opisuje splot dwóch funkcji: $N_i^n = N_i^{n-1} * N_0^0$.

Można go zilustrować tak:



Niech $M_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} N_0^n(2t - i)$. Funkcje M_i^n są unormowanymi funkcjami sklejanymi, których węzły są równoodległe, rozmieszczone dwukrotnie gęściej. Przestrzeń rozpięta przez funkcje N_i^n jest podprzestrzenią przestrzeni rozpiętej przez funkcje M_i^n . Zatem, mając funkcję lub krzywą sklejaną

$$s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^n(t),$$

można (i należy) znaleźć jej współczynniki d_i w bazie $\{M_i^n: i \in \mathbb{Z}\}$.

Krzywa stopnia 0 składa się ze swoich własnych punktów kontrolnych.

Jest $N_i^0(t) = M_{2i}^0(t) + M_{2i+1}^0(t)$, skąd wynika, że

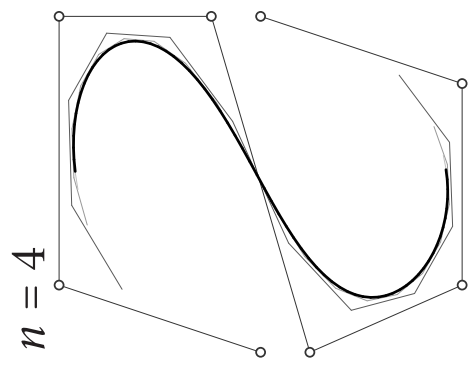
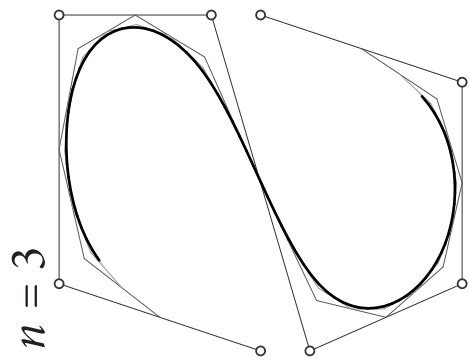
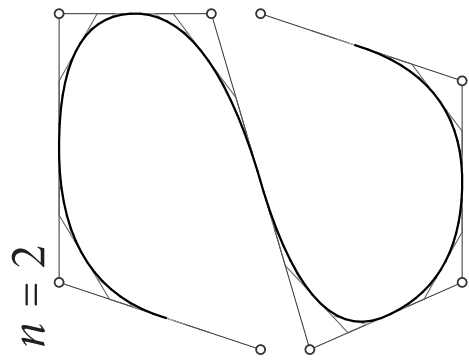
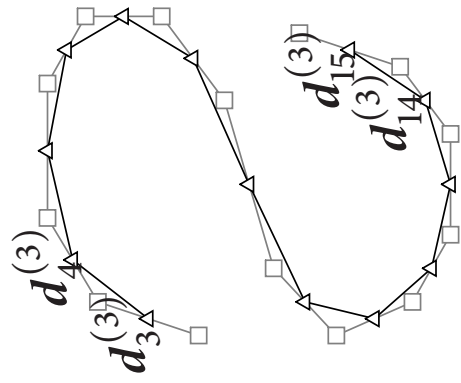
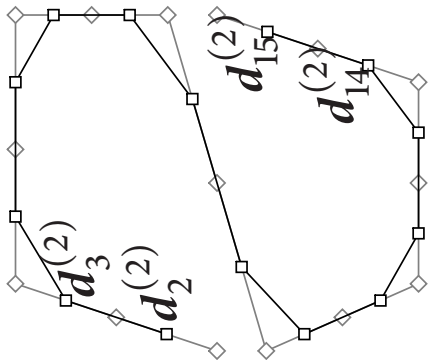
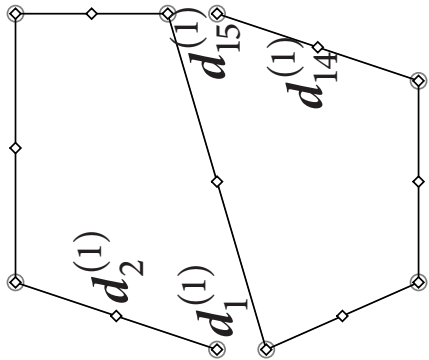
$$s^{(0)}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^0(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i (M_{2i}^0(t) + M_{2i+1}^0(t)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{(0)} M_i^0(t),$$

a więc $d_{2i}^{(0)} = d_{2i+1}^{(0)} = c_i$ dla $i \in \mathbb{Z}$. Dla krzywej stopnia 0 punkty kontrolne wystarczy podwoić.

Podstawiając dla krzywej stopnia $j > 0$ spłot, $M_i^j = 2M_i^{j-1} * M_0^0$ i biorąc pod uwagę, że $N_0^0 = M_0^0 + M_1^0$, obliczamy

$$\begin{aligned} s^{(j)}(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i N_i^j(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i N_i^{j-1}(t-u) N_0^0(u) \, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i^{(j-1)} M_i^{j-1}(t-u) (M_0^0(u) + M_1^0(u)) \, du \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i^{(j-1)} (M_i^j(t) + M_{i+1}^j(t)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)} + \mathbf{d}_i^{(j-1)}) M_i^j(t). \end{aligned}$$

Punkty kontrolne krzywej stopnia j są więc środkami odcinków łamanej kontrolnej krzywej stopnia $j-1$, której wierzchołki są współczynnikami w bazie $\{M_i^{j-1} : i \in \mathbb{Z}\}$. Obliczenie punktów $\mathbf{d}_i^{(j)}$ polega na uśrednieniu ciągu punktów $\mathbf{d}_i^{(j-1)}$.



Jeśli ciąg węzłów jest skończony, $u_i = i$ dla $i = 0, \dots, N$, to algorytm możemy zapisać tak:

```
for (  $i = 0$ ;  $i < N - n$ ;  $i++$  )  
     $d[2i] = d[2i+1] = c[i]$ ;  
for (  $j = 1$ ;  $j <= n$ ;  $j++$  )  
    for (  $i = 0$ ;  $i < 2(N - n) - j$ ;  $i++$  )  
         $d[i] = \frac{1}{2}(d[i] + d[i+1])$ ;
```

Wielokrotne powtarzanie tego algorytmu daje ciąg łamanych bardzo szybko zbieżny do krzywej, zatem, aby narysować krzywą, wystarczy zwykle wykonać tylko kilka powtórzeń.

Algorytm można uogólnić tak, aby zagęszczać ciąg węzłów w jednym kroku więcej niż dwukrotnie. Niech $p \geq 2$. Algorytm składający się z kroku **powielania**, w którym przyjmuje się

$$\mathbf{d}_{pi}^0 = \dots = \mathbf{d}_{pi+p-1}^{(0)} = \mathbf{c}_i,$$

a potem wykonuje n kroków **uśredniania**, czyli obliczania

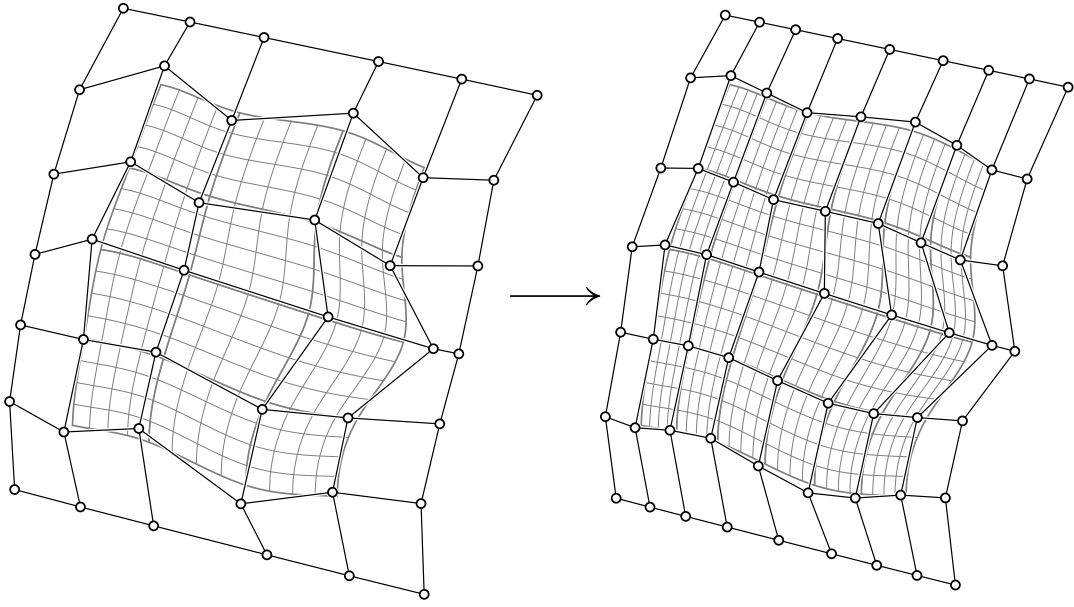
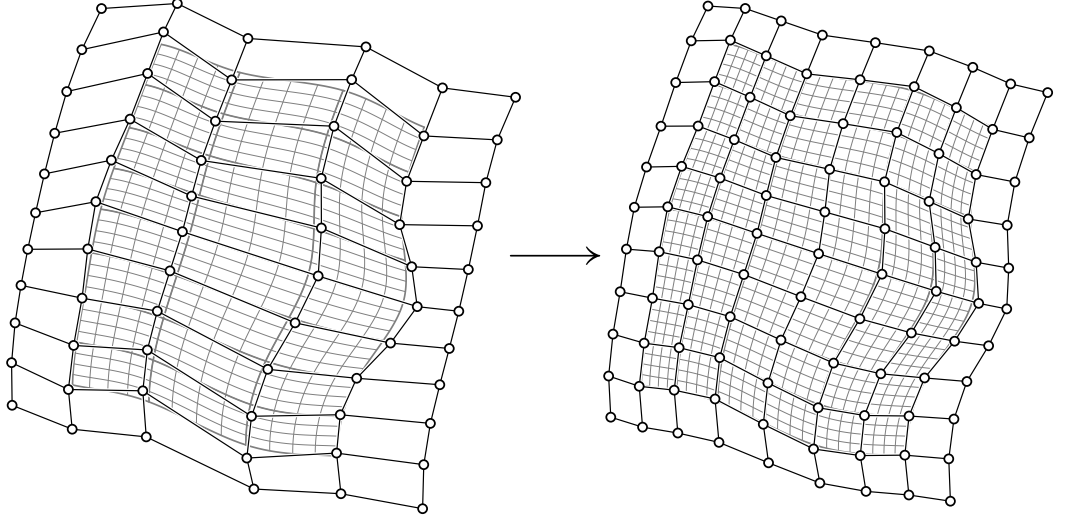
$$\mathbf{d}_i^{(j)} = \frac{1}{p}(\mathbf{d}_{i-p+1}^{(j-1)} + \dots + \mathbf{d}_i^{(j-1)}) \quad \text{dla } j = 1, \dots, n,$$

wytwarza reprezentację krzywej danej z ciągiem węzłów p razy gęstszym.

Zachęcam do udowodnienia tego faktu.

Płaty tensorowe z węzłami równoodległymi

B-sklejany płat tensorowy stopnia (n, m) z węzłami równoodległymi możemy przetwarzać tak samo, jak każdy inny, ale możemy też stosować algorytm Lanéa–Riesenfelda do zagęszczania jednego lub drugiego ciągu węzłów. Te operacje komutują, tj. jeśli trzeba zagęścić oba ciągi węzłów, to można przetwarzać wiersze i kolumny siatki w dowolnej kolejności.



Co więcej, okazuje się, że zarówno podwajanie, jak i uśrednianie wierszy komutuje z podwajaniem i uśrednianiem kolumn. Można zatem dokonać podwajania wierszy i kolumn, a potem wykonać (w całkowicie dowolnej kolejności) n uśrednień wierszy i m uśrednień kolumn.

W szczególności, jeśli $n = m$, to można dokonać podwajania wierszy i kolumn, a następnie n uśrednień wierszy i kolumn. W tym przypadku podwajanie polega na zastąpieniu każdej kolumny dwiema kopiami i potem (lub przedtem) każdego wiersza dwiema kopiami:

$$\mathbf{d}_{2i,2k}^{(0)} = \mathbf{d}_{2i+1,2k}^{(0)} = \mathbf{d}_{2i,2k+1}^{(0)} = \mathbf{d}_{2i+1,2k+1}^{(0)} = \mathbf{c}_{ik}.$$

Otrzymana siatka ma ściany, czyli czworokąty o wierzchołkach \mathbf{d}_{ij} , $\mathbf{d}_{i+1,j}$, $\mathbf{d}_{i,j+1}$, $\mathbf{d}_{i+1,j+1}$. W dodatku do ścian pokrywających się ze ścianami siatki danej, podwajanie wytwarza ściany zdegenerowane do odcinków (w miejscu krawędzi siatki danej) i ściany zdegenerowane do punktów (w miejscu wierzchołków siatki danej, tj. oryginalnych punktów kontrolnych).

Jednoczesne uśrednianie wierszy i kolumn polega na obliczeniu środka ciężkości każdej ściany:

$$\mathbf{d}_{ik}^{(j)} = \frac{1}{4}(\mathbf{d}_{i-1,k-1}^{(j-1)} + \mathbf{d}_{i,k-1}^{(j-1)} + \mathbf{d}_{i-1,k}^{(j-1)} + \mathbf{d}_{i,k}^{(j-1)}).$$

Powtarzając zagęszczanie, otrzymujemy ciąg siatek kontrolnych tej samej powierzchni B-sklejanej, zbiegający do niej. Siatkę otrzymaną po kilku krokach można narysować (np. zamieniając ściany na pary trójkątów).

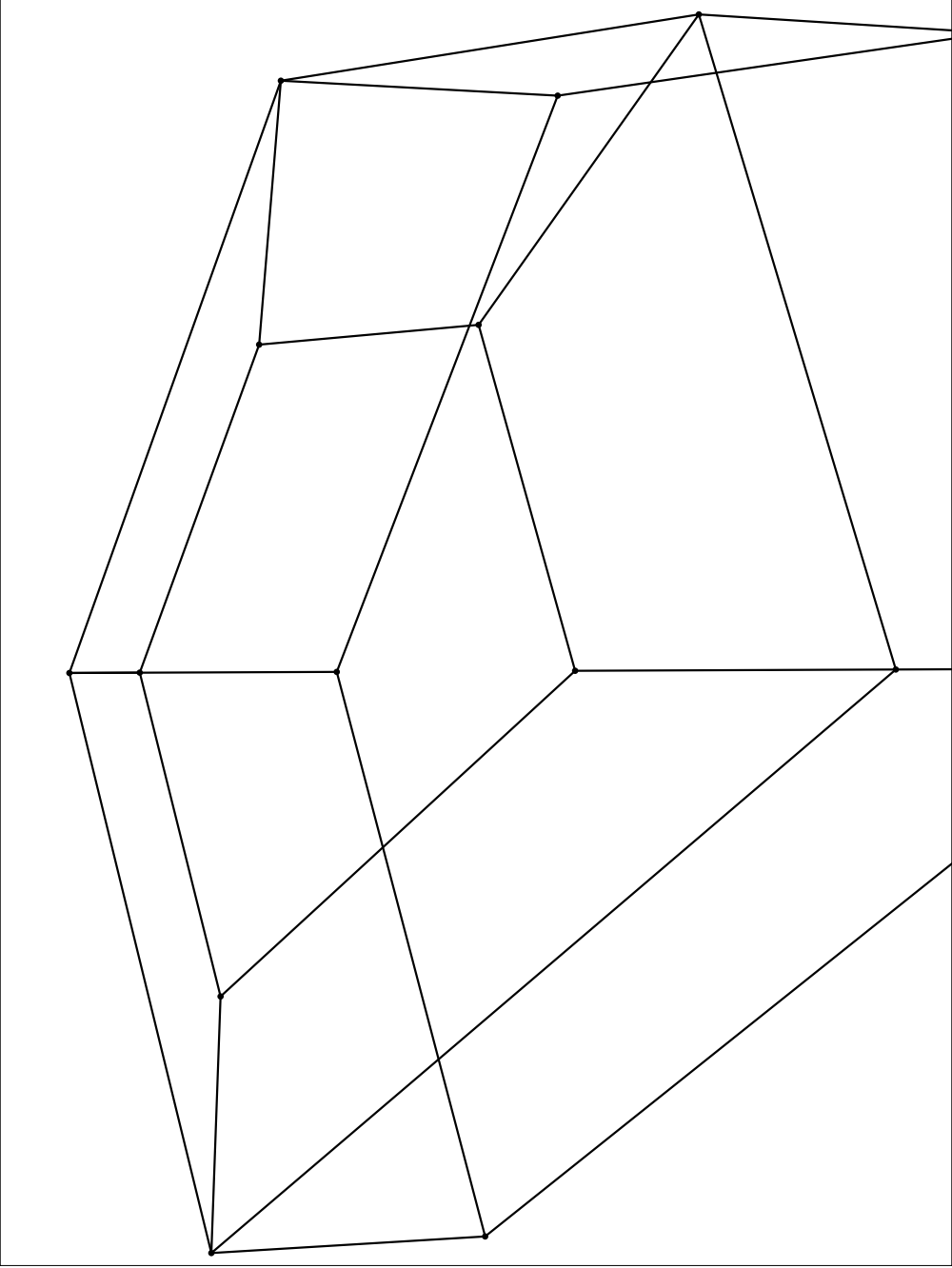
Ponieważ płyty B-sklejane są powierzchniami o swobodnym brzegu, „zewnątrzne” ściany siatki trzeba pominąć. Dokładniej, jeśli n jest nieparzyste, to należy odrzucić $(n - 1) / 2$ wierszy i kolumn siatki od każdego brzegu i narysować ściany tego, co pozostało. Jeśli n jest parzyste, to najlepiej jest po ostatnim zagęszczeniu wykonać jeszcze jeden krok uśredniania i odrzucić $n/2$ wierszy i kolumn brzegowych.

Uogólnienie na siatki nieregularne

Algorytm dla powierzchni tensorowych można uogólnić na przypadek siatek nieregularnych. Siatka taka jest grafem, którego wierzchołki są punktami w przestrzeni (np. \mathbb{R}^3). Określamy **krawędzie**, tj. odcinki łączące wierzchołki, oraz **ściany** — wielokąty utworzone z krawędzi. Każda krawędź należy do jednej lub co najwyżej dwóch ścian. W pierwszym przypadku krawędź jest **brzegowa**, a w drugim **wewnętrzna**.

Ściany czworokątne w takiej siatce nazwiemy **ścianami regularnymi**, pozostałe są **specjalne**.

Wierzchołki wewnętrzne (tj. incydentne tylko z krawędziami wewnętrznymi) nazywamy **wierzchołkami regularnymi**, jeśli ich stopień jest równy 4. Pozostałe wierzchołki wewnętrzne są **specjalne**.

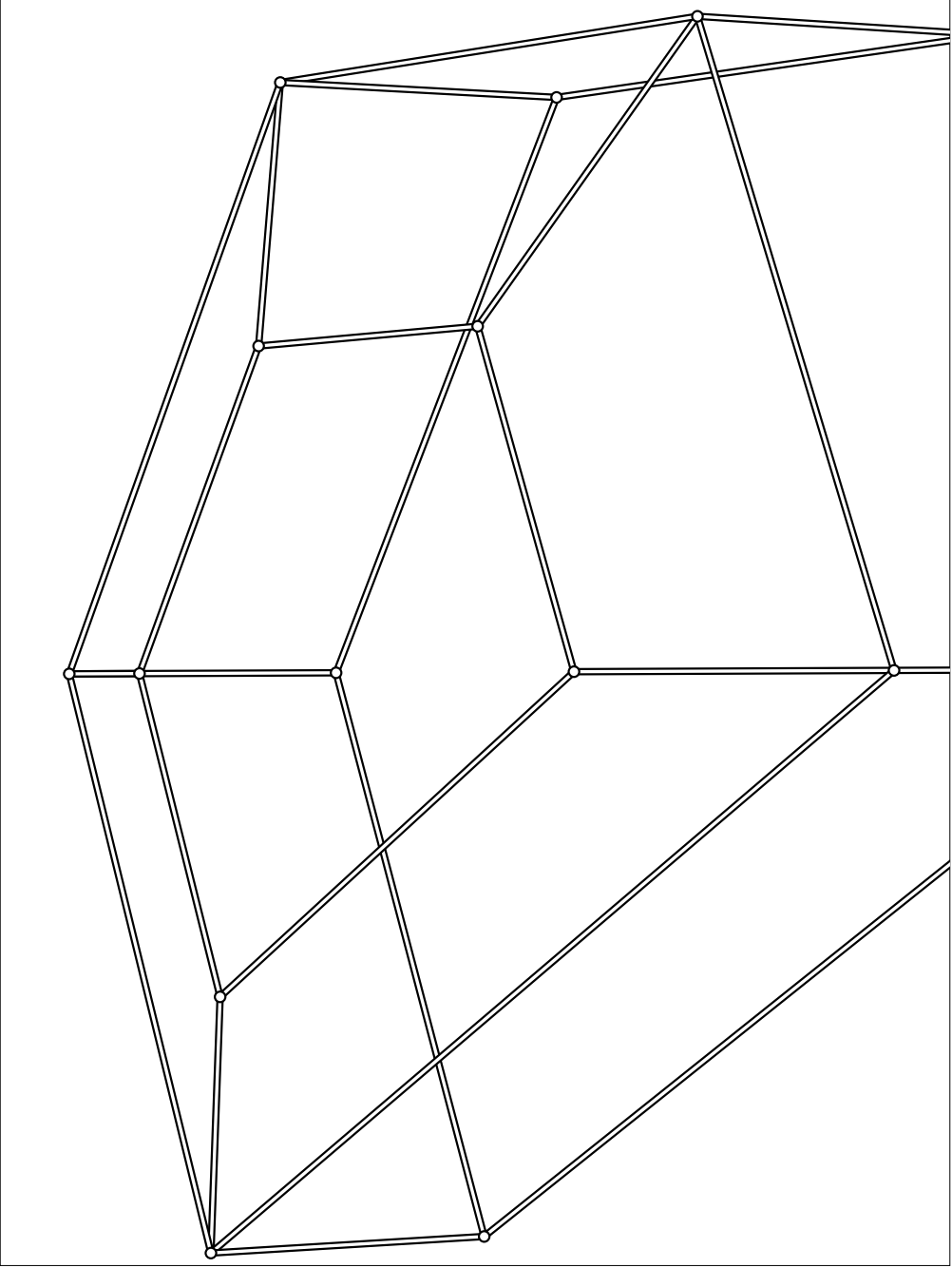


Określimy dwie operacje przetwarzania siatek nieregularnych.

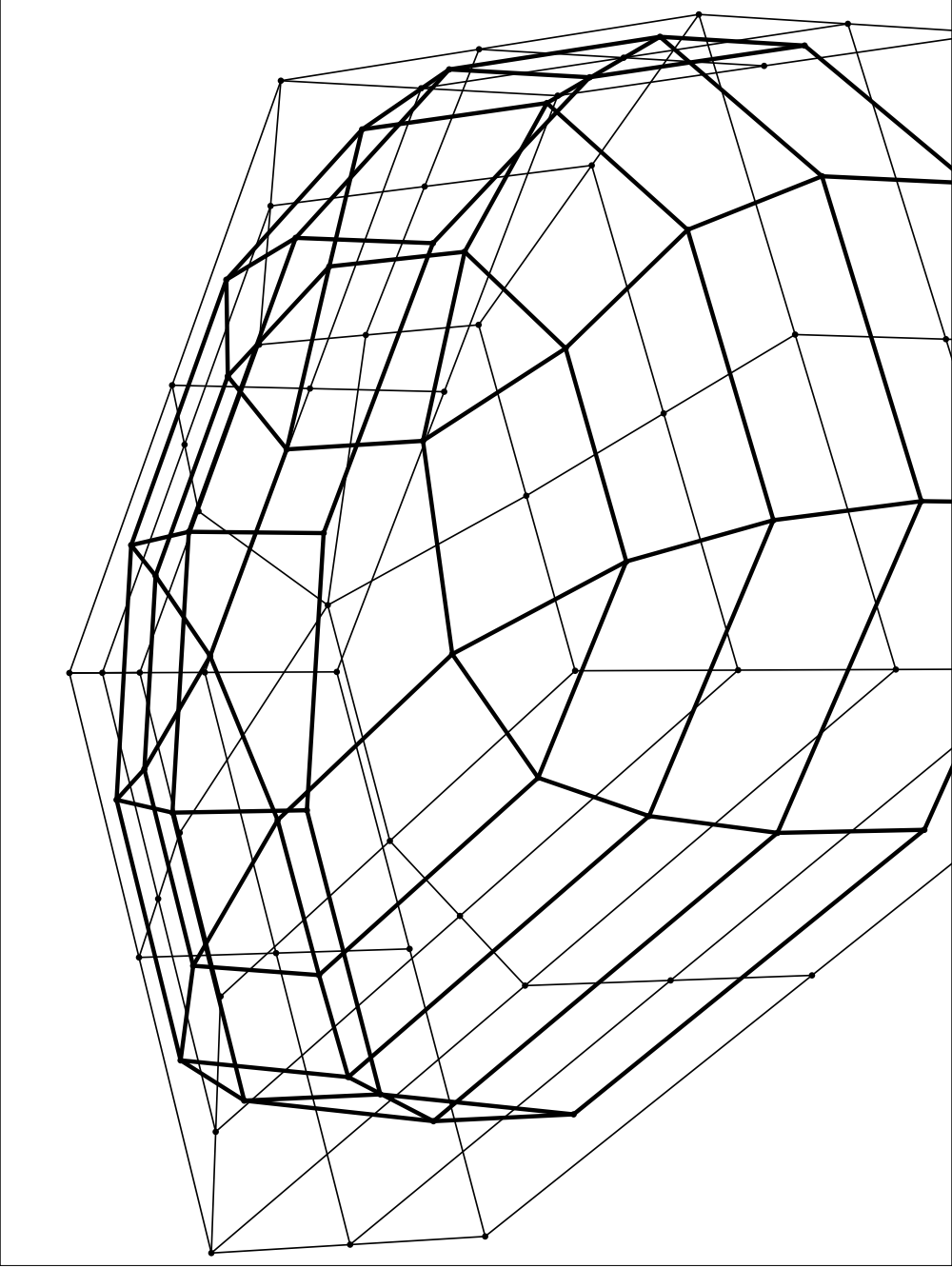
Podwajanie polega na wprowadzeniu dla każdej krawędzi i wierzchołka nowej ściany.

Ściana odpowiadająca krawędzi jest czworokątem; dwa z jej boków są zdegenerowane do punktu, tj. zamiast jednego punktu (wierzchołka grafu) są dwa wierzchołki nowej ściany, o tym samym położeniu.

Ściana odpowiadająca wierzchołkowi stopnia k (z którego wychodzi k krawędzi) jest k -kątem zdegenerowanym do punktu; k wierzchołków grafu ma to samo położenie.

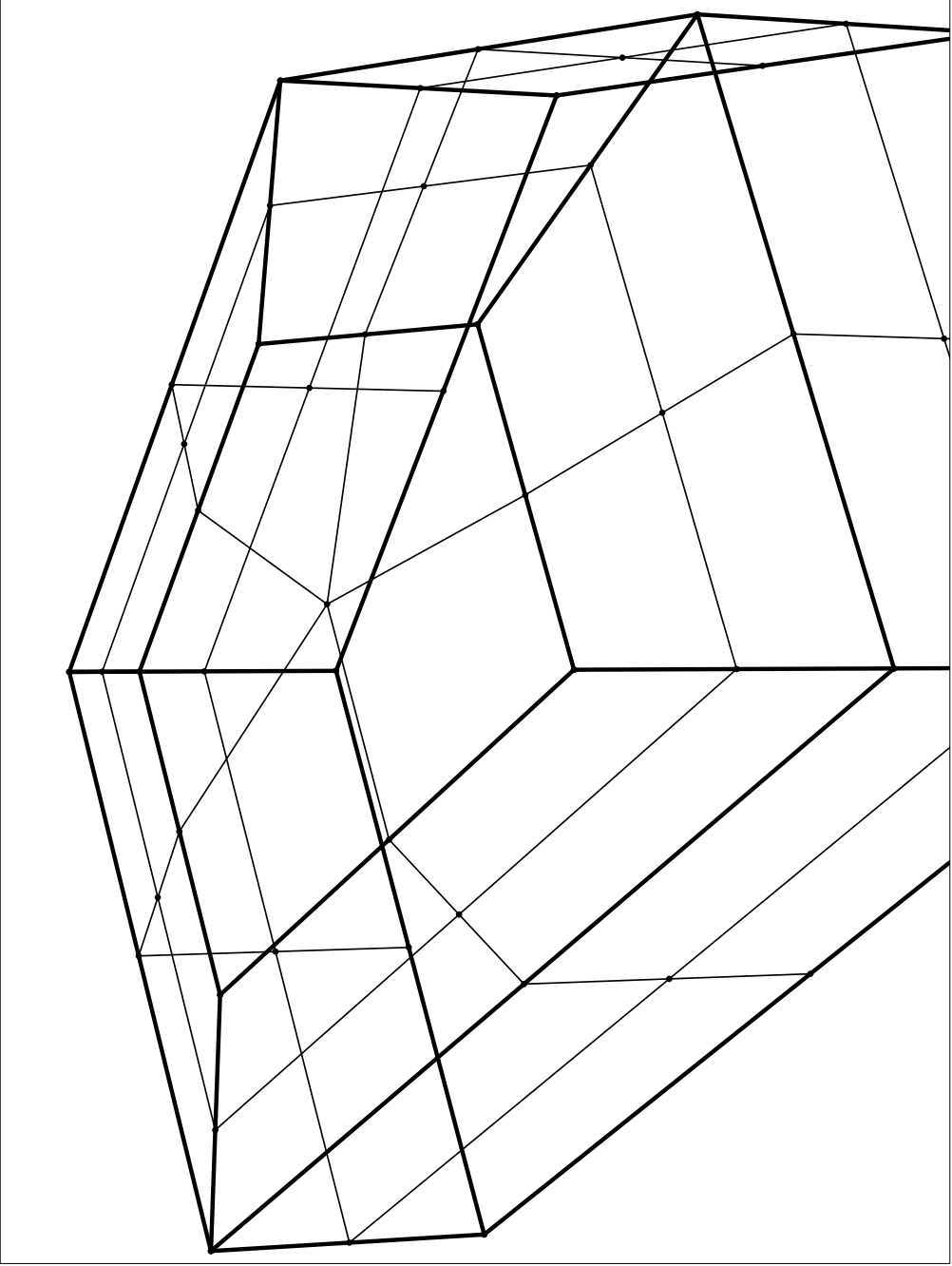


Uśrednianie jest to konstrukcja grafu dualnego do siatki będącej argumentem tej operacji; dla każdej ściany w siatce danej określamy wierzchołek w środku ciężkości wierzchołków tej ściany. Każdą krawędź wewnętrznej siatki danej odwzorowujemy na krawędź nowej siatki, łączącą wierzchołki otrzymane dla ścian mających tę krawędź wspólną. Ściany nowej siatki odpowiadają wierzchołkom wewnętrznym siatki danej.



Obie te operacje w przypadku regularnej siatki czworokątnej są identyczne z odpowiednimi operacjami wykonywanymi w algorytmie Lanea-Riesenfelda.

Jeśli po podwajaniu ma być wykonane uśrednianie, to obie operacje można połączyć w jedno rozdrabnianie. W tej operacji każdą krawędź dzielimy nowym wierzchołkiem na połowy. Dla każdej ściany wprowadzamy nowy wierzchołek w środku ciężkości jej zbioru wierzchołków i łącząc ten wierzchołek z wierzchołkami w środkach starych krawędzi, dzielimy ścianę k -kątną na k ścian czworokątnych.



Algorytm Lanéa-Riesenfelda uogólniony dla siatki nieregularnej polega na wykonaniu jednego kroku podwajania, a potem n kroków uśredniania, albo równoważnie na wykonaniu rozdrabniania, po którym następuje $n - 1$ kroków uśredniania.

Jeśli siatka jest regularna prostokątna, to to jest algorytm tensorowy rozpatrywany wcześniej; nowa siatka prostokątna reprezentuje tę samą powierzchnię B-sklejaną stopnia (n, n) . Iterując algorytm, otrzymujemy ciąg siatek zbieżny do tego płata.

Jeśli siatka zawiera wierzchołki lub ściany specjalne, to liczba elementów specjalnych w nowej siatce nie może być większa.

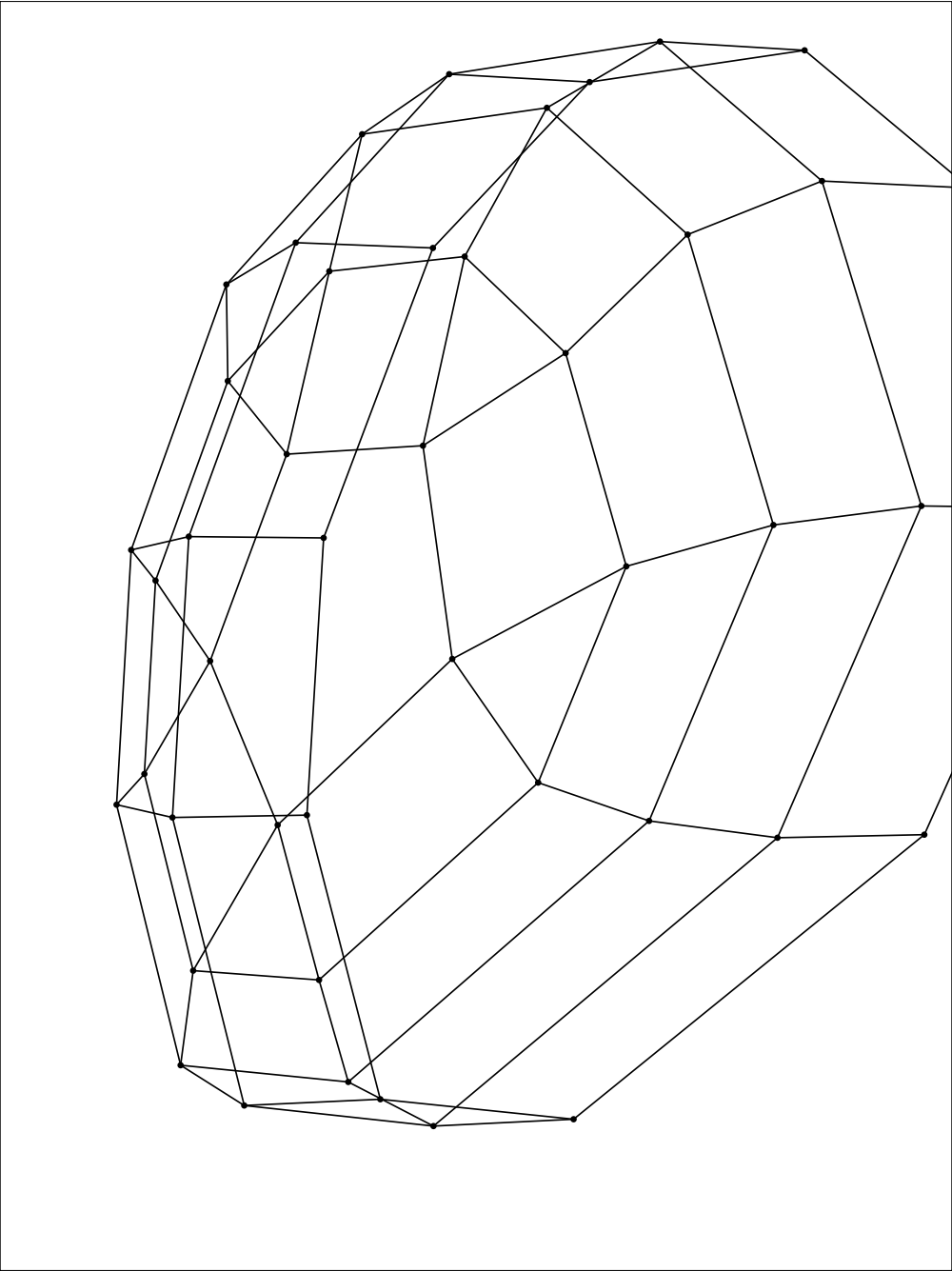
Zauważmy, że operator rozdrabniania wytwarza siatkę, której wszystkie ściany są czworokątne (czyli regularne) — ściany specjalne k -kątne zostają zamienione na wierzchołki specjalne stopnia k .

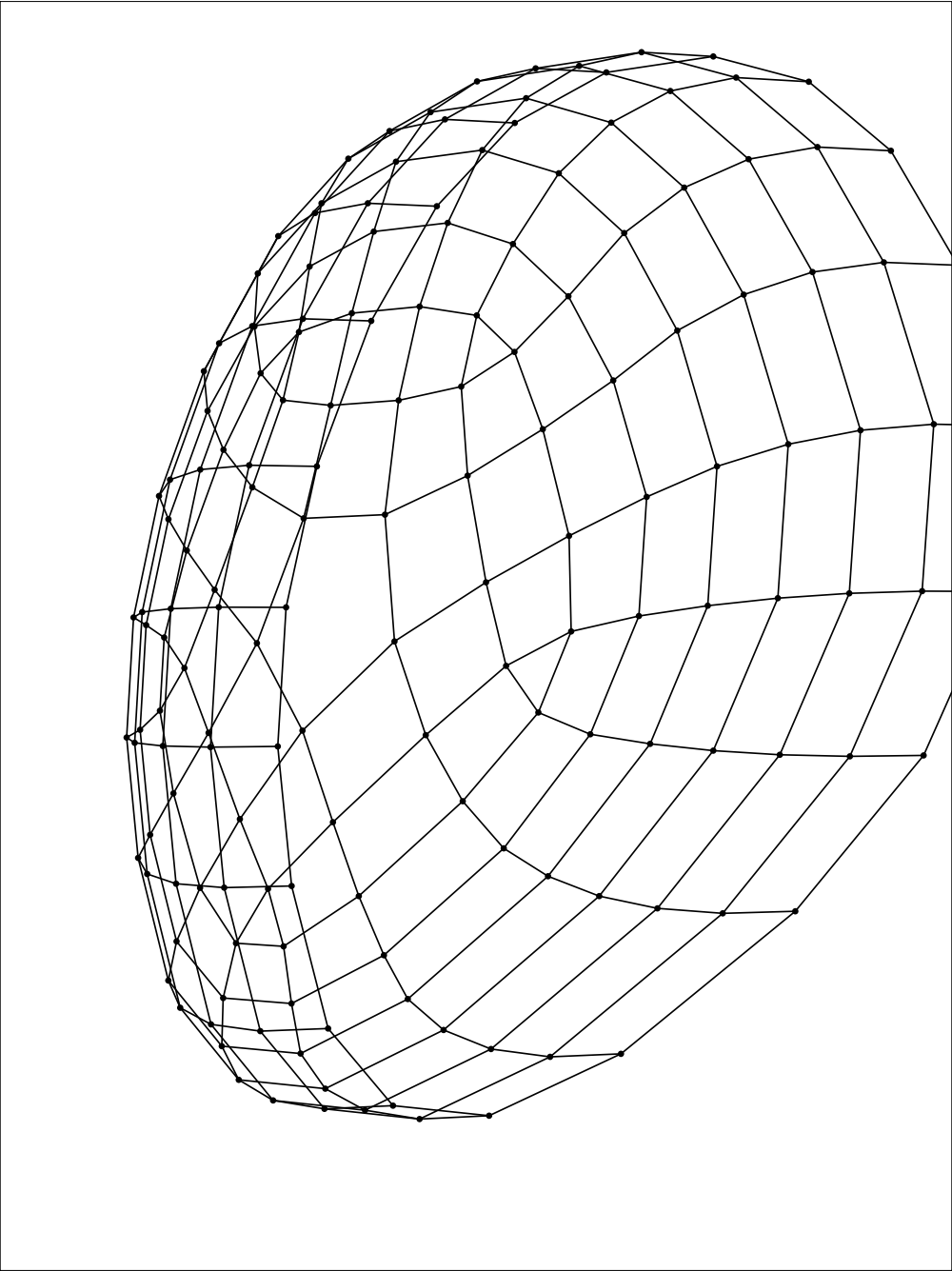
Operator uśredniania zamienia wierzchołek specjalny stopnia k na ścianę k -kątą, a ścianę k -kątą na wierzchołek stopnia k (lub niższego, jeśli ściana ma krawędź brzegową).

