

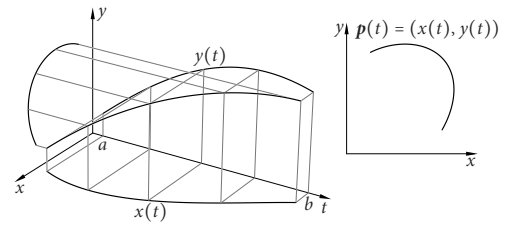
# Modelowanie geometryczne

Przemysław Kiciak

1

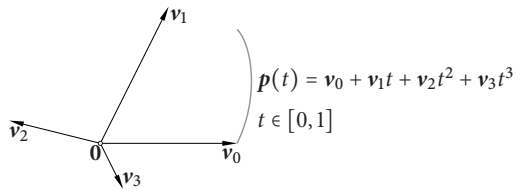
## Wiadomości wstępne

### Krzywa parametryczna



2

### Reprezentacja w bazie potęgowej — niewygodna



3

### Algorytm Aitkena

Dane są węzły interpolacyjne  $u_0, \dots, u_n$  i punkty  $p_0, \dots, p_n$ .

Jeśli krzywe  $q$  i  $r$  stopnia  $n-1$  są rozwiązaniami zadań odpowiednio dla węzłów  $u_0, \dots, u_{n-1}$  oraz  $u_1, \dots, u_n$ , to krzywa wielomianowa stopnia  $n$

$$p(t) = \frac{u_n - t}{u_n - u_0} q(t) + \frac{t - u_0}{u_n - u_0} r(t)$$

jest rozwiązaniem zadania interpolacyjnego  $p(t_i) = p_i$ :

$$p(u_0) = 1 \cdot q(u_0) + 0 \cdot r(u_0) = p_0,$$

$$p(u_i) = \frac{u_n - u_i}{u_n - u_0} p_i + \frac{u_i - u_0}{u_n - u_0} p_i = p_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n-1,$$

$$p(u_n) = 0 \cdot q(u_n) + 1 \cdot r(u_n) = p_n.$$

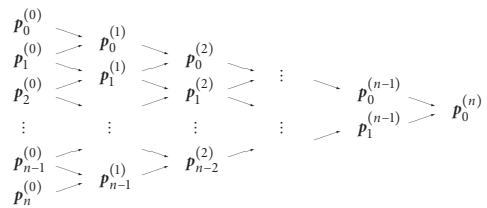
4

Algorytm:

```

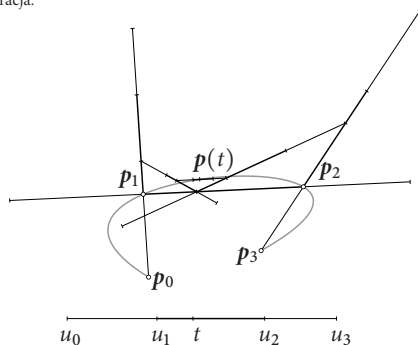
/* p_i^{(0)} = p_i dla i = 0, ..., n. */
for ( j = 1; j <= n; j++ )
    for ( i = 0; i <= n - j; i++ )
        p_i^{(j)} = (u_{i+j} - t) p_i^{(j-1)} + (t - u_i) p_{i+1}^{(j-1)};
/* p(t) = p_0^{(n)}. */
    
```

5



6

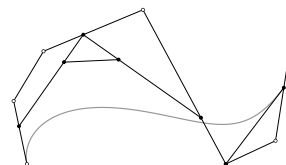
Ilustracja:



7

### Obcinanie narożników

Na danej łamanej wybieramy dwa dowolne punkty i fragment łamanej między nimi zastępujemy odcinkiem. Jeśli początkowa łamana ma skończoną długość, to ten proces jest zawsze zbieżny (de Boor, 1987).



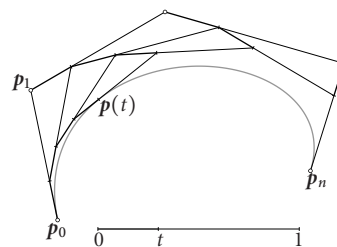
8

Wszystkie krzywe otrzymane przez obcinanie narożników mają **własność zmniejszania wariacji**: liczba przecięć krzywej z dowolną hiperpłaszczyzną (np. prostą na płaszczyźnie lub płaszczyzną w przestrzeni trójwymiarowej) nie jest większa niż liczba przecięć początkowej lamanej z tą hiperpłaszczyzną.