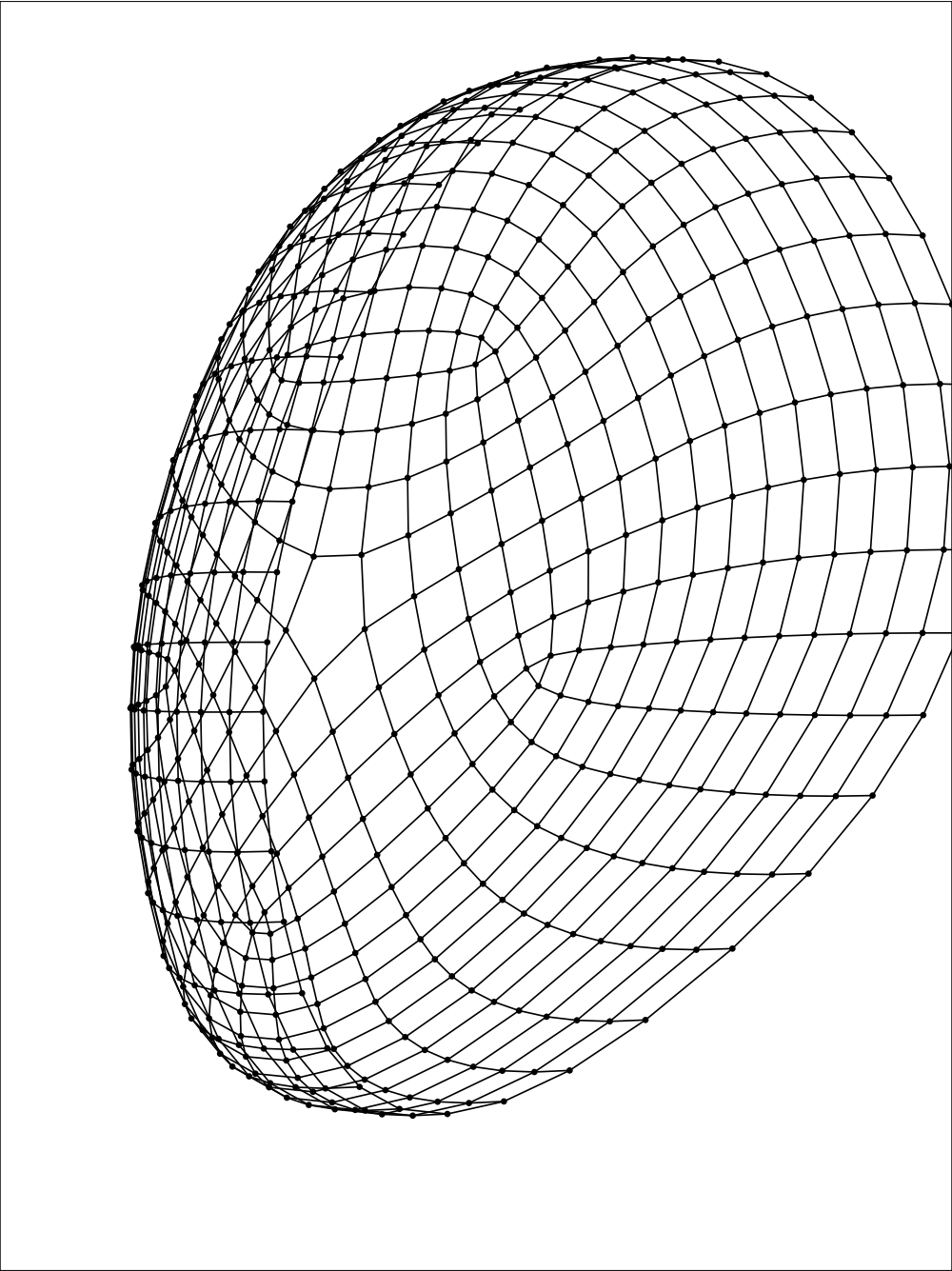
Zatem po wykonaniu rozdrabniania wszystkie elementy specjalne siatki są wierzchołkami. Jeśli n jest parzyste, to następnie po $n - 1$ uśrednieniach mamy siatkę, w której specjalne są tylko ściany. Dla n nieparzystego mamy siatkę, w której specjalne są tylko wierzchołki.

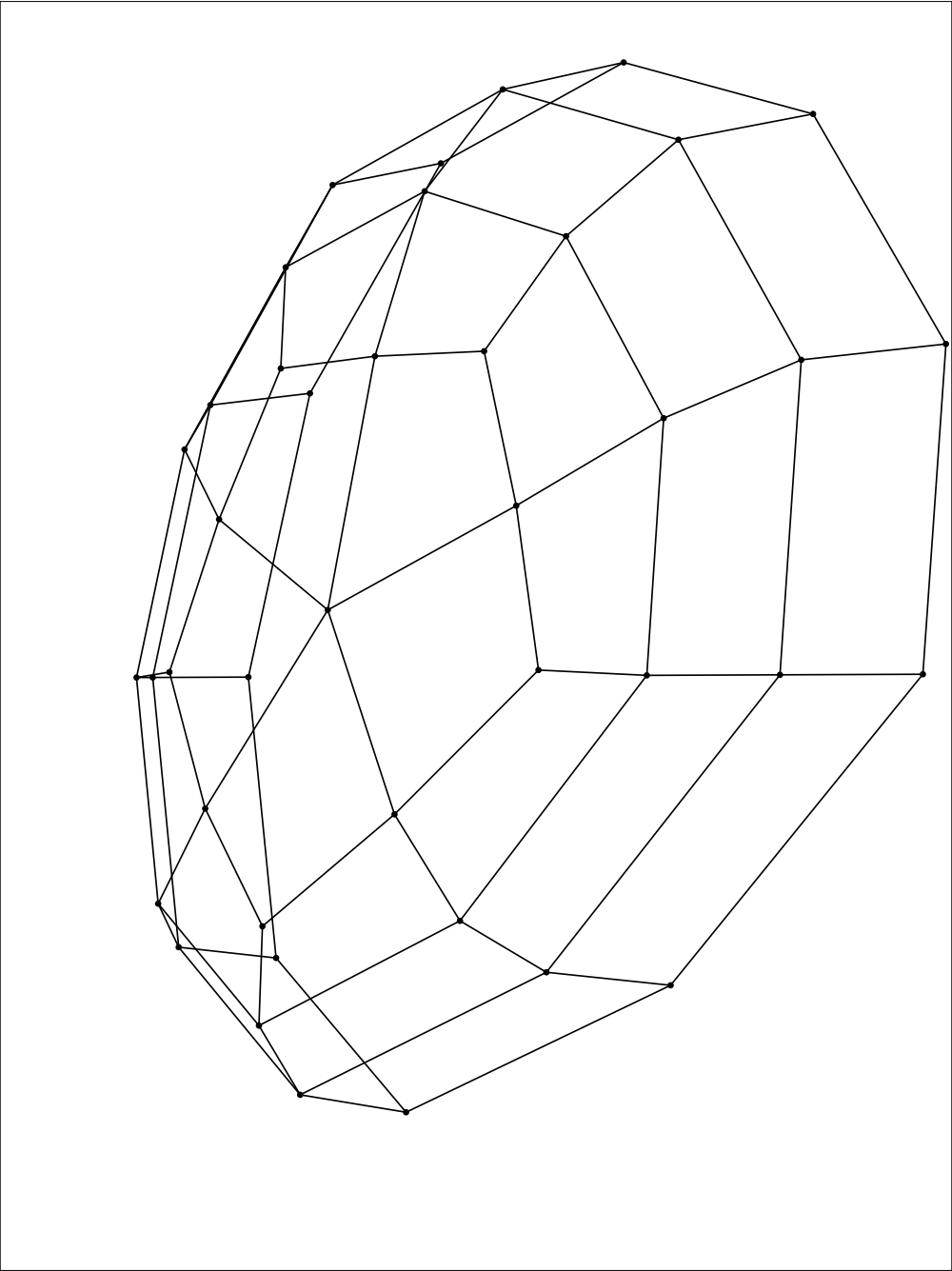
Siatki otrzymane w kolejnych iteracjach algorytmu mają coraz większe podgrafy, będące regularnymi siatkami prostokątnymi. Podgrafy te reprezentują płaty B-sklejane stopnia (n, n) , które stanowią części powierzchni granicznej.

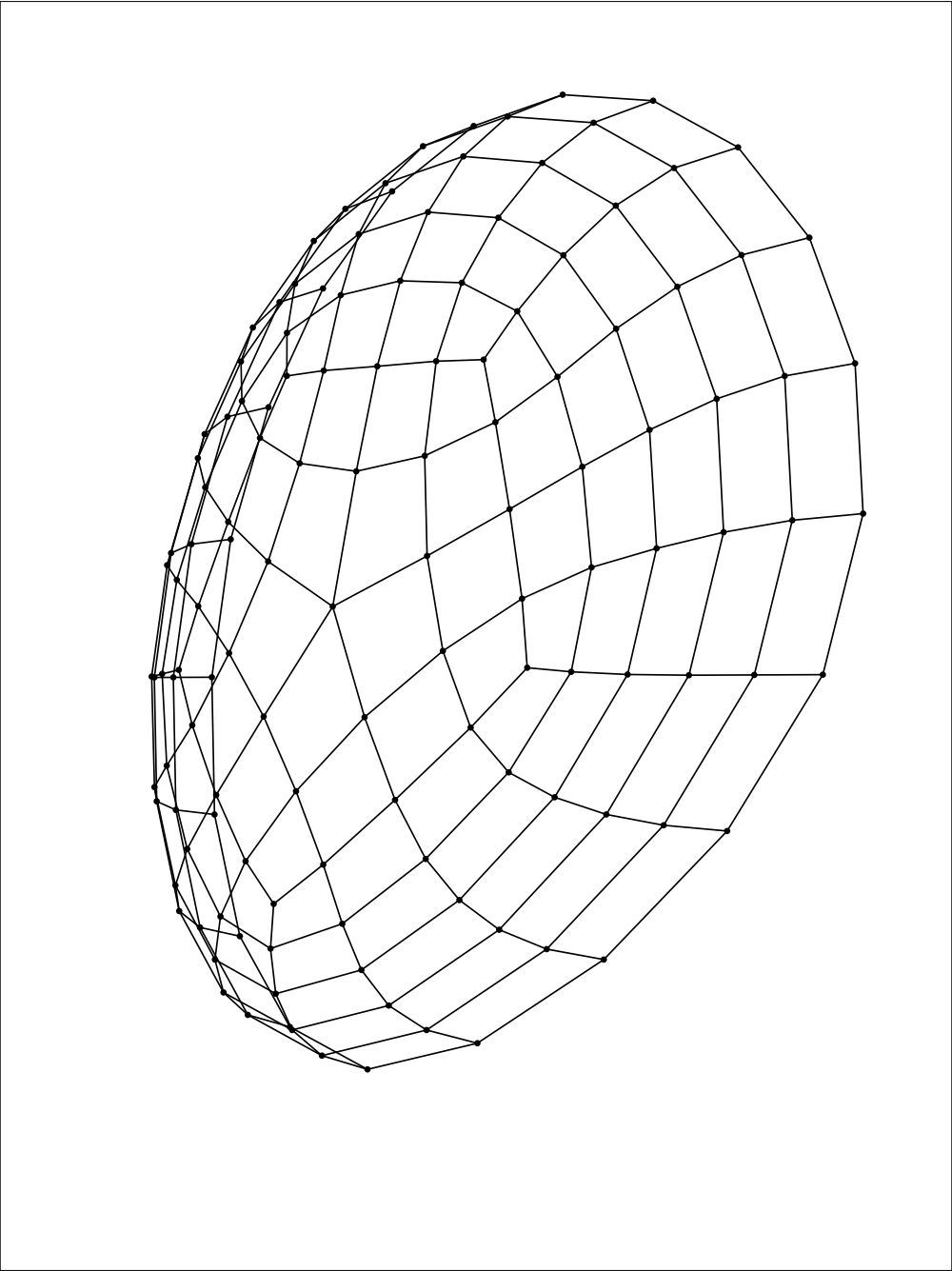
Dwa przypadki szczególne, dla $n = 2$ oraz $n = 3$, są znane odpowiednio jako algorytmy Doo-Sabina i Catmulla-Clarka. Ich opisy zostały opublikowane w 1978 r., przy czym ich oryginalne sformułowania były inne. Obecnie te algorytmy to klasyka modelowania geometrycznego i grafiki komputerowej.

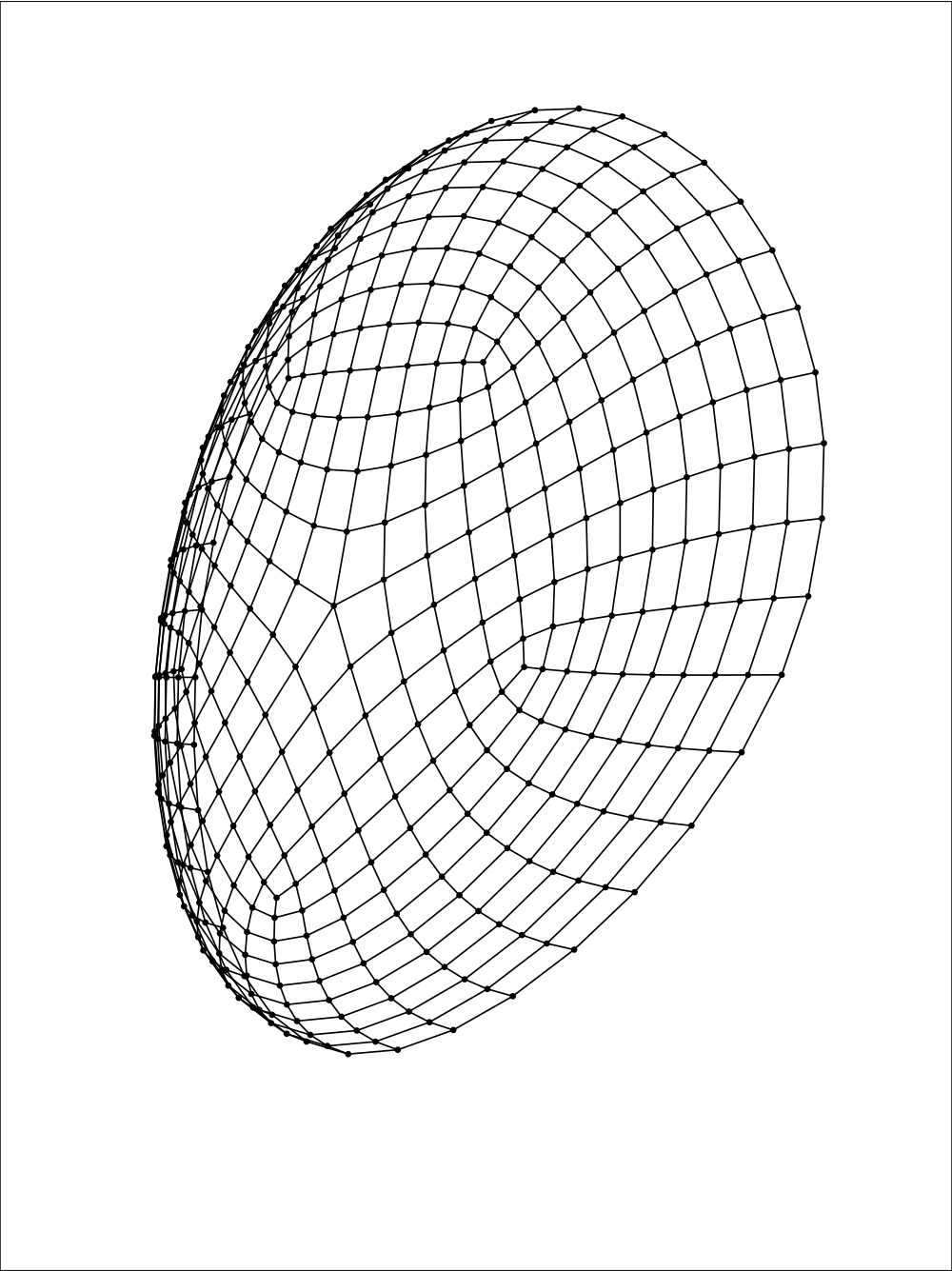










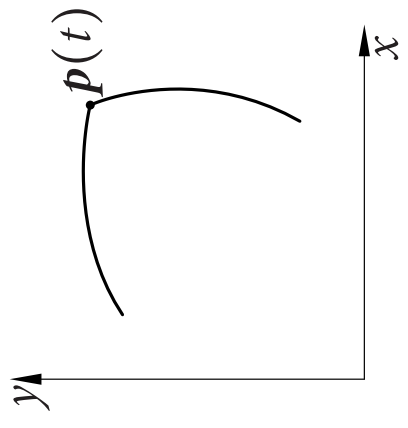
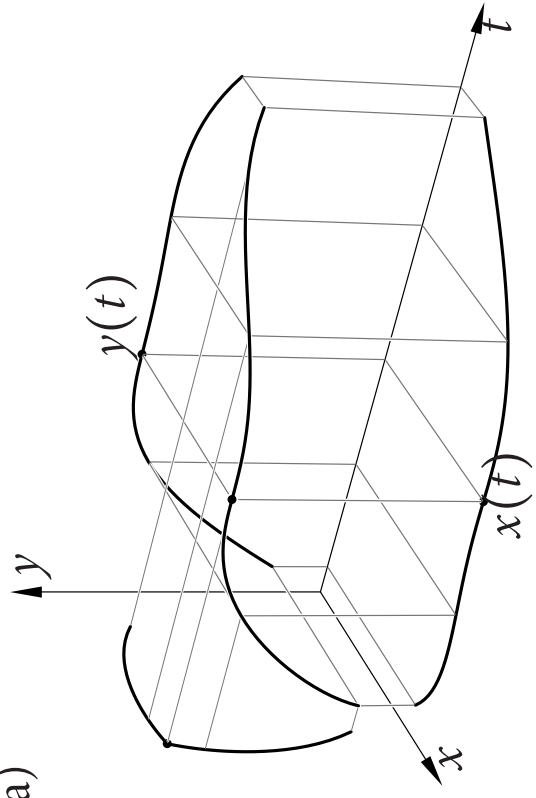


Nietrywialne jest badanie własności (kształtu) powierzchni w otoczeniu punktów specjalnych, tj. punktów, do których zbiegają ciągi elementów specjalnych w kolejnych siatkach. Problem postawiony w roku 1978 przez Doo, Sabina, Catmulla i Clarka znalazł pełne rozwiązanie w roku 1997 (H. Prautzsch). Wiąże się to z pojęciem **ciągłości geometrycznej** powierzchni — o tym będzie mowa dalej.

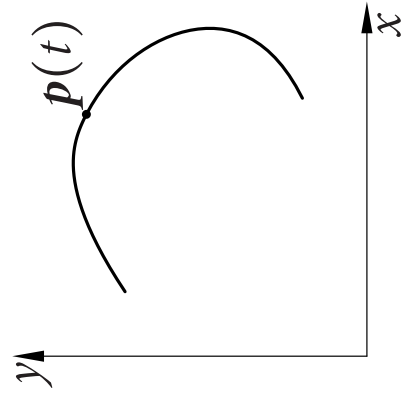
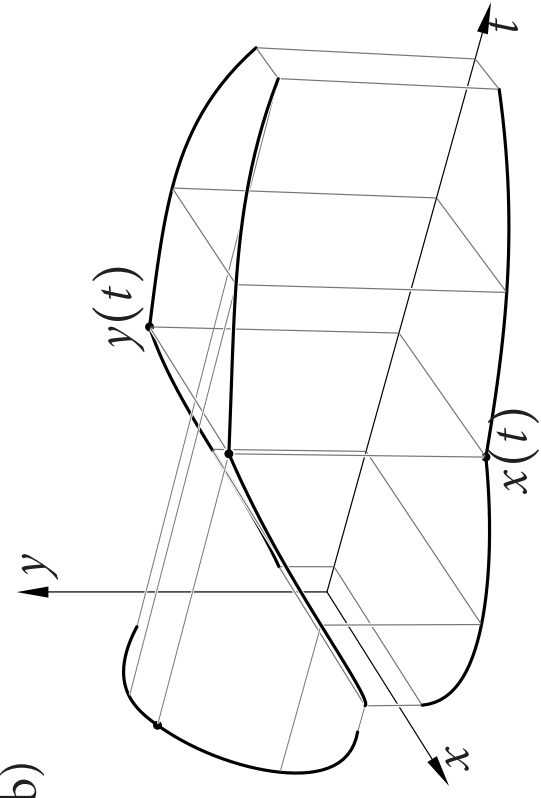
Ciągłość geometryczna krzywych

Dla krzywych i powierzchni parametrycznych wydaje się, że kształt jest tym gładszy, im więcej ciągłych pochodnych ma parametryzacja. Ale krzywa może nie być gładka, jeśli parametryzacja ma osobliwość, tj. jeśli pochodna parametryzacji jest wektorem zerowym.

a)



b)



Pojęcie ciągłości geometrycznej określa własność kształtu krzywej lub powierzchni, niezależną od reprezentacji. Daną krzywą lub powierzchnię można reprezentować za pomocą różnych parametryzacji, w tym także nieciągłych, lub w postaci niejawnej, jako zbiór miejsc zerowych pewnej funkcji, niekoniecznie gładkiej.

Definicja. Niech $n \geq 0$. Krzywa wykazuje *ciągłość geometryczną rzędu n* (albo: *jest klasy G^n*), jeśli w otoczeniu każdego jej punktu istnieje jej regularna parametryzacja klasy C^n . Regularna, tzn. o niezerowej pochodnej.

Parametryzacja, o której mowa w definicji nie musi być tą używaną do reprezentowania krzywej.

Interpretacja geometryczna jest taka:

- Krzywa klasy G^1 ma w każdym punkcie jednoznacznie określoną styczną; kierunek ruchu po krzywej ze stałą prędkością zmienia się w sposób ciągły.
- Krzywa klasy G^2 ma ponadto ciągłą krzywiznę, która jest określona przez pochodne rzędu 1 i 2.
- Krzywa klasy G^3 w przestrzeni ma ciągłe skręcenie (czyli drugą krzywiznę). Ogólnie, krzywa klasy G^m w przestrzeni n -wymiarowej dla $m \leq n$ ma ciągłe krzywizny rzędu $1, \dots, m-1$, choć warunki ciągłości tych krzywizn można osłabić — krzywa tzw. klasy F^m (o ciągłym układzie Freneta i m -pierwszej krzywiznie) nie musi być klasy G^m .

Uogólnieniem krzywych sklejanych, tj. złożonych z łuków wielomianowych połączonych z zachowaniem narzuconych warunków ciągłości połączenia pochodnych, są **krzywe geometrycznie sklepane** — złożone z łuków wielomianowych połączonych w sposób ciągły. Nie jest wymagana ciągłość połączenia pochodnych, ale ma być możliwe takie zreparametryzowanie tych łuków, aby dla każdej połączonej pary istniała odpowiednio gładka regularna parametryzacja.

Funkcje i krzywe β -sklejane

Przypomnijmy własności krzywych B-sklejanych. Dla ciągu węzłów $u_0 < \dots < u_N$ unormowane funkcje B-sklejane stopnia n są określone wzorem

$$N_i^n(t) = (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) g_{+,t}^n [u_i, \dots, u_{i+n+1}],$$

gdzie $g_{+,t}^n(u) = (\max(0, t - u))^n$ jest to tzw. obcięta funkcja potęgowa.

Za ich pomocą określa się krzywe B-sklejane stopnia n , wzorem

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t), \quad t \in [u_n, u_{N-n}].$$

Funkcje B-sklejane mają następujące własności:

- Są klasy $C^{n-1}(\mathbb{R})$.
- Są nieujemne.
- Nośnikiem funkcji N_j^n jest przedział $[u_j, u_{j+n+1}]$.
- W przedziale $[u_k, u_{k+1}]$ niezerowe są tylko funkcje N_{k-n}^n, \dots, N_k^n , które w tym przedziale są liniowo niezależnymi wielomianami stopnia n .
- W przedziale $[u_n, u_{N-n}]$ suma funkcji B-sklejanych jest równa 1.

Krzywa B-sklejana (z węzłami tworzącymi rosnący ciąg) ma zatem parametryzację klasy C^{n-1} i jeśli ta parametryzacja jest regularna (co zależy od punktów kontrolnych $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{N-n-1}$), to jest odpowiednio gładka:

- dla $n \geq 1$ kierunek stycznej zmienia się w sposób ciągły,
- dla $n \geq 2$ krzywa ma ciągłą krzywiznę,
- dla $n \geq 3$ skręcenie krzywej jest ciągłe.

W 1855r. F. Fàa di Bruno opublikował wzór opisujący pochodne złożenia dwóch funkcji gładkich jednej zmiennej: niech $f(u)$ i $g(t)$ będą funkcjami klasy C^n . Jeśli $h = g \circ f$, tj. $h(u) = g(f(u))$, to

$$\frac{d^n h}{du^n} = \sum_{k=1}^n a_{nk} \frac{d^k g}{dt^k},$$

$$\text{gdzie } a_{nk} = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = n \\ m_1, \dots, m_k > 0}} \frac{n!}{k! m_1! \dots m_k!} \frac{d^{m_1} f}{du^{m_1}} \dots \frac{d^{m_k} f}{du^{m_k}}.$$

W szczególności

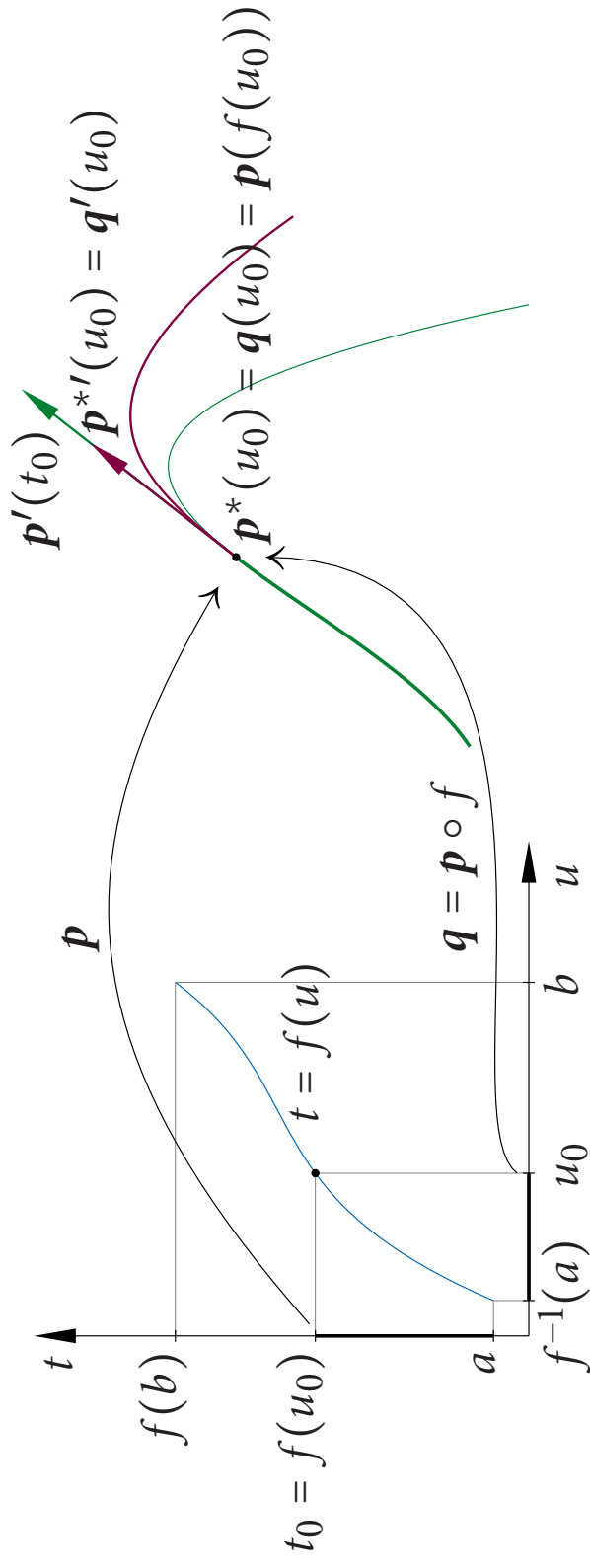
$$h' = f' g',$$

$$h'' = f'' g' + f'^2 g'',$$

$$h''' = f''' g' + 3f' f'' g'' + f'^3 g''',$$

$$h'''' = f'''' g' + (3f''^2 + 4f' f''') g'' + 6f'^2 f'' g''' + f'^4 g''''$$

itd.



Dla dwóch łuków, \mathbf{p} i \mathbf{p}^* , określamy kawałkami parametryzację

$$\mathbf{s}(u) = \begin{cases} \mathbf{p}(f(u)) & \text{dla } u \in [f^{-1}(a), u_0], \\ \mathbf{p}^*(u) & \text{dla } u \in [u_0, b]. \end{cases}$$

Mając dany łuk \mathbf{p} oraz funkcję f , możemy wyznaczyć ze wzoru Faà di Bruno pochodne złożenia $\mathbf{p} \circ f$ i narzucić na \mathbf{p}^* warunki interpolacyjne Hermite'a w punkcie u_0 .

Zależności między parametryzacjami wygodnie jest opisywać za pomocą tzw. **macierzy połączenia**; ich współczynniki są wartościami funkcji a_{nk} ze wzoru Fàa di Bruno w punkcie u_0 . Dla $r = 2$ i $r = 3$ wygląda to tak:

$$\begin{bmatrix} \underline{p}^* \\ \underline{p}^{*'} \\ \underline{p}^{*''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p}' \\ \bar{p}'' \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \underline{p}^* \\ \underline{p}^{*'} \\ \underline{p}^{*''} \\ \underline{p}^{*'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p}' \\ \bar{p}'' \\ \bar{p}''' \end{bmatrix}.$$

Podkreślenia i nadkreślenia oznaczają, odpowiednio, wartości parametryzacji i ich pochodnych w punktach u_0 i t_0 . Dla każdego k liczba β_k jest wartością pochodnej k -tego rzędu funkcji f w punkcie u_0 .

Krzywa β -sklejana stopnia n jest określona wzorem

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i P_i^n(t), \quad t \in [u_n, u_{N-n}],$$

przy czym funkcje β -sklejane stopnia n , P_i^n , są określone przez podanie rosnącego ciągu węzłów u_0, \dots, u_N i parametrów połączenia $\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,n-1}$ dla $l = 1, \dots, N-1$. Krzywą kształtujemy przez dobieranie punktów kontrolnych d_0, \dots, d_{N-n-1} , tak samo jak dla krzywej B-sklejanej.

Funkcje P_i^n są określone przez narzucenie następujących własności:

- (i) Funkcja P_i^n przyjmuje wartości niezerowe w przedziale (u_i, u_{i+n+1}) .
- (ii) W każdym przedziale $[u_l, u_{l+1}] \subset [u_i, u_{i+n+1}]$ funkcja P_i^n jest wielomianem stopnia nie większego niż n , oznaczymy go symbolem $P_{i,l}$.

(iii) Suma funkcji $P_0^n, \dots, P_{N-n-1}^n$ w przedziale $[u_n, u_{N-n}]$ jest równa 1.

(iv) Wielomiany $p_{i,l-1}$ i $p_{i,l}$, dla każdego i oraz l , spełniają następujące równanie:

$$\begin{bmatrix} p_{i,l}(u_l) \\ p'_{i,l}(u_l) \\ \vdots \\ p_{i,l}^{(n-1)}(u_l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{l,1,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{l,n-1,1} & \dots & a_{l,n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i,l-1}(u_l) \\ p'_{i,l-1}(u_l) \\ \vdots \\ p_{i,l-1}^{(n-1)}(u_l) \end{bmatrix}, \quad (\otimes)$$

czyli w skrócie $\mathbf{q}_{i,l} = C_l \mathbf{p}_{i,l-1}$; współczynniki $a_{l,j,k}$ macierzy połączenia C_l są określone przez parametry połączenia $\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,n-1}$.

Jeśli dla każdego l jest $\beta_{l,1} = 1$ oraz $\beta_{l,k} = 0$ dla $k > 1$, to funkcje P_i^n są unormowanymi funkcjami B-sklejanymi stopnia n , klasy C^{n-1} .

Najpierw podam konstrukcję funkcji β -sklejanych, a potem wykazemy, że one istnieją i są jednoznacznie określone dla prawie każdego wyboru parametrów połączenia.

Do reprezentowania wielomianu $p_{i,l}$, opisującego funkcję P_i^n w przedziale $[u_i, u_{i+1}]$ użyję „lokalnej” bazy wielomianów Bernsteina:

$$B_{k,m}^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} B_m^n(s_k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, n,$$

przy czym $t = u_k + h_k s_k$ (zatem $t \in [u_k, u_{k+1}] \Leftrightarrow s_k \in [0, 1]$).

Wielomian $p_{i,k}(t)$ równy $P_i^n(t)$ dla $t \in [u_k, u_{k+1}]$ reprezentujemy przez wektor $\mathbf{b}_{i,k} = [b_{i,k,0}, \dots, b_{i,k,n}]^T$, taki że

$$p_{i,k}(t) = b_{i,k,0} B_{k,0}^n(t) + \dots + b_{i,k,n} B_{k,n}^n(t) \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

Mając taką reprezentację funkcji β -sklejanych, możemy obliczyć punkty kontrolne reprezentacji Béziera łuków wielomianowych krzywej β -sklejanej reprezentowanej przez punkty $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{N-n-1}$. Dla $t \in [u_k, u_{k+1}]$ mamy

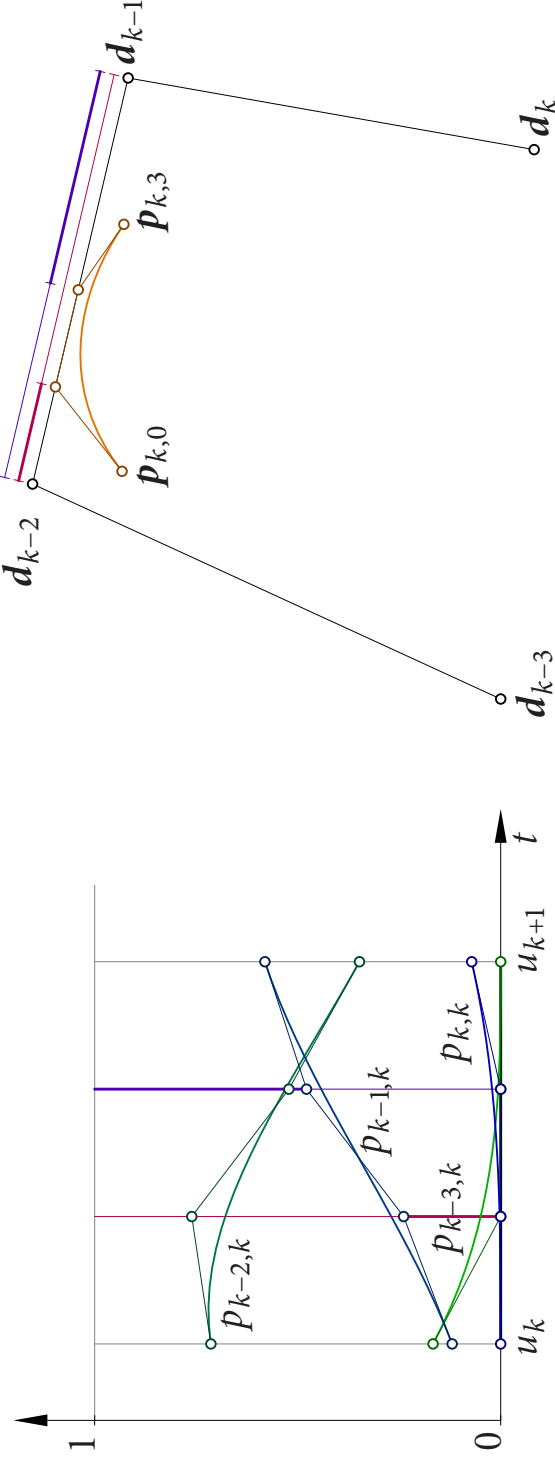
$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \sum_{i=k-n}^k \mathbf{d}_i P_{i,k}(t) = \sum_{i=k-n}^k \mathbf{d}_i \sum_{m=0}^n b_{i,k,m} B_{k,m}^n(t) \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{i=k-n}^k b_{i,k,m} \mathbf{d}_i \right) B_{k,m}^n(t) = \sum_{m=0}^n \mathbf{p}_{k,m} B_{k,m}^n(t); \end{aligned}$$

stąd $\mathbf{p}_{k,m} = \sum_{i=k-n}^k b_{i,k,m} \mathbf{d}_i$, a w zapisie macierzowym jest

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k,0} \\ \mathbf{p}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k-n,k,0} & b_{k-n+1,k,0} & \cdots & b_{k,k,0} \\ b_{k-n,k,1} & b_{k-n+1,k,1} & \cdots & b_{k,k,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k-n,k,n} & b_{k-n+1,k,n} & \cdots & b_{k,k,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k-n} \\ \mathbf{d}_{k-n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix}.$$

Chcemy więc znaleźć macierze M_k , których kolumnami są wektory $\mathbf{b}_{i,k}$.

W pierwszej i ostatniej kolumnie macierzy M_k wszystkie współczynniki oprócz jednego są równe 0. Suma współczynników w każdym wierszu jest równa 1,



Konstrukcję funkcji β -sklejanych zaczniemy od pomocniczych funkcji β -sklejanych, G_i^n . W przedziale $[u_k, u_{k+1}]$ funkcja ta jest wielomianem $g_{i,k}$, takim że

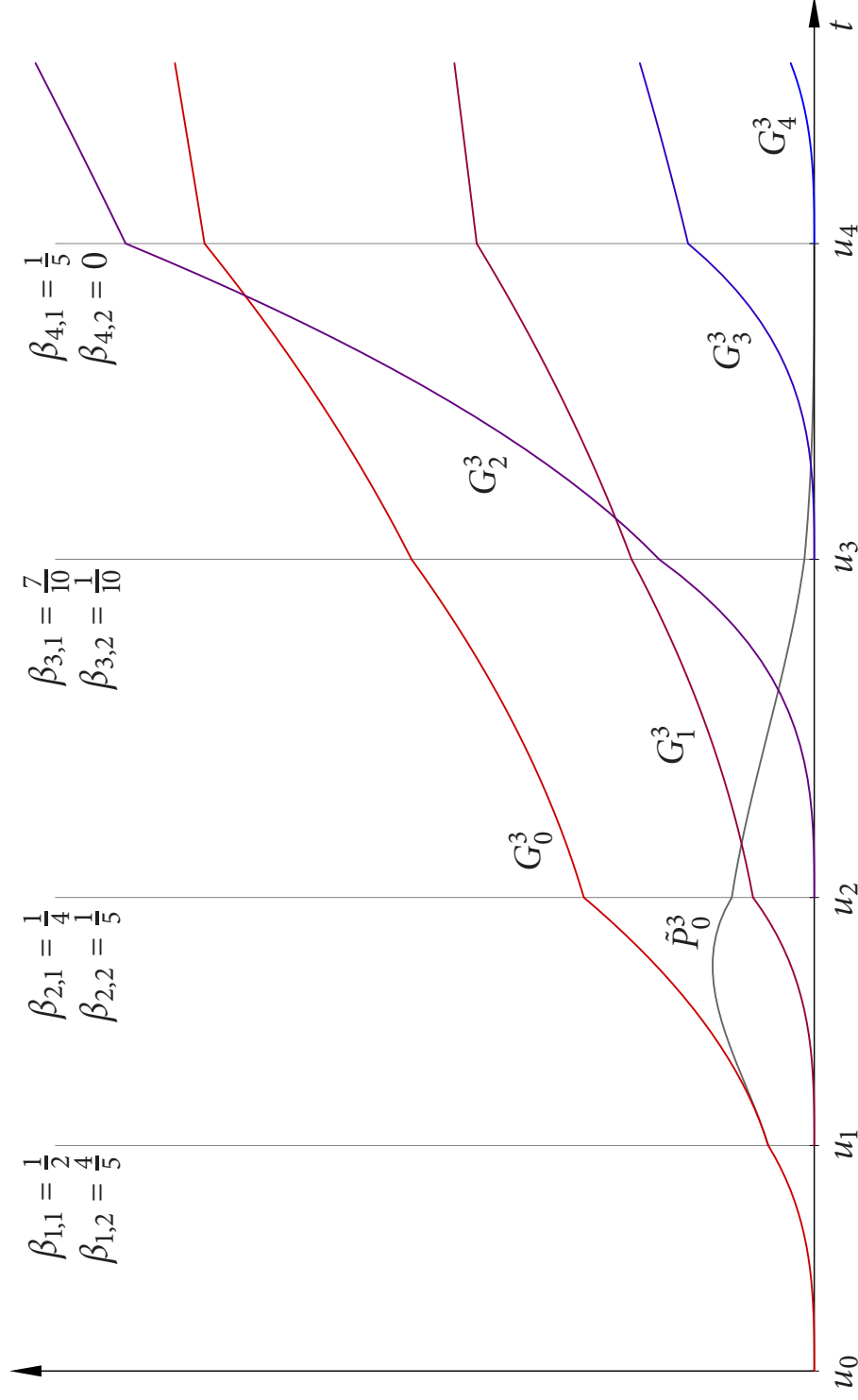
$$(i') \quad g_{i,k} = 0 \text{ dla } k < i \text{ (stąd } G_i^n(t) = 0 \text{ dla } t < u_i),$$

$$(ii') \quad g_{i,i}(t) = (t - u_i)^n,$$

(iii') jeśli $k > i$, to stopień wielomianu $g_{i,k}(t)$ jest mniejszy niż n ,

(iv') Równanie (\otimes) jest spełnione przez wielomiany $g_{i,l-1}$ i $g_{i,l}$ podstawione w miejsce $P_{i,l-1}$ i $P_{i,l}$.

Powyższe warunki definiują funkcje G_i^n jednoznacznie; funkcje te spełniają podobną rolę jak obcięta funkcja potęgowa w definicji funkcji B-sklejanych.



Funkcje G_i^n, \dots, G_{i+n}^n w przedziale $[u_{i+n+1}, u_{i+n+2}]$ są wielomianami stopnia $\leq n$, które są z urzędu liniowo zależne. Zatem istnieje niezerowa kombinacja liniowa tych funkcji, \tilde{P}_i^n , równa 0 w tym przedziale.

Okazuje się, że nośnikiem funkcji \tilde{P}_i^n jest przedział $[u_i, u_{i+n+1}]$, a więc ta funkcja jest „prawie gotową” funkcją β -sklejającą P_i^n . Brakujący do wypełnienia definicji warunek to unormowanie; trzeba będzie dobrać taki czynnik stały, aby mieć własność (iii).

Określimy dla każdego węzła u_l przekształcenie liniowe K_l , którego argumentem jest wielomian p i którego wartością jest wektor $[p(u_l), p'(u_l), \dots, p^{(n-1)}(u_l)]^T \in \mathbb{R}^n$; przekształcenie K_l obcięte do przestrzeni wielomianów stopnia mniejszego niż n jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Oznaczmy $\mathbf{p}_{i,l-1} = K_l(p_{i,l-1})$, $\mathbf{q}_{i,l} = K_l(p_{i,l})$, oraz $\mathbf{g}_{i,l-1} = K_l(g_{i,l-1})$, $\mathbf{h}_{i,l} = K_l(g_{i,l})$. Z definicji funkcji P_i^n oraz G_i^n wynika, że

$$\mathbf{q}_{i,l} = C_l \mathbf{p}_{i,l-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{h}_{i,l} = C_l \mathbf{g}_{i,l-1}.$$

Ponieważ $g_{i,i}(t) = (t - u_i)^n$, mamy

$$\mathbf{g}_{i,i} = \begin{bmatrix} g_{i,i}(u_{i+1}) \\ g'_{i,i}(u_{i+1}) \\ \vdots \\ g_{i,i}^{(n-1)}(u_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n! h_i^n}{n!} \\ \frac{n! h_i^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ \frac{n! h_i}{1!} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie $h_i = u_{i+1} - u_i$.

Określmy macierze D_l o wymiarach $n \times n$ wzorem

$$d_{l,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ h_l^{k-j} & \text{if } k \geq j, \\ \frac{h_l^{k-j}}{(k-j)!} & \text{if } k \geq j, \end{cases}$$

Macierz D_l jest trójkątna dolna z jedynkami na diagonalu. Dla dowolnego wielomianu p stopnia mniejszego niż n zachodzi równość $K_{l+1}(p) = D_l K_l(p)$; w szczególności $\mathbf{g}_{i,l} = D_l \mathbf{h}_{i,l}$ dla $l > i$.

Mając macierze połączenia C_l i macierze D_l , możemy rekurencyjnie obliczać wektory

$$\mathbf{h}_{i,l} = C_l \mathbf{g}_{i,l-1}, \quad \mathbf{g}_{i,l} = D_l \mathbf{h}_{i,l}, \quad (2)$$

reprezentujące kolejne wielomiany $g_{i,l}$ opisujące funkcję pomocniczą G_i^n .

Liniowa zależność wielomianów $g_{i,i+n+1}, \dots, g_{i+n,i+n+1}$ jest równoważna liniowej zależności wektorów $\mathbf{h}_{i,l+i+n+1}, \dots, \mathbf{h}_{i+n,i+n+1}$. Ponieważ macierz C_{i+n+1} jest nieosobliwa, również wektory $\mathbf{g}_{i,l+n}, \dots, \mathbf{g}_{i+n,i+n}$ są liniowo zależne:

$$\sum_{j=0}^n a_j \mathbf{g}_{i+j,j+n+1} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^n a_j \mathbf{g}_{i+j,i+n} = \mathbf{0}.$$

Umożliwia to znalezienie funkcji \tilde{P}_i^n przez rozwiązanie układu równań liniowych

$$A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{g}_{i,i+n} \quad (3)$$

z macierzą $A_i = [\mathbf{g}_{i+1,i+n}, \dots, \mathbf{g}_{i+n,i+n}]$.

Mając rozwiązanie $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T$, możemy otrzymać funkcję

$$\tilde{P}_i^n = G_i^n - (x_{i1}G_{i+1}^n + \dots + x_{in}G_{i+n}^n)$$

reprezentowaną przez wielomiany

$$\tilde{P}_{i,i} = g_{i,i},$$

$$\tilde{P}_{i,i+k} = g_{i,i+k} - (x_{i1}g_{i+1,i+k} + \dots + x_{ik}g_{i+k,i+k}), \quad k = 1, \dots, n,$$

opisujące \tilde{P}_i^n w przedziałach $[u_i, u_{i+1}], \dots, [u_{i+n}, u_{i+n+1}]$.

Mając wielomiany $\tilde{P}_{i,i}, \dots, \tilde{P}_{i,i+n}$, znajdziemy czynnik normalizacyjny c_i , taki że $P_i^n = c_i \tilde{P}_i^n$. Z definicji funkcji β -sklejanych suma $S_i = P_i^n + \dots + P_{i+n}^n$ w przedziale $[u_{i+n}, u_{i+n+1}]$ jest równa 1. Obliczając sumy wektorów przyporządkowanych przez przekształcenie K_{i+n} odpowiednim wielomianom, dostaniemy

$$\mathbf{t}_{i,i+n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=i}^{i+n} \mathbf{P}_{j,i+n-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{s}_{i,i+n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=i}^{i+n} \mathbf{q}_{j,i+n}.$$

Wielomian $P_{i+n,i+n-1}$ jest zerowy, zatem $\mathbf{q}_{i+n,i+n} = C_{i+n} \mathbf{P}_{i+n,i+n-1} = \mathbf{0}$, dzięki czemu ostatni składnik każdej z powyższych sum możemy pominąć. Określone wyżej wektory spełniają równość

$$\mathbf{s}_{i,i+n} = C_{i+n} \mathbf{t}_{i,i+n}.$$

Łatwo jest sprawdzić, że $\mathbf{s}_{i,i+n} = \mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$, a ponieważ pierwsza kolumna macierzy C_{i+n} jest pierwszą kolumną macierzy jednostkowej, także $\mathbf{t}_{i,i+n} = \mathbf{e}_1$.

Wielomiany $p_{i+1,k}, \dots, p_{i+n,k}$ są kombinacjami liniowymi wielomianów $g_{i+1,k}, \dots, g_{i+n,k}$ i $p_{i,i+n} = c_i \tilde{p}_{i,i+n}$, zatem istnieją liczby $\gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}$, takie że

$$s_{i,i+n} = c_i \tilde{q}_{i,i+n} + \sum_{j=i+1}^{i+n-1} \gamma_{i,j-i+1} h_{j,i+n},$$

$$t_{i,i+n} = c_i \tilde{p}_{i,i+n-1} + \sum_{j=i+1}^{i+n-1} \gamma_{i,j-i+1} g_{j,i+n-1}.$$

Ostatni wzór pozwala zapisać równość $t_{i,i+n} = e_1$ jako układ równań liniowych

$$B_i y_i = e_1, \tag{4}$$

z macierzą $B_i = [\tilde{p}_{i,i+n-1}, g_{i+1,i+n-1}, \dots, g_{i+n,i+n-1}]$ o wymiarach $n \times n$.

Do wektorów $\mathbf{g}_{i,k} \in \mathbb{R}^n$ możemy dołączyć $n +$ pierwszą współrzędną, równą pochodnej rzędu n w punkcie u_{k+1} ; dla każdego $t \in \mathbb{R}$ jest $g_{i,i}^{(n)}(t) = n!$ oraz $g_{i,k}^{(n)} = 0$ dla $i \neq k$. Tak otrzymane wektory $\hat{\mathbf{g}}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n+1}$ reprezentują jednoznacznie wielomiany $g_{i,k}$, których stopień nie przewyższa n . Obliczając następnie wektory

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_{i,i} &= c_i \hat{\mathbf{g}}_{i,i}, \\ \hat{\mathbf{p}}_{i,i+k} &= c_i (\hat{\mathbf{g}}_{i,i+k} - (x_i \hat{\mathbf{g}}_{i+1,i+k} + \dots + x_{ik} \hat{\mathbf{g}}_{i+k,i+k})), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

otrzymujemy pełną reprezentację wielomianów $p_{i,i}, \dots, p_{i,i+n}$.

Ostatni krok konstrukcji to znalezienie docelowej reprezentacji wielomianów reprezentujących funkcje β -sklejane i utworzenie macierzy M_n, \dots, M_{N-n-1} . Przejście od (przesuniętej i przeskalowanej) bazy potęgowej do („lokalnej”) bazy wielomianów Bernsteina polega na rozwiązaniu zadania interpolacji Hermite’a dla tej bazy, przez rozwiązanie układu równań liniowych

$$E\mathbf{b}_{i,l} = F_l \hat{\mathbf{P}}_{i,l}, \quad (6)$$

z macierzami E i F_l o wymiarach $(n+1) \times (n+1)$, których współczynniki są takie:

$$e_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{dla } j < k, \\ (-1)^{n-k} \binom{j-1}{n+1-j-k} & \text{dla } j \geq k, \end{cases}$$

$$f_{l,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \frac{(n+1-j)!}{n!} h_l^{j-1} & \text{dla } j = k. \end{cases}$$

Na przykład dla $n = 3$ jest

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1^3/6 \end{bmatrix}.$$

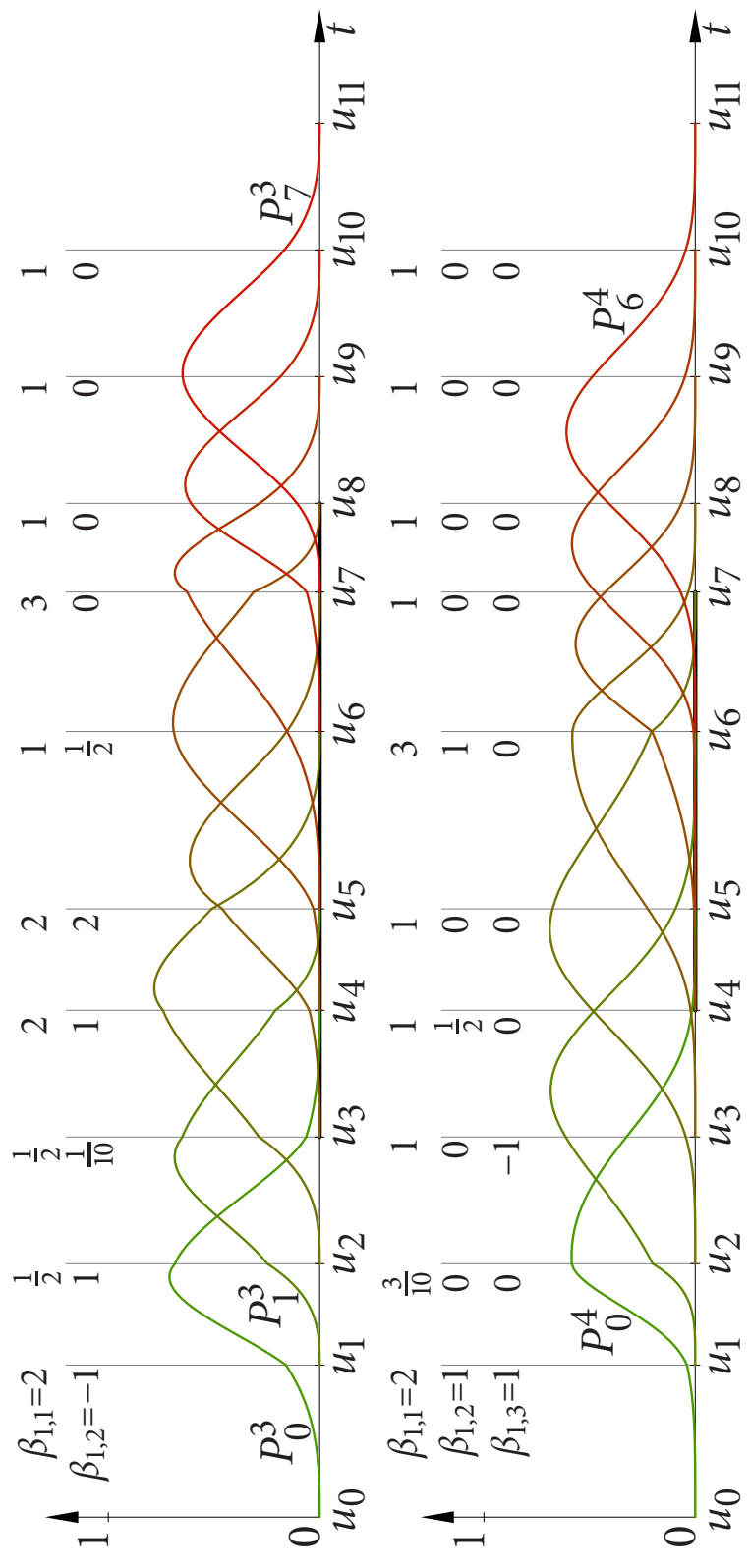
Macierz E jest (dla każdego n) trójkątna i nieosobliwa.

Algorytm:

Dane: stopień n , węzły $u_0 < \dots < u_N$, parametry $\beta_{i,j}$ dla $i = 1, \dots, N - 1$,
 $j = 1, \dots, n - 1$

1. Dla $k = 1, \dots, N - 1$ oblicz macierze C_k i D_k .
 2. Dla $i = 0, \dots, N - 2$ skonstruuj wektory $\mathbf{g}_{i,i}$ ze wzoru (1).
 3. Dla $i = 0, \dots, N - 3$, $j = 1, \dots, n - 1$, $i + j < N$ oblicz wektory $\mathbf{g}_{i,i+j}$ z (2).
 4. Dla $i = 0, \dots, N - n - 1$
 - 4.1. Utwórz macierz A_i i oblicz wektor \mathbf{x}_i , rozwiązując układ (3),
 - 4.2. Utwórz macierz B_i i oblicz c_i , rozwiązując układ (4),
 - 4.3. Dla $k = \max\{i, n\}, \dots, \min\{i + n, N - n - 1\}$ oblicz wektor $\hat{\mathbf{p}}_{i,k}$ za pomocą (5), rozwiąż układ (6), aby znaleźć wektor $\mathbf{b}_{i,k}$, i zapisz go jako kolumnę macierzy M_k .
-

Wynik: współczynniki $b_{i,k,m}$ wielomianów $p_{i,k}$, zapisane w kolumnach macierzy M_k



Algorytm ma dwa potencjalnie zawodne kroki: może się okazać, że układy równań (3) i (4) są nieokreślone lub sprzeczne. Trzeba to zbadać.

Najpierw przykłady. Niech $n = 3$ i niech $u_i = i$ dla $i = 0, \dots, N$. Biorąc $\beta_{l,1} = 1$ i $\beta_{l,2} = 0$ dla każdego l , otrzymamy macierz C_l jednostkową 3×3 oraz nieosobliwe macierze (takie same dla każdego i)

$$A_i = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 1 \\ 15 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Funkcje β -sklejane są w tym przypadku zwykłymi unormowanymi funkcjami B-sklejanymi trzeciego stopnia z węzłami równoodległymi.

Jeśli przyjmujemy te same węzły i $\beta_{l,1} = 1$ i $\beta_{l,2} = -4$ dla każdego l , to dostaniemy

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{i,i+n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

Wprowadzie układ (3) jest niesprzeczny, ale to nie jest żadna pocięcha.

Ustalmy n i rosnący ciąg węzłów, u_0, \dots, u_N . Niech β oznacza wektor z $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$, którego współrzędne są parametrami połączeń $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N-1,n-1}$. Chcemy znaleźć opis zbioru $S \subset \mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$, takiego że jeśli $\beta \in S$, to pewna macierz A_i lub B_i jest osobliwa.

Twierdzenie. *Funkcja, która wektorowi parametrów połączenia β przyporządkowuje jednoznacznie określoną rodzinę funkcji β -sklejanych jest określona w $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)} \setminus S$; zbiór S jest rozmiatością algebraiczną, której wnętrze jest zbiorem pustym.*

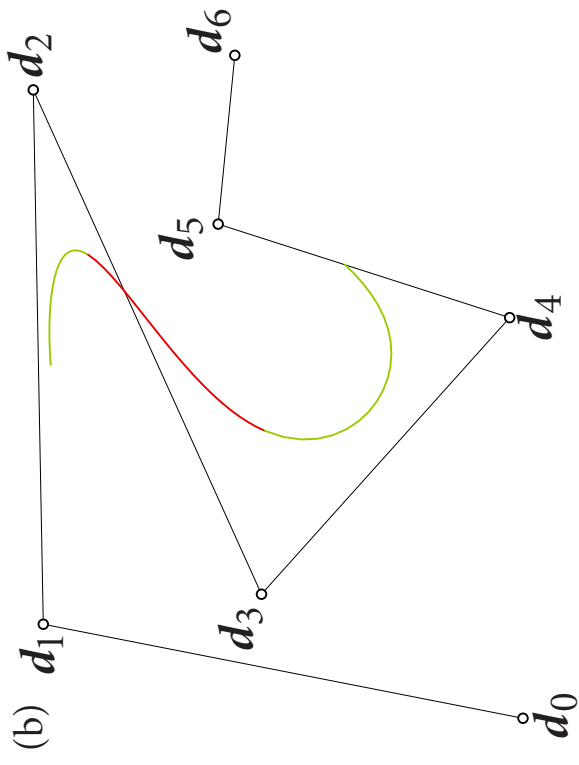
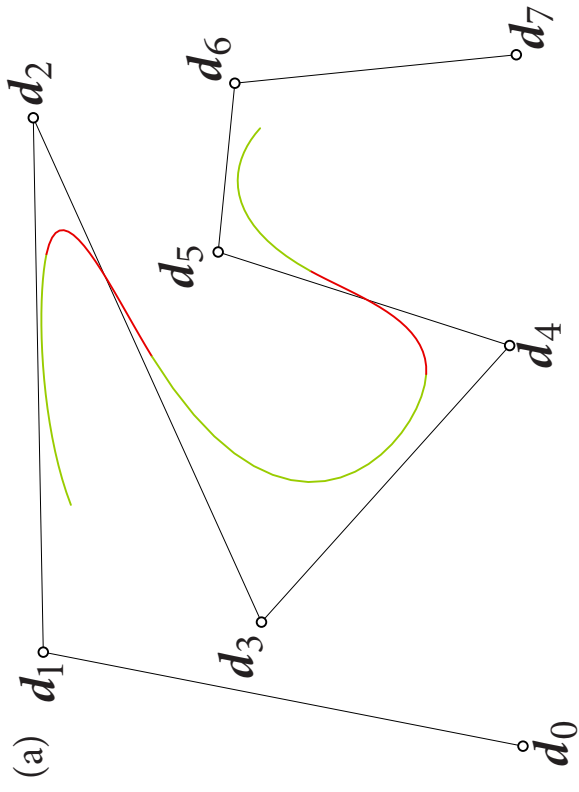
Dowód. Jednoznacznie określona funkcja \tilde{P}_i^n istnieje, jeśli wielomiany $g_{i+1,i+n+1}, \dots, g_{i+n,i+n+1}$ są liniowo niezależne; wtedy kolumny macierzy A_i są liniowo niezależne i macierz ta jest nieosobliwa. Podobnie, normalizacja jest wykonalna, jeśli wielomiany $\tilde{P}_{i,i+n}, \dots, \tilde{P}_{i+n,i+n}$, które opisują funkcje $\tilde{P}_i^n, \dots, \tilde{P}_{i+n}^n$ w przedziale $[u_{i+n}, u_{i+n+1}]$ są liniowo niezależne. Wtedy tworzą one bazę przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej n i funkcja stała równa 1 jest ich jednoznaczłą kombinacją liniową.

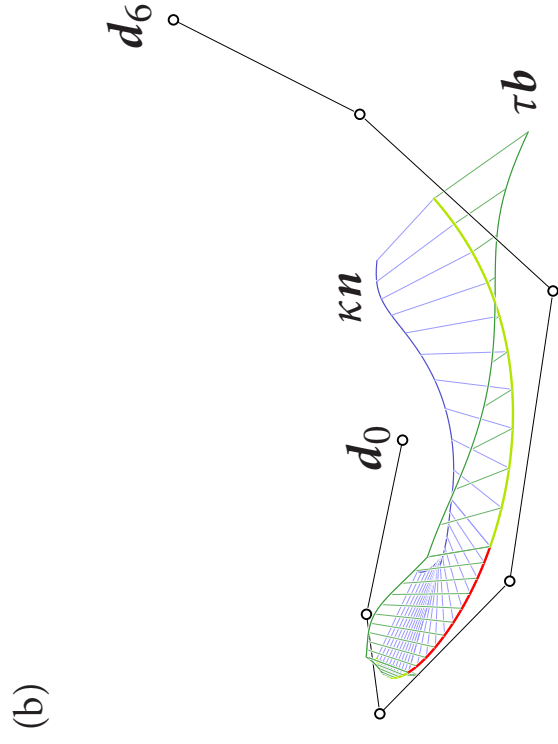
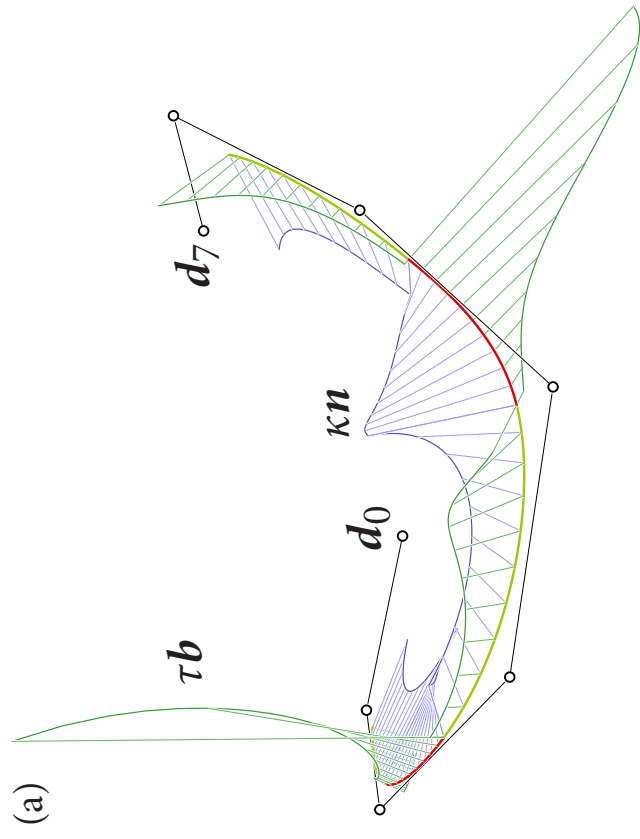
Wszystkie wielomiany $g_{i,l}$ zależą od parametrów połączenia w sposób ciągły. Co więcej, współczynniki macierzy A_i zależą w sposób ciągły od tych parametrów (są ich wielomianami). Zapisując rozwiązanie układu (3) przy użyciu wzorów Cramera, zauważamy, że współrzędne rozwiązania układu (3) są wymiernymi funkcjami parametrów połączenia.

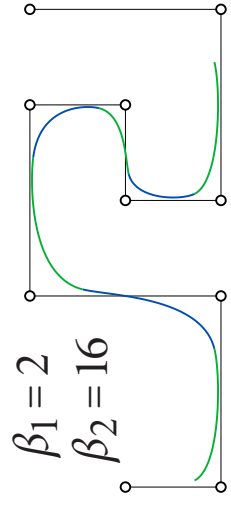
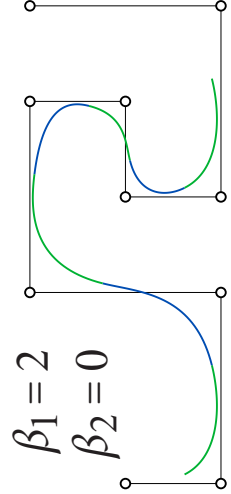
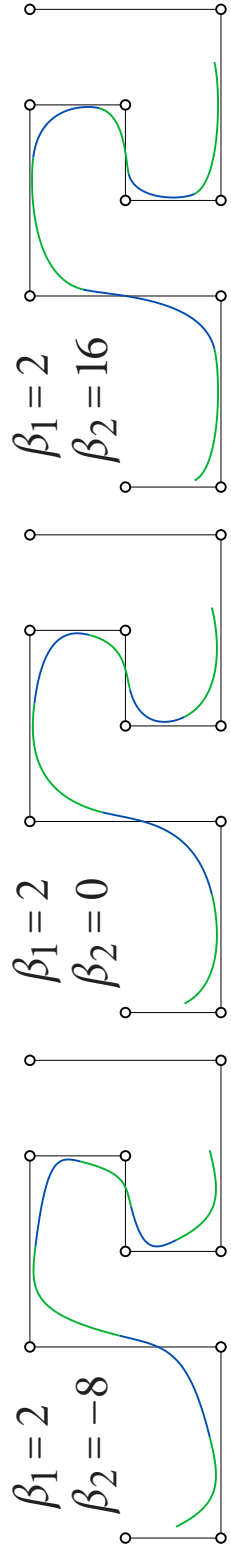
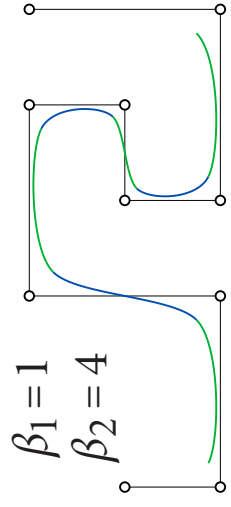
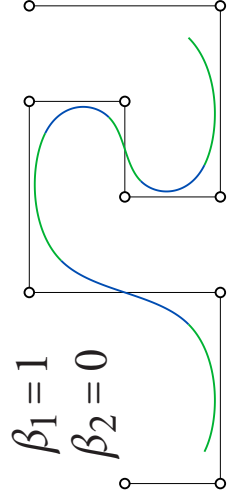
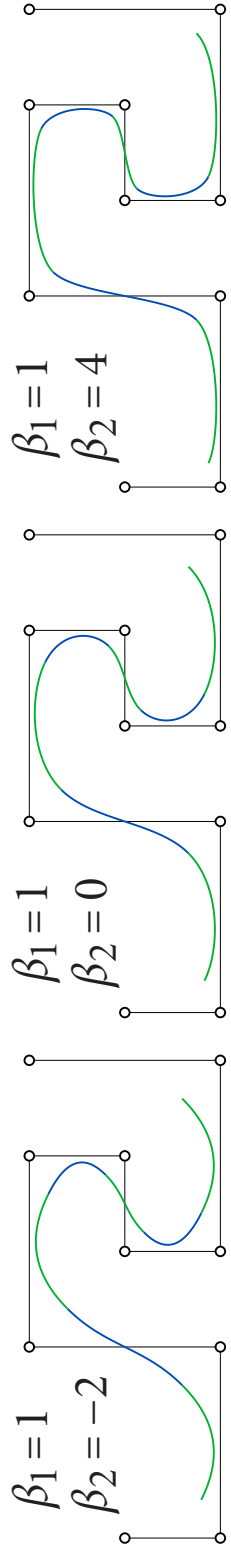
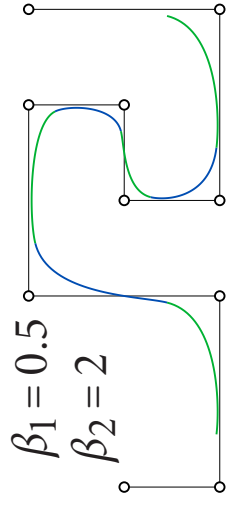
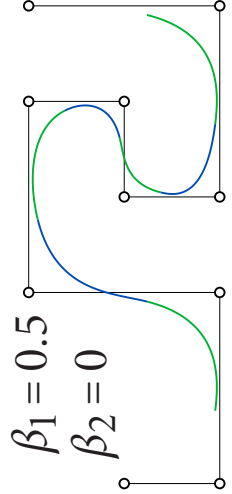
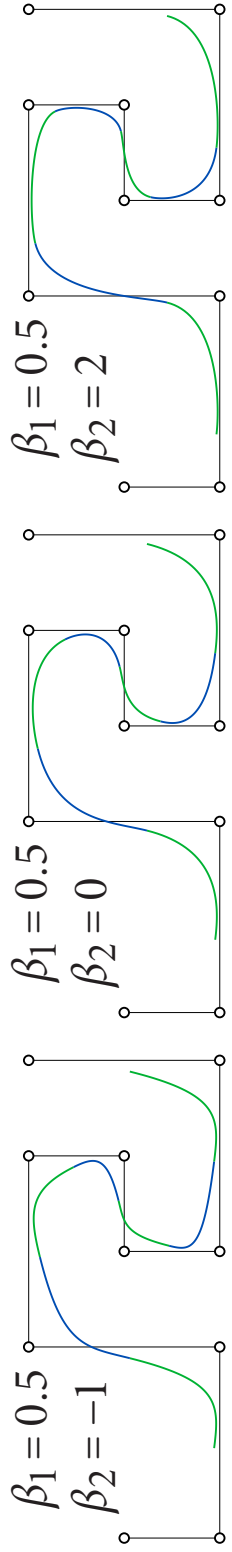
Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną. Zatem współczynniki macierzy B_i w układach równań (4) są również funkcjami wymiernymi parametrów połączenia $\beta_{l,k}$. Niech $R(\beta)$ będzie funkcją, której wartością jest iloczynem wyznaczników wszystkich macierzy A_i i B_i ; jest to funkcja wymierna, czyli iloraz wielomianów parametrów połączenia, cokolwiek monstrualnego stopnia. Rodzina funkcji β -sklejanych odpowiadająca pewnemu układowi parametrów połączenia nie istnieje, jeśli licznik lub mianownik funkcji R jest równy 0.

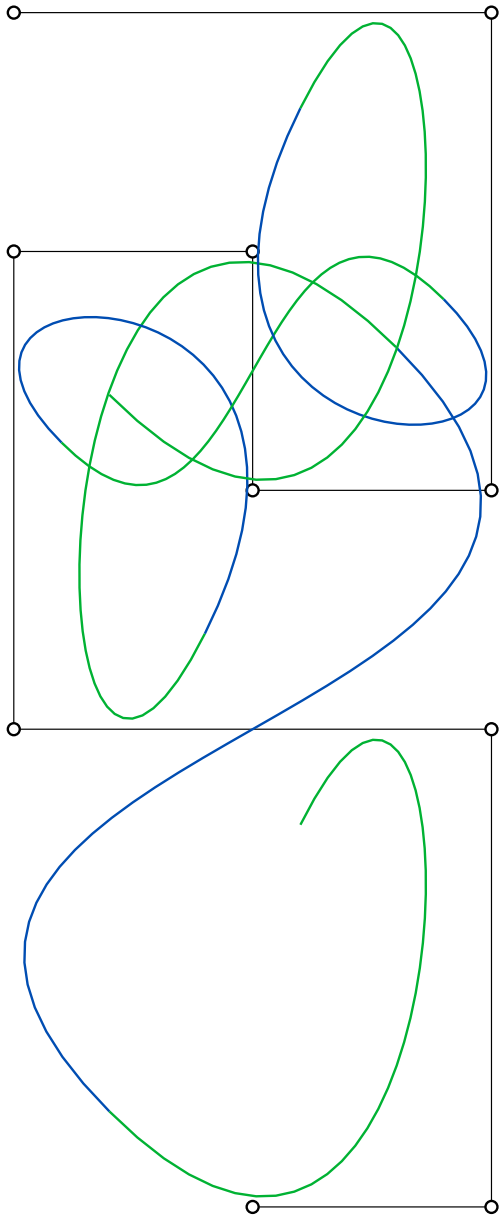
Wiemy, że jeśli parametry połączenia są dobrane tak, aby macierze C_l były macierzą jednostkową, to odpowiednia rodzina funkcji β -sklejanych istnieje; jest to rodzina funkcji B-sklejanych klasy C^{n-1} . Odpowiedni wektor β *nie* jest elementem zbioru S , który jest sumą zbiorów miejsc zerowych licznika i mianownika funkcji R . Stąd $S \neq \mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$.

Jeśli zatem $\beta_0 \notin S$ (istnieje taki punkt w $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$) oraz $\beta_1 \in S$, to funkcja $r(t) = R((1-t)\beta_0 + t\beta_1)$ jest niezerową wymierną funkcją jednej zmiennej; jej licznik i mianownik mają tylko skończenie wiele miejsc zerowych. Wynika stąd, że dla każdego punktu $\beta_0 \notin S$ istnieje jego otoczenie rozłączne z S , a więc zbiór $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)} \setminus S$ jest otwarty. Zbiór S jest zatem rozmiernością algebraiczną, która nie zawiera żadnej kuli. Czyli jego wnętrze jest zbiorem pustym. \square









$$\beta_1 = 1, \beta_2 = -9.5$$

Mając daną krzywą β -sklejaną z węzłami u_0, \dots, u_N , parametrami połączenia $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N-1,n-1}$ i punktami kontrolnymi d_0, \dots, d_{N-n-1} , znajdziemy reprezentację tej samej krzywej z jednym węzłem dodatkowym, $\hat{u}_{k+1} \in (u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n}]$.

Po wstawieniu otrzymamy rosnący ciąg węzłów, $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N+1}$. Jest oczywiste, że parametry połączenia nowej reprezentacji krzywej są takie: $\hat{\beta}_{l,j} = \beta_{l,j}$ jeśli $l \leq k$, $\hat{\beta}_{l,j} = \beta_{l-1,j}$ jeśli $l > k + 1$, oraz $\hat{\beta}_{k+1,1} = 1$ i $\hat{\beta}_{k+1,j} = 0$ dla $j = 2, \dots, n - 1$. Parametryzacja krzywej musi zostać niezmieniona.

Rozważmy funkcję $\tilde{P}_i^n(t)$, która w przedziale $[u_i, u_{i+1}]$ jest równa $(t - u_i)^n$; jest $P_i^n = c_i \tilde{P}_i^n$, z czynnikiem normalizacyjnym c_i otrzymanym przez rozwiązanie układu (4). Dla funkcji β -sklejanych, z których składa się baza dla nowej reprezentacji, jest $\hat{P}_i^n = \hat{c}_i \tilde{P}_i^n$. Jeśli $i \in \{k - n, \dots, k\}$, to \tilde{P}_i^n jest kombinacją liniową

$$\tilde{P}_i^n = \tilde{P}_i^n + b_i \tilde{P}_{i+1}^n$$

dla pewnego $b_i \in \mathbb{R}$. Czynniki, przy \tilde{P}_i^n jest równy 1, bo obcięcie obu funkcji, \tilde{P}_i^n i \tilde{P}_{i+1}^n , do $[\hat{u}_i, \hat{u}_{i+1}]$ jest tym samym wielomianem $(t - u_i)^n$. Stąd

$$P_i^n = \frac{c_i}{\hat{c}_i} \hat{P}_i^n + \frac{c_{i+1} b_i}{\hat{c}_{i+1}} \hat{P}_{i+1}^n \quad \text{oraz} \quad P_{i-1}^n = \frac{c_{i-1}}{\hat{c}_{i-1}} \hat{P}_{i-1}^n + \frac{c_i b_{i-1}}{\hat{c}_i} \hat{P}_i^n.$$

Z własności $\sum_{i=k-n}^k P_i^n(t) = 1 = \sum_{i=k-n}^{k+1} \hat{P}_i^n(t)$ dla każdego $t \in [u_k, u_{k+1}]$ wynika, że

$$\frac{c_i b_{i-1}}{\hat{c}_i} + \frac{c_i}{\hat{c}_i} = 1; \quad \text{stąd} \quad P_i^n = \alpha_i \hat{P}_i^n + (1 - \alpha_{i+1}) \hat{P}_{i+1}^n,$$

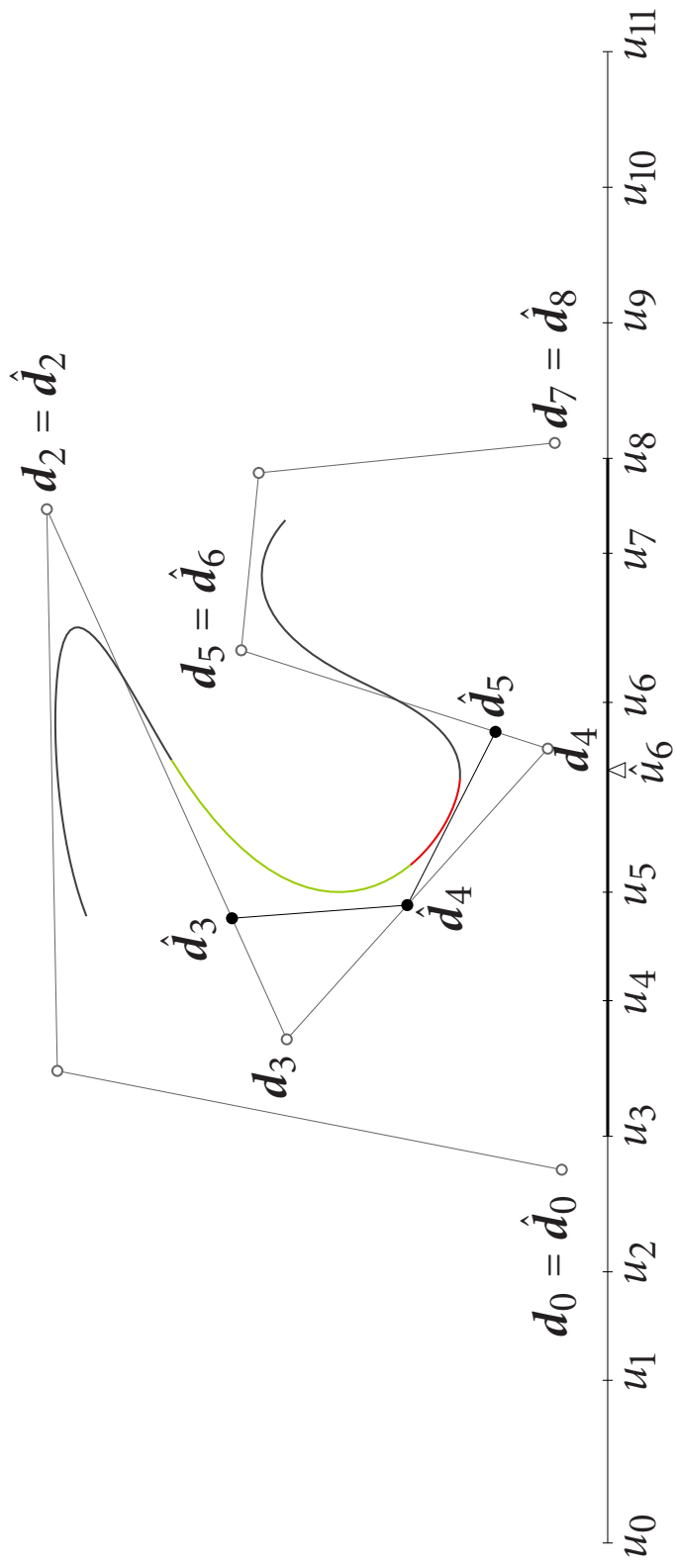
gdzie $\alpha_i = c_i / \hat{c}_i$. Dla $i \leq k - n$ mamy $\alpha_i = 1$ i jeśli $i > k$, to $\alpha_i = 0$.

Końcowy rachunek jest taki:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{d}_i \hat{P}_i^n = \sum_{i=0}^{N-n-1} \mathbf{d}_i (\alpha_i \hat{P}_i^n + (1 - \alpha_{i+1}) \hat{P}_{i+1}^n) \\
 &= \sum_{i=0}^{N-n-1} \alpha_i \mathbf{d}_i \hat{P}_i^n + \sum_{i=1}^{N-n} (1 - \alpha_i) \mathbf{d}_{i-1} \hat{P}_i^n = \sum_{i=0}^{N-n} ((1 - \alpha_i) \mathbf{d}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{d}_i) \hat{P}_i^n.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{d}}_i &= \mathbf{d}_i && \text{dla } i \leq k - n, \\
 \hat{\mathbf{d}}_i &= \left(1 - \frac{c_i}{\hat{c}_i}\right) \mathbf{d}_{i-1} + \frac{c_i}{\hat{c}_i} \mathbf{d}_i && \text{dla } i = k - n + 1, \dots, k, \\
 \hat{\mathbf{d}}_i &= \mathbf{d}_{i-1} && \text{dla } i > k.
 \end{aligned}$$



Płaty Coonsa

Konstrukcje opracowane w 1967 r. przez S. Coonsa służy do otrzymania płatów powierzchni o zadanych brzegach.

Płat dwuliniowy (*bilinearly blended Coons patch*) jest określony przez cztery krzywe brzegowe, $\mathbf{c}_{00}(u)$, $\mathbf{c}_{10}(u)$, $\mathbf{d}_{00}(v)$ i $\mathbf{d}_{10}(v)$. Zakładamy, że parametry u , v tych krzywych przebiegają przedział $[0, 1]$, a ponadto krzywe te są połączone w krzywą zamkniętą, czyli

$$\mathbf{c}_{00}(0) = \mathbf{d}_{00}(0), \quad \mathbf{c}_{00}(1) = \mathbf{d}_{10}(0), \quad \mathbf{c}_{10}(0) = \mathbf{d}_{00}(1), \quad \mathbf{c}_{10}(1) = \mathbf{d}_{10}(1).$$

Wspólne końce tych krzywych są narożnikami konstruowanego płata.