**Uwaga:** Mowa tu o miejscach przecięcia, nie punktach, bo obcinanie może wytworzyć odcinek położony w rozpatrywanej hiperpłaszczyźnie, który będzie częścią granicznej krzywej.

## Krzywe Béziera

### Algorytm de Casteljau



Algorytm:

```

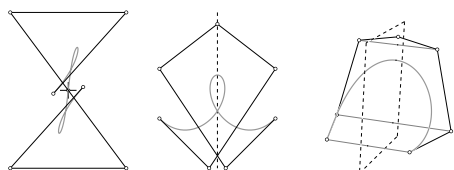
/* p_i^{(0)} = p_i dla i = 0, ..., n. */
for ( j = 1; j <= n; j++ )
    for ( i = 0; i <= n - j; i++ )
        p_i^{(j)} = (1 - t)p_i^{(j-1)} + t p_{i+1}^{(j-1)};
/* p(t) = p_0^{(n)}. */

```

Własności wynikające z algorytmu natychmiast:

- **Krzywa wielomianowa:** krzywa Béziera z  $n + 1$  punktami kontrolnymi ma parametryzację wielomianową stopnia  $n$ .
- **Własność otoczki wypukłej:** dla  $t \in [0, 1]$  punkty  $p(t)$  leżą w otoczce wypukłej lamanej kontrolnej.
- **Afiniczna niezmienniczość reprezentacji:** dla dowolnego przekształcenia afinicznego  $f$  obraz krzywej  $p$  w tym przekształceniu jest reprezentowany przez punkty kontrolne  $f(p_0), \dots, f(p_n)$ .
- **Interpolacja skrajnych punktów kontrolnych:**  $p(0) = p_0, p(1) = p_n$ .

- **Symetria:** jeśli lamana kontrolna jest symetryczna względem pewnego punktu, prostej lub płaszczyzny, to krzywa jest symetryczna, co więcej, parametryzacja jest symetryczna względem tego punktu, prostej lub płaszczyzny.



### Baza wielomianów Bernsteina

$$B_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{dla } i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

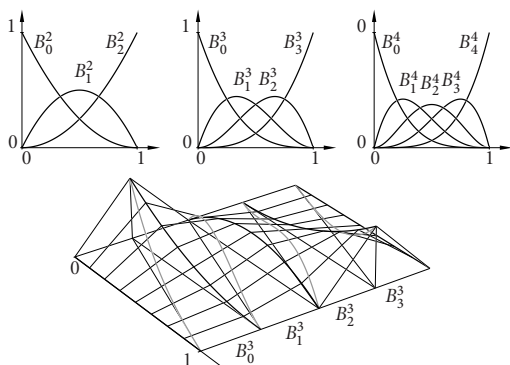
Przyjmijmy umowę, że  $B_i^n(t) = 0$  dla  $i < 0$  oraz  $i > n$ .

Zależność rekurencyjna:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (2)$$

**Dowód:**  $B_0^n(t) = 1$  dla każdego  $t$ . Dla  $n > 0$  podstawiamy

$$\begin{aligned}
 (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) &= \\
 (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} &= \\
 \left( \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) t^i (1-t)^{n-i} &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t). \quad \square
 \end{aligned}$$



Punkty kontrolne są współczynnikami krzywej w bazie Bernsteina.

**Dowód indukcyjny:** Dla  $n = 0$  to jest oczywiste. Dla  $n > 0$  oznaczamy symbolami  $q$  i  $r$  krzywe reprezentowane przez punkty kontrolne  $p_0, \dots, p_{n-1}$  i  $p_1, \dots, p_n$ . Wtedy z algorytmu de Casteljau i wzoru (2)

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (1-t)q(t) + tr(t) = \\
 (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} p_i B_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1} B_i^{n-1}(t) &= \\
 p_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i ((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)) + p_n t B_{n-1}^{n-1}(t) &= \\
 \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

### Własności wielomianów Bernsteina i krzywych Béziera:

- Rozkład jedynki:  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ .
- Dodatniość:  $B_i^n(t) \geq 0$  dla  $t \in [0, 1]$ .
- Pochodna:  $\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$   
(dla  $i = 0$  oraz  $i = n$  tu korzystamy z umowy).
- Ekstrema: Wartość maksymalną na odcinku  $[0, 1]$  wielomian  $B_i^n$  przyjmuje w punkcie  $\frac{i}{n}$ .  
Dla  $i = 1, \dots, n-1$  jest ona równa  $\frac{n! i! (n-i)!}{n^n (n-1)!}$ .