Ustawmy krzywe w macierze $C(u) = [c_{00}(u), c_{10}(u)]$,
 $D(v) = [d_{00}(v), d_{10}(v)]$. Oznaczmy też macierz

$$P = \begin{bmatrix} c_{00}(0) & c_{10}(0) \\ c_{00}(1) & c_{10}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00}(0) & d_{10}(0) \\ d_{00}(1) & d_{10}(1) \end{bmatrix}.$$

Funkcje mieszające w tym przypadku są wielomianami stopnia 1:

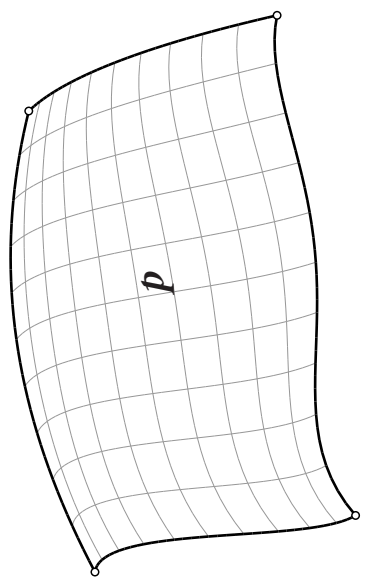
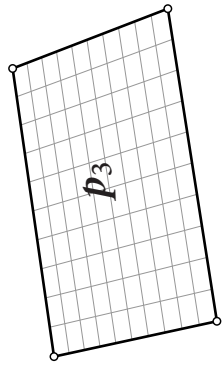
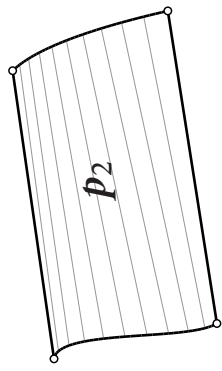
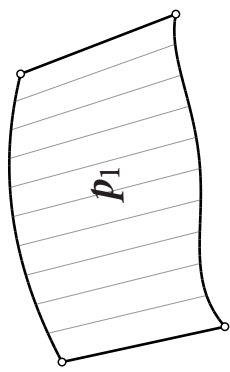
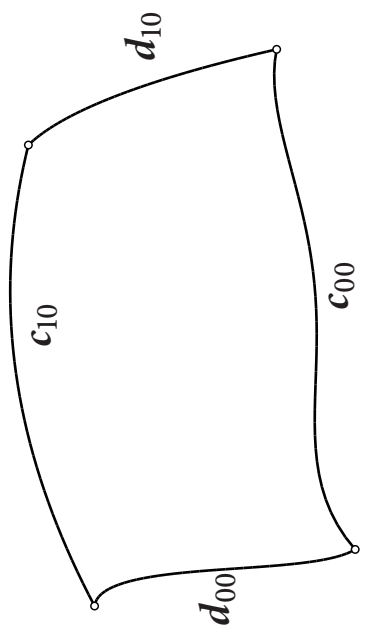
$$H_{00}(t) = t, H_{10}(t) = 1 - t. \text{ Niech } H(t) = [H_{00}(t), H_{10}(t)].$$

Określmy płaty

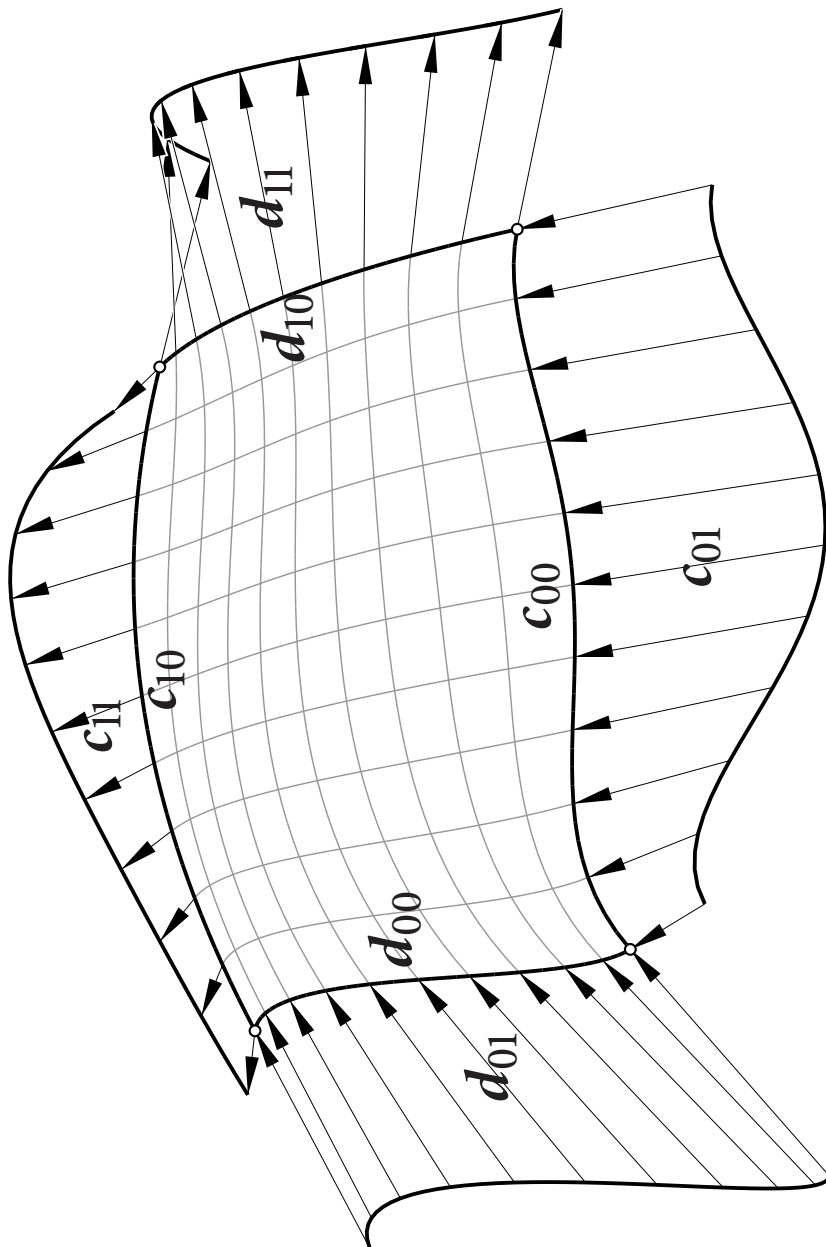
$$\mathbf{p}_1(u, v) = C(u)H(v)^T, \quad \mathbf{p}_2(u, v) = H(u)D(v)^T, \\ \mathbf{p}_3(u, v) = H(u)PH(v)^T.$$

Dwuliniowy płat Coonsa jest określony wzorem

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}_1(u, v) + \mathbf{p}_2(u, v) - \mathbf{p}_3(u, v).$$



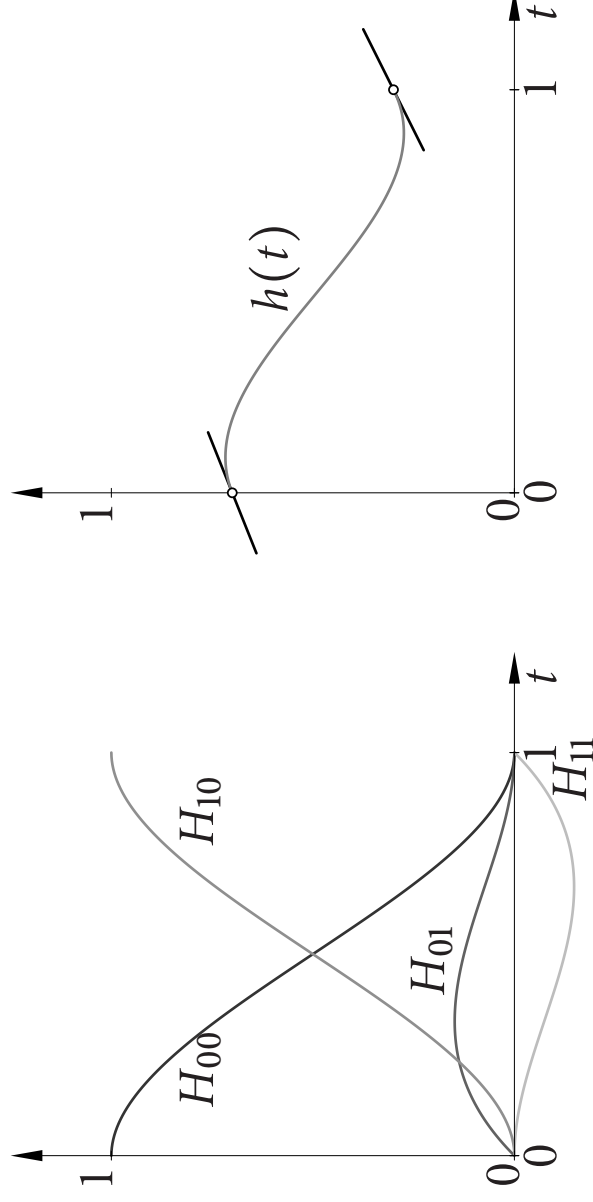
Jeśli dana jest siatka przecinających się krzywych, której „oczka” mają być wypełnione płatkami, to wprawdzie wypełnienie będzie szczelne, ale na wspólnych krzywych między płatkami dwuliniowymi wystąpią nieciągłości płaszczyzny stycznej. Aby otrzymać powierzchnię gładką, można skonstruować bikubiczne płyty Coonsa (*bicubically blended Coons patches*). Oprócz czterech krzywych brzegowych trzeba podać jeszcze cztery funkcje wektorowe opisujące pochodne cząstkowe w kierunku poprzecznym do brzegu (*cross derivatives*), $c_{01}(u)$, $c_{11}(u)$, $d_{01}(v)$, $d_{11}(v)$.



Funkcje mieszające w konstrukcji płata bikubicznego są wielomianami stopnia 3:

$$H_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad H_{10}(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$H_{01}(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad H_{11}(t) = t^3 - t^2.$$



Za ich pomocą łatwo jest rozwiązać zadanie interpolacyjne Hermite'a dla dwóch węzłów, 0 i 1, o krotności 2.

Podane krzywe muszą być takie, aby macierz

$$P = \begin{bmatrix} c_{00}(0) & c_{10}(0) & c_{01}(0) & c_{11}(0) \\ c_{00}(1) & c_{10}(1) & c_{01}(1) & c_{11}(1) \\ c'_{00}(0) & c'_{10}(0) & c'_{01}(0) & c'_{11}(0) \\ c'_{00}(1) & c'_{10}(1) & c'_{01}(1) & c'_{11}(1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} d_{00}(0) & d_{00}(1) & d'_{00}(0) & d'_{00}(1) \\ d_{10}(0) & d_{10}(1) & d'_{10}(0) & d'_{10}(1) \\ d_{01}(0) & d_{01}(1) & d'_{01}(0) & d'_{01}(1) \\ d_{11}(0) & d_{11}(1) & d'_{11}(0) & d'_{11}(1) \end{bmatrix}$$

istniała. Równości wektorów w odpowiednich miejscach tej macierzy to tzw. **warunki zgodności**. W szczególności wektory na przecięciu ostatnich dwóch kolumn i wierszy będą pochodnymi mieszanymi konstruowanego płata w jego narożnikach.

Za pomocą macierzy P oraz macierzy

$$C(u) = [c_{00}(u), c_{10}(u), c_{01}(u), c_{11}(u)],$$

$$D(v) = [d_{00}(v), d_{10}(v), d_{01}(v), d_{11}(v)],$$

$$H(t) = [H_{00}(t), H_{10}(t), H_{01}(t), H_{11}(t)]$$

możemy definicję bikubicznego płyta Coonsa zapisać wzorem

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}_1(u, v) + \mathbf{p}_2(u, v) - \mathbf{p}_3(u, v),$$

w którym

$$\mathbf{p}_1(u, v) = C(u)H(v)^T, \quad \mathbf{p}_2(u, v) = H(u)D(v)^T,$$

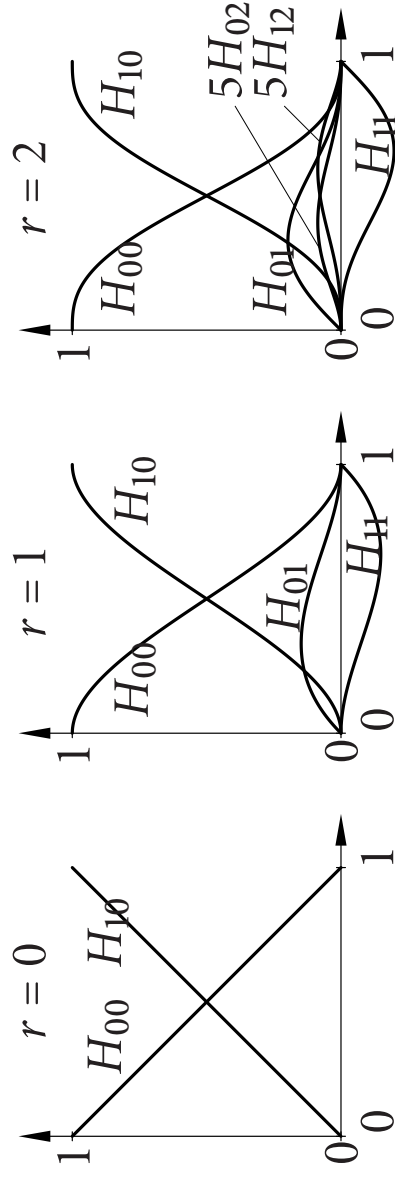
$$\mathbf{p}_3(u, v) = H(u)PH(v)^T.$$

Zasadę konstrukcji płatów Coonsa można stosować do osiągnięcia interpolacji pochodnych poprzecznych rzędu wyższego niż 1 — dla pochodnych rzędu $1, \dots, r$ trzeba użyć jako funkcji mieszających wielomianów stopnia $2r + 1$. Na przykład dla $r = 2$ użyteczne są wielomiany stopnia 5:

$$H_{00}(t) = (6t^2 + 3t + 1)(1 - t)^3, \quad H_{10}(t) = t^3(6t^2 - 15t + 10),$$

$$H_{01}(t) = (3t^2 + t)(1 - t)^3, \quad H_{11}(t) = t^3(1 - t)(3t - 4),$$

$$H_{02}(t) = \frac{1}{2}t^2(1 - t)^3, \quad H_{12}(t) = \frac{1}{2}t^3(1 - t)^2.$$



Użycie dwupiętnych płatów Coonsa (*biquintically blended Coons patches*) umożliwia łączenie płatów z zachowaniem ciągłości krzywizny, ale konstrukcja jest jeszcze bardziej kłopotliwa z powodu konieczności spełnienia dalszych warunków zgodności przez krzywe będące podstawą konstrukcji.

Jeśli krzywe opisujące brzeg i pochodne poprzeczne rzędu $1, \dots, r$ są krzywymi wielomianowymi stopnia co najwyżej $2r + 1$ (czyli takiego, jak stopień wielomianów użytych jako funkcje mieszające), to wszystkie trzy płaty, \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 i \mathbf{p}_3 są identyczne: $\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{p}_1(u, v) = \mathbf{p}_2(u, v) = \mathbf{p}_3(u, v)$. Same krzywe są określone przez podanie punktów końcowych (odpowiadających parametrom 0 i 1) oraz pochodne rzędu $1, \dots, r$.

Jeśli krzywe określające płat Coonsa są wielomianowe, różnych stopni, to można znaleźć reprezentację Béziera płata. W tym celu stopnie krzywych $\mathbf{c}_{00}, \dots, \mathbf{c}_{0r}, \mathbf{c}_{1r}$ trzeba wyrównać (tj. dokonać takiego podwyższenia stopnia niektórych z nich, aby wszystkie stopnie były równe i większe lub równe $2r + 1$), to samo zrobić z krzywymi $\mathbf{d}_{00}, \mathbf{d}_{10}, \dots, \mathbf{d}_{0r}, \mathbf{d}_{1r}$, a następnie przedstawić wielomiany H_{00}, \dots, H_{0r} w bazach Bernsteina odpowiednich stopni. Można zacząć od przedstawienia np.

$$H_{00}(t) = (6t^2 + 3t + 1)(1 - t)^3 = B_0^5(t) + B_1^5(t) + B_2^5(t),$$

$$H_{01}(t) = (3t^2 + t)(1 - t)^3 = \frac{1}{5}B_1^5(t) + \frac{2}{5}B_2^5(t) \quad \text{itd.}$$

i dokonać odpowiedniego podwyższenia stopnia tej reprezentacji. Sposób mnożenia np. $C(u)H(v)^T$ jest oczywisty.

Ciągłość geometryczna powierzchni

Związek własności analitycznych parametryzacji powierzchni z jej kształtem jest równie niejednoznaczny, jak dla krzywych. Gładkość parametryzacji *nie gwarantuje* gładkości powierzchni, a gładka powierzchnia może być złożona z kawałków, których parametryzacje nie sklejają się gładko. Dla otrzymania powierzchni gładkiej, na parametryzację trzeba nałożyć warunek regularności.

Definicja. *Niech $n \geq 0$. Powierzchnia wykazuje ciągłość geometryczną rzędu n (albo: jest klasy G^n), jeśli w otoczeniu każdego jej punktu istnieje jej regularna parametryzacja klasy C^n . Regularna, czyli taka, której pochodne cząstkowe są wektorami liniowo niezależnymi.*

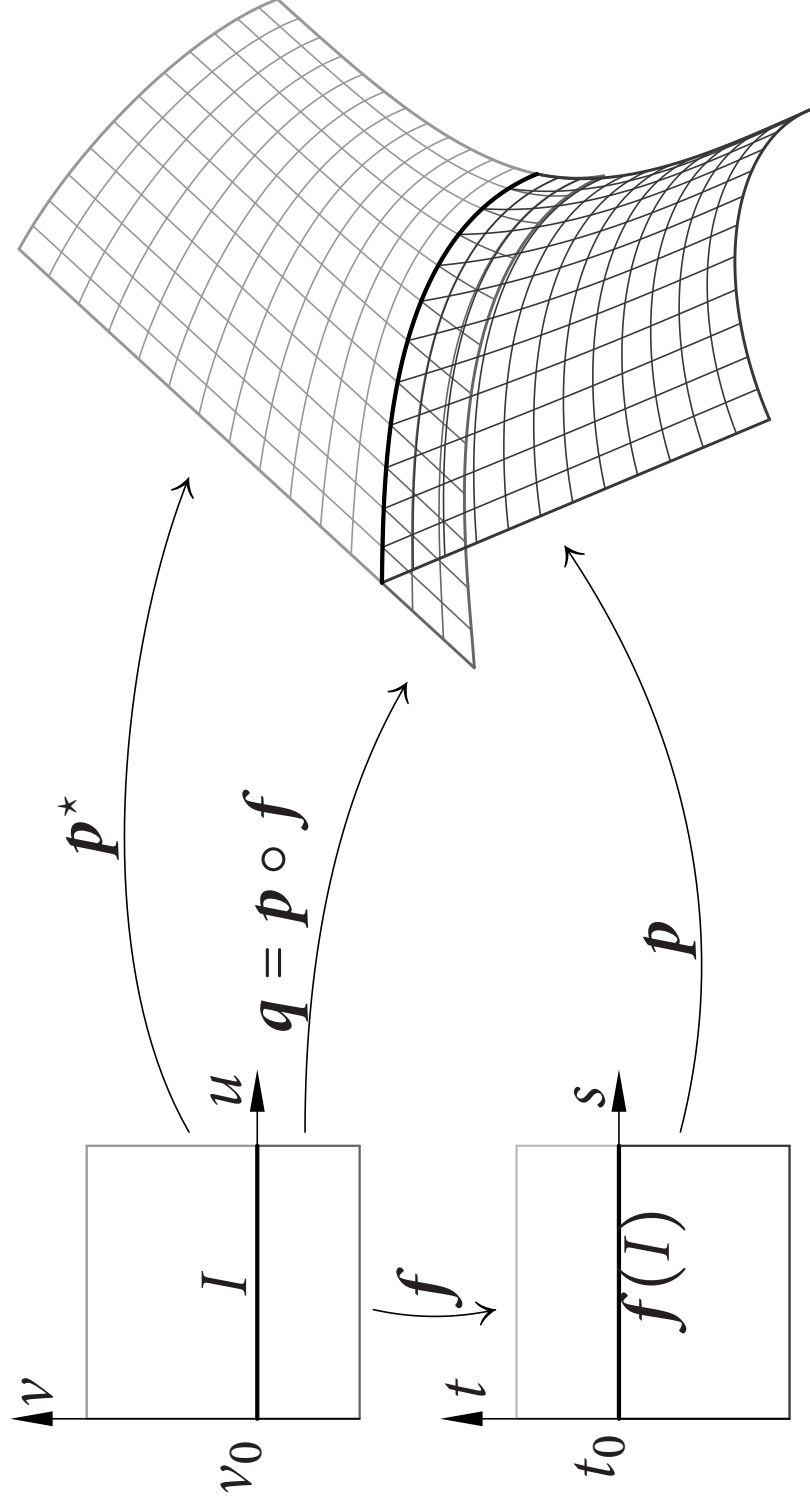
Parametryzacja, o której mowa w definicji, może nie mieć nic wspólnego z parametryzacjami używanymi do reprezentowania poszczególnych kawałków powierzchni.

Interpretacja geometryczna:

- Powierzchnia klasy G^1 ma w każdym punkcie określoną płaszczyznę styczną i wektor normalny. Poruszając się po powierzchni, obserwujemy ciągłe zmiany kierunku wektora normalnego.
- Powierzchnia klasy G^2 ma ponadto tę własność, że każdy jej przekrój płaszczyzną, która nie jest do tej powierzchni styczna, jest krzywą o ciągłej krzywiznie.
- Interpretacja ciągłości geometrycznych wyższych rzędów jest mniej oczywista, a zastosowania, w których taka gładkość byłaby wymagana, są bardzo rzadkie.

W praktyce powierzchnie gładkie są zbudowane z płatów wielomianowych lub wymiernych o regularnych parametryzacjach — zatem płaty te są klasy G^∞ . W zastosowaniach potrzebne są jednak powierzchnie gładkie, których topologia wyklucza lub bardzo utrudnia sparametryzowanie „w całości”, a zatem pojawia się problem łączenia płatów parametrycznych tak, aby zapewnić *istnienie* odpowiednio gładkiej i regularnej parametryzacji w otoczeniu *każdego* punktu wspólnych krzywych brzegowych połączonych płatów.

Konstrukcja powierzchni gładkiej jest redukowana do następującego problemu: mając dany jeden płat, należy skonstruować drugi tak, aby miał z tym pierwszym wspólną krzywą brzegową i aby można było skonstruować wspólną parametryzację tych płatów regularną i odpowiednio gładką.



Dany płat, \mathbf{p} , poddamy reparametryzacji, za pomocą funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Przyjmujemy, że krzywa brzegowa i pochodne poprzeczne płata \mathbf{p}^* są takie, jak krzywa brzegowa i pochodne płata \mathbf{q} .

Pochodne cząstkowe dowolnego rzędu złożenia gładkich funkcji wektorowych opisuje uogólniony wzór Fàa di Bruno, podany w 1980 r. przez Constantine'a i Savitsa. Jest on zbyt skomplikowany, aby był praktyczny. Jego przypadek szczególny (potrzebny w zastosowaniu do konstrukcji połączeń płatów), opisujący pochodne ze względu na tylko jedną zmienną, też jest niepraktyczny.

Mianowicie, dla $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest

$$\frac{\partial^j}{\partial v^j} \mathbf{h}(u, v) = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k a_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \mathbf{g}(s, t),$$

$$a_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_l > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \frac{\partial^{m_1} s}{\partial v^{m_1}} \dots \frac{\partial^{m_h} s \partial^{m_{h+1}} t}{\partial v^{m_h} \partial v^{m_{h+1}}} \dots \frac{\partial^{m_k} t}{\partial v^{m_k}}.$$

Sumowanie w wyrażeniu a_{jkh} przebiega po wszystkich ciągach k liczb dodatnich, których suma jest równa j .

Przyjmijmy umowę, że nadkreślenie symbolu \mathbf{p} oznacza obcięcie parametryzacji \mathbf{p} do brzegu dziedziny, odpowiadającego rozpatrywanej krzywej brzegowej, dla ustalenia uwagi $t = t_0$; to samo dotyczy pochodnych cząstkowych parametryzacji \mathbf{p} . Z kolei podkreślenie symbolu \mathbf{p}^* oznacza obcięcie parametryzacji konstruowanego płata do tego brzegu jego dziedziny, który odpowiada tejże krzywej — tu jest to odcinek I prostej $\nu = \nu_0$.

Założymy, że $f(u, \nu_0) = (s, t_0)$, przy czym jeśli $\nu = \nu_0$, to dla każdego u jest $s = u$.

Wartości funkcji f mają dwie współrzędne, s, t . Obcinając ich pochodne względem ν do prostej $\nu = \nu_0$, otrzymamy funkcje skalarne s_1, \dots, s_n oraz t_1, \dots, t_n .

Twierdzenie 5 Warunkiem koniecznym i dostatecznym ciągłości G^n połączenia gładkich regularnych płatów parametrycznych \mathbf{p} i \mathbf{p}^* mających wspólny brzeg $\underline{\mathbf{p}}^* = \overline{\mathbf{p}}$ jest spełnienie, dla $j = 1, \dots, n$, równań

$$\frac{\partial^j}{\partial v^j} \underline{\mathbf{p}}^*(u, v) = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k a_{jkh}(u) \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \overline{\mathbf{p}}(s, t),$$

$$a_{jkh}(u) = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_l > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \times$$

$$\times s_{m_1}(u) \dots s_{m_h}(u) t_{m_{h+1}}(u) \dots t_{m_k}(u),$$

przez pewne funkcje s_1, \dots, s_n i t_1, \dots, t_n zmiennej u , przy czym znak funkcji t_1 ma być dodatni, aby uniknąć zagięcia powierzchni wzdłuż wspólnej krzywej płatów.

Funkcje $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ nazwiemy funkcjami połączenia.

Dowód. Mając funkcje s_1, \dots, s_n i t_1, \dots, t_n , możemy skonstruować funkcje

$$s(u, v) = u + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} s_k(u) (v - v_0)^k, \quad t(u, v) = t_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} t_k (v - v_0)^k$$

i określić za ich pomocą wektorową funkcję f . Równania podane w twierdzeniu otrzymamy, obliczając pochodne funkcji $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ f$ z uogólnionego wzoru Fàa di Bruno i przyrównując ich obciążenia do odcinka I do odpowiednich pochodnych parametryzacji \mathbf{p}^* . \square

W konstrukcjach powierzchni klasy G^1 i G^2 wystarczą wzory

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{p}}_v^* &= s_1 \bar{\mathbf{p}}_s + t_1 \bar{\mathbf{p}}_t, \\ \underline{\mathbf{p}}_{vv}^* &= s_2 \bar{\mathbf{p}}_s + t_2 \bar{\mathbf{p}}_t + s_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{\mathbf{p}}_{st} + t_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt}.\end{aligned}$$

Możemy rozpatrywać także połączenia płatów wymiernych reprezentowanych przez płaty jednorodne, \mathbf{P} i \mathbf{P}^* . Wtedy, oprócz dokonania reparametryzacji płata \mathbf{P} , możemy go pomnożyć przez dowolną gładką i różną od zera funkcję $r(u, v)$, otrzymując płat

$$\mathbf{Q}(u, v) = r(u, v) \mathbf{P}(s(u, v), t(u, v)).$$

Analogiczne twierdzenie, podające równania ciągłości geometrycznej połączenia, pominę, podam tylko wzory dla $n = 1$ i $n = 2$.

Mamy tu trzy rodziny funkcji połączenia, funkcje r_i są obciążeniami pochodnych funkcji $r(u, v)$.

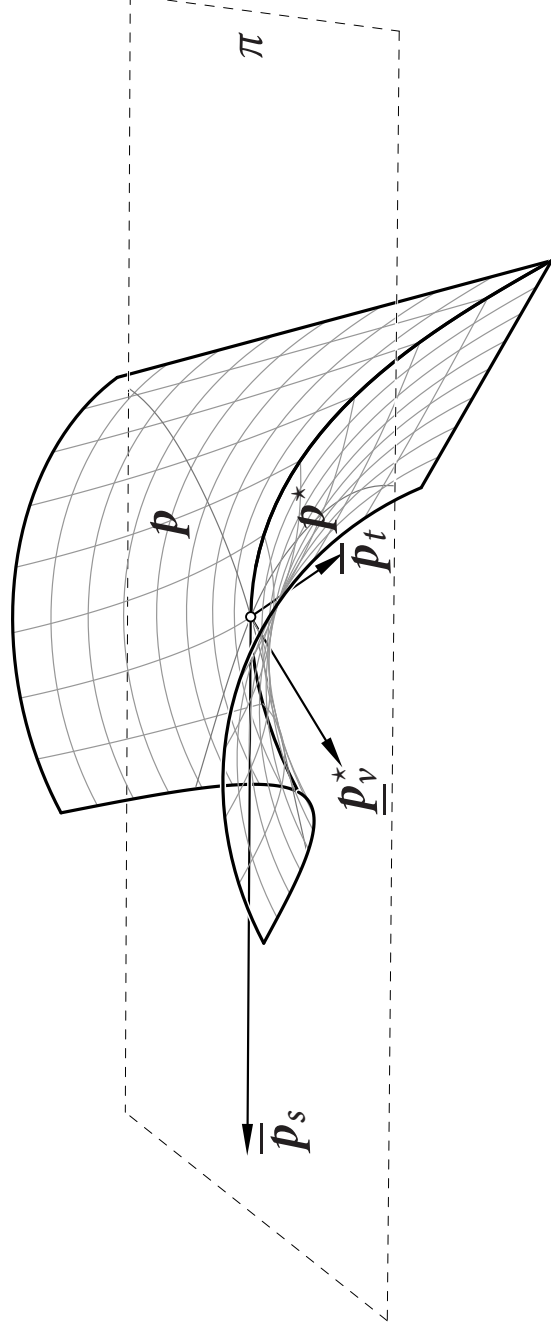
$$\begin{aligned}\underline{P}^* &= r_0 \bar{P}, \\ \underline{P}_{\nu}^* &= r_1 \bar{P} + r_0 s_1 \bar{P}_s + r_0 t_1 \bar{P}_t, \\ \underline{P}_{\nu\nu}^* &= r_2 \bar{P} + (r_0 s_2 + 2r_1 s_1) \bar{P}_s + (r_0 t_2 + 2r_1 t_1) \bar{P}_t + \\ &\quad r_0 s_1^2 \bar{P}_{ss} + 2r_0 s_1 t_1 \bar{P}_{st} + r_0 t_1^2 \bar{P}_{tt}.\end{aligned}$$

Jeśli nie potrzebujemy konstruować połączenia klasy G^3 , to ostatni wzór można przedstawić w prostszej postaci

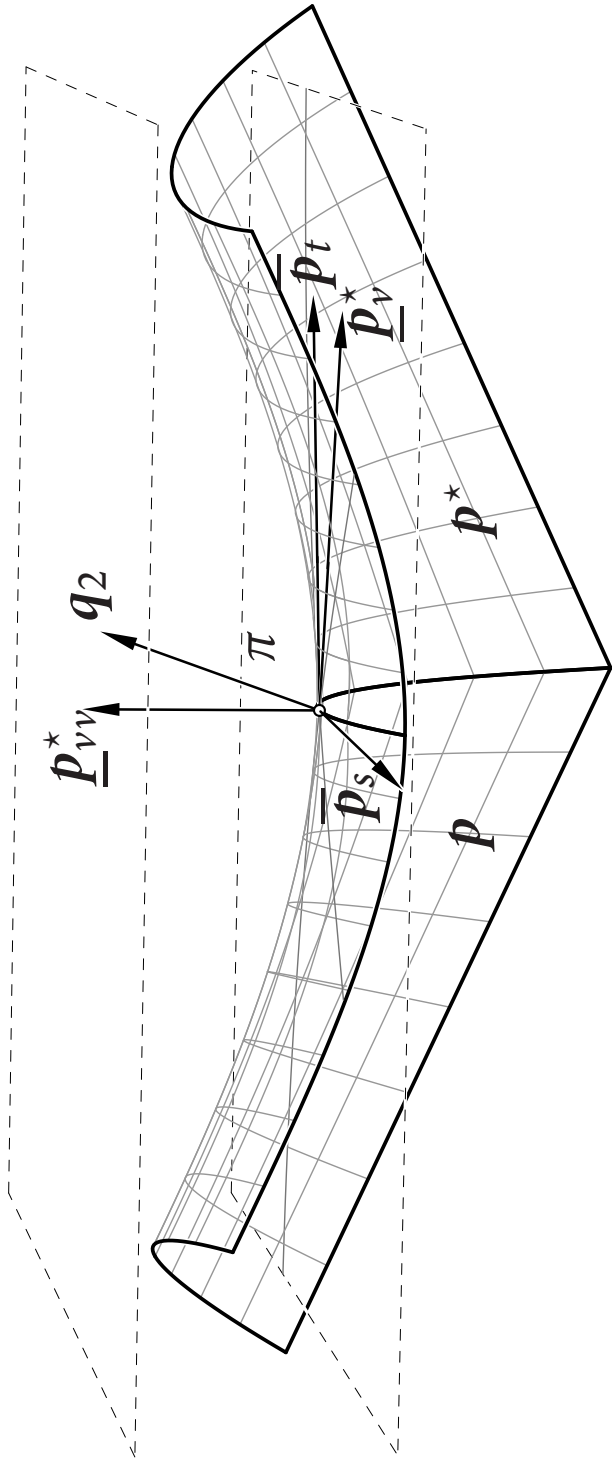
$$\underline{P}_{\nu\nu}^* = r_2 \bar{P} + \tilde{s}_2 \bar{P}_s + \tilde{t}_2 \bar{P}_t + r_0 s_1^2 \bar{P}_{ss} + 2r_0 s_1 t_1 \bar{P}_{st} + r_0 t_1^2 \bar{P}_{tt}.$$

Swoboda wyboru funkcji s_2 i t_2 jest równoważna swobodzie wyboru funkcji \tilde{s}_2 i \tilde{t}_2 .

Równanie $\underline{\mathbf{p}}_v^* = s_1 \underline{\mathbf{p}}_s + t_1 \underline{\mathbf{p}}_t$ oznacza, że w każdym punkcie wspólnego brzegu wektor $\underline{\mathbf{p}}_v^*$ leży w płaszczyźnie stycznej do płata \mathbf{p} . Ponieważ także wektor $\underline{\mathbf{p}}_u^* = \underline{\mathbf{p}}_s$ leży w tej płaszczyźnie, jest to wspólna płaszczyzna styczna obu płatów.



Niech $\mathbf{q}_2 = s_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{\mathbf{p}}_{st} + t_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt}$. Rzut prostopadły tego wektora na kierunek wspólnego wektora normalnego \mathbf{n} połączonych płatów, razem z wektorami $\bar{\mathbf{p}}_u$ i $\bar{\mathbf{p}}_v$ określa krzywiznę położonej na obu płatach krzywej powstałej z ich przecięcia płaszczyzną zawierającą wektor \mathbf{n} i wektor prostopadły do niego i do brzegu płatów. Rzut ten nie zmieni się po dodaniu dowolnej kombinacji liniowej wektorów $\bar{\mathbf{p}}_u$ i $\bar{\mathbf{p}}_v$, a zatem krzywizna ta się nie zmieni. Z faktu, że płaty mają wspólną krzywą brzegową i z twierdzenia Meusnier'a wynika, że krzywizna każdej krzywej powstałej z przecięcia płatów płaszczyzną, która nie jest do nich styczna, jest ciągła.



Równania ciągłości geometrycznej dla płatów wielomianowych i wymiernych

W równaniach ciągłości geometrycznej połączenia płatów wielomianowych i wymiernych występują krzywe wielomianowe opisujące wspólny brzeg płatów i pochodne cząstkowe na tym brzegu. Dokładniej, dla płatów wielomianowych

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{p}}^* &= \bar{\mathbf{p}}, \\ \underline{\mathbf{p}}_{\nu,j}^* &= s_j \bar{\mathbf{p}}_s + t_j \bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{q}_j, \quad j = 1, \dots, n\end{aligned}\quad (8)$$

a dla płatów wymiernych

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{p}}^* &= r_0 \bar{\mathbf{p}}, \\ \underline{\mathbf{p}}_{\nu,j}^* &= r_j \bar{\mathbf{p}} + s_j \bar{\mathbf{p}}_s + t_j \bar{\mathbf{p}}_t + \mathbf{Q}_j, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (9)$$

Jest $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$, a dla $j > 1$ krzywe \mathbf{q}_j i \mathbf{Q}_j są określone przez pochodne rzędu $2, \dots, j$ płatów \mathbf{p} albo \mathbf{P} na brzegu oraz funkcje $s_1, t_1, \dots, s_{j-1}, t_{j-1}$ albo $r_0, r_1, s_1, t_1, \dots, r_{j-1}, s_{j-1}, t_{j-1}$.

Występujące w tych równaniach funkcje wektorowe są wielomianowe. Dlatego funkcje połączenia r_j, s_j, t_j są funkcjami wymiernymi. Mnożąc strony równań przez wspólne mianowniki tych funkcji, otrzymamy równania, w których występują tylko wielomiany.

Ogólna postać równań jest taka:

$$a_1 \mathbf{c}_1 + \dots + a_k \mathbf{c}_k + a_{k+1} \mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Dane są w nim wielomianowe funkcje wektorowe $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, przy czym $d > k$. Zbadamy istnienie rozwiązań składających się z wielomianów a_1, \dots, a_{k+1} i wielomianowych funkcji $\mathbf{c}_{k+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Po lewej stronie równania występuje kombinacja liniowa funkcji $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1}$, ale współczynniki tej kombinacji są wielomianami. Zbiór wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej jest pierścieniem, a nie ciałem. Nie mamy tu więc do czynienia z przestrzenią liniową wektorowych krzywych wielomianowych.

Struktura algebraiczna podobna do przestrzeni liniowej, w której rolę ciała skalarów pełni pierścień, jest nazywana **modułem**.

Moduł krzywowych wielomianowych w przestrzeni \mathbb{R}^d oznaczamy symbolem $\mathbb{R}[x]^d$. Równanie (10) wyraża liniową zależność zbioru krzywowych $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1}$ nad pierścieniem wielomianów $\mathbb{R}[x]$. Zauważmy, że dla dowolnej liczby u sprowadza się to do „zwykłej” liniowej zależności wektorów $\mathbf{c}_1(u), \dots, \mathbf{c}_{k+1}(u) \in \mathbb{R}^d$.

Istotny dla rozwiązywania równań postaci (10) jest fakt, że pierścień $\mathbb{R}[x]$ jest dziedziną ideałów głównych, a nawet jest pierścieniem euklidesowym. Jest to pierścień przemienny bez dzielników zera, którego każdy ideał (podzbiór zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie) ma jeden generator (w tym przypadku składa się z wszystkich wielomianów podzielnych przez pewien ustalony wielomian).

W pierścieniu euklidesowym każde dwa elementy mają wspólny dzielnik, który można znaleźć za pomocą algorytmu Euklidesa.

Zbiór Θ , taki że dowolny element modułu M jest kombinacją liniową elementów Θ o jednoznacznie określonych współczynnikach, nazywa się **bazą modułu** M . Na przykład zbiór wektorów $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$, $[0, 0, 1]^T$ jest bazą modułu $\mathbb{R}[x]^3$; mnożąc te wektory przez odpowiednie wielomiany i dodając, możemy otrzymać dowolną krzywą wielomianową w \mathbb{R}^3 .

Podobnie jak przestrzeń liniowa, moduł może mieć różne bazy. Inaczej niż przestrzeń liniowa, moduł może bazy nie mieć. Moduł, który ma bazę, jest nazywany **modułem wolnym**. Liczba elementów bazy (odpowiednik wymiaru przestrzeni liniowej) nazywa się **rangą modułu**. Oznacza się ją symbolem $\text{rank } M$.

Podzbiór modułu, który jest modułem, jest tak zwanym **podmodułem**; jest to pojęcie analogiczne do podprzestrzeni liniowej. Inaczej niż dla skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych, jeśli L jest podmodułem M i $\text{rank } L = \text{rank } M$, to *nie wynika* stąd, że $L = M$.

Rozważmy macierz A , której kolumnami są krzywe $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$. Każda kolumna składa się z d wielomianów opisujących kolejne współrzędne krzywej. Liczba wierszy, d , jest większa niż liczba kolumn, k , możemy więc skreślić dowolne $d - k$ wierszy i otrzymać macierz kwadratową.

Wyznacznik tej macierzy jest wielomianem, który nazwiemy **minorem** macierzy A . Największy wspólny dzielnik wszystkich $\binom{d}{k}$ minorów nazwiemy **największym czynnikiem** układu krzywych $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ i oznaczymy symbolem $F(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$. Jeśli krzywe są liniowo zależne nad $\mathbb{R}[x]$, to wszystkie minory i największy czynnik są równe 0. Założymy, że tak nie jest.

Twierdzenie 6 *Jesli istnieją ciagle funkcje a_1, \dots, a_{k+1} , nie wszystkie równe 0, spełniające równanie (10) dla ustalonych krzywych $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1} \in \mathbb{R}[x]^d$, to istnieją wielomiany a_1, \dots, a_k spełniające to równanie razem z tymi krzywymi i z wielomianem $a_{k+1} = F(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$.*

Twierdzenie 7 *Dla ustalonych krzywych $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{R}[x]^d$, liniowo niezależnych nad $\mathbb{R}[x]$, istnieją krzywe $\hat{\mathbf{c}}_1, \dots, \hat{\mathbf{c}}_k \in \mathbb{R}[x]^d$, takie że dowolną krzywą \mathbf{c}_{k+1} spełniającą równanie (10) razem z pewnymi wielomianami a_1, \dots, a_{k+1} można przedstawić w postaci*

$$\mathbf{c}_{k+1} = \hat{a}_1 \hat{\mathbf{c}}_1 + \dots + \hat{a}_k \hat{\mathbf{c}}_k,$$

za pomocą pewnych wielomianów $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$.

Zbiór funkcji wielomianowych \mathbf{c}_{k+1} spełniających równanie (10) z danymi funkcjami $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ i z pewnymi wielomianami a_1, \dots, a_{k+1} jest modułem wolnym (podmodułem modułu $\mathbb{R}[x]^d$).

Oznaczmy go symbolem $\mathcal{M}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$.

Zbiór funkcji wielomianowych będących kombinacjami liniowymi funkcji $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ nad pierścieniem $\mathbb{R}[x]$ oznaczmy symbolem $\mathcal{L}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$; jest to podmoduł wolny modułu $\mathcal{M}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$, jego bazą jest zbiór $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$. Ranga obu modułów jest równa k .

Rozważmy jeszcze równanie

$$a_1\mathbf{c}_1 + \dots + a_k\mathbf{c}_k + a_{k+1}(\mathbf{k} - e\mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

w którym dane są krzywe $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ i \mathbf{k} oraz wielomian e .

Twierdzenie 8 *Jeżeli zbiór rozwiązań \mathbf{s} równania (11) jest niepusty, to istnieje krzywa wielomianowa \mathbf{k}_1 , taka że każde rozwiązanie można przedstawić w postaci*

$$\mathbf{s} = \mathbf{k}_1 + \hat{a}_1\hat{\mathbf{c}}_1 + \dots + \hat{a}_k\hat{\mathbf{c}}_k,$$

przy czym krzywe $\hat{\mathbf{c}}_1, \dots, \hat{\mathbf{c}}_k$ są elementami bazy modułu $\mathcal{M}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$, a funkcje $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ są wielomianami.

Zgodnie z tym twierdzeniem zbiór krzywych \mathbf{s} spełniających równanie (11) jest pusty albo jest warstwą modułu $\mathbb{R}[x]^d$, równoległą do podmodułu $\mathcal{M}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$.

Dla regularnego płata wielomianowego \mathbf{p} pochodne cząstkowe $\bar{\mathbf{p}}_s$ i $\bar{\mathbf{p}}_t$ są liniowo niezależne.

Twierdzenie 9 Istnienie funkcji s_1, \dots, s_n oraz t_1, \dots, t_n spełniających równania (8) dla $j = 1, \dots, n$ jest równoważne istnieniu wielomianów $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ i d spełniających dla $j = 1, \dots, n$ równania

$$b_j \bar{\mathbf{p}}_s + c_j \bar{\mathbf{p}}_t + d \left(\mathbf{k}_j - d^{2j-2} \frac{\partial^j}{\partial v^j} \bar{\mathbf{p}}^* \right) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

w których $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, a dla $j > 1$

$$\mathbf{k}_j = \sum_{k=2}^j \sum_{h=0}^k \hat{a}_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{\mathbf{p}},$$

$$\hat{a}_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_l > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} b_{m_1} \dots b_{m_h} c_{m_{h+1}} \dots c_{m_k}.$$

Dla $j = 1, 2$ równania (12) mają postać

$$b_1 \bar{\mathbf{p}}_s + c_1 \bar{\mathbf{p}}_t - d \underline{\mathbf{p}}_v^* = \mathbf{0}, \quad (12.1)$$

$$b_2 \bar{\mathbf{p}}_s + c_2 \bar{\mathbf{p}}_t + d(b_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{\mathbf{p}}_{st} + c_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt} - d^2 \underline{\mathbf{p}}_{vv}^*) = \mathbf{0}. \quad (12.2)$$

Mamy zatem krzywą $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{k}_2 = b_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{\mathbf{p}}_{st} + c_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt}$.

Twierdzenie 10 Istnienie funkcji $r_0 = 1, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ spełniających równania (9) dla $j = 0, \dots, n$ jest równoważne istnieniu wielomianów $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ i d spełniających dla $j = 1, \dots, n$ równania

$$a_j \bar{\mathbf{P}} + b_j \bar{\mathbf{P}}_s + c_j \bar{\mathbf{P}}_t + d \left(\mathbf{K}_j - d^{2j-2} \frac{\partial^j}{\partial v_j^2} \mathbf{P}^* \right) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

w których

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j &= \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k \hat{A}_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{\mathbf{P}}, \\ \hat{A}_{jkh} &= \binom{k}{h} \sum_{\substack{i=k, \dots, j \\ k=1 \Rightarrow i \neq j}} \binom{j}{i} \sum_{\substack{m_l > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = i}} \frac{i!}{k! m_1! \dots m_k!} \times \\ &\quad \times a_{j-i} b_{m_1} \dots b_{m_h} c_{m_{h+1}} \dots c_{m_k} d^{k-1} \end{aligned}$$

i (na podstawie umowy) $a_0 = 1/d$.

Uwaga: Ponieważ w każdym składniku wyrażenia opisującego \hat{A}_{jkh} , w którym występuje funkcja a_0 , występuje również d , wszystkie funkcje \hat{A}_{jkh} są wielomianami.

Dla $j = 1, 2$ równania (13) mają postać

$$a_1 \bar{\mathbf{P}} + b_1 \bar{\mathbf{P}}_s + c_1 \bar{\mathbf{P}}_t - d \underline{\mathbf{P}}_v^* = \mathbf{0}, \quad (13.1)$$

$$a_2 \bar{\mathbf{P}} + b_2 \bar{\mathbf{P}}_s + c_2 \bar{\mathbf{P}}_t +$$

$$d(2a_1 b_1 \bar{\mathbf{P}}_s + 2a_1 c_1 \bar{\mathbf{P}}_t + b_1^2 \bar{\mathbf{P}}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{\mathbf{P}}_{st} + c_1^2 \bar{\mathbf{P}}_{tt} - d^2 \underline{\mathbf{P}}_{vv}^*) = \mathbf{0}. \quad (13.2)$$

Jeśli nie trzeba konstruować powierzchni o ciągłości geometrycznej rzędu wyższego niż 2 (czyli często), ostatnie równanie możemy zapisać w prostszej postaci

$$a_2 \bar{\mathbf{P}} + \tilde{b}_2 \bar{\mathbf{P}}_s + \tilde{c}_2 \bar{\mathbf{P}}_t + d(b_1^2 \bar{\mathbf{P}}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{\mathbf{P}}_{st} + c_1^2 \bar{\mathbf{P}}_{tt} - d^2 \underline{\mathbf{P}}_{vv}^*) = \mathbf{0}, \quad (13.2')$$

z dowolnymi wielomianami \tilde{b}_2 i \tilde{c}_2 zamiast b_2 i c_2 . Wielomiany b_2 i c_2 są potrzebne do określenia krzywej \mathbf{K}_3 , występującej w warunku ciągłości G^3 , i dalszych.

Zatem, aby skonstruować płat \underline{p}^* gładko połączony z \underline{p} , trzeba znaleźć pochodne płata \underline{p} na wspólnym brzegu, dobrać wielomiany, skonstruować krzywą \underline{p}_u^* i ewentualnie \underline{p}_{uu}^* i skonstruować płat \underline{p}^* , którego to są pochodne w kierunku poprzecznym.

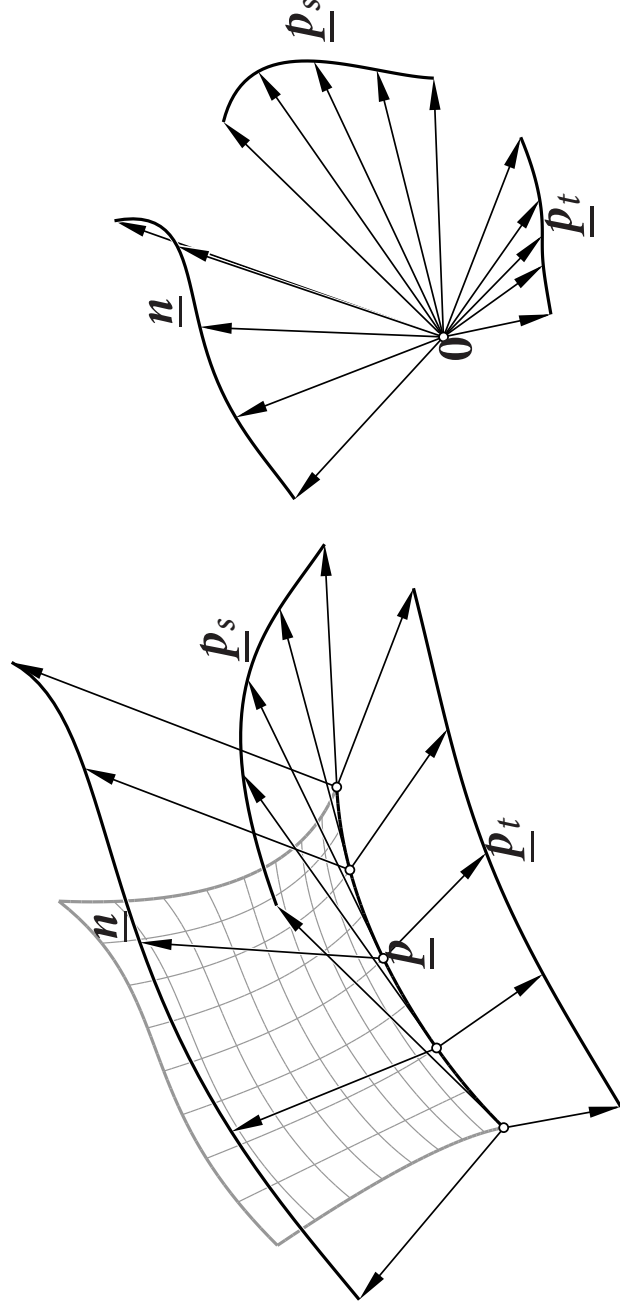
Przyjęcie wielomianu $d = \mathcal{F}(\bar{\underline{p}}_s, \bar{\underline{p}}_t)$ w konstrukcji krzywej \underline{p}_v^* umożliwia otrzymanie *wszystkich możliwych* krzywych wielomianowych opisujących pochodne płata \underline{p}^* w kierunku poprzecznym (wszystkich elementów modułu $\mathcal{M}(\bar{\underline{p}}_s, \bar{\underline{p}}_t)$). Zamiast tego przyjmuje się wielomian $d = 1$, co daje dostęp do elementów podmodułu $\mathcal{L}(\bar{\underline{p}}_s, \bar{\underline{p}}_t)$. Zobaczmy powody tego ograniczenia.

- Znalezienie bazy modułu $\mathcal{M}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$ jest dość trudnym i kosztownym obliczeniem numerycznym, przy czym *prawie zawsze* bazą tą jest zbiór $\{\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t\}$ (czyli na ogół niczego się nie traci).
- Jest tak dlatego, bo wielomian $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$ jest wspólnym dzielnikiem wszystkich trzech minorów macierzy $[\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t]$, a zatem zbiór jego miejsc zerowych (rzeczywistych i zespolonych) jest przecięciem zbiorów miejsc zerowych minorów. Dowolnie małe zaburzenie płata \mathbf{p} może tak zmienić minory, że nie będą mieć ani jednego wspólnego zera. Zatem konstrukcja przy użyciu wielomianu $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$ jest niestabilna.

- Jeśli wielomian d ma stopień większy od 0, to w konstrukcji połączenia płatów klasy G^2 lub wyższej, po znalezieniu funkcji wektorowej $d^2 \underline{\mathbf{p}}_{\underline{v}}$ trzeba ją podzielić przez d^2 — ale takie dzielenie może nie być wykonalne.
- Ograniczenie do $d = 1$ łatwo jest ominąć, konstruując płat pomocniczy i „doklejając” dwa płaty docelowe do niego (po „przeciwnych stronach” wspólnej krzywej).

Te same uwagi dotyczą konstrukcji gładko połączonych płatów wymiernych poprzez skonstruowanie reprezentujących je jednorodnych płatów wielomianowych. Przyjęcie wielomianu $d = 1$ ogranicza wybór krzywej $\underline{\mathbf{p}}_{\underline{v}}^*$ do podmodułu $\mathcal{L}(\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{P}}_s, \overline{\mathbf{P}}_t)$ modułu $\mathcal{M}(\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{P}}_s, \overline{\mathbf{P}}_t)$.

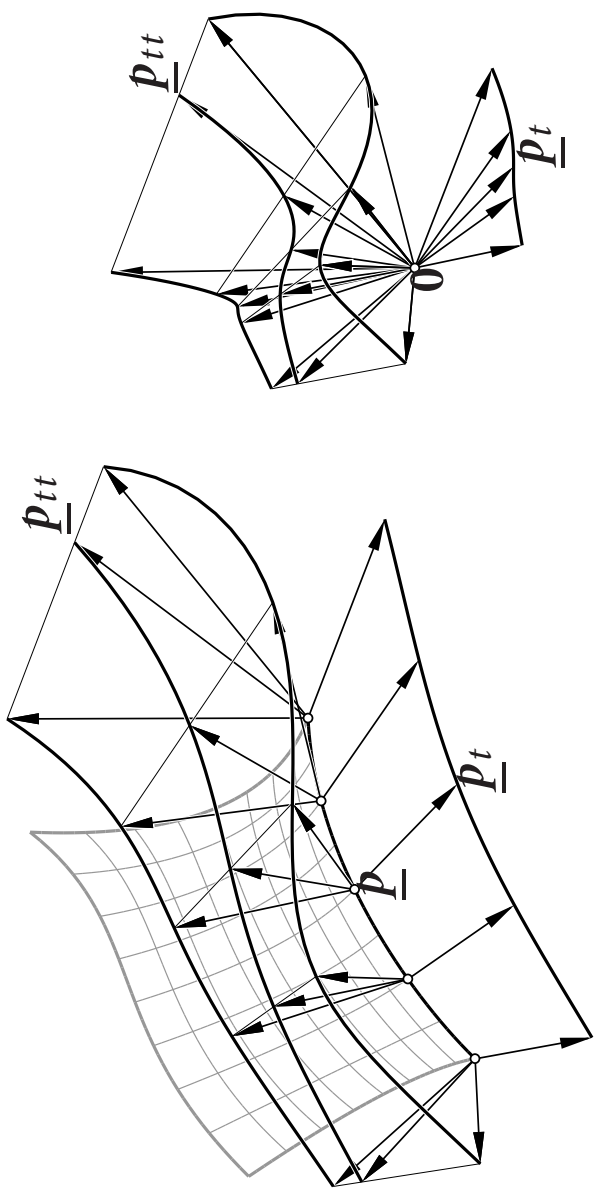
Przyjrzyjmy się modułowi $\mathcal{M}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$. Trzy minory macierzy $[\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t]$, z odpowiednimi znakami, opisują wektor normalny płata \mathbf{p} na brzegu: wartość funkcji wektorowej $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}_s \wedge \bar{\mathbf{p}}_t$ dla każdego s jest wektorem prostopadłym do wektorów $\bar{\mathbf{p}}_s(s)$ i $\bar{\mathbf{p}}_t(s)$. Zatem, moduł $\mathcal{M}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$ zawiera wszystkie krzywe wielomianowe, których wartości w każdym punkcie są wektorami w odpowiedniej płaszczyźnie stycznej płata \mathbf{p} .



Stopień krzywej n nie przekracza sumy stopni krzywych $\bar{\mathbf{p}}_s$ i $\bar{\mathbf{p}}_t$, określonych przez stopień płata \mathbf{p} . Jeśli $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t) \neq \text{const}$, to można podzielić współrzędne krzywej $\bar{\mathbf{n}}$ przez ten wielomian i otrzymać funkcję niższego stopnia opisującą wektor normalny płata \mathbf{p} na brzegu. To oznacza, że kształt płata \mathbf{p} jest *mniej skomplikowany* niż to wynika z jego stopnia.

W skrajnym przypadku, gdy $\deg \mathcal{F}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t) = \deg \bar{\mathbf{p}}_s + \deg \bar{\mathbf{p}}_t$, dzieląc krzywą $\bar{\mathbf{n}}$ przez $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$, otrzymamy funkcję stałą opisującą wektor normalny płata \mathbf{p} na brzegu — to oznacza istnienie płaszczyzny stycznej do płata we wszystkich punktach jego krzywej brzegowej (która wtedy musi być płaska).

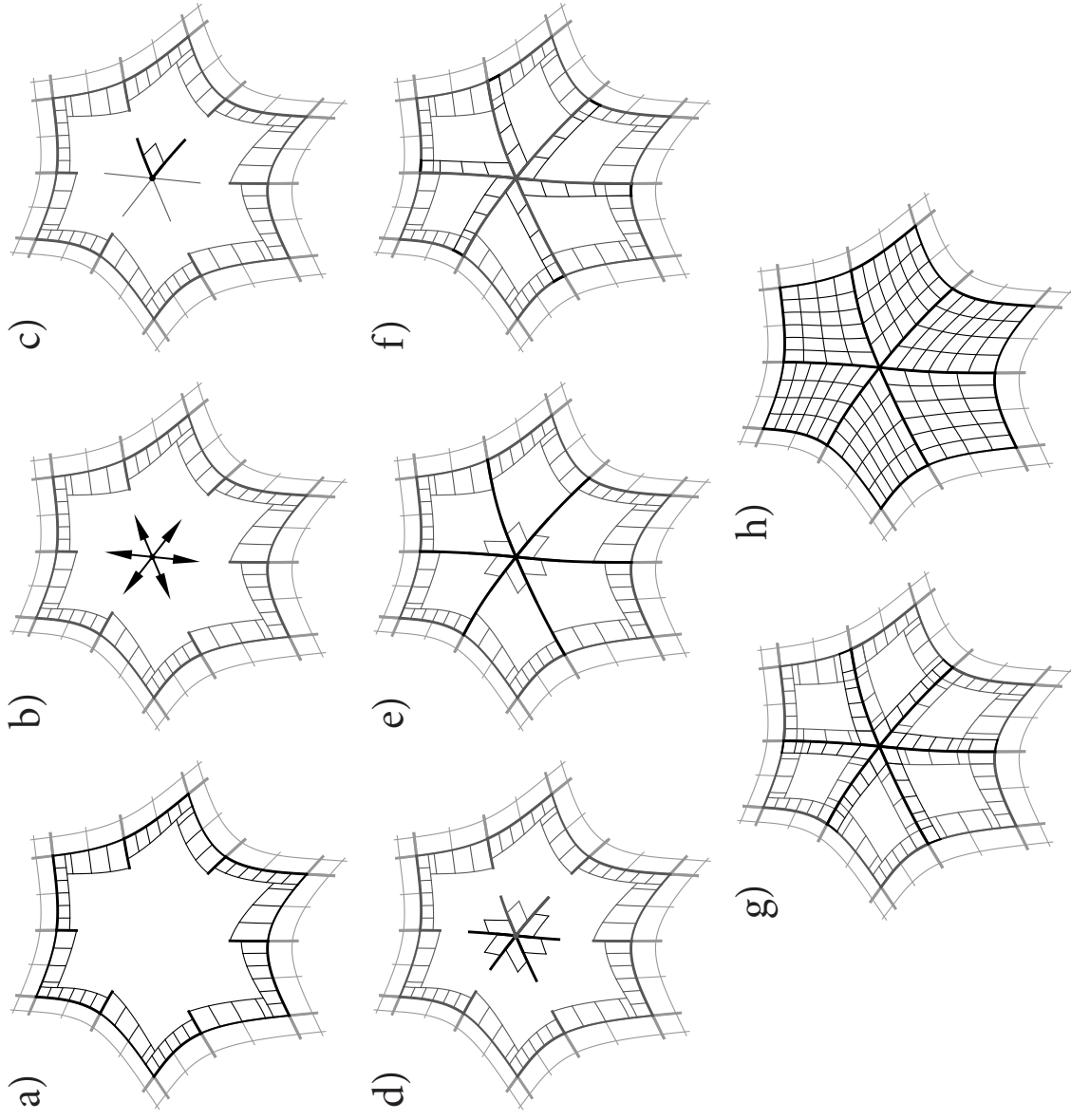
Niech $d = 1$. Jeśli ustalimy wielomiany b_1 i c_1 , to mamy ustaloną funkcję wektorową \mathbf{k}_2 ; na przykład jeśli $b_1 = 0$, $c_1 = 1$, to $\mathbf{k}_2 = \bar{\mathbf{p}}_{tt}$. „Dobrá” (tj. zapewniającą połączenie klasy G^2) pochodną drugiego rzędu w kierunku poprzecznym płata \mathbf{p}^* otrzymamy, dodając do \mathbf{k}_2 dowolną kombinację liniową nad $\mathbb{R}[x]$ funkcji $\bar{\mathbf{p}}_s$ i $\bar{\mathbf{p}}_t$ — wystarczy wybrać wielomiany b_2 i c_2 . Warstwa modułu $\mathbb{R}[x]^3$ równoległa do podmodułu $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{p}}_s, \bar{\mathbf{p}}_t)$ i zawierająca funkcję \mathbf{k}_2 reprezentuje wszystkie warstwy równoległe do płaszczyzn stycznych do płata \mathbf{p} na jego brzegu, zawierające wektory \mathbf{q}_2 takie jak na rysunku na slajdzie 333.



Gładkie wypełnianie wielokątnych otworów

Zagęszczanie siatki nieregularnej wytwarza ciąg siatek zbieżny do powierzchni granicznej. Jeśli nie chcemy obliczać takiego ciągu, to możemy dokonać zagęszczenia tylko parę razy i na podstawie otrzymanej siatki wygenerować płaty wielomianowe reprezentowane przez jej regularne fragmenty, a pozostałe części powierzchni skonstruować z płatów połączonych zgodnie z opisem wyżej.

Dla ustalenia uwagi, rozważamy powierzchnie, których „regularne” części składają się z płatów bikubicznych. Operacja zagęszczenia składa się z podwajania i $n = 3$ kroków uśredniania. Dla dowolnej siatki początkowej po dwukrotnym zagęszczeniu otrzymamy siatkę z elementami specjalnymi dostatecznie „odizolowanymi” od siebie. Każdemu takiemu elementowi odpowiada wielokątny otwór w powierzchni, który trzeba wypełnić gładko. Do brzegu otworu k -kątnego przylega $2k$ płatów bikubicznych.



Pokazany na rysunku schemat Hahna (1989 r.) opisuje ideę konstrukcji.

W pierwszym kroku (a) znajdowane są pochodne w kierunku poprzecznym do brzegu płatów otaczających otwór.

Następnie (b) określa się punkt środkowy, tj. wspólny punkt płatów czworokątnych wypełniających otwór oraz pochodne wspólnych krzywych w tym punkcie.

Kolejne dwa etapy (c,d) to ustalenie pochodnych wyższych rzędów oraz pochodnych mieszanych, spełniających tzw. warunki zgodności, konieczne, aby była wykonalna konstrukcja regularnych płatów docelowych.

W kroku (e) są konstruowane krzywe wspólne płatów, łączące punkt środkowy z punktami wspólnymi płatów otaczających otwór.

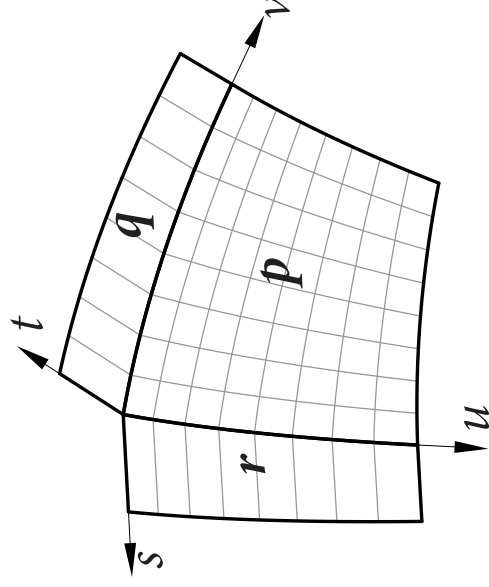
Płaty pomocnicze konstruowane w kroku (f) przylegają do konstruowanych w poprzednim kroku krzywych wspólnych i spełniają określone wcześniej warunki interpolacyjne nałożone na pochodne w kierunku poprzecznym i mieszane.

W kroku (g) na podstawie płatów pomocniczych i wybranych funkcji połączenia są konstruowane pochodne poprzeczne płatów docelowych dla każdej z czterech krzywych brzegowych każdego takiego płata.

Ostatni krok to konstrukcja płatów Coonsa, mających zadane brzegi i pochodne poprzeczne.

Jednym z trudniejszych elementów konstrukcji jest spełnienie warunków zgodności. Okazuje się, że jeśli otrzymana powierzchnia ma być klasy G^1 , to narzuca to ograniczenia na pochodne rzędu 2 płatów pomocniczych w punkcie środkowym (czyli także na pochodne drugiego rzędu krzywowych wspólnych), a jeśli ma być powierzchnia klasy G^2 , to warunki zgodności obejmują pochodne rzędu 4. Ponadto wielomiany przyjmowane jako funkcje połączenia muszą spełniać pewne warunki interpolacyjne Hermite'a, co wpływa na wysoki stopień płatów docelowych.

Lokalne warunki zgodności G^1



Podkreślenia i nadkreślenia parametryzacji oznaczają obcięcia płatów do odpowiednich brzegów. Obie kreski oznaczają oba obcięcia.

Płaty pomocnicze q i r mają wspólny narożnik z docelowym płatem p .

Podkreślenie symbolu funkcji połączenia oznacza jej wartość w punkcie odpowiadającym wspólnemu narożnikowi płatów.

Pochodne poprzeczne płata \underline{p} otrzymamy ze wzorów

$$\underline{p}_v = b_1 \underline{r}_u + c_1 \underline{r}_s, \quad (14)$$

$$\underline{p}_u = f_1 \underline{q}_v + g_1 \underline{q}_t, \quad (15)$$

z funkcjami połączenia b_1, c_1, f_1, g_1 .

Zgodność pozycyjna: wszystkie płaty mają wspólny narożnik, $\underline{r} = \underline{p} = \underline{q}$.

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu: ma być

$$\underline{q}_v = b_1 \underline{r}_u + c_1 \underline{r}_s, \quad (16)$$

$$\underline{r}_u = f_1 \underline{q}_v + g_1 \underline{q}_t. \quad (17)$$

Zgodność pochodnych mieszanych: z warunku $\mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vu}$ wynika, że

$$\underline{b}'_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_s + \underline{b}_1 \underline{\bar{r}}_{uu} + \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{su} = \underline{f}'_1 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_t + \underline{f}_1 \underline{\bar{q}}_{vv} + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{tv}.$$

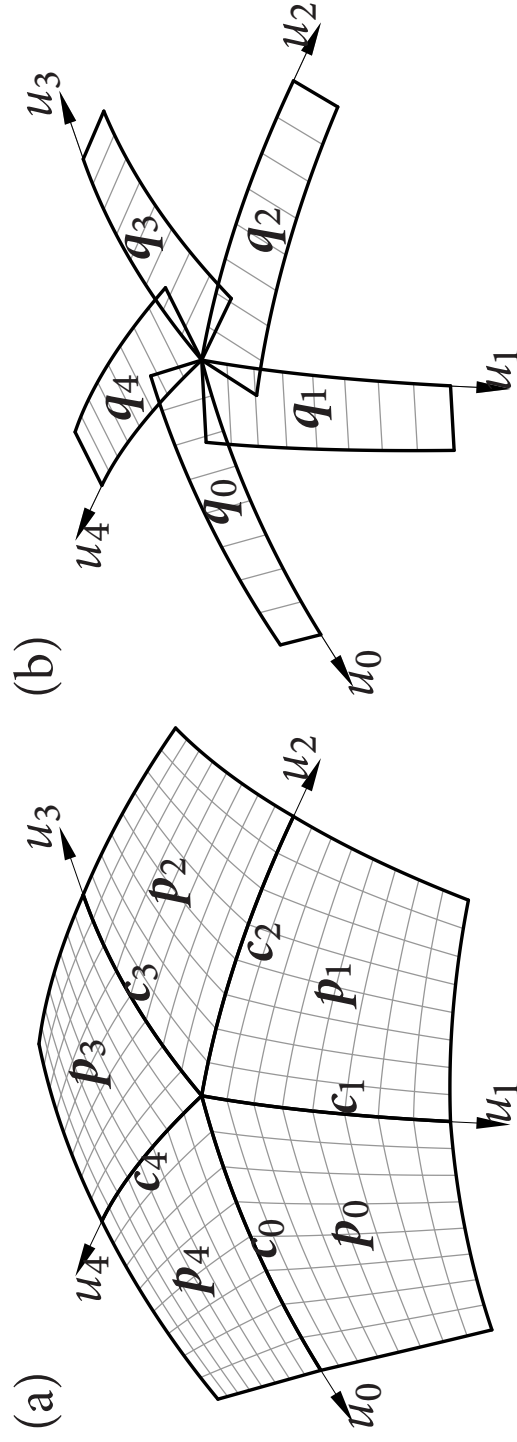
Po uporządkowaniu:

$$\underline{b}'_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_s - \underline{f}'_1 \underline{\bar{q}}_v - \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_t = -\underline{b}_1 \underline{\bar{r}}_{uu} - \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{su} + \underline{f}_1 \underline{\bar{q}}_{vv} + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{tv}. \quad (18)$$

Zauważmy, że mając dane płaty pomocnicze, możemy z równań (16) i (17) obliczyć wartości funkcji połączenia, a równanie (18) musi być spełnione przez pochodne tych funkcji. Ale, trzeba zapewnić niesprzeczność tego równania. Lewa strona przedstawia kombinację liniową wektorów stycznych do płatów w narożniku, zatem prawa strona musi też być wektorem stycznym do niej. Czyli wektorem prostopadłym do wektora normalnego \mathbf{n} płatów we wspólnym narożniku. Stąd musi być

$$+ \underline{c}_1 \langle \mathbf{n}, \underline{\bar{r}}_{su} \rangle - \underline{g}_1 \langle \mathbf{n}, \underline{\bar{q}}_{tv} \rangle = -\underline{b}_1 \langle \mathbf{n}, \underline{\bar{r}}_{uu} \rangle + \underline{f}_1 \langle \mathbf{n}, \underline{\bar{q}}_{vv} \rangle. \quad (19)$$

Globalne warunki zgodności G^1



Dla k płatów pomocniczych i k płatów docelowych otaczających wspólny narożnik napiszemy równania

$$\underline{p}_{iv} = b_{1,i} \underline{c}'_i + c_{1,i} \underline{q}_{is},$$

$$\bar{p}_{iu} = f_{1,i} \underline{c}'_{i+1} + g_{1,i} \underline{q}_{i+1s}.$$

Występuje w nich $4k$ funkcji pomocniczych.

Zestawiając wszystkie lokalne warunki zgodności nałożone na krzywe wspólne, płaty pomocnicze i funkcje połączenia, otrzymamy takie warunki globalne:

Zgodność pozycyjna: wszystkie płaty pomocnicze mają wspólny narożnik, $\bar{q}_0 = \dots = \bar{q}_{k-1}$.

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu: równania

$$\underline{c}'_{i+1} = \underline{b}_{1,i} \underline{c}'_i + \underline{c}_{1,i} \bar{q}_{is}, \quad (20)$$

$$\underline{c}'_i = \underline{f}_{1,i} \underline{c}'_{i+1} + \underline{g}_{1,i} \bar{q}_{i+1s}, \quad (21)$$

są niesprzeczne i określone, jeśli wszystkie płaty pomocnicze są regularne i mają tę samą płaszczyznę styczną we wspólnym narożniku.

Zgodność pochodnych mieszanych: z równań (19) powstaje układ k równań liniowych

$$\begin{bmatrix} \underline{c}_0 & -\underline{g}_0 \\ \underline{c}_1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & -\underline{g}_{k-2} \\ -\underline{g}_{k-1} & \underline{c}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle n, \bar{q}_{0us} \rangle \\ \vdots \\ \langle n, \bar{q}_{k-1us} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{b}_0 & f_0 \\ -\underline{b}_1 & \ddots \\ \vdots & f_{k-2} \\ \underline{f}_{k-1} & -\underline{b}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle n, \underline{c}''_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle n, \underline{c}''_{k-1} \rangle \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Jeśli pochodne płatów pomocniczych spełniają go, to równania

$$\begin{aligned} \underline{b}'_{1,i} \underline{c}'_i + \underline{c}'_{1,i} \bar{q}_{is} - \underline{f}'_{1,i} \underline{c}'_{i+1} - \underline{g}'_{1,i} \bar{q}_{i+1s} = \\ - \underline{b}_{1,i} \underline{c}''_i - \underline{c}_{1,i} \bar{q}_{ius} + \underline{f}_{1,i} \underline{c}''_{i+1} + \underline{g}_{1,i} \bar{q}_{i+1us}, \end{aligned} \quad (23)$$

są niesprzeczne i możemy je rozwiązać ze względu na pochodne funkcji połączenia.

Twierdzenie 11 Układ równań (22), którego współczynniki są określone przez krzywe $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_{k-1}$:

- ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy, gdy liczba k jest nieparzysta;
- dla k parzystego jest nieokreślony i jest niesprzeczny wtedy, gdy

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\det[\underline{\mathbf{c}}'_{i-1}, \underline{\mathbf{c}}'_{i+1}, \mathbf{n}]}{\det[\underline{\mathbf{c}}'_{i-1}, \underline{\mathbf{c}}'_i, \mathbf{n}] \det[\underline{\mathbf{c}}'_i, \underline{\mathbf{c}}'_{i+1}, \mathbf{n}]} \langle \mathbf{n}, \underline{\mathbf{c}}'_i \rangle = 0. \quad (24)$$

Szkic dowodu. Układ (22) można zapisać w postaci $AY = BX$, przy czym macierze A i B są tzw. cykliczne dwudiagonalne. Łatwo jest obliczyć

$$\det A = \prod_{i=0}^{k-1} \underline{c}_{1,i} - \prod_{i=0}^{k-1} \underline{g}_{1,i}.$$

Współczynniki $\underline{c}_{1,i}$ i $\underline{g}_{1,i}$ można obliczyć ze wzorów Cramera:

$$\underline{c}_{1,i} = \frac{\det[\underline{c}'_i, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]}{\det[\underline{c}'_i, \underline{q}_{is}, \mathbf{n}]}, \quad \underline{g}_{1,i} = \frac{\det[\underline{c}'_{i+1}, \underline{c}'_j, \mathbf{n}]}{\det[\underline{c}'_{i+1}, \underline{q}_{i+1s}, \mathbf{n}]}.$$

Dla płatów regularnych wszystkie te liczby są różne od 0. Ich iloczyny mają te same wartości bezwzględne i dla k nieparzystego mają przeciwny znak, a dla parzystego te same. Zatem macierz A jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy k jest nieparzyste.

Przyjmijmy parzyste k . Można bez straty ogólności przyjąć, że dla każdego i płat \mathbf{q}_i jest identyczny z płatem \mathbf{p}_i . Wtedy $\bar{\mathbf{q}}_{is} = \underline{c}'_{i+1}$, a stąd $\underline{b}_{1,i} = 0$ oraz $\underline{c}_{1,i} = 1$ i mamy układ równań

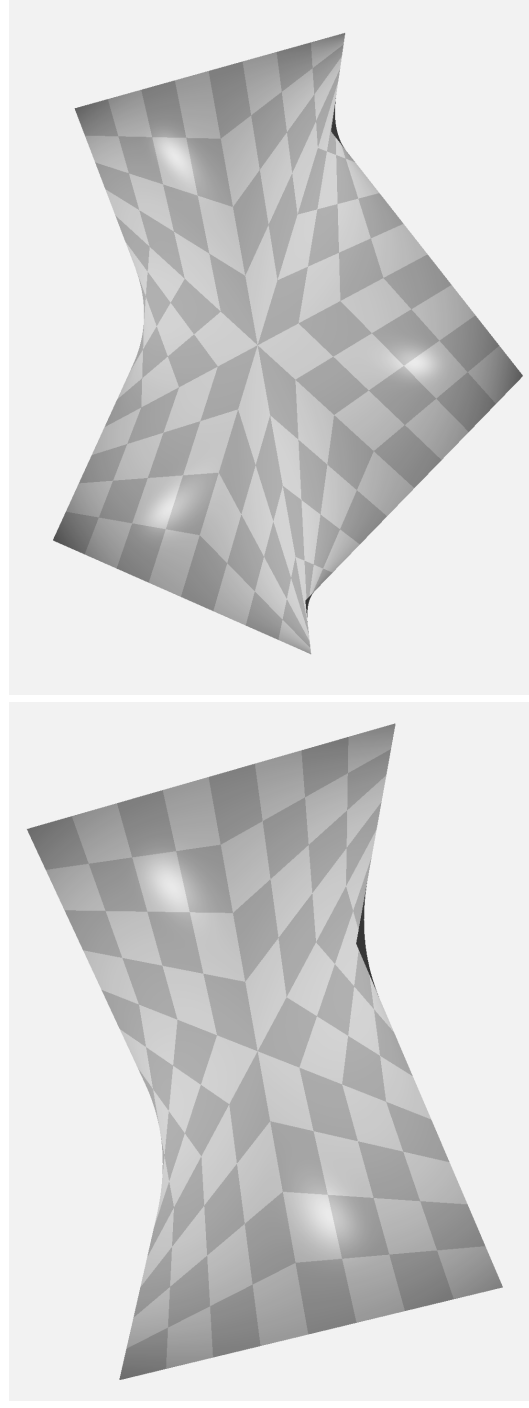
$$\begin{bmatrix} 1 & -g_0 \\ \mathbf{1} & \vdots \\ \vdots & -g_{k-2} \\ -g_{k-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \bar{\mathbf{p}}_{0uv} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \bar{\mathbf{p}}_{k-1uv} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{k-2} \\ f_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \underline{c}''_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \underline{c}''_{k-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

Macierz A jest rzędu $k - 1$. Wykonując (symbolicznie) eliminację Gaussa, aby doprowadzić ją do postaci trójkątnej górnej, otrzymamy macierz z ostatnim wierszem zerowym. Dlatego przekształcona prawa strona, tj. iloczyn BX musi być wektorem z zerową ostatnią współrzędną. Ta współrzędna jest wartością wyrażenia po lewej stronie równania (24).

□

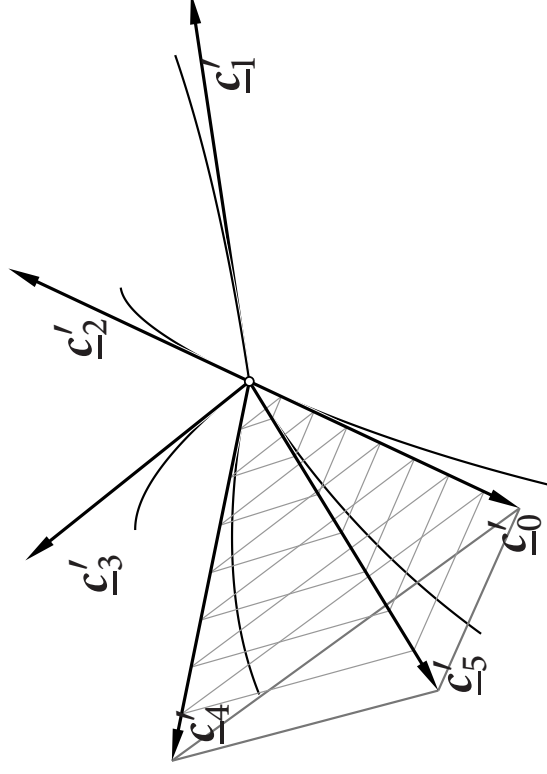
Jak wynika z twierdzenia, jeśli we wspólnym narożniku spotyka się nieparzysta liczba płatów, to ich wspólne krzywe można dobrać dowolnie, byleby styczne do nich były w jednej płaszczyźnie. Pochodne mieszane płatów pomocniczych będą wtedy określone jednoznacznie przez te krzywe i warunki zgodności.

Dla parzystego k istnieje ograniczenie pochodnych drugiego rzędu krzywych. Jeśli jest spełnione, to pochodne mieszane płatów pomocniczych nie są określone jednoznacznie, a zatem trzeba nałożyć na nie jakiś dodatkowy warunek. Można go wziąć z pewnego kryterium optymalizacji kształtu — zazwyczaj chcemy, aby powierzchnia docelowa miała jak najmniejsze zafalowania.



Niejednoznaczność rozwiązania dla parzystego k objawia się możliwością konstruowania małych siodeł.

„Geometryczna” interpretacja współczynników występujących w warunku niesprzeczności globalnego warunku zgodności pochodnych mieszanych dla parzystego k .



Lokalne warunki zgodności G^2

Zakładając, że płaty pomocnicze i docelowe konstruowanej powierzchni klasy G^2 są połączone zgodnie ze schematem rozpatrywanym wcześniej, oprócz pochodnych pierwszej rzędu w kierunku poprzecznym do brzegu musimy konstruować pochodne drugiego rzędu:

$$\underline{p}_{vv} = b_2 \underline{r}_u + c_2 \underline{r}_s + b_1^2 \underline{r}_{uu} + 2b_1 c_2 \underline{r}_{us} + c_1^2 \underline{r}_{ss}, \quad (25)$$

$$\underline{p}_{uu} = f_2 \underline{q}_v + g_2 \underline{q}_t + f_1^2 \underline{q}_{vv} + 2f_1 g_2 \underline{q}_{vt} + f_1^2 \underline{q}_{tt}. \quad (26)$$

W równaniach tych występują cztery nowe funkcje połączenia, c_2 , d_2 , f_2 i g_2 .

Różniczkując strony powyższych równań, otrzymamy następujące warunki zgodności G^2 :

Zgodność pochodnych drugiego rzędu: strony równań

$$\bar{q}_{vv} = \underline{b}_2 \bar{r}_u + \underline{c}_2 \bar{r}_s + \underline{b}_1^2 \bar{r}_{uu} + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1 \bar{r}_{us} + \underline{c}_1^2 \bar{r}_{ss}, \quad (27)$$

$$\bar{r}_{uu} = \underline{f}_2 \bar{q}_v + \underline{g}_2 \bar{q}_t + \underline{f}_1^2 \bar{q}_{vv} + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1 \bar{q}_{vt} + \underline{g}_1^2 \bar{q}_{tt} \quad (28)$$

są równe odpowiednio \bar{p}_{vv} i \bar{p}_{uu} .