17

- Całka: Dla  $i = 0, \dots, n$  jest  $\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$ .

Dowód:

$$\int_0^1 B_n^n(t) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Niech  $i < n$ . Z założenia indukcyjnego,  $\int_0^1 B_{i+1}^n(t) dt = \frac{1}{n+1}$ .

Całkując przez części, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_i^n(t) dt &= \int_0^1 \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} dt \\ &= \int_0^1 \binom{n}{i} \frac{n-i}{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} dt \\ &= \int_0^1 \binom{n}{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} dt = \int_0^1 B_{i+1}^n(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

18

- Podwyższenie stopnia:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{p}_i B_i^{n+1}(t), \quad \hat{p}_i = \frac{i}{n+1} p_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} p_i$$

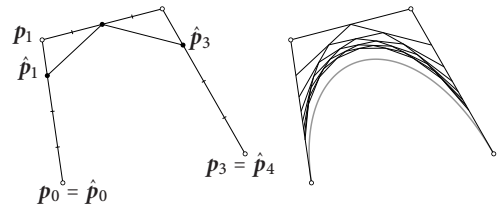
Uwaga: Nieokreślone punkty  $p_{-1}$  i  $p_{n+1}$  są mnożone przez 0.

Dowód:

$$\begin{aligned} p(t) &= ((1-t) + t) \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n p_i (1-t) B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n p_i t B_i^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^n p_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} p_i \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} p_{i-1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t). \quad \square \end{aligned}$$

19

Podwyższenie stopnia jest obcinaniem narożników.



20

**Wniosek:** Odcinek sparametryzowany ze stałą prędkością ma punkty kontrolne  $p_i = \frac{n-i}{n} p(0) + \frac{i}{n} p(1)$ .

**Dowód:** Dla  $n = 1$  to jest oczywiste.

Założenie indukcyjne dla  $n > 1$ , że parametryzacja stopnia  $n-1$  ma punkty kontrolne  $\hat{p}_i = \frac{n-1-i}{n-1} p(0) + \frac{i}{n-1} p(1)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{i}{n} \hat{p}_{i-1} + \frac{n-i}{n} \hat{p}_i \\ &= \frac{i}{n} \left( \frac{n-1-i+1}{n-1} p(0) + \frac{i-1}{n-1} p(1) \right) + \frac{n-i}{n} \left( \frac{n-1-i}{n-1} p(0) + \frac{i}{n-1} p(1) \right) \\ &= \left( \frac{i}{n} \frac{n-1-i}{n-1} + \frac{n-i}{n} \frac{n-1-i}{n-1} \right) p(0) + \left( \frac{i}{n} \frac{i-1}{n-1} + \frac{n-i}{n} \frac{i}{n-1} \right) p(1) \\ &= \left( \frac{i(n-i)}{n(n-1)} + \frac{(n-i)(n-1-i)}{n(n-1)} \right) p(0) + \left( \frac{i(i-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-i)i}{n(n-1)} \right) p(1) \\ &= \frac{(n-i)(n-1)}{n(n-1)} p(0) + \frac{(n-1)i}{n(n-1)} p(1). \quad \square \end{aligned}$$

21

Wielokrotnie powtarzane podwyższenie stopnia wytwarza ciąg łamanych kontrolnych zbiegających jednostajnie do łuku krzywej Béziera odpowiadającego  $t \in [0, 1]$ , reprezentowanej przez wszystkie te łamane.

Dowód jest dosyć żmudny. Zbieżność tego procesu obcinania narożników jest dosyć wolna, ale istotny jest fakt, że krzywą Béziera można otrzymać z łamanej kontrolnej przez obcinanie narożników.

22

### Pochodna krzywej Béziera

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(t) &= \sum_{i=0}^n p_i \frac{d}{dt} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n p_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \\ &= \sum_{i=0}^n p_i n B_{i-1}^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^n p_i n B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1} n B_i^{n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i n B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n (p_{i+1} - p_i) B_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Wektory  $n \Delta p_i = n(p_{i+1} - p_i)$  są punktami kontrolnymi krzywej Béziera opisującej pochodną parametryzacji  $p$ .