Zgodność pochodnych mieszanych trzeciego rzędu: strony równań

$$\begin{aligned}
 f_1'' \bar{q}_v + g_1'' \bar{q}_t + 2f_1' \bar{q}_{vv} + 2g_1' \bar{q}_{vt} + f_1 \bar{q}_{vvv} + g_1 \bar{q}_{vvt} = \\
 b_2' \bar{r}_u + c_2' \bar{r}_s + (2b_1 b_1' + b_2) \bar{r}_{uu} + (2b_1' c_1 + 2b_1 c_1' + c_2) \bar{r}_{us} + \\
 2c_1 c_1' \bar{r}_{ss} + b_1^2 \bar{r}_{uuu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{uus} + c_1^2 \bar{r}_{uss}, \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1'' \bar{r}_u + c_1'' \bar{r}_s + 2b_1' \bar{r}_{uu} + 2c_1' \bar{r}_{us} + b_1 \bar{r}_{uuu} + c_1 \bar{r}_{uus} = \\
 f_2' \bar{q}_v + g_2' \bar{q}_t + (2f_1 f_1' + f_2) \bar{q}_{vv} + (2f_1' g_1 + 2f_1 g_1' + g_2) \bar{q}_{vt} + \\
 2g_1 g_1' \bar{q}_{tt} + f_1^2 \bar{q}_{vvv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vvt} + g_1^2 \bar{q}_{vtt} \quad (30)
 \end{aligned}$$

są równe \bar{p}_{uvv} i \bar{p}_{uuv} .

Zgodność pochodnych mieszanych czwartego rzędu: wyrażenia z obu stron poniższego równania są równe $\bar{\mathbf{p}}_{uuvv}$:

$$\begin{aligned}
& f_2'' \bar{\mathbf{q}}_v + g_2'' \bar{\mathbf{q}}_t + 2(f_1 f_1'' + f_1'^2 + f_2') \bar{\mathbf{q}}_{vv} + \\
& 2(f_1'' g_1 + 2f_1' g_1' + f_1 g_1'' + g_2') \bar{\mathbf{q}}_{vt} + 2(g_1 g_1'' + g_1'^2) \bar{\mathbf{q}}_{tt} + \\
& (4f_1 f_1' + f_2) \bar{\mathbf{q}}_{vvv} + (4f_1' g_1 + 4f_1 g_1' + g_2) \bar{\mathbf{q}}_{vvt} + 4g_1 g_1' \bar{\mathbf{q}}_{vtt} + \\
& f_1^2 \bar{\mathbf{q}}_{vvvv} + 2f_1 g_1 \bar{\mathbf{q}}_{vvvt} + g_1^2 \bar{\mathbf{q}}_{vvtt} = \\
& b_2'' \bar{\mathbf{r}}_u + c_2'' \bar{\mathbf{r}}_s + 2(b_1 b_1'' + b_1'^2 + b_2') \bar{\mathbf{r}}_{uu} + \\
& 2(b_1'' c_1 + 2b_1' c_1' + b_1 c_1'' + c_2') \bar{\mathbf{r}}_{us} + 2(c_1 c_1'' + c_1'^2) \bar{\mathbf{r}}_{ss} + \\
& (4b_1 b_1' + b_2) \bar{\mathbf{r}}_{uuu} + (4b_1' c_1 + 4b_1 c_1' + c_2) \bar{\mathbf{r}}_{uus} + 4c_1 c_1' \bar{\mathbf{r}}_{uss} + \\
& b_1^2 \bar{\mathbf{r}}_{uuuu} + 2b_1 c_1 \bar{\mathbf{r}}_{uuus} + c_1^2 \bar{\mathbf{r}}_{uuss}. \tag{31}
\end{aligned}$$

Jeśli płaty pomocnicze \mathbf{q} i \mathbf{r} są ustalone, to każde z powyższych równań jest układem równań liniowych z dwiema lub czterema niewiadomymi, które nie występują w równaniach napisanych wcześniej. Jeśli równania są niesprzeczne, to można kolejno rozwiązać je ze względu na $\underline{b}_2, \underline{c}_2; \underline{f}_2, \underline{g}_2; \underline{b}_1', \underline{c}_1', \underline{b}_2', \underline{c}_2'; \underline{f}_1'', \underline{g}_1'', \underline{f}_2'', \underline{c}_2'', \underline{f}_2', \underline{g}_2''$.

W każdym równaniu wektor niewiadomych jest pomnożony przez macierz 3×2 albo 4×2 , przy czym rząd każdej z tych macierzy jest równy 2. Wektor prawej strony utworzony z danych składników musi być prostopadły do wektora normalnego \mathbf{n} wszystkich płatów we wspólnym narożniku.

Jeśli $\underline{b}_1 = \underline{f}_1 = \underline{b}_2 = \underline{c}_2 = \underline{f}_2 = \underline{g}_2 = 0$, to równania zgodności są takie:

$$\underline{\bar{q}}_v = \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_s, \quad (16')$$

$$\underline{\bar{r}}_u = \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_t, \quad (17')$$

$$\underline{f}'_1 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_t + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vt} = \underline{b}'_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_s + \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{us}, \quad (18')$$

$$\underline{\bar{q}}_{vv} = \underline{c}_1^2 \underline{\bar{r}}_{ss}, \quad (27')$$

$$\underline{\bar{r}}_{uu} = \underline{g}_1^2 \underline{\bar{q}}_{tt}, \quad (28')$$

$$\begin{aligned} \underline{f}''_1 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}''_1 \underline{\bar{q}}_t + 2\underline{f}'_1 \underline{\bar{q}}_{vv} + 2\underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_{vt} + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vvt} = \\ \underline{b}'_2 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}'_2 \underline{\bar{r}}_s + 2\underline{b}'_1 \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{us} + 2\underline{c}_1 \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_{ss} + \underline{c}_1^2 \underline{\bar{r}}_{uss}, \end{aligned} \quad (29')$$

$$\begin{aligned} \underline{b}''_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}''_1 \underline{\bar{r}}_s + 2\underline{b}'_1 \underline{\bar{r}}_{uu} + 2\underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_{us} + \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{uus} = \\ \underline{f}'_2 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}'_2 \underline{\bar{q}}_t + 2\underline{f}'_1 \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vt} + 2\underline{g}_1 \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_{tt} + \underline{g}_1^2 \underline{\bar{q}}_{vtt}, \end{aligned} \quad (30')$$

$$\begin{aligned} \underline{f}''_2 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}''_2 \underline{\bar{q}}_t + 2(\underline{f}_1'' + \underline{f}_2'') \underline{\bar{q}}_{vv} + 2(\underline{f}_1'' \underline{g}_1 + \underline{g}_2'') \underline{\bar{q}}_{vt} + \\ 2(\underline{g}_1 \underline{g}_1'' + \underline{g}_1'^2) \underline{\bar{q}}_{tt} + 4\underline{f}'_1 \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vvt} + 4\underline{g}_1 \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_{vtt} + \underline{g}_1^2 \underline{\bar{q}}_{vttt} = \\ \underline{b}''_2 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}''_2 \underline{\bar{r}}_s + 2(\underline{b}_1'' + \underline{b}_2') \underline{\bar{r}}_{uu} + 2(\underline{b}_1'' \underline{c}_1 + 2\underline{b}'_1 \underline{c}'_1 + \underline{c}'_2) \underline{\bar{r}}_{us} + \\ 2(\underline{c}_1 \underline{c}_1'' + \underline{c}_1'^2) \underline{\bar{r}}_{ss} + 4\underline{b}'_1 \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{uus} + 4\underline{c}_1 \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_{uss} + \underline{c}_1^2 \underline{\bar{r}}_{uuss}. \end{aligned} \quad (31')$$

To jest ważny przypadek szczególny, gdy pochodne pól pomocniczych są całkowicie zgodne, tj. ich krzywe stałego parametru mogą skleić się gładko z krzywymi stałego parametru pola p . Nie ma wtedy ograniczeń na pochodne krzywych brzegowych rzędu 3 i 4.

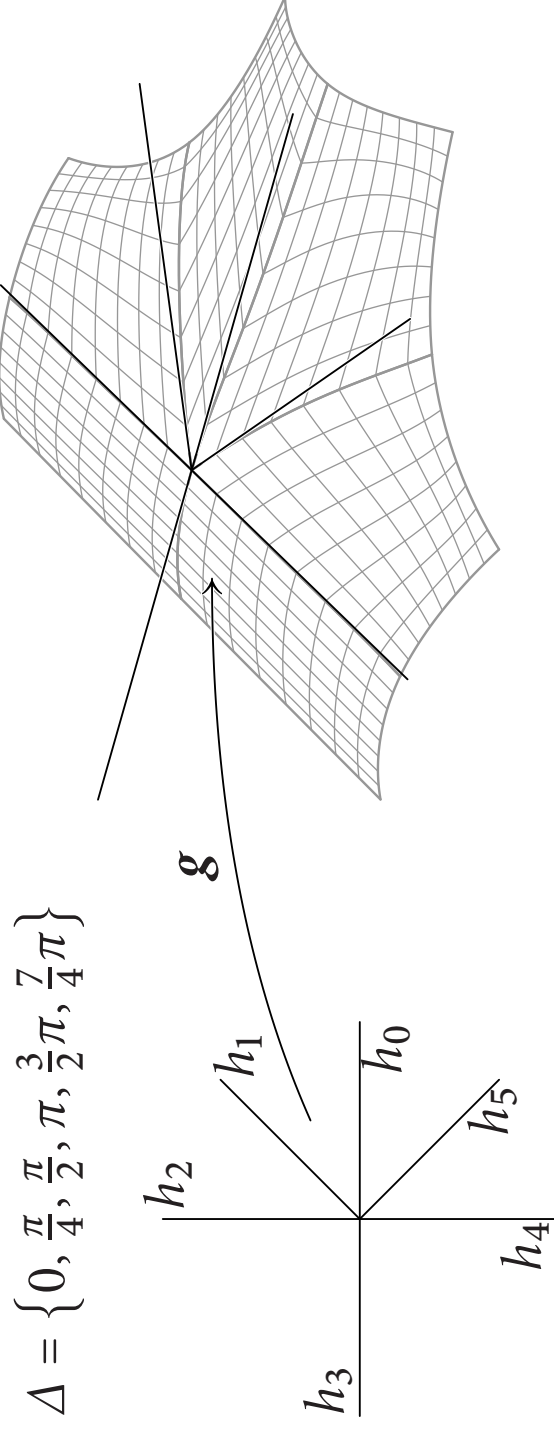
Globalne warunki zgodności G^2

„Bezpośrednia” analiza podobna do przypadku G^2 raczej nie ma szans powodzenia. Zamiast tego można rozpatrywać parametryzację klasy C^2 fragmentu powierzchni wokół wspólnego narożnika nad obszarem płaszczyzny zawierającym punkt $(0, 0)$, podzielonym półprostymi h_0, \dots, h_{k-1} na stożki. Zasadnicze znaczenie dla zgodności mają kierunki tych półprostych, które nazwiemy **liniami połączenia**.

Zbiór liczb

$$\Delta = \{ \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} : \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_0 + 2\pi \}$$

nazwiemy **podziałem kąta pełnego**. Liczba α_i określa kierunek (kąt nachylenia) półprostej h_i .



Zbiór półprostych stycznych do wspólnych krzywych płatów we wspólnym narożniku jest obrazem zbioru linii połączenia w pewnym przekształceniu afinicznym.

Oznaczmy $\delta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ dla $i = 0, \dots, k-2$ i niech $\delta_{k-1} = \alpha_0 + 2\pi - \alpha_{k-1}$. Oczywiście, $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = 2\pi$. Określimy wektory $\mathbf{u}_i = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i]^T$ oraz $\mathbf{v}_i = [-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i]^T$. Każdej parzy wektorów $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$ użyjemy do określenia układu współrzędnych, które oznaczymy symbolami x_i, y_i ; półprosta h_i wyznacza pierwszą dodatnią półoś tego układu.

Jeśli $\delta_i < \pi$, to stożek C_i , którego brzeg składa się z półprostych h_i i h_{i+1} jest zbiorem wypukłym: $C_i = \{ a\mathbf{u}_i + b\mathbf{u}_{i+1} : a, b \geq 0 \}$.

Jeśli $\delta_i = \pi$, to stożek $C_i = \{ a\mathbf{u}_i + b\mathbf{v}_i : a \in \mathbb{R}, b \geq 0 \}$ jest półpłaszczyzną, a jeśli $\delta_i > \pi$, to stożek jest wklęsły: $C_i = \{ a\mathbf{u}_i + b\mathbf{u}_{i+1} : a \leq 0 \text{ lub } b \leq 0 \}$.

Niech f_i oznacza funkcję klasy C^{2n} określonej w stożku C_i i niech f oznacza funkcję, której obcięciem do stożka C_i dla każdego i jest funkcja f_i . Dla funkcji f klasy $C^n(\mathbb{R}^2)$ warunki zgodności znajdziemy, badając składniki stopnia $0, \dots, 2n$ szeregów Taylora funkcji f_i .

Wielomian dwóch zmiennych stopnia $2n$ jest sumą $2n + 1$ składników jednorodnych:

$$p(x, y) = a_{00} + (a_{10}x + a_{11}y) + (a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2) + \dots + (a_{2n,0}x^{2n} + a_{2n,1}x^{2n-1}y + \dots + a_{2n,2n}y^{2n}). \quad (32)$$

Niech \mathcal{H}^l oznacza przestrzeń liniową, której elementami są jednorodne wielomiany stopnia l dwóch zmiennych. Każdy taki wielomian, przedstawiony jako funkcja współrzędnych kartezjańskich x, y , jest także jednorodnym wielomianem stopnia l zmiennych x_i i y_i .

Rozważmy teraz funkcje $g_l(x, y)$, których obcięcia do stożków C_0, \dots, C_{k-1} są jednorodnymi wielomianami stopnia l . Możemy opisać argumenty funkcji g_l za pomocą współrzędnych biegunowych (r, φ) :

$$g_l(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^l s_l(\varphi). \quad (33)$$

Funkcjom s_l , które mogą wystąpić w tym wzorze, przyjrzymy się dalej. Teraz zauważmy, że obcięcie funkcji g_l do dowolnej półprostej w \mathbb{R}^2 , której początkiem jest punkt $(0, 0)$, jest albo funkcją zerową, albo jednorodnym wielomianem stopnia l .

Symbolem $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)}$ oznaczmy przestrzeń funkcji klasy C^n , których obcięcia do stożków C_i są jednorodnymi wielomianami zmiennych x, y , stopnia l .

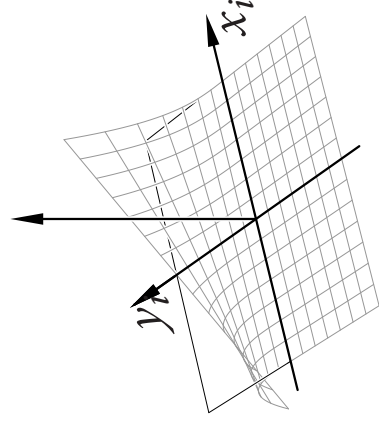
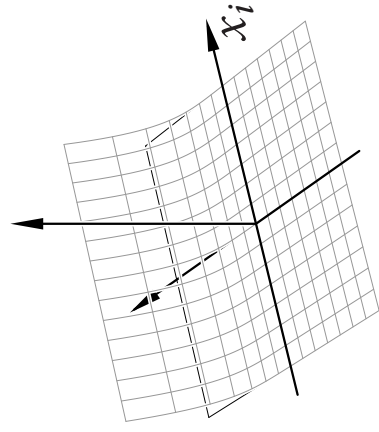
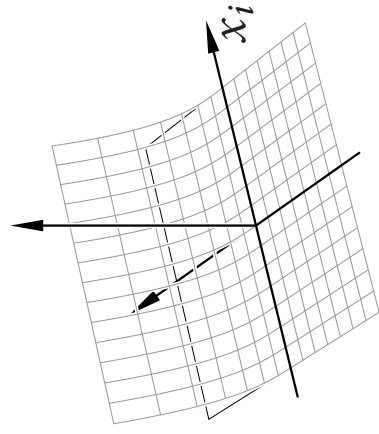
Twierdzenie 12 Niech h oznacza liczbę par liczb $\{\alpha_j, \alpha_j + \pi\}$ w podziale kąta pełnego $\Delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\}$. Wtedy

$$\dim \mathcal{H}_\Delta^{(l,n)} = \max\{l+1, k(l-n), h(l-n) + l+1\}.$$

Dowód polega na znalezieniu bazy.

Pierwsze $l+1$ elementów to jednorodne wielomiany stopnia l : $x^l, x^{l-1}y, \dots, y^l$. Jeśli $l \leq n$, to to już wszystko, wtedy $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)} = \mathcal{H}^l$.

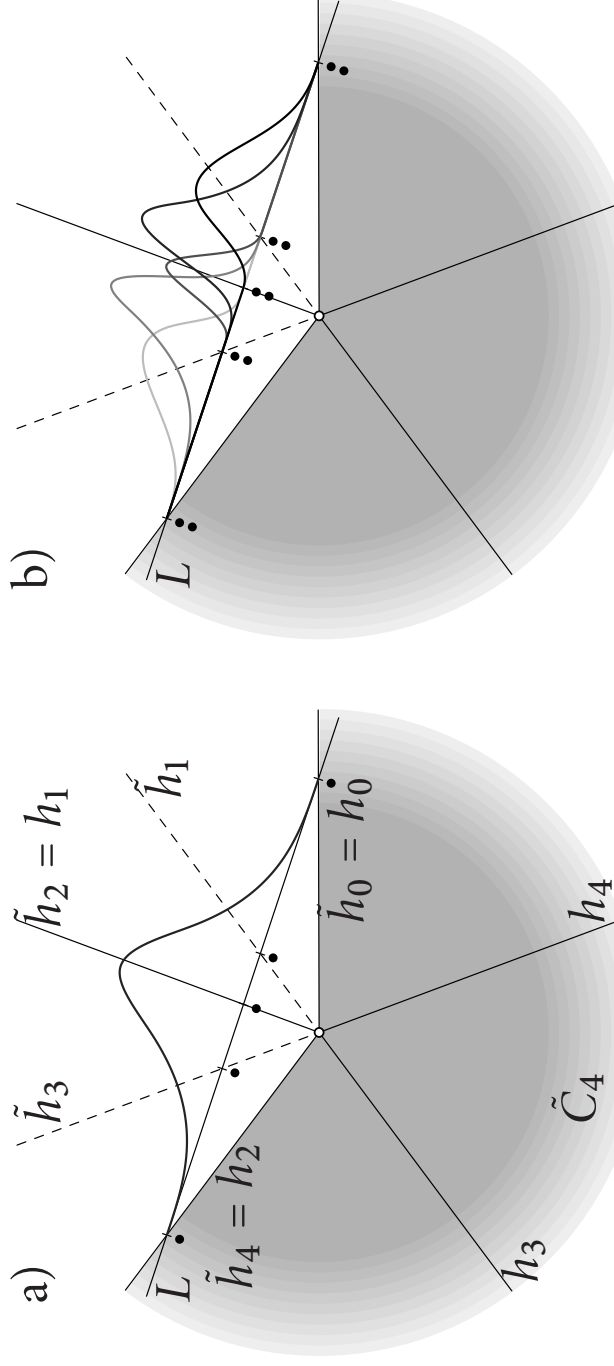
Jeśli $h > 0$, to istnieje h prostych złożonych z półprostych — linii podziału. Wtedy jeśli $l > n$, to do poszukiwanej bazy możemy dołączyć obcięte wielomiany, tj. funkcje, które w jednej półpłaszczyźnie są wielomianami, a w drugiej są równe 0. Dla każdej takiej prostej jest $l - n$ takich funkcji liniowo niezależnych.



Teraz usuniemy h linii połączenia, tak aby pozostało $k - h$ półprostych, z których każda jest częścią innej prostej. Dalej, każdą półprostą nachyloną pod kątem większym niż $\alpha_i = \alpha_0 + \pi$, zastąpimy półprostą nachyloną pod kątem $\alpha_i - \pi$. Otrzymany podział kąta pełnego oznaczmy $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{k-h}\}$.

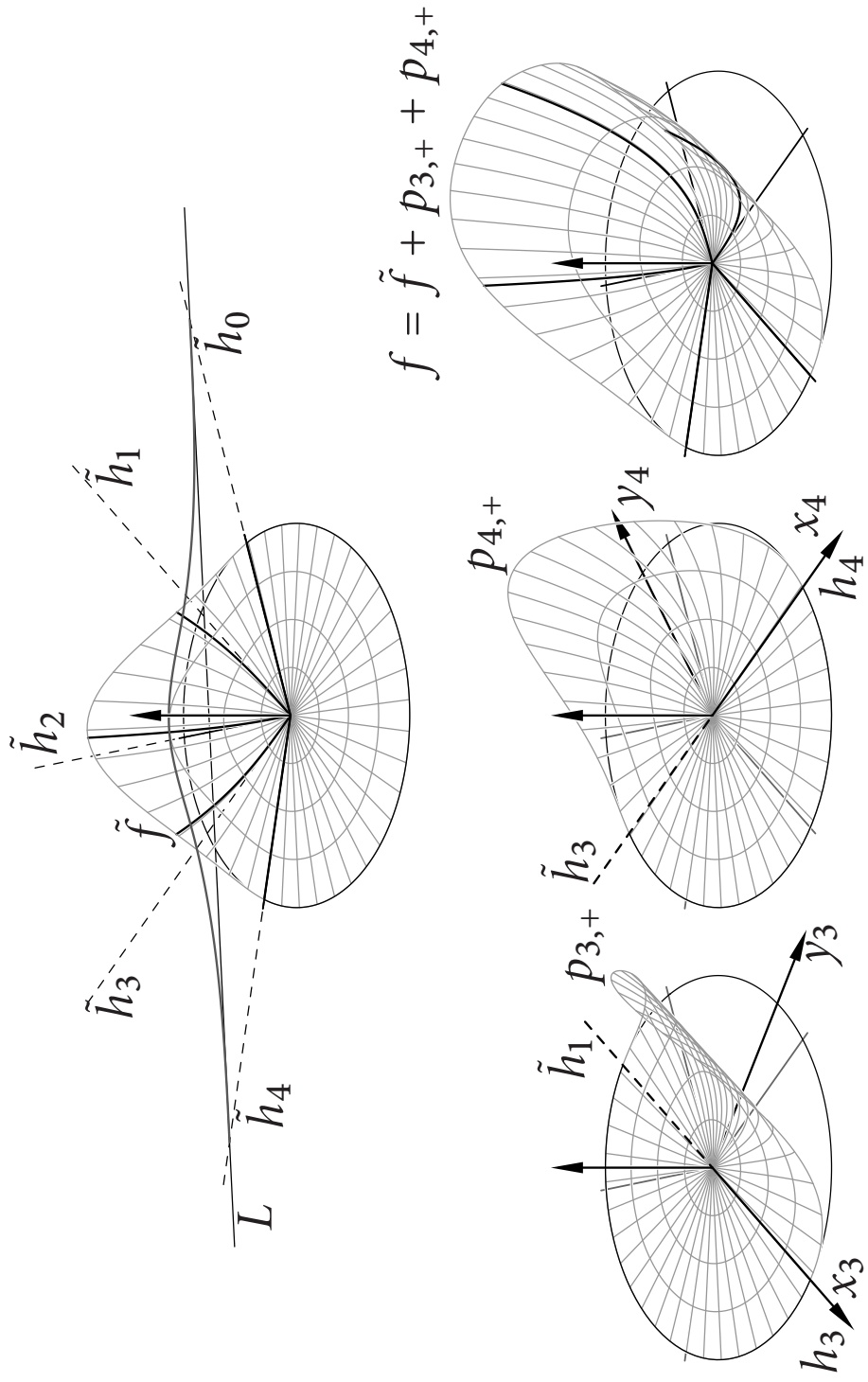
Półproste \tilde{h}_0 i \tilde{h}_{k-h} wyznaczają brzeg stożka wypukłego zawierającego wszystkie pozostałe półproste, zatem istnieje prosta L przecinająca wszystkie te proste w punktach innych niż $(0, 0)$ (np. prostopadła do osi symetrii stożka).

Wybierając układ współrzędnych, którego oś x jest równoległa do prostej L , a oś y jest osią symetrii stożka, punkty przecięcia prostej L z półprostymi przyjmujemy za węzły funkcji sklejanых stopnia l , o krotnościach $l - n$.



Jeśli liczba tych węzłów jest dostatecznie duża (większa niż $l + 1$), to istnieje $(l - n)(k - h) - l - 1$ funkcji B-sklejanych stopnia l z tymi węzłami. Skonstruujemy z tych funkcji pozostałe poszukiwane elementy bazy.

Funkcje określone na prostej L rozszerzamy na całą płaszczyznę tak, aby na każdej półprostej o początku w $(0, 0)$ była wielomianem jednorodnym stopnia l , a potem dodajemy obcięte funkcje potęgowe dwóch zmiennych tak, aby „przenieść” sklejenie różnych wielomianów na linie połączenia nachylone pod kątami $\alpha_i > \alpha_0 + \pi$.



Mamy zatem bazę składającą się z $d_1 = l + 1$ wielomianów,
 $d_2 = \max\{0, h(l - n)\}$ obciętych funkcji potęgowych oraz
 $d_3 = \max\{0, (l - n)(k - h) - l - i\}$ funkcji skonstruowanych z funkcji
B-sklejanych na prostej L . Wystarczy dodać $d_1 + d_2 + d_3$ i uporządkować.
 \square

Udowodnione twierdzenie opisuje *wszystkie* stopnie swobody wyboru pochodnych we wspólnym wierzchołku płatów połączonych z ciągłością G^n (dla każdego n).

Przyjrzyjmy się jeszcze funkcjom otrzymanym z funkcji B-sklejanych na prostej L . Dla pełności konstrukcji trzeba umieć obliczać ich pochodne i w szczególności różnice wielomianów rozgraniczonych liniami połączenia.

Definicja 1 Niech $L = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y = 1 \}$ i niech u_1, \dots, u_{i+n+1} będzie niemalejącym ciągiem liczb (węzłów). **Rozszerzona unormowana funkcja B-sklejana stopnia n z tymi węzłami jest określona wzorem**

$$E_i^n(x, y) = \begin{cases} (-1)^{n+1}(u_{i+n+1} - u_i) f_{x,y}^n[u_1, \dots, u_{i+n+1}] & \text{jeśli } y > 0, \\ 0 & \text{jeśli } y \leq 0, \end{cases} \quad (34)$$

przy czym $f_{x,y}^n[u_1, \dots, u_{i+n+1}]$ jest to różnica dzielona rzędu $n + 1$ funkcji

$$f_{x,y}^n(u) \stackrel{\text{def}}{=} (x - uy)_+^n = \begin{cases} (x - uy)^n & \text{jeśli } x \geq uy, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście, $E_i^n(x, 1) = N_i^n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a więc obcięcie funkcji E_i^n do prostej L jest unormowaną funkcją B-sklejaną stopnia n . Ponadto obcięcie funkcji E_i^n do dowolnej półprostej w \mathbb{R}^2 o początku w punkcie $(0, 0)$, czyli funkcja $E_i^n(tx, ty)$ zmiennej t jest albo funkcją zerową, albo jednorodnym wielomianem stopnia n .

Stwierdzenie 2 Funkcje E_i^n mogą być otrzymane ze wzoru

$$E_i^0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y > 0 \text{ i } x \in [u_i y, u_{i+1} y), \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \quad (35)$$

$$E_i^n(x, y) = \frac{x - u_i y}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y) + \frac{u_{i+n+1} y - x}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} E_{i+1}^{n-1}(x, y) \quad \text{dla } n > 0, \quad (36)$$

który jest odpowiednikiem wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa.

Stwierdzenie 3 Niech $n > 0$. Jeśli $y > 0$ i liczba x/y nie jest węzłem o krotności n , lub jeśli $y \leq 0$, to pochodne cząstkowe funkcji E_i^n są opisane wzorami

$$\frac{\partial}{\partial x} E_i^n(x, y) = \frac{n}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y) - \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} E_{i+1}^{n-1}(x, y), \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_i^n(x, y) = \frac{n u_{i+n+1}}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} E_{i+1}^{n-1}(x, y) - \frac{n u_i}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y). \quad (38)$$

Trygonometryczne funkcje sklepane

Chcąc znaleźć jawne ograniczenia dla pochodnych krzywych wspólnych płatów połączonych z ciągłością G^2 lub jeszcze gładziej, można dokonać przejścia do współrzędnych biegunowych: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Wielomian dwóch zmiennych stopnia $2n$ przedstawimy w postaci

$$p(x, y) = r^0 T_0(\varphi) + r^1 T_1(\varphi) + r^2 T_2(\varphi) + \dots + r^{2n} T_{2n}(\varphi).$$

Funkcja T_l jest parzystym albo nieparzystym (zależnie od parzystości l) wielomianem trygonometrycznym stopnia l :

$$T_l(\varphi) = \begin{cases} a_{l,0} + \sum_{j=1}^{l/2} (a_{l,2j} \cos 2j\varphi + b_{l,2j} \sin 2j\varphi) & \text{jeśli } l \text{ jest parzyste,} \\ \sum_{j=0}^{(l-1)/2} (a_{l,2j+1} \cos(2j+1)\varphi + b_{l,2j+1} \sin(2j+1)\varphi) & \text{jeśli } l \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Funkcję sklejającą klasy C^n , stopnia $2n$ nad podziałem kąta pełnego Δ przedstawimy w postaci

$$g(x, y) = r^0 s_0(\varphi) + r^1 s_1(\varphi) + r^2 s_2(\varphi) + \dots + r^{2n} s_{2n}(\varphi).$$

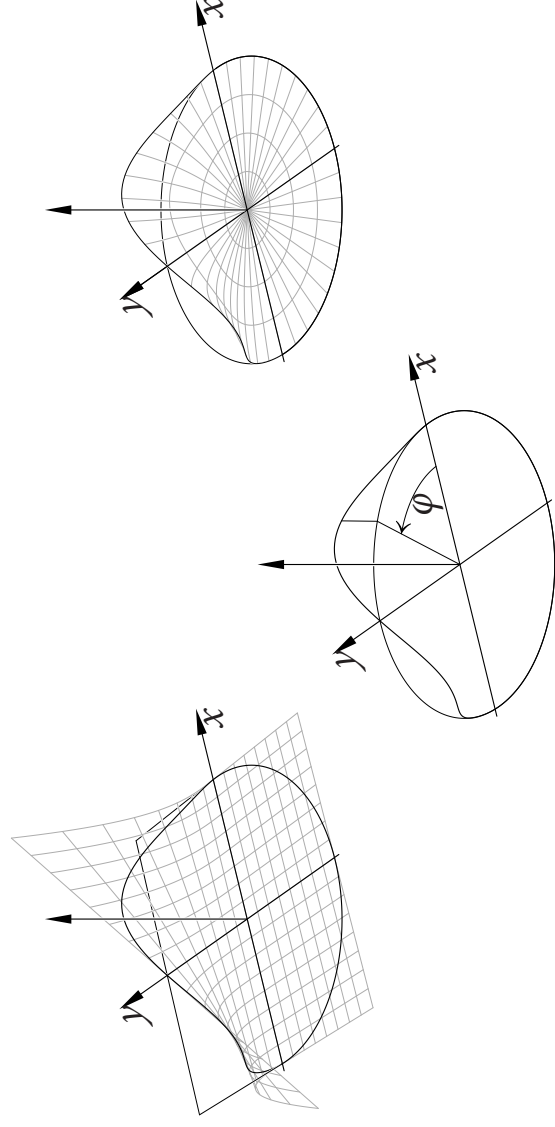
Funkcje s_l dla $l \leq n$ są wielomianami trygonometrycznymi, a dla $l > n$ są okresowymi parzystymi albo nieparzystymi trygonometrycznymi funkcjami sklejającymi klasy C^n , które w przedziałach $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ są parzystymi albo nieparzystymi wielomianami trygonometrycznymi stopnia l .

Twierdzenie 13 Przestrzenie $\mathcal{T}_\Delta^{(l,n)}$ i $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)}$ mają taki sam wymiar,

$$\dim \mathcal{T}_\Delta^{(l,n)} = \max\{l + 1, k(l - n), h(l - n) + l + 1\}.$$

Symbol k oznacza liczbę elementów podziału Δ , zaś h jest liczbą par $\{\alpha_i, \alpha_j + \pi\}$ w tym podziale.

Dowód: obcięcie funkcji z przestrzeni $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)}$ do okręgu jednostkowego jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. \square



Pochodne wielomianu q , który w stożku C_i opisuje funkcję g , można obliczać ze wzorów

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= s_0(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i} &= s_1(\alpha_i), & \bar{q}_{i,y_i} &= s'_1(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i x_i} &= 2s_2(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i y_i} &= s'_2(\alpha_i), & \bar{q}_{i,y_i y_i} &= 2s_2(\alpha_i) + s''_2(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i x_i x_i} &= 6s_3(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i x_i y_i} &= 2s'_3(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i y_i y_i} &= 3s_3(\alpha_i) + s''_3(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i x_i x_i x_i} &= 24s_4(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i x_i x_i y_i} &= 6s'_4(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i x_i y_i y_i} &= 8s_4(\alpha_i) + 2s''_4(\alpha_i). \end{aligned}$$

Te wzory są szczególnymi przypadkami uogólnionego wzoru Fàa di Bruno, choć prościej jest znaleźć je „na piechotę”.

Globalny warunek zgodności G^1 — rewizyta

Funkcja sklejana klasy C^1 stopnia 2 nad podziałem $\Delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\}$ w postaci trygonometrycznej ma tylko 3 składniki:

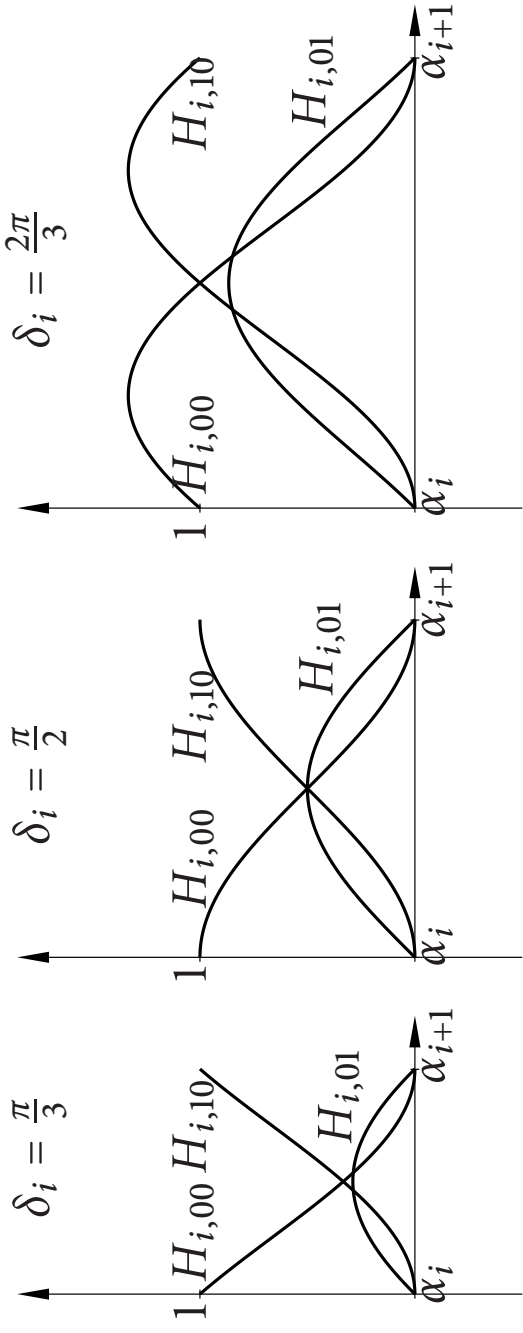
$$g(x, y) = s_0 + r s_1(\varphi) + r^2 s_2(\varphi).$$

Funkcja s_0 jest stała i równa $g(0, 0)$. Funkcja s_1 jest nieparzystym wielomianem trygonometrycznym pierwszego stopnia, który wyznacza płaszczyznę styczną do wykresu funkcji g w punkcie $(0, 0)$. Aby zbadać ostatni składnik, dla każdego przedziału $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, o długości δ_i , określimy trzy funkcje:

$$H_{i,00}(\varphi) = \frac{\sin^2(\varphi - \alpha_{i+1})}{\sin^2 \delta_i},$$

$$H_{i,10}(\varphi) = \frac{\sin^2(\varphi - \alpha_i)}{\sin^2 \delta_i},$$

$$H_{i,01}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \alpha_i) \sin(\alpha_{i+1} - \varphi)}{\sin \delta_i}.$$



$$\begin{aligned}
 H_{i,00}(\alpha_i) &= 1, & H_{i,10}(\alpha_i) &= 0, & H_{i,01}(\alpha_i) &= 0, \\
 H_{i,00}(\alpha_{i+1}) &= 0, & H_{i,10}(\alpha_{i+1}) &= 1, & H_{i,01}(\alpha_{i+1}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Wielomian trygonometryczny

$$p_i(\varphi) = a_i H_{i,00}(\varphi) + a_{i+1} H_{i,10}(\varphi) + b_i H_{i,01}(\varphi),$$

niezależnie od wartości współczynnika b_i , spełnia warunki interpolacyjne $p_i(\alpha_i) = a_i$ i $p_i(\alpha_{i+1}) = a_{i+1}$. Wartość wielomianu trygonometrycznego

$$p_{i-1}(\varphi) = a_{i-1} H_{i-1,00}(\varphi) + a_i H_{i-1,10}(\varphi) + b_{i-1} H_{i-1,01}(\varphi)$$

w punkcie α_i jest też równa a_i . Dlatego dowolne liczby a_0, \dots, a_{k-1} i b_0, \dots, b_{k-1} umożliwiają określenie funkcji s_2 , której obcięcie do każdego przedziału $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ jest trygonometrycznym wielomianem p_i drugiego stopnia; funkcja s_2 jest ciągła i spełnia warunek $s_2(\alpha_i) = a_i$ dla każdego i .

Poszukujemy funkcji s_2 klasy C^1 . Możemy sprawdzić, że

$$H'_{i,00}(\alpha_i) = \frac{\sin 2(\varphi - \alpha_{i+1})}{\sin^2 \delta_i}, \quad H'_{i,10}(\alpha_i) = 0, \quad H'_{i,01}(\alpha_i) = 1,$$

$$H'_{i,00}(\alpha_{i+1}) = 0, \quad H'_{i,10}(\alpha_{i+1}) = \frac{\sin 2(\varphi - \alpha_i)}{\sin^2 \delta_i}, \quad H'_{i,01}(\alpha_{i+1}) = -1.$$

Stąd otrzymamy pochodne funkcji p_{i-1} i p_i w punkcie α_i :

$$p'_{i-1}(\alpha_i) = \frac{\sin 2\delta_{i-1}}{\sin^2 \delta_{i-1}} a_i - b_{i-1}. \quad p'_i(\alpha_i) = -\frac{\sin 2\delta_i}{\sin^2 \delta_i} a_i + b_i.$$

Po uporządkowaniu równania $p'_{i-1}(\alpha_i) = p'_i(\alpha_i)$ otrzymujemy następującą równość:

$$b_{i-1} + b_i = \left(\frac{\sin 2\delta_{i-1}}{\sin^2 \delta_{i-1}} + \frac{\sin 2\delta_i}{\sin^2 \delta_i} \right) a_i.$$

Wyznacznik macierzy po prawej stronie jest równy 2, jeśli k jest parzyste i 0, jeśli nieparzyste — wtedy rząd macierzy jest równy $k - 1$.

Warunek niesprzeczności układu dla parzystego k ma postać równania

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\operatorname{ctg} \delta_{i-1} + \operatorname{ctg} \delta_i) a_i,$$

które możemy przepisać w postaci

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\sin(\delta_{i-1} + \delta_i)}{\sin \delta_{i-1} \sin \delta_i} s_2(\alpha_i) = 0.$$

Warunki zgodności G^2

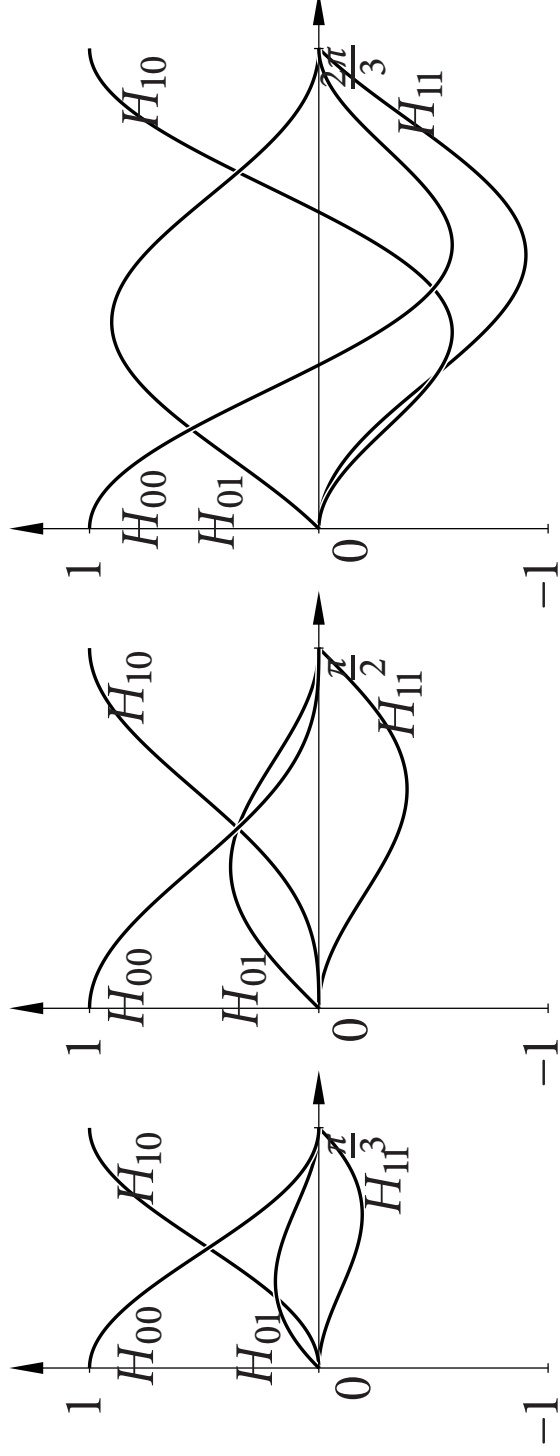
Oznaczmy $\phi_i = \phi - \alpha_i$. Dowolny element przestrzeni $\mathcal{T}_\Delta^{(3,2)}$ jest funkcją klasy C^2 , która w każdym przedziale $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ jest określona wzorem

$$s(\phi) = a_i \cos \phi_i + b_i \sin \phi_i + c_i \cos 3\phi_i + d_i \sin 3\phi_i. \quad (40)$$

Aby rozwiązywać zadania interpolacyjne, dla każdego takiego przedziału konstruujemy (jeśli to możliwe) lokalną bazę Hermitę przestrzeni nieparzystych wielomianów trygonometrycznych trzeciego stopnia. Jej elementami są funkcje $H_{i,00}, H_{i,01}, H_{i,10}, H_{i,11}$, takie że macierz

$$\begin{bmatrix} H_{i,00}(\alpha_i) & H'_{i,00}(\alpha_i) & H_{i,00}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,00}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,01}(\alpha_i) & H'_{i,01}(\alpha_i) & H_{i,01}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,01}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,10}(\alpha_i) & H'_{i,10}(\alpha_i) & H_{i,10}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,10}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,11}(\alpha_i) & H'_{i,11}(\alpha_i) & H_{i,11}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,11}(\alpha_{i+1}) \end{bmatrix}$$

jest jednostkowa.



Znając lokalną bazę Hermite'a dla każdego przedziału $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dla dowolnych liczb x_i i y_i możemy otrzymać funkcję klasy C^1 , która w przedziale $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ jest opisana wzorem

$$s(\phi) = H_{i,00}(\phi)x_i + H_{i,01}(\phi)y_i + H_{i,10}(\phi)x_{i+1} + H_{i,11}(\phi)y_{i+1},$$

w którym $s(\alpha_i) = x_i$, a $s'(\alpha_i) = y_i$. Ponadto można żądać ciągłości pochodnej drugiego rzędu w punkcie α_i , przez nałożenie warunku $s''_-(\alpha_i) = s''_+(\alpha_i)$. W wyniku, dla $i = 0, \dots, k-1$ otrzymamy układ równań liniowych podobny do tego, który powstaje w konstrukcji zamkniętej interpolacyjnej krzywej sklejaney trzeciego stopnia.

Żmudne rachunki (obejmujące znalezienie tych lokalnych baz i obliczenie ich pochodnych w węzłach) prowadzą do otrzymania równania

$$\sin \delta_i y_{i-1} + 2 \sin(\delta_{i-1} + \delta_i) y_i + \sin \delta_{i-1} y_{i+1} = 3 \left(-\frac{\cos \delta_{i-1} \sin \delta_i}{\sin \delta_{i-1}} x_{i-1} + \frac{\cos 2\delta_{i-1} - \cos 2\delta_i}{2 \sin \delta_{i-1} \sin \delta_i} x_i + \frac{\cos \delta_i \sin \delta_{i-1}}{\sin \delta_i} x_{i+1} \right),$$

w którym $x_i = s(\alpha_i)$, $y_i = s'(\alpha_i)$.

Równania te zbieramy w układ równań liniowych $A_3 Y_3 = B_3 X_3$, w którym wektor X_3 składa się z wartości funkcji s w węzłach, wektor Y_3 składa się z pochodnych, a macierze A_3 i B_3 są cykliczne trójdzielne.

$$\begin{aligned}
A_3 = & \begin{bmatrix} 2 \sin(\delta_{k-1} + \delta_0) & \sin \delta_{k-1} & \sin \delta_0 \\ \sin \delta_1 & 2 \sin(\delta_0 + \delta_1) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin \delta_{k-2} & \cdot & \sin \delta_{k-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin \delta_{k-1} & 2 \sin(\delta_{k-2} + \delta_{k-1}) & \cdot \end{bmatrix}, \\
B_3 = & \begin{bmatrix} \frac{\cos 2\delta_{k-1} - \cos 2\delta_0}{2 \sin \delta_{k-1} \sin \delta_0} & \frac{\cos \delta_0 \sin \delta_{k-1}}{\sin \delta_0} & \frac{-\cos \delta_{k-1} \sin \delta_0}{\sin \delta_{k-1}} \\ \frac{-\cos \delta_0 \sin \delta_1}{\sin \delta_0} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\cos \delta_{k-1} \sin \delta_{k-2}}{\sin \delta_{k-1}} & \cdot & \frac{\cos \delta_{k-2} \sin \delta_{k-3}}{\sin \delta_{k-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\cos \delta_{k-1} \sin \delta_{k-2}}{\sin \delta_{k-1}} & \frac{-\cos \delta_{k-2} \sin \delta_{k-1}}{\sin \delta_{k-2}} & \frac{\cos 2\delta_{k-2} - \cos 2\delta_{k-1}}{2 \sin \delta_{k-2} \sin \delta_{k-1}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Wyniki analizy są takie (zakładamy, że $0 < \delta_i < \pi$ dla każdego i):

- Jeśli $k = 3$, to dla dowolnego podziału Δ nie ma ograniczeń na pochodne trzeciego rzędu krzywych wspólnych, rozwiązanie układu jest niejednoznaczne, bo istnieją wielomianowe małpie siodła.
- Jeśli $k = 4$, to dla $h = 0$ (tj. $\alpha_2 \neq \alpha_1 + \pi$, $\alpha_3 \neq \alpha_1 + \pi$) i dowolnego X_3 układ ma jednoznaczne rozwiązanie Y_3 .
- Jeśli $h = 1$ ($\alpha_2 = \alpha_0 + \pi$, $\alpha_3 \neq \alpha_1 + \pi$) rozwiązania Y_3 istnieją, gdy $x_0 = -x_2$. Wtedy zbiór tych rozwiązań jest warstwą dwuwymiarową.
- Jeśli $h = 2$, to X_3 może być dowolne, układ ma dwuwymiarową warstwę rozwiązań Y_3 .

- Dla $k = 5$ może być $h = 0, 1, 2$. W pierwszym przypadku nie ma ograniczeń na X_3 , rozwiązanie Y_3 jest jednoznaczne.

Dla $h = 1$, jeśli $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \pi$ to musi być $x_{i+2} = -x_i$, zbiór rozwiązań Y_3 jest warstwą jednowymiarową.

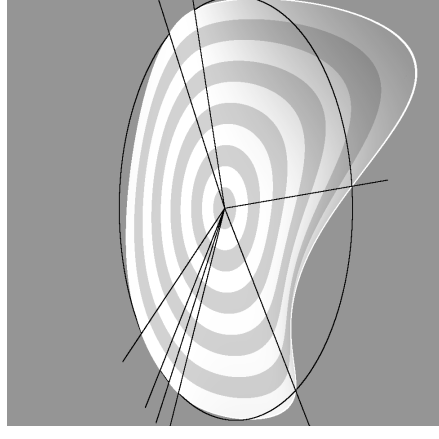
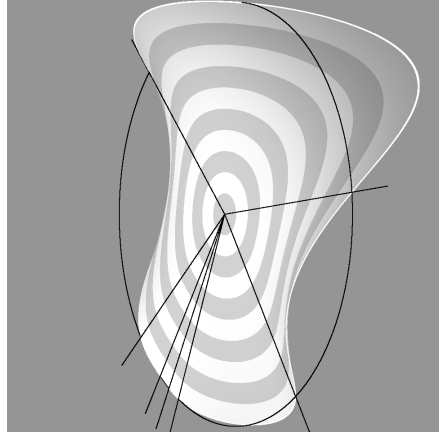
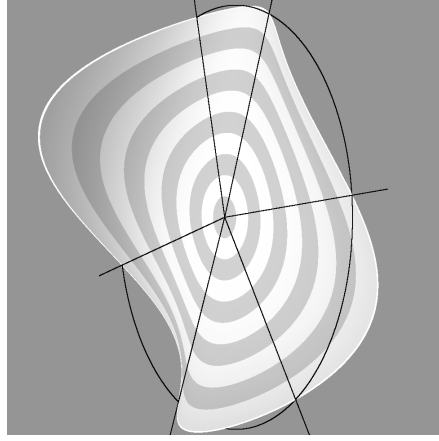
Dla $h = 2$ nie ma ograniczeń na X_3 , warstwa rozwiązań Y_3 jest jednowymiarowa.

- Dla $k = 6$ może być $h = 0, 1, 2, 3$. Jeśli $h = 3$, to nie ma ograniczeń dla X_3 , zbiór rozwiązań Y_3 jest warstwą jednowymiarową (istnieją małe siodła).

Jeśli $h < 3$, to $\dim \mathcal{T}_\Delta^{(3,2)} = 6$. Jeśli $h = 2$, to macierz A_3 jest nieosobliwa (rozwiązanie Y_3 jest jednoznaczne).

Jeśli $h < 2$ oraz macierz A_3 jest osobliwa, to warunek istnienia rozwiązań Y_3 ma postać jednego jednorodnego równania, które musi spełniać wektor X_3 .

- Dla $k > 6$ niewiele wiadomo poza tym, że istnieją małe siodła dla dowolnego k .



Ale, jeśli podział Δ jest w przybliżeniu równomierny (jeśli jest $\delta_{i-1} + \delta_1 < \frac{2\pi}{3}$ dla każdego i), to macierz A_3 jest diagonalnie dominująca, czyli nieosobliwa.

Badanie warunków zgodności G^2 dla pochodnych rzędu 4 można sprowadzić do badania przestrzeni $\mathcal{T}_{\Delta}^{(4,2)}$. Oprócz wartości x_i funkcji s i jej pochodnych y_i w węzłach α_i są tu dodatkowe zmienne z_i , które są składnikami pochodnych drugiego rzędu. Funkcja $s \in \mathcal{T}_{\Delta}^{(4,2)}$ ma ciągłą pochodną drugiego rzędu w węzle α_i , jeśli

$$\begin{aligned} & (\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)(z_i - z_{i-1}) + \\ & 6(\sin 2(\delta_{i-1} + \delta_i) - \sin 2\delta_{i-1} - \sin 2\delta_i) y_i = \\ & 4(\cos 2\delta_{i-1} + 2)(\cos 2\delta_i - 1)(x_i - x_{i-1}) + \\ & 4(\cos 2\delta_i + 2)(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(x_{i+1} - x_i), \end{aligned}$$

Układ wszystkich tych równań ma postać $A_4 Z_4 + B_4 Y_4 = C_4 X_4$, z macierzami, które można napisać na podstawie powyższego wzoru.

- Jeśli $\delta_i + \delta_{i+1} \neq \pi$ dla każdego i (czyli $h = 0$), to dla dowolnych wektorów X_4 i Z_4 układ ma jednoznaczne rozwiązanie Y_4 .
- Układ jednorodny $A_4 Z_4 = 0$ ma zawsze rozwiązania postaci $Z = a[1, \dots, 1]^T$. Dla ustalonych wektorów X_4 i Y_4 układ $A_4 Z_4 + B_4 Y_4 = C_4 X_4$ ma rozwiązanie Z_4 , gdy

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sin 2(\delta_{i-1} + \delta_i) - \sin 2\delta_{i-1} - \sin 2\delta_i}{(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)} y_i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4(\cos 2\delta_{i-1} - \cos 2\delta_i)}{(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)} x_i.$$

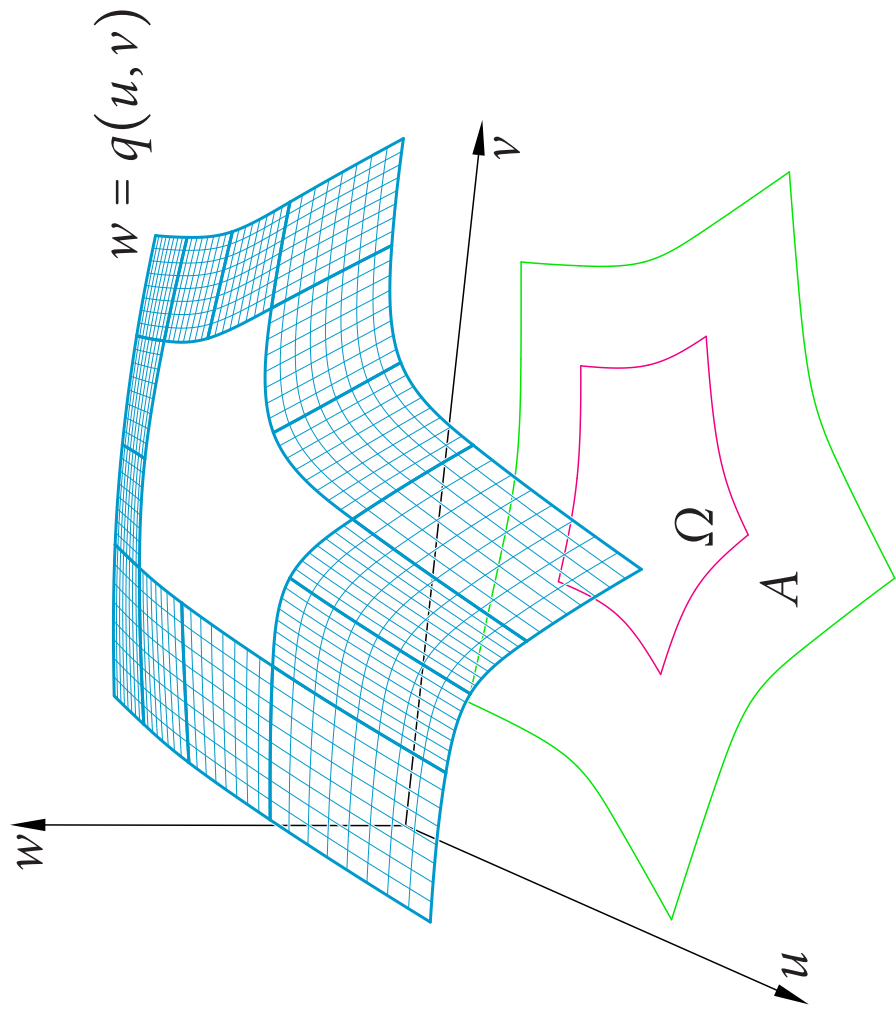
- Dla $k = 4$, $h = 2$ układ z dowolnymi wektorami X_4 i Y_4 ma rozwiązanie Z_4 .
- W pozostałych przypadkach układ z niewiadomymi Y_4 i Z_4 jest niesprzeczny, wymiar przestrzeni układu jednorodnego $A_4 Z + B_4 Y = 0$ jest równy k (zatem, nie ma ograniczeń na pochodne czwartego rzędu krzywych wspólnych).

Wypełnianie wielokątnych otworów

Konstrukcję powierzchni wypełniającej wielokątne otwory można oprzeć na schemacie Hahna, ale „ręczne” dobieranie wartości wyetępujących w nim parametrów jest zbyt pracochłonne dla człowieka, przygotowyującego projekt. Automatyzacja doboru tych parametrów powinna korzystać z pewnego kryterium optymalizacji kształtu — celem jest otrzymanie powierzchni wypełniającej, która w żaden sposób się nie „wyróżnia”.

Dlatego schematu Hahna lepiej jest użyć do skonstruowania bazy pewnej przestrzeni liniowej, której elementami są funkcje mające tę własność, że jeśli parametryzacja, której współrzędne są opisane przez te funkcje jest regularna, to powierzchnia wykazuje potrzebny rząd ciągłości geometrycznej (np. G^1 lub G^2).

Powierzchnię z otworem (przy założeniu, że to jest możliwe) przedstawiamy w układzie współrzędnych, w którym jest ona wykresem funkcji skalarnej:

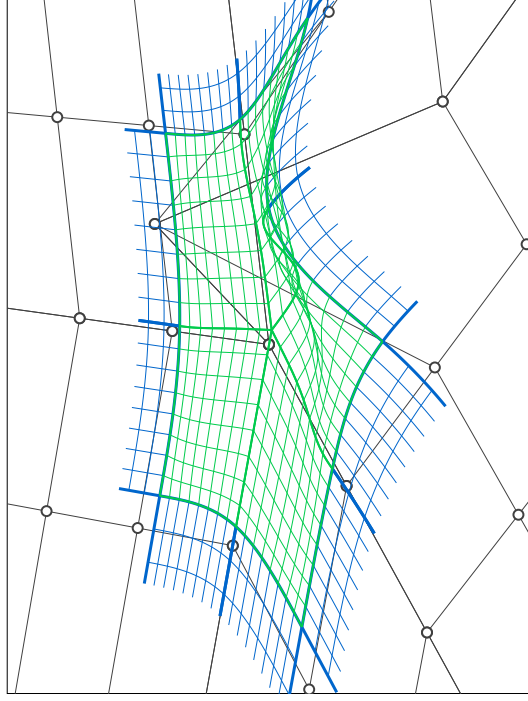
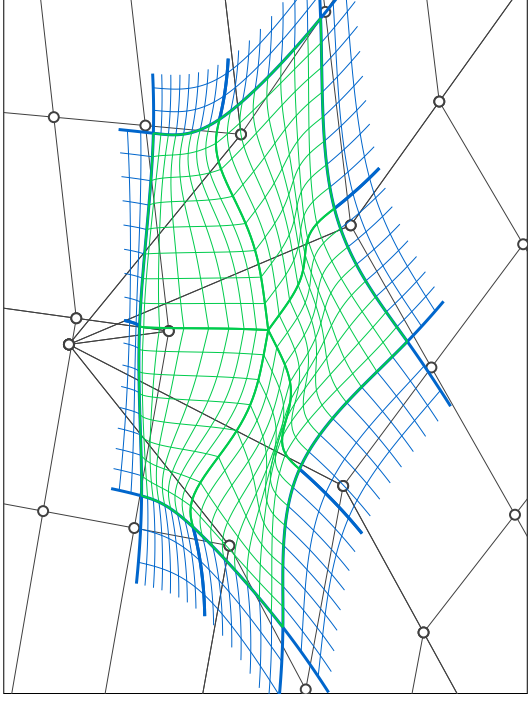
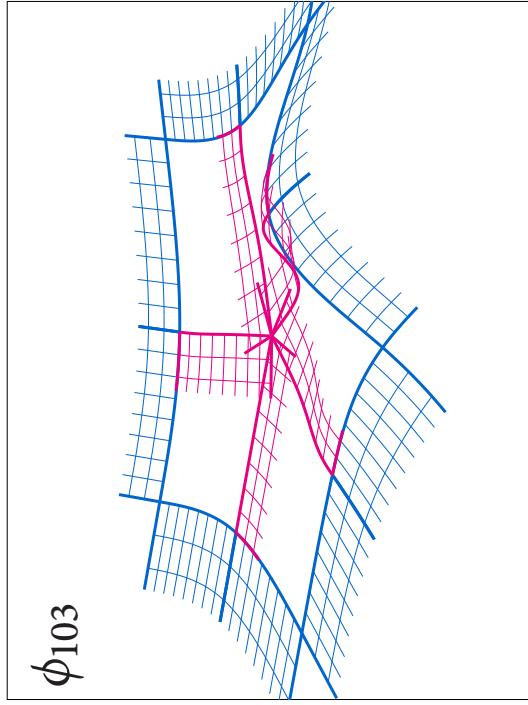
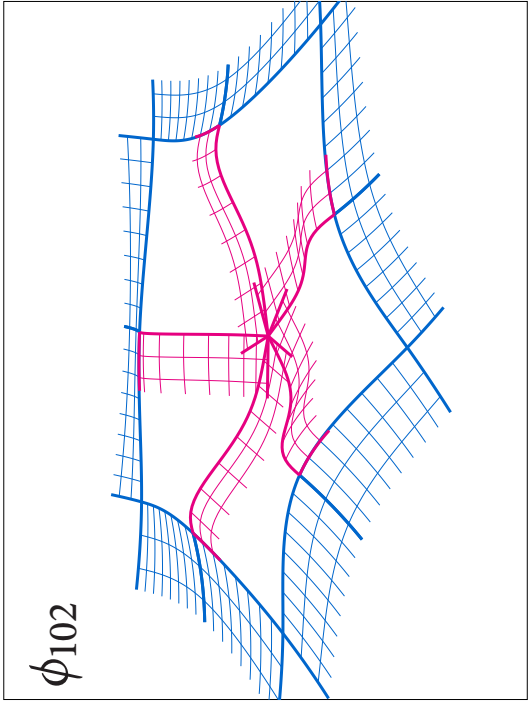


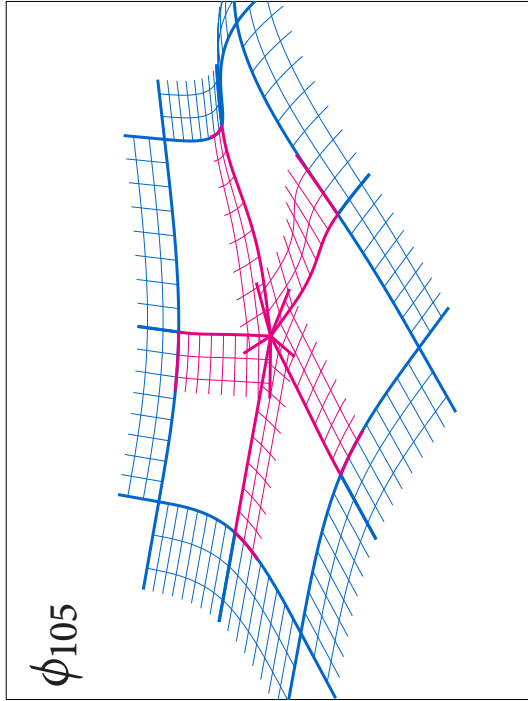
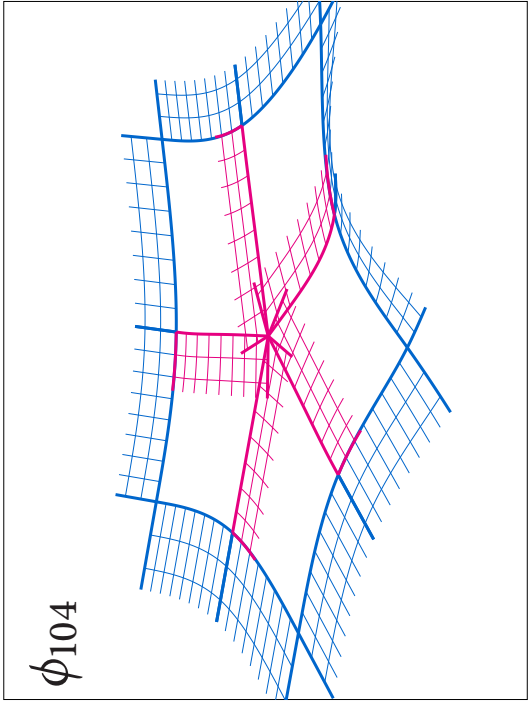
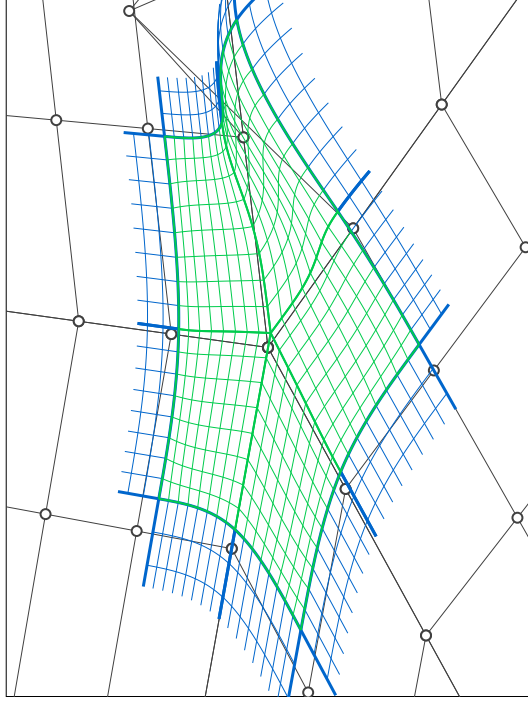
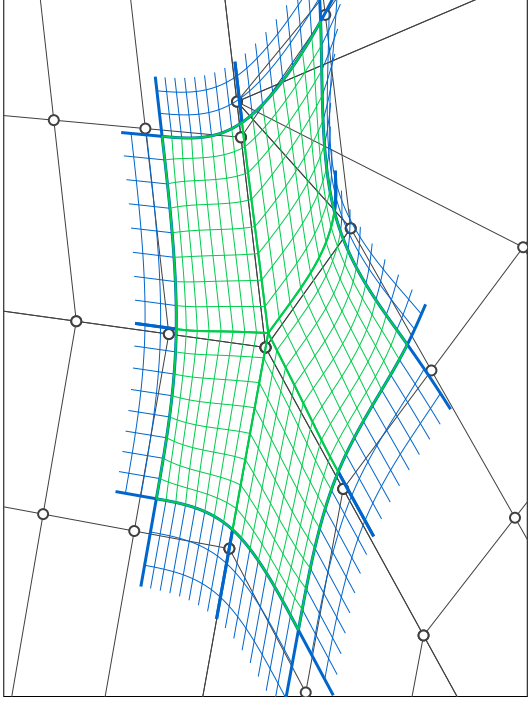
Funkcja jest określona w obszarze $A \setminus \Omega$, który jest krzywoliniowym wielokątem z otworem będącym k -kątnym wielokątem krzywoliniowym.

Przy założeniu, że powierzchnia jest zbudowana z płatów bikubicznych połączonych w sposób zapewniający ciągłość pochodnych rzędu 2, brzeg otworu i pochodne rzędu 1 i 2 są określone przez $6k + 1$ punktów kontrolnych (wierzchołków siatki reprezentującej powierzchnię z otworem). Trzeba więc skonstruować bazę przestrzeni (ozn. V_1) składającą się z $m = 6k + 1$ funkcji klasy C^1 lub C^2 w całym obszarze A — funkcje te są przedłużeniem na obszar Ω funkcji $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ danych „na zewnątrz” tego obszaru.

Obszar Ω można za pomocą k krzywych podzielić na k czworokątów krzywoliniowych, $\Omega_0, \dots, \Omega_{k-1}$, których wspólnym wierzchołek jest „punktem środkowym” obszaru Ω . Dla każdego z tych czworokątów wprowadzimy parametryzację wielomianową $\mathbf{d}_l: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega_l$ (tzw. **płat dziedziny**). Funkcja ϕ_i w obszarze Ω_l jest złożeniem $\beta_{li} \circ \mathbf{d}_l$, gdzie β_{li} oznacza wielomian nazwany **płatem funkcji bazowej**.

Można przyjąć, że funkcje otrzymane przez rozszerzenie funkcji bazowych związanych z wierzchołkami siatki mają w punkcie środkowym obszaru Ω wartość 0, razem z pochodnymi rzędu 1 i 2 albo $1, \dots, 4$.



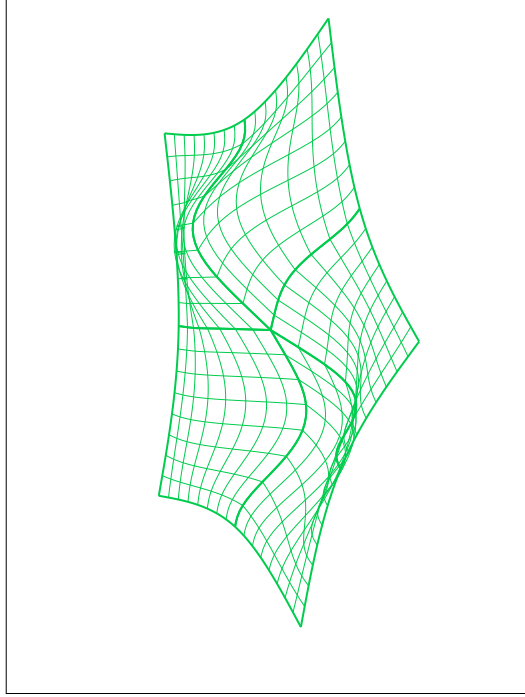
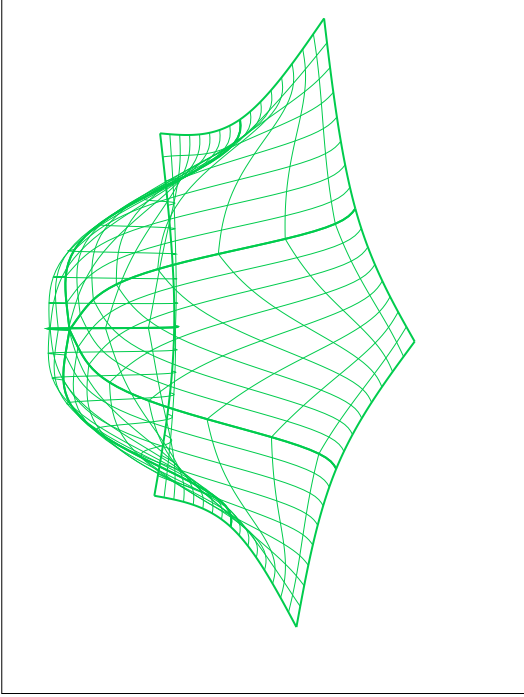
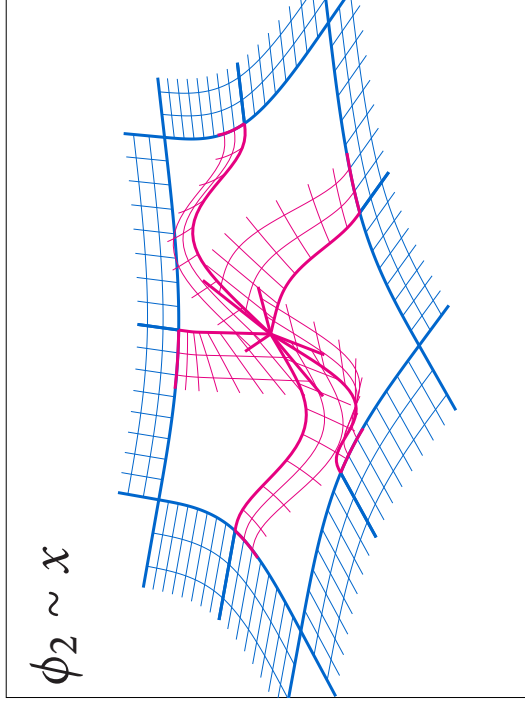
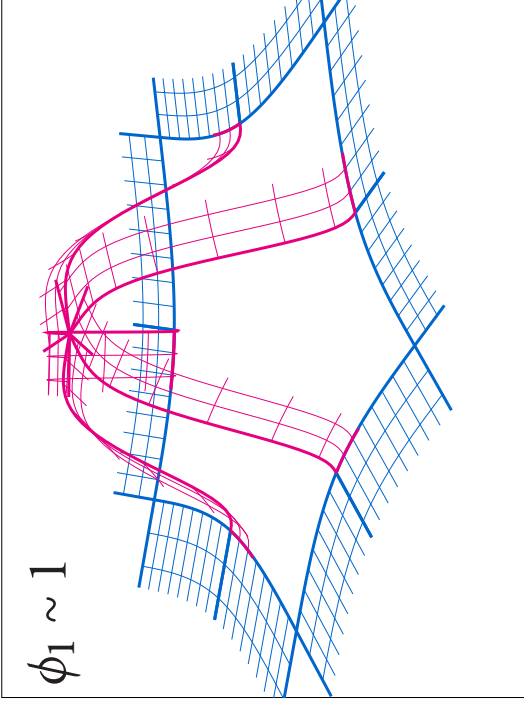


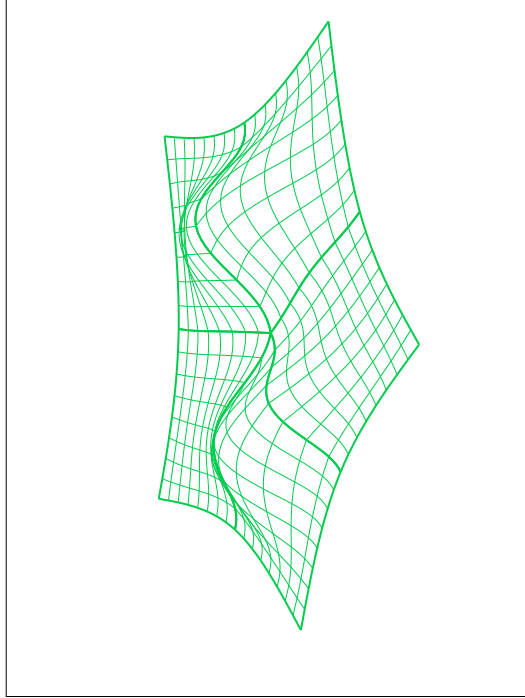
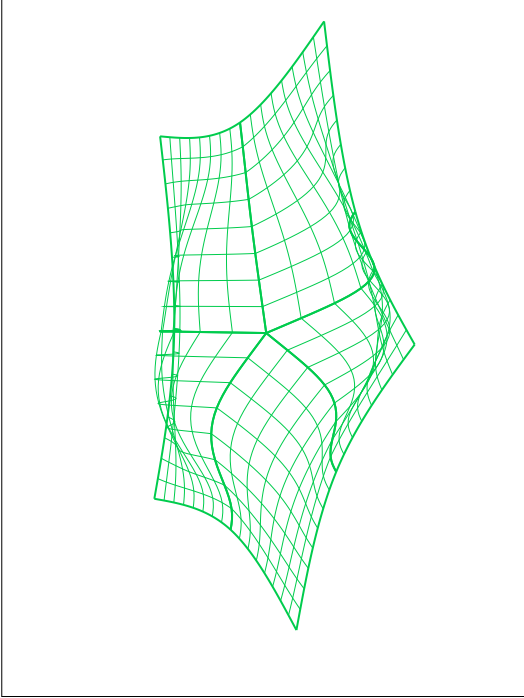
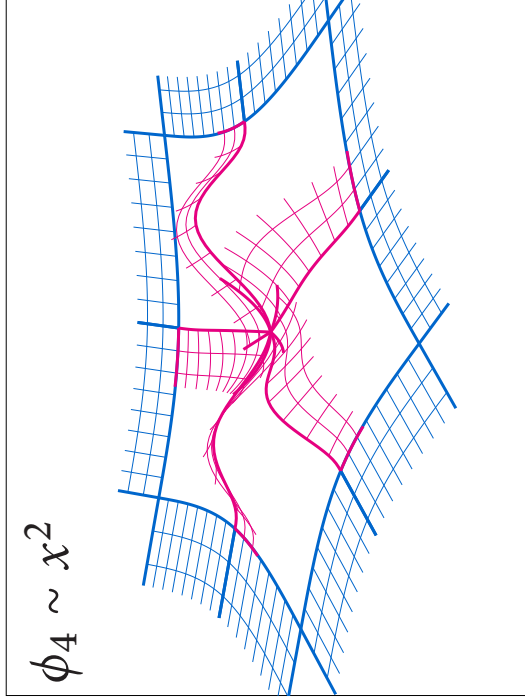
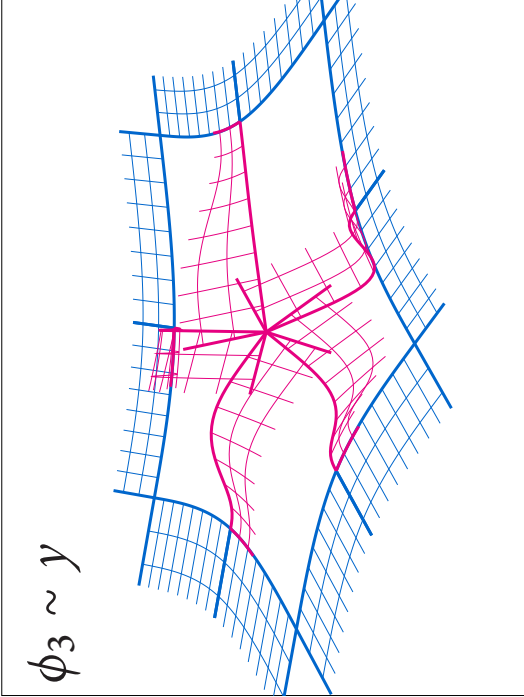
Do tego dochodzi przestrzeń V_0 , której elementy są funkcjami klasy C^1 lub C^2 , które na brzegu i na zewnątrz obszaru Ω mają wartość i pochodne rzędu 1 (lub 2) równe 0.

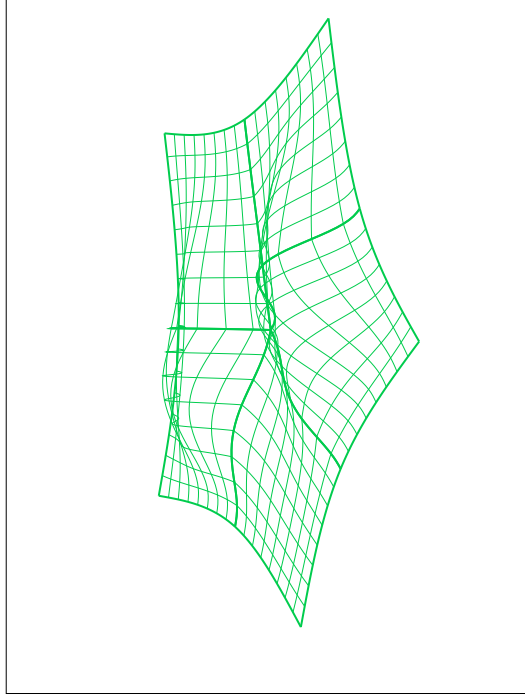
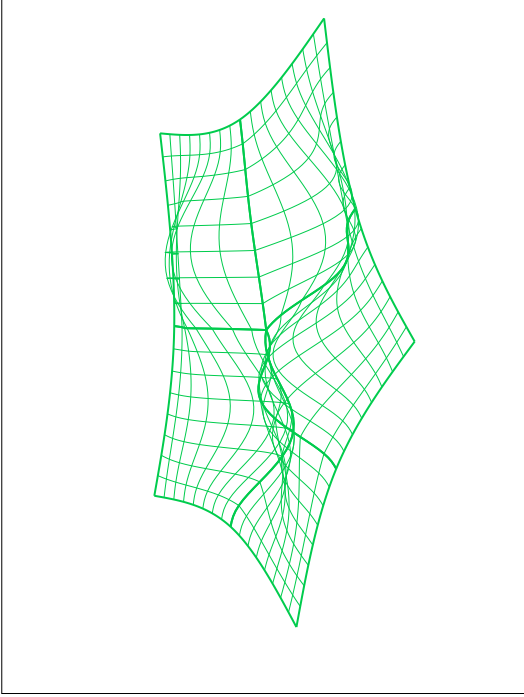
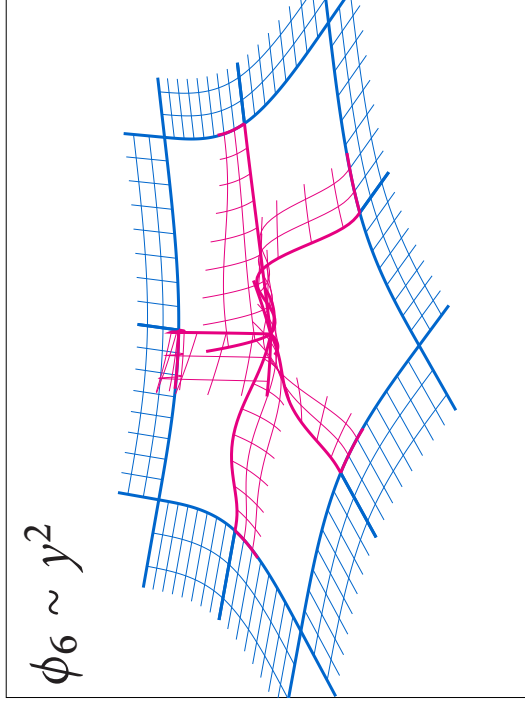
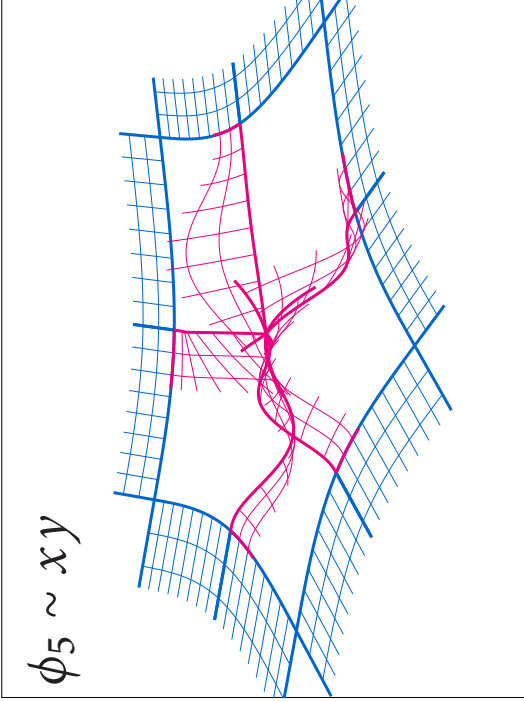
Wartości w punkcie środkowym funkcji i pochodnych elementów bazy tej przestrzeni są określone przez element bazy przestrzeni $\mathcal{H}^{(n,1)}$ albo $\mathcal{H}^{(n,2)}$ przestrzeni funkcji sklejanych nad podziałem kąta pełnego przez styczne do krzywych brzegowych obszarów Ω_l w punkcie środkowym. Liczby tych funkcji w konstrukcji powierzchni klasy G^1 i G^2 to odpowiednio

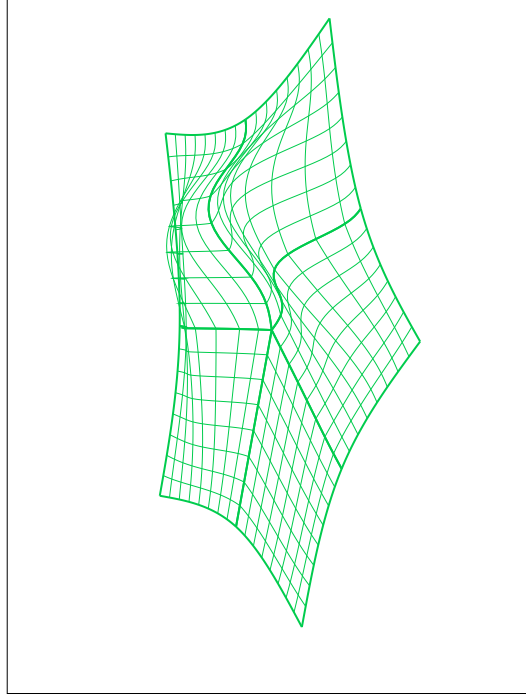
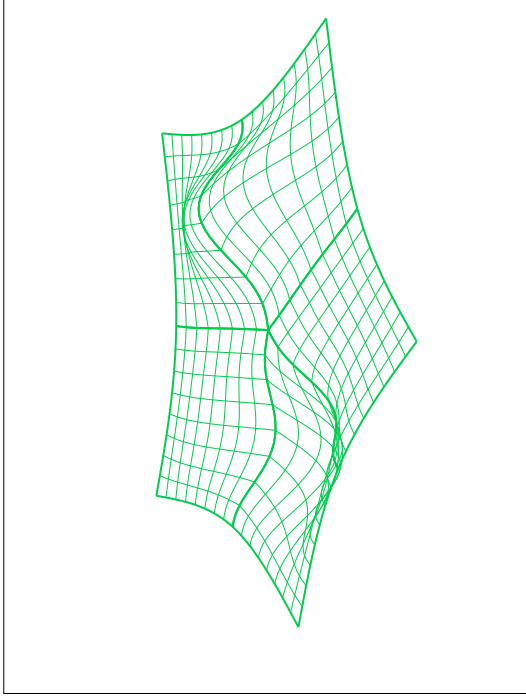
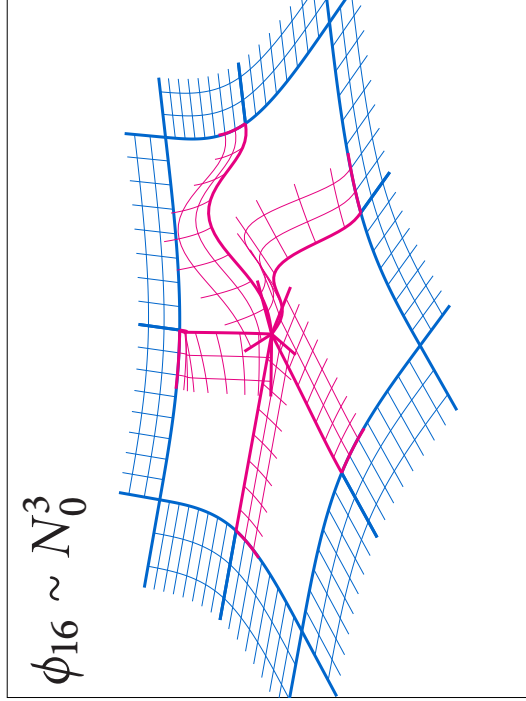
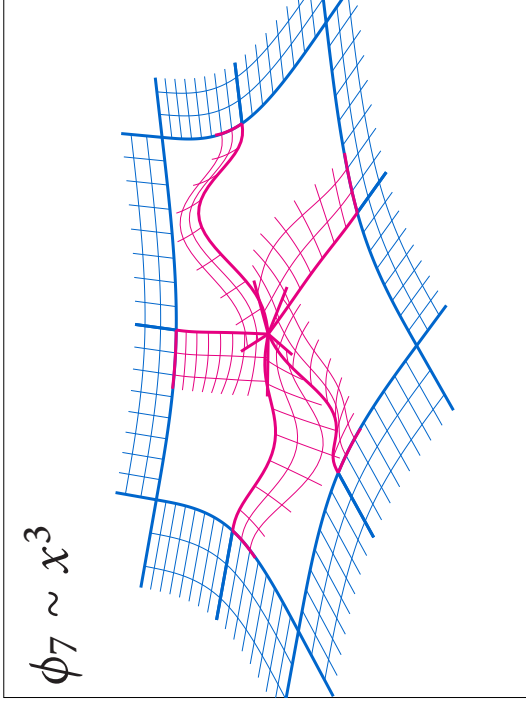
$$\dim \mathcal{H}^{(0,1)} + \dim \mathcal{H}^{(1,1)} + \dim \mathcal{H}^{(2,1)}$$

albo $\dim \mathcal{H}^{(0,2)} + \dim \mathcal{H}^{(1,2)} + \dim \mathcal{H}^{(2,2)} + \dim \mathcal{H}^{(3,2)} + \dim \mathcal{H}^{(4,2)}$.