23

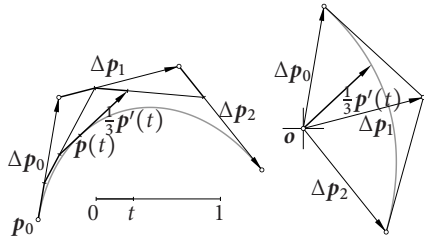
Dla ustalonego  $t$  wektor  $p'(t)$  można otrzymać za pomocą punktów  $p_0^{(n-1)}$  i  $p_1^{(n-1)}$  otrzymanych w przedostatnim kroku algorytmu de Casteljau. Pamiętajmy, że dla

$$q(t) = p_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i B_i^{n-1}(t), \quad r(t) = p_1^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1} B_i^{n-1}(t),$$

jest  $p(t) = (1-t)q(t) + tr(t)$ , a zatem jest

$$\frac{d}{dt} p(t) = n(r(t) - q(t)) = n(p_1^{(n-1)} - p_0^{(n-1)}) = n \Delta p_0^{(n-1)}.$$

24



25

Pochodna funkcji wektorowej, tj. parametryzacji krzywej jest nazywana **hodografem**.

Własność **hodografu** krzywej Béziera wynika z własności otoczki wypukłej: dla  $t \in [0, 1]$  wektor  $p'(t)$  jest kombinacją liniową wektorów  $\Delta p_0, \dots, \Delta p_{n-1}$  o nieujemnych współczynnikach.

Możemy na tej podstawie znajdować ograniczenia kierunku stycznej do krzywej.

Jeśli otoczka wypukła zbioru  $\{\Delta p_0, \dots, \Delta p_{n-1}\}$  nie zawiera wektora zerowego, to parametryzacja krzywej dla  $t \in [0, 1]$  jest **niezdegenerowana**, tj. pochodna nie znika. Taka krzywa jest gładka.

26

### Pochodne wyższych rzędów

Określimy operatory różnic wyższego rzędu. Dla  $k > 1$ :

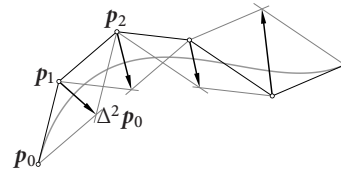
$$\Delta^k p_i = \Delta^{k-1} p_{i+1} - \Delta^{k-1} p_i = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{n}{j} p_{i+j}.$$

Przy ich użyciu możemy zapisać wzór

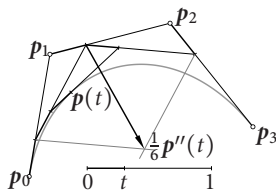
$$\frac{d^k}{dt^k} p(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k p_i B_i^{n-k}(t),$$

obowiązujący dla  $k \leq n$ ; pochodna rzędu większego niż stopień krzywej jest zerowa.

27



28



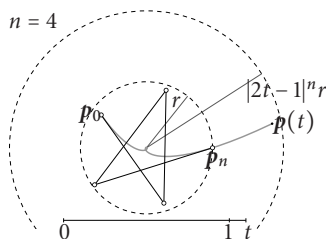
29

- Własność rozszerzonej otoczki: Jeśli  $t < 0$  lub  $t > 1$ , to

$$\left| \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) \right| \leq |2t - 1|^n \max |p_i|.$$

Z tego oszacowania wynika, że jeśli łamana kontrolna krzywej Béziera stopnia  $n$  mieści się w kuli o promieniu  $r$ , to dla  $t \notin [0, 1]$  punkt  $p(t)$  leży w kuli o tym samym środku i promieniu  $|2t - 1|^n r$ .

30



31

**Dowód:** Wykażemy, że

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} B_i^n(t) = (2t - 1)^n.$$

Łatwo to sprawdzić dla  $n = 0$ . Załóżmy, że

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} B_i^{n-1}(t) = (2t - 1)^{n-1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} (2t - 1)^n &= ((t - 1) + t) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} B_i^{n-1}(t) \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (1-t) B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} t B_i^{n-1}(t) \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} B_{i+1}^n(t) \end{aligned}$$

32

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} B_i^n(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i} B_i^n(t) \\
&= (-1)^n B_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \left( \binom{n-i}{n} + \binom{i}{n} \right) B_i^n(t) + (-1)^0 B_n^n(t).
\end{aligned}$$

Dla  $t > 1$ , jeśli  $n - i$  jest parzyste, to  $B_i^n(t) > 0$ , a jeśli  $n - i$  jest nieparzyste, to  $B_i^n(t) < 0$ . Jeśli zatem  $t > 1$ , to wielomian  $p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t)$ , o współczynnikach  $p_i$  takich, że  $|p_i| \leq r$ , ma największą wartość w punkcie  $t$ , jeśli  $p_i = (-1)^{n-i} r$ . Podobnie sprawdzamy przypadek  $t < 0$ .  $\square$

33

- Schemat Hornera. Algorytm de Casteljau oblicza punkt  $p(t)$  kosztem rzędu  $n^2$ . To samo można dostać kosztem rzędu  $n$ .

Niech  $s = 1 - t$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
p(t) &= p_0 \binom{n}{0} s^n + p_1 \binom{n}{1} t s^{n-1} + \dots + p_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1} s + p_n \binom{n}{n} t^n = \\
&= (\dots (p_0 \binom{n}{0} s + p_1 \binom{n}{1} t) s + \dots + p_{n-1} \binom{n}{n-1} t^{n-1}) s + p_n \binom{n}{n} t^n.
\end{aligned}$$

34

Dla  $n > 0$  współczynniki dwumianowe możemy obliczać ze wzorów  $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{i}$ .

```

s = 1 - t;
p = p0;
e = t; b = n;
for ( i = 1; i <= n; i++ ) {
    p = sp + bep;
    e *= t;
    b = (b(n-i))/(i+1);
}
/* p(t) = p. */

```

35

Algorytmu Hornera możemy użyć do obliczenia jednocześnie punktu  $p(t)$  i wektora  $p'(t)$ :

```

s = 1 - t;
q = p0; r = p1;
e = t; b = n - 1;
for ( i = 1; i < n; i++ ) {
    q = sq + bep; r = sr + bep_{i+1};
    e *= t;
    b = (b(n-1-i))/(i+1);
}
p = (1-t)q + tr; v = n(r-p);
/* p(t) = p, p'(t) = v. */

```

Obliczenie po zakończeniu pętli jest ostatnim krokiem algorytmu de Casteljau. Można to dalej zmodyfikować, aby obliczać pochodne wyższych rzędów.

36

## Blossoming

Wielomianowi  $p(t)$  stopnia  $n$  można przyporządkować wielomian  $n$  zmiennych stopnia 1 ze względu na każdą zmienną,  $b(t_1, \dots, t_n)$ , taki że

- $p(t) = b(t, \dots, t)$ ,
- $b(t_1, \dots, t_n) = b(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$  dla każdej permutacji  $\sigma$ .

Taki wielomian  $b$  jest nazywany formą biegunową wielomianu  $p$ .

Ramshaw w 1987 r. wprowadził dla formy biegunowej nazwę *blossom*. Blossoming, czyli „rozkwitanie” ma oznaczać ujawnienie wewnętrznego piękna w wielomianach.

37

Przykład: wielomianowi  $p(t) = 2t^3 + 3t^2 - 5t + 1$  odpowiada

$$b(t_1, t_2, t_3) = 2t_1 t_2 t_3 + (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) - \frac{5}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + 1.$$

W ogólności, jeśli  $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ , to

$$b(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} t_{j_1} \dots t_{j_i}$$

(wewnętrzna suma ma  $\binom{n}{i}$  składników; dla  $i = 0$  jedyny jej składnik jest równy 1).

38

Przyporządkowanie formy biegunowej z  $n$  argumentami wielomianowi stopnia co najwyżej  $n$  jest jednoznaczne. Aby to wykazać, wystarczy pokazać, że różne formy biegunowe odpowiadają różnym wielomianom. Ale różnica dwóch form biegunowych, jeśli nie jest wektorem zerowym, reprezentuje niezerowy wielomian stopnia co najwyżej  $n$ .

Zatem, przestrzenie  $\mathbb{R}[t]_n$  (wielomianów stopnia  $\leq n$ ) i  $S\mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]_{1, \dots, 1}$  (form biegunowych, tj. symetrycznych wielomianów  $n$  zmiennych stopnia  $\leq 1$  ze względu na każdą zmienną) są izomorficzne — obie mają wymiar  $n + 1$ .

39

Dla krzywej wielomianowej  $p(t)$  stopnia  $\leq n$  możemy wskazać wektorową funkcję wielomianową  $b(t_1, \dots, t_n)$  (o wartościach w tej samej przestrzeni), symetryczną i taką że  $p(t) = b(t, \dots, t)$ . Zinterpretujemy uogólniony algorytm de Casteljau jako sposób obliczania wartości formy biegunowej. Przypuśćmy, że  $p_i^{(0)} = b(\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$  dla  $i = 0, \dots, n$ .

Po wykonaniu algorytmu

```

for ( j = 1; j <= n; j++ )
    for ( i = 0; i <= n - j; i++ )
        p_i^{(j)} = (1 - t_j) p_i^{(j-1)} + t_j p_{i+1}^{(j-1)};

```

dostaniemy  $p_0^{(n)} = b(t_1, \dots, t_n)$ .

40

Dowód: Z założenia indukcyjnego, w  $j$ -tym kroku mamy dane punkty

$$p_i^{(j-1)} = b(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-j-i}) \quad \text{dla } i = 0, \dots, n+1-j.$$

Dla  $i = 0, \dots, n-j$  obliczamy

$$\begin{aligned} p_i^{(j)} &= b(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j-i})(1-t_j) + \\ &\quad b(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-j-i})t_j \\ &= b(t_1, \dots, t_{j-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{t_j, 0, \dots, 0}_{n-j-i}). \end{aligned}$$

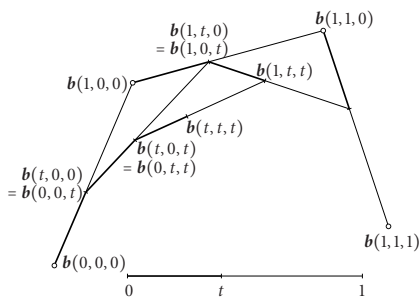
Korzystając z symetrii, możemy przestawić argument  $t_j$  na pozycję  $j$ , co kończy krok indukcyjny.  $\square$

41

Trzy przypadki szczególne:

- Jeśli  $t_1 = \dots = t_n = 0$ , to  $p_i^{(j)} = p_i^{(0)}$ ,
- Jeśli  $t_1 = \dots = t_n = 1$ , to  $p_i^{(j)} = p_{n-j+i}^{(0)}$
- Jeśli  $t_1 = \dots = t_n = t$ , to  $p_0^{(n)} = b(t, \dots, t) = p(t)$  — otrzymamy punkt krzywej Béziera reprezentowanej przez punkty kontrolne  $p_0^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}$ .

42



43

Punkty kontrolne krzywej Béziera są zatem wartościami formy biegunowej jej parametryzacji w punktach  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (oraz we wszystkich punktach otrzymanych przez przestawianie współrzędnych), przy czym liczba jedynek jest numerem punktu kontrolnego  $p_i$ .

Algorytm de Casteljau jest obliczeniem wartości formy biegunowej w punkcie  $(t, \dots, t)$ . Ale w szczególności otrzymujemy też punkty

$$p_0^{(0)}, p_0^{(1)}, \dots, p_0^{(n)} \quad \text{oraz} \quad p_0^{(n)}, p_1^{(n-1)}, \dots, p_n^{(0)},$$

które są wartościami formy biegunowej:

$$p_0^{(j)} = b(\underbrace{t, \dots, t}_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j}), \quad \text{oraz} \quad p_j^{(n-j)} = b(\underbrace{1, \dots, 1}_j, \underbrace{t, \dots, t}_{n-j}).$$

44

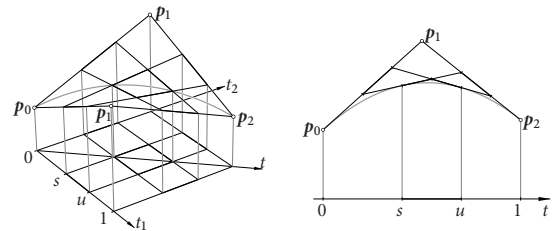
Sąsiednie punkty w obu tych ciągach są wartościami formy biegunowej w punktach różniących się tylko jedną współrzędną — jeśli zatem  $t \neq 0$  i  $t \neq 1$ , to na podstawie każdego ciągu można obliczyć wartości formy biegunowej w dowolnym punkcie, czyli w szczególności odtworzyć całą krzywą.

Przyjmijmy, że wykonaliśmy algorytm de Casteljau dla pewnego  $t_0 \in (0, 1)$ . Wprowadzając nowe, „lokalne” parametry  $s = t/t_0$  i  $u = (t - t_0)/(1 - t_0)$ , możemy sprawdzić, że

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_0^{(i)} B_i^n(s) = \sum_{i=0}^n p_i^{(n-i)} B_i^n(u).$$

Algorytm de Casteljau obliczył reprezentacje Béziera łuków danej krzywej odpowiadające przedziałom  $[0, t_0]$  i  $[t_0, 1]$ , czyli dokonał podziału krzywej.

45



46

**Wniosek:** Algorytm de Casteljau jest kolejnym (po podwyższaniu stopnia) sposobem obcinania narożników prowadzącym do otrzymania krzywej (tj. łuku dla  $t \in [0, 1]$ ) z łamanej kontrolnej.

Jeśli rekurencyjnie dzielimy wszystkie łuki i punkt podziału wybieramy zawsze w środku przedziału lokalnego parametru, to zbieżność ciągu łamanych do krzywej jest tak szybka, że ma to znaczenie praktyczne.

47

### Blossoming i podwyższanie stopnia krzywej

Formę biegunową  $b(t_1, \dots, t_n)$  krzywej Béziera możemy potraktować jak funkcję  $n+1$  argumentów,  $t_1, \dots, t_{n+1}$ . Nie jest ona formą biegunową reprezentacji stopnia  $n+1$ , bo nie jest symetryczna, ale spełnia dwa pozostałe warunki — jest wielomianem stopnia  $\leq 1$  ze względu na każdy argument i podstawienie  $t_1 = \dots = t_{n+1} = t$  jest wielomianową parametryzacją krzywej. Formę biegunową otrzymamy przez symetryzację:

$$\hat{b}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} b(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

W szczególności możemy obliczyć w ten sposób wartości formy w punktach  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , czyli punkty kontrolne  $\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{n+1}$  krzywej stopnia  $n+1$ .

48

## Wymierne krzywe Béziera

Wszystkie krzywe stożkowe oprócz paraboli nie mają parametryzacji wielomianowych, ale mają parametryzacje wymierne. Co więcej, rzuty perspektywiczne krzywych wielomianowych mają na ogół parametryzacje wymierne.

Parametryzacja wymierna składa się z dwóch lub trzech funkcji wymiernych, dla których zawsze można znaleźć wspólny mianownik (wielomian podzielny przez mianowniki wszystkich tych funkcji). Funkcję wektorową, której początkowe współrzędne są opisane przez liczniki a ostatnia jest wspólnym mianownikiem funkcji opisujących daną krzywą wymierną nazywamy **krzywą jednorodną**.

49

Zatem, krzywą płaską o parametryzacji wymiernej

$$p(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

możemy reprezentować za pomocą krzywej wielomianowej

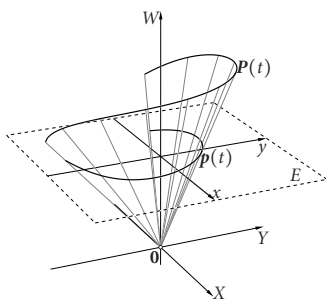
$$P(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$$

Oczywiście, ta reprezentacja nie jest jednoznaczna, bo możemy parametryzację  $P$  pomnożyć przez dowolną stałą lub wielomian różny od zera, otrzymując reprezentację tej samej krzywej  $p$ .

Podobnie możemy reprezentować krzywe w przestrzeni o dowolnym wymiarze.

50

Krzywą wymierną otrzymamy z krzywej jednorodnej jako rzut perspektywiczny na hiperpłaszczyznę  $W = 1$ .



51

Jeśli liczniki i wspólny mianownik współrzędnych parametryzacji krzywej wymiernej przedstawimy w bazie wielomianów Bernsteina, to otrzymamy **wymierną krzywą Béziera** i jej reprezentację jednorodną