Powierzchnię wypełniającą przedstawimy w postaci

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \phi_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \phi_{n+i},$$

gdzie $m = 6k + 1$, wektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ są wierzchołkami siatki określającymi otwór, a wektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ będą dobrane przez procedurę optymalizacji.

Najpierw trzeba te przestrzenie skonstruować, a potem dobrać kryterium optymalizacji i zaimplementować algorytm.

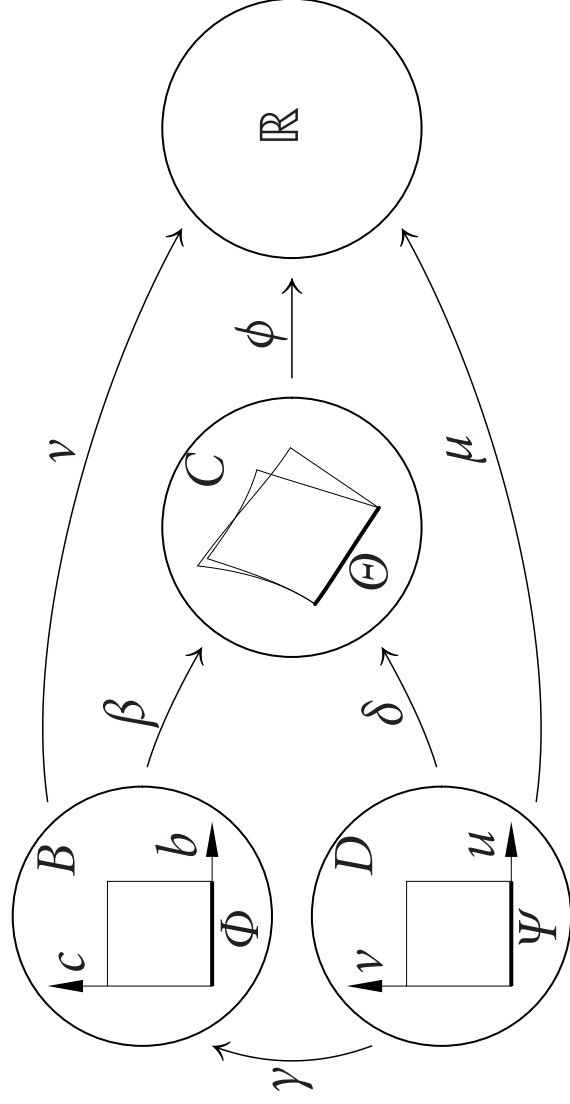
Konstrukcja funkcji bazowych:

Funkcje $\phi_1, \dots, \phi_{n+m}$ są określone kawałkami. Użycie wielomianów zapewnia, że funkcja $\phi_{i,l}$ opisująca ϕ_i w Ω_l jest klasy C^∞ .

Na wspólnej krzywej obszarów Ω_l i Ω_{l+1} funkcje $\phi_{i,l}$ i $\phi_{i,l+1}$ muszą mieć te same wartości oraz pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2.

Ponadto: funkcje ϕ_1, \dots, ϕ_n na brzegu Ω muszą mieć wartości i pochodne rzędu 1 i 2 równe 0.

Funkcje $\phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+m}$ na brzegu Ω muszą mieć wartości i pochodne rzędu 1 i 2 takie jak funkcje $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.



Dla układu gładkich przekształceń jak wyżej jest $\delta = \gamma \circ \beta$ i $\mu = \gamma \circ \nu$.
 Jeśli δ jest bijekcją, oraz przekształcenia μ i $\mu^*: D \rightarrow \mathbb{R}$ mają na krzywej Ψ takie same wartości i pochodne rzędu 1 i 2, to funkcje ϕ i $\phi^* = \delta^{-1} \circ \mu^*$ sklejają się na krzywej $\Theta = \delta(\Psi)$ z ciągłością C^2 .

Pochodne rzędu 1 i 2 funkcji złożonej $\kappa = \gamma \circ \lambda$, gdzie $\gamma(u, v) = [b(u, v), c(u, v)]$, wyrażają się wzorami

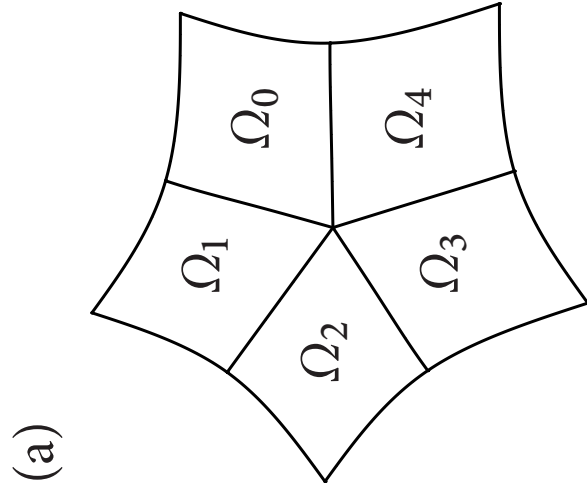
$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa}{\partial v} &= \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial c}, \\ \frac{\partial^2 \kappa}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \left(\frac{\partial b}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b^2} + 2 \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b \partial c} + \left(\frac{\partial c}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial c^2}.\end{aligned}$$

Symbole κ i λ oznaczają odpowiednio δ i β , albo μ i ν . Funkcje b i c są w obu przypadkach identyczne. Funkcje

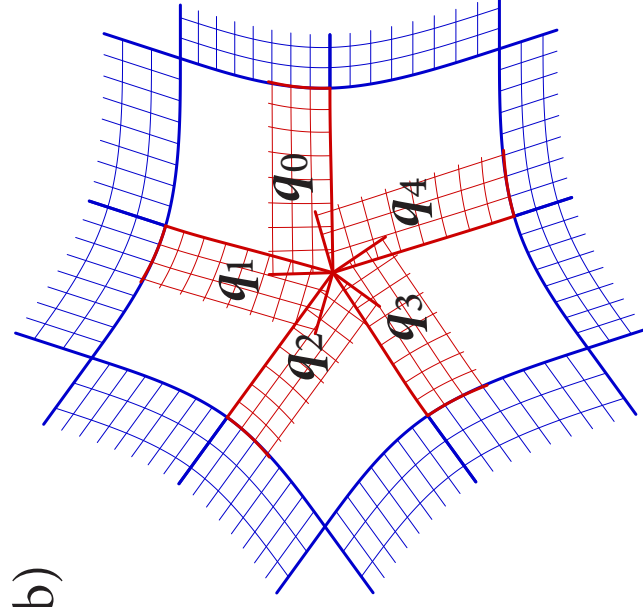
$$b_1 = \left. \frac{\partial b}{\partial v} \right|_{\psi}, \quad c_1 = \left. \frac{\partial b}{\partial v} \right|_{\psi}, \quad b_2 = \left. \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \right|_{\psi}, \quad c_2 = \left. \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \right|_{\psi}$$

nazwiemy funkcjami połączenia.

Przekształcenie β jest tzw. płatem pomocniczym dziedziny, lub płatem otaczającym dziedzinę. Określa ono m.in. krzywą wspólną obszarów Ω_i i Ω_{i+1} , albo fragment brzegu obszaru Ω .

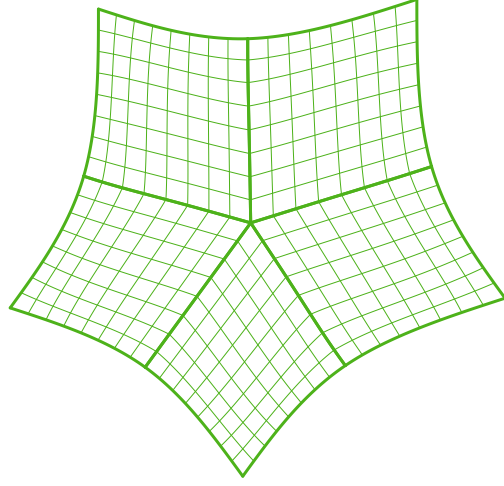


(a)



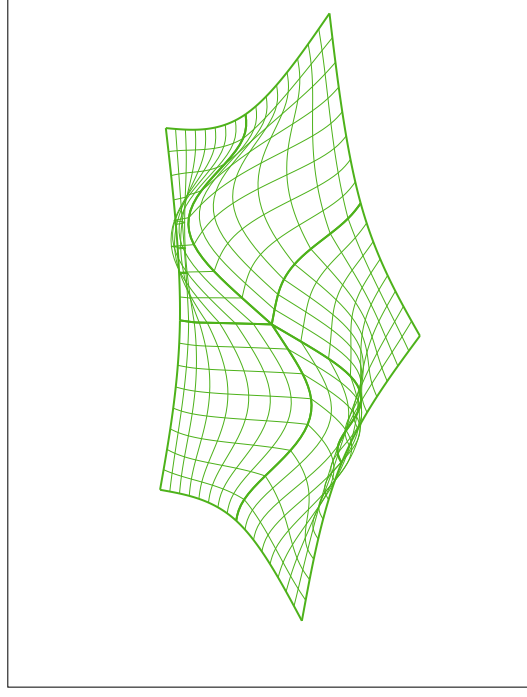
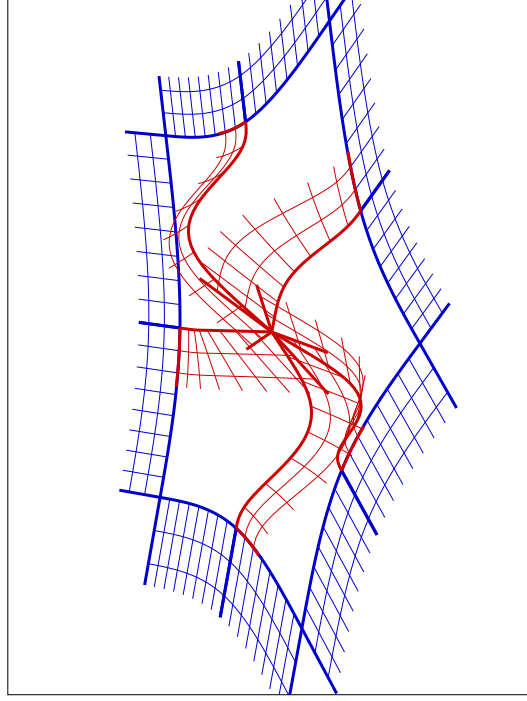
(b)

Płat dziedziny $d_1: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega_1$ określa cztery przekształcenia δ — po jednym dla każdego boku kwadratu jednostkowego.



Przekształcenie γ określa reparametryzację płata pomocniczego dziedziny, w wyniku której powstaje płat dziedziny, i jest reprezentowane przez cztery funkcje połączenia.

Przekształcenie v jest tzw. **płatem pomocniczym funkcji bazowej**. Służy ono do określenia wartości i pochodnych funkcji μ na odpowiednim boku krzywoliniowego czworokąta Ω_I — w ten sposób są określone wartości i pochodne przekształcenia μ^* , czyli płata funkcji bazowej p_{iI} na brzegu Ω_I .

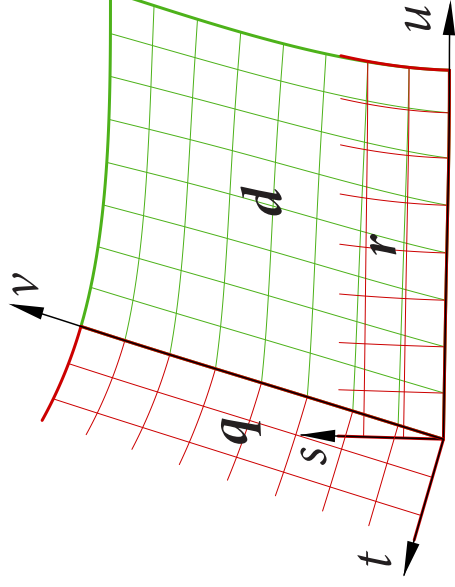


Schemat konstrukcji jest taki:

- Konstruujemy siatkę płaską z jednym wierzchołkiem specjalnym (wspólnym końcem k krawędzi) otoczonym przez $4k$ czwrokątnych ścian. Siatka ta wyznacza kształt obszaru Ω (dziedziny) oraz płaty bikubiczne otaczające ten obszar.
- Wybieramy punkt środkowy obszaru Ω i łączymy go krzywymi wielomianowymi z ze wspólnymi narożnikami płatów otaczających dziedzinę. Wyznacza to obszary $\Omega_0, \dots, \Omega_l$.
- Wybieramy pochodne poprzeczne rzędu 1 (albo 1 i 2) pomocniczych płatów dziedziny, których brzegami są konstruowane krzywe.
- Konstruujemy funkcje połączenia, rozwiązując równania wynikające z warunków zgodności.

- Wyznaczamy pochodne poprzeczne do każdego zakrzywionego boku obszaru Ω_I i konstruujemy płaty dziedziny, jako płaty Coonsa (bikubiczne lub dwupiętne).
- Dla każdej funkcji bazowej ustalamy jej wartości i pochodne poprzeczne na brzegu obszaru Ω oraz wartości i pochodne w punkcie środkowym. Dla każdego z czterech zakrzywionych boków obszaru Ω_I znajdujemy pomocniczy płat funkcji bazowej, który określa wartości funkcji bazowej na tym boku, a także ma określone pochodne poprzeczne.
- Korzystając z funkcji połączenia użytych do skonstruowania płatów dziedziny, wyznaczamy pochodne poprzeczne płatów funkcji bazowych i konstruujemy płaty funkcji bazowej, tj. skalarne wielomiany dwóch zmiennych, jako bikubiczne albo dwupiętne płaty Coonsa.

Płaty pomocnicze dziedziny \underline{q} i \underline{r} oraz płat dziedziny \underline{d} są płaskie.



$$\underline{d} = \underline{r},$$

$$\underline{d} = \underline{q},$$

$$\underline{d}_v = b_1 \underline{r}_u + c_1 \underline{r}_s,$$

$$\underline{d}_u = f_1 \underline{q}_v + g_1 \underline{q}_t,$$

$$\underline{d}_{vv} = b_2 \underline{r}_u + c_2 \underline{r}_s + b_1^2 \underline{r}_{uu} + 2b_1 c_1 \underline{r}_{us} + c_1^2 \underline{r}_{ss},$$

$$\underline{d}_{uu} = f_2 \underline{q}_v + g_2 \underline{q}_t + f_1^2 \underline{q}_{vv} + 2f_1 g_1 \underline{q}_{vt} + g_1^2 \underline{q}_{tt}.$$

Zgodność pozycyjna: $\underline{\bar{d}} = \underline{\bar{q}} = \underline{\bar{r}}$.

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{q}}_v &= \underline{b}_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_s, \\ \underline{\bar{r}}_u &= \underline{f}_1 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_t.\end{aligned}$$

Zgodność pochodnych mieszanych:

$$\underline{f}'_1 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}'_1 \underline{\bar{q}}_t + \underline{f}_1 \underline{\bar{q}}_{vv} + \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vt} = \underline{b}'_1 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}'_1 \underline{\bar{r}}_s + \underline{b}_1 \underline{\bar{r}}_{uu} + \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{us}.$$

Zgodność pochodnych drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{q}}_{vv} &= \underline{b}_2 \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}_2 \underline{\bar{r}}_s + \underline{b}_1^2 \underline{\bar{r}}_{uu} + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{us} + \underline{c}_1^2 \underline{\bar{r}}_{ss}, \\ \underline{\bar{r}}_{uu} &= \underline{f}_2 \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}_2 \underline{\bar{q}}_t + \underline{f}_1^2 \underline{\bar{q}}_{vv} + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vt} + \underline{g}_1^2 \underline{\bar{q}}_{tt}.\end{aligned}$$

Zgodność pochodnych mieszanych trzeciego rzędu:

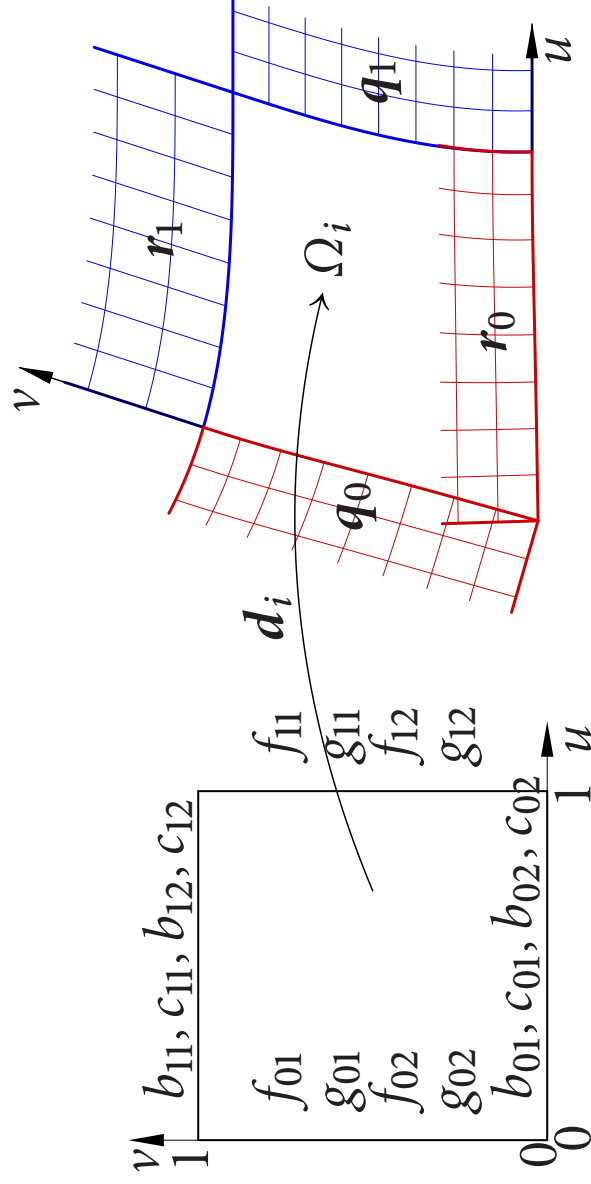
$$f_1'' \bar{q}_v + g_1'' \bar{q}_t + 2f_1' \bar{q}_{vv} + 2g_1' \bar{q}_{vt} + f_1 \bar{q}_{vvv} + g_1 \bar{q}_{vvt} = \\ b_2' \bar{r}_u + c_2' \bar{r}_s + (2b_1 b_1' + b_2) \bar{r}_{uu} + (2b_1' c_1 + 2b_1 c_1' + c_2) \bar{r}_{us} + \\ 2c_1 c_1' \bar{r}_{ss} + b_1^2 \bar{r}_{uuu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{uus} + c_1^2 \bar{r}_{uss},$$

$$b_1'' \bar{r}_u + c_1'' \bar{r}_s + 2b_1' \bar{r}_{uu} + 2c_1' \bar{r}_{us} + b_1 \bar{r}_{uuu} + c_1 \bar{r}_{uus} = \\ f_2 \bar{q}_v + g_2 \bar{q}_t + (2f_1 f_1' + f_2) \bar{q}_{vv} + (2f_1' g_1 + 2f_1 g_1' + g_2) \bar{q}_{vt} + \\ 2g_1 g_1' \bar{q}_{tt} + f_1^2 \bar{q}_{vvv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vvt} + g_1^2 \bar{q}_{vtt}.$$

Zgodność pochodnych mieszanych czwartego rzędu:

$$\begin{aligned}
 & f_2'' \bar{q}_v + g_2'' \bar{q}_t + 2(f_1 f_1'' + f_1'^2 + f_2') \bar{q}_{vv} + \\
 & 2(f_1'' g_1 + 2f_1' g_1' + f_1 g_1'' + g_2') \bar{q}_{vt} + 2(g_1 g_1'' + g_1'^2) \bar{q}_{tt} + \\
 & (4f_1 f_1' + f_2) \bar{q}_{vvv} + (4f_1' g_1 + 4f_1 g_1' + g_2) \bar{q}_{vvt} + 4g_1 g_1' \bar{q}_{vtt} + \\
 & f_1^2 \bar{q}_{vvvv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vvvt} + g_1^2 \bar{q}_{vvtt} = \\
 & b_2'' \bar{r}_u + c_2'' \bar{r}_s + 2(b_1 b_1'' + b_1'^2 + b_2') \bar{r}_{uu} + \\
 & 2(b_1'' c_1 + 2b_1' c_1' + b_1 c_1'' + c_2') \bar{r}_{us} + 2(c_1 c_1'' + c_1'^2) \bar{r}_{ss} + \\
 & (4b_1 b_1' + b_2) \bar{r}_{uuu} + (4b_1' c_1 + 4b_1 c_1' + c_2) \bar{r}_{uus} + 4c_1 c_1' \bar{r}_{uss} + \\
 & b_1^2 \bar{r}_{uuuu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{uuus} + c_1^2 \bar{r}_{uuss}.
 \end{aligned}$$

Funkcje połączenia konstruuje się rozwiązując równania warunków zgodności dla czterech narożników, a potem rozwiązując zadania interpolacyjne Hermite'a.



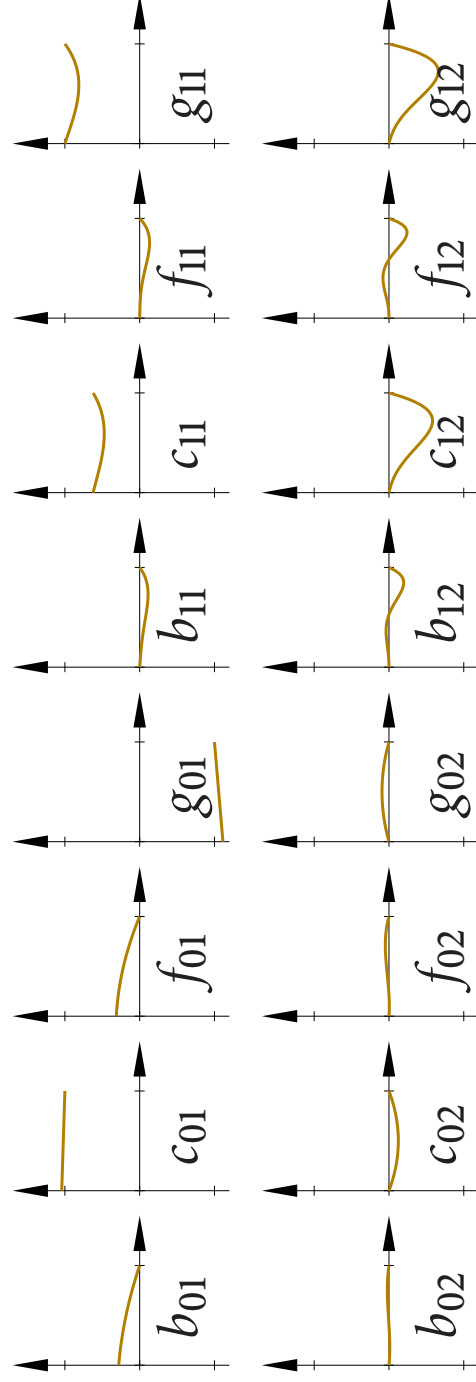
Pewne równania są nieokreślone, co można wykorzystać do obniżenia stopni funkcji połączenia. W konstrukcji powierzchni klasy G^1 możemy obliczać kolejno

Krok	Oblicz	Na podstawie
1	$b_{01}(0), c_{01}(0), f_{01}(0), g_{01}(0),$ $b_{01}(1), c_{01}(1), f_{11}(0), g_{11}(0),$ $b_{11}(0), c_{11}(0), f_{01}(1), g_{01}(1),$ $b_{11}(1), c_{11}(1), f_{11}(1), g_{11}(1)$	równań (16), (17)
2	$c'_{01}(0), c'_{01}(1), g'_{01}(0), g'_{01}(1)$	$\deg c_{01} = \deg g_{01} = 1$
3	$b'_{01}(0), f'_{01}(0)$	równania (18)
4	$b'_{01}(1), f'_{01}(1),$	$\deg b_{01} = \deg f_{01} = 2$
5	$b'_{11}(0), c'_{11}(0), f'_{11}(0), g'_{11}(0)$	równań (18)
6	$c'_{11}(1), g'_{11}(1)$	$\deg c_{11} = \deg g_{11} = 2$
7	$b'_{11}(1), f'_{11}(1)$	równania (18)

Dla powierzchni klasy G^2 mamy tabelkę

Krok	Oblicz	Na podstawie
1	$b_{01}(0), c_{01}(0), f_{01}(0), g_{01}(0),$ $b_{01}(1), c_{01}(1), f_{11}(0), g_{11}(0),$ $b_{11}(0), c_{11}(0), f_{01}(1), g_{01}(1),$ $b_{11}(1), c_{11}(1), f_{11}(1), g_{11}(1)$	równań (16), (17)
2	$b_{02}(0), c_{02}(0), f_{02}(0), g_{02}(0),$ $b_{02}(1), c_{02}(1), f_{12}(0), g_{12}(0),$ $b_{12}(0), c_{12}(0), f_{02}(1), g_{02}(1),$ $b_{12}(1), c_{12}(1), f_{12}(1), g_{12}(1)$	równań (27), (28)
3	$c'_{01}(0), c'_{01}(1), c''_{01}(0), c''_{01}(1),$ $g'_{01}(0), g'_{01}(1), g''_{01}(0), g''_{01}(1)$	$\deg c_{01} = \deg g_{01} = 1$
4	$b'_{01}(0), f'_{01}(0)$	równania (18)
5	$b'_{01}(1), b''_{01}(0), b''_{01}(1), f'_{01}(1), f''_{01}(0), f''_{01}(1)$	$\deg b_{01} = \deg f_{01} = 2$
6	$b'_{11}(0), c'_{11}(0), f'_{11}(0), g'_{11}(0)$	równania (18)
7	$b'_{02}(0), c'_{02}(0), f'_{02}(0), g'_{02}(0),$ $b'_{12}(0), c'_{12}(0), f'_{12}(0), g'_{12}(0)$	równań (29), (30)

Krok	Oblicz	Na podstawie
8	$c''_{02}(0), c'_{02}(1), c''_{02}(1), g''_{02}(0), g'_{02}(1), g''_{02}(1)$	$\deg c_{02} = \deg g_{02} = 2$
9	$b''_{02}(0), f''_{02}(0)$	równania (31)
10	$b'_{02}(1), b''_{02}(1), f'_{02}(1), f''_{02}(1)$	$\deg b_{02} = \deg f_{02} = 3$
11	$f''_{11}(0), g''_{11}(0), b''_{11}(0), c''_{11}(0)$	równań (29), (30)
12	$f''_{12}(0), g''_{12}(0), b''_{12}(0), c''_{12}(0)$	równań (31)
13	$c'_{11}(1), c''_{11}(1), g'_{11}(1), g''_{11}(1)$	$\deg c_{11} = \deg g_{11} = 3$
14	$b'_{11}(1), f'_{11}(1)$	równania (18)
15	$b''_{11}(1), f''_{11}(1)$	$\deg b_{11} = \deg f_{11} = 4$
16	$f'_{12}(1), g'_{12}(1), b'_{12}(1), c'_{12}(1)$	równań (29), (30)
17	$c''_{12}(1), g''_{12}(1)$	$\deg c_{12} = \deg g_{12} = 4$
18	$b''_{12}(1), f''_{12}(1)$	równania (31)



Dla każdego elementu bazy przestrzeni $\bigoplus_{l=0}^4 \mathcal{H}_{\Delta}^{(l,2)}$ trzeba skonstruować płaty pomocnicze funkcji bazowych. Jeśli wielomian $r_{i,l}$ opisuje funkcję r_i w stożku C_l , to funkcja $\phi_{i,l}$, opisująca ϕ_i w Ω_l ma w punkcie środkowym wartość i pochodne rzędu $1, \dots, 4$ takie jak $r_{i,l}$ w punkcie $\mathbf{0}$. Jest

$$\phi = \mathbf{d}_l^{-1} \circ v_{i,l} = \beta^{-1} \circ v.$$

Dlatego pochodne funkcji $v_{i,l}$ są równe pochodnym funkcji

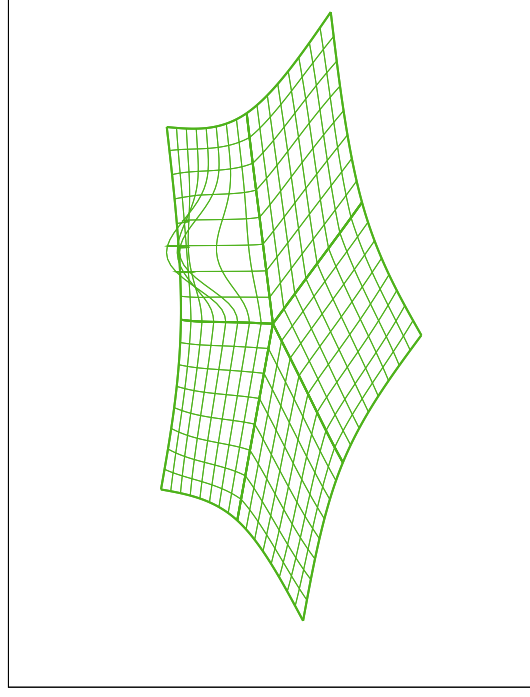
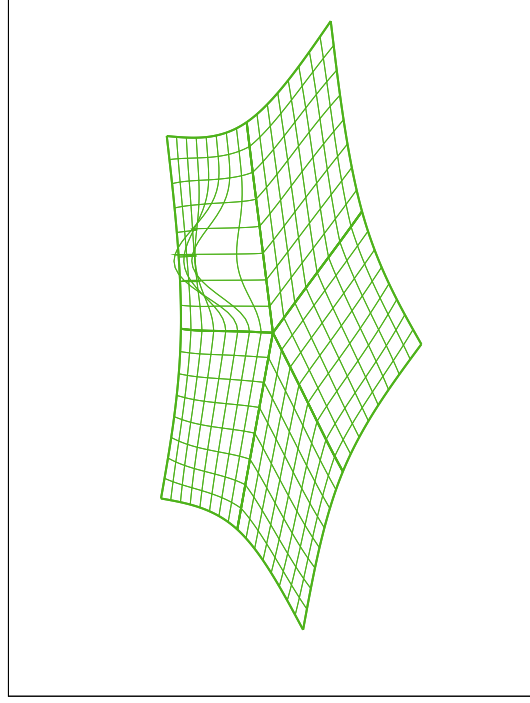
$$\mathbf{d}_l \circ r_{i,l}.$$

Na brzegu obszaru Ω funkcje ϕ_1, \dots, ϕ_n spełniają jednorodne warunki brzegowe. Wartości funkcji $v_{i,l}$ i jej pochodnych poprzecznych rzędu 1 i 2 na odcinku $[0, 1]$ są określone przez rozwiązanie zadań interpolacyjnych Hermite'a.

Płaty funkcji bazowych $p_{i,l}$ są wielomianami, otrzymanymi w taki sam sposób, jak płaty dziedziny \mathbf{d}_l .

W efekcie starań, aby stopnie płatów pomocniczych i funkcji połączenia były jak najniższe, otrzymane płaty dziedziny oraz płaty funkcji bazowych mają dla powierzchni klasy G^1 stopień $(5, 5)$, a dla powierzchni klasy G^2 stopień $(9, 9)$.

Przestrzeń V_0 można jeszcze rozszerzyć, dołączając $4k$ albo $16k$ funkcji bazowych, w których zamiast wielomianów p_{i1} konstruowanych w podany wcześniej sposób są przyjęte funkcje $B_s^5 \otimes B_y^5$ dla $s, t \in \{2, 3\}$ albo $B_s^9 \otimes B_t^9$, dla $s, t \in \{3, \dots, 6\}$. Na przykład:



Kryteria optymalizacji

Parametryzacja powierzchni nad obszarem Ω jest argumentem funkcjonału, którego wartość oznacza „brzydkość” powierzchni. Może to być brzydkość parametryzacji lub brzydkość kształtu. Uznając, że powierzchnia jest tym brzydsza, im bardziej jest „pofalowana”, możemy chcieć zminimalizować całkę z kwadratu krzywizny średniej — to jest kryterium odpowiednie dla konstrukcji powierzchni klasy G^1 . Dla powierzchni klasy G^2 lepiej jest poszukiwać minimum całki z kwadratu długości gradientu krzywizny średniej na powierzchni. Miejsca zerowe tych funkcjonałów to odpowiednio powierzchnia płaska (idealne wypełnienie otworu w płaszczyźnie) oraz powierzchnia o stałej krzywiznie średniej (idealne wypełnienie otworu w sferze lub walcu).

Ale, minimalizacja tych funkcjonałów jest dosyć trudnym zadaniem optymalizacji nieliniowej. Znacznie łatwiej jest znaleźć minimum całki z kwadratu laplasjanu lub kwadratu długości gradientu laplasjanu parametryzacji, bo to sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych.

Kryteria optymalizacji można oprzeć na poniższym twierdzeniu:

Twierdzenie 14 *Jeśli funkcja $g: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $C^3(A)$*

i $\|\nabla g\| \leq \varepsilon \ll 1$, to

$$H = \frac{1}{2} \Delta g + O(\varepsilon^2),$$

$$\nabla H = \frac{1}{2} \nabla \Delta g + O(\varepsilon),$$

gdzie H oznacza krzywiznę średnią powierzchnini, będącej wykresem funkcji g .

Za kryterium optymalizacji kształtu powierzchni klasy G^1 najprościej jest więc przyjąć funkcjonal

$$\mathcal{F}_1(p) = \int_{\Omega} (\Delta p)^2 \, d\Omega,$$

który ma być minimalizowany przez każdą z trzech funkcji opisujących współrzędne x, y, z parametryzacji \mathbf{p} .

Dla powierzchni wypełniających klasy G^2 możemy przyjąć

$$\mathcal{F}_2(p) = \int_{\Omega} \|\nabla \Delta p\|_2^2 \, d\Omega.$$

Stosując wzór Greena, możemy znaleźć równania Eulera–Lagrange’a tych funkcjonałów. W pierwszym przypadku jest to równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 p = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^4 p}{\partial u^4} + 2 \frac{\partial^4 p}{\partial u^2 \partial v^2} + \frac{\partial^4 p}{\partial v^4} = 0,$$

a w drugim przypadku równanie trójharmoniczne

$$-\Delta^3 p = 0, \quad \text{czyli} \quad -\frac{\partial^6 p}{\partial u^6} - 3 \frac{\partial^6 p}{\partial u^4 \partial v^2} - 3 \frac{\partial^6 p}{\partial u^2 \partial v^4} - \frac{\partial^6 p}{\partial v^6} = 0.$$

Na rozwiązanie nakładamy warunki brzegowe — mamy określony brzeg otworu (czyli wartości funkcji p na brzegu Γ dziedziny Ω) i pochodne poprzeczne rzędu 1 lub 1 i 2 na tym brzegu.

Symbolem \hat{s} oznaczymy funkcję daną na zewnątrz obszaru Ω , która opisuje współrzędną powierzchni z otworem. Litera \mathbf{n} oznacza jednostkowy wektor prostopadły do brzegu Ω w każdym jego punkcie.

Okazuje się, że zagadnienia brzegowe

$$\begin{cases} \Delta^2 p(x, y) = 0 & \text{dla } (x, y) \in \Omega, \\ p(x, y) = \hat{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{n}}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -\Delta^3 p(x, y) = 0 & \text{dla } (x, y) \in \Omega, \\ p(x, y) = \hat{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{n}}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

są *dobrze postawione*, tj. mają jednoznaczne rozwiązania, które zależą w sposób ciągły od warunków brzegowych.

Numeryczne rozwiązanie każdego z tych zagadnień polega na znalezieniu jego aproksymacji w przestrzeni V , której bazę skonstruowaliśmy. Funkcjonały te są formami kwadratowymi. Dla każdego z nich można wskazać formę dwuliniową, która jest (pewnym) iloczynem skalarnym w przestrzeni V_0 : jest $\mathcal{F}_i(f) = \mathcal{A}_i(f, f)$, gdzie

$$\mathcal{A}_1(f, g) = \int_{\Omega} \Delta f \Delta g \, d\Omega,$$

$$\mathcal{A}_2(f, g) = \int_{\Omega} \langle \nabla \Delta f, \nabla \Delta g \rangle \, d\Omega.$$

Metoda Ritza minimalizacji polega na podstawieniu wyrażenia

$$p = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i + \sum_{i=1}^m b_i \phi_{n+i}$$

jako argumentu formy kwadratowej i rozwiązaniu układu równań, z których każde przedstawia znikanie pochodnej otrzymanej funkcji zmiennych a_1, \dots, a_n ze względu na każdą z tych zmiennych. Układ ten ma postać

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{A}(\phi_i, \phi_j) a_j = - \sum_{j=1}^m \mathcal{A}(\phi_i, \phi_{n+j}) b_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ponieważ forma dwuliniowa \mathcal{A} jest iloczynem skalarnym, macierz symetryczna, której współczynnikiemami są liczby $\mathcal{A}(\phi_i, \phi_j)$ jest dodatnio określona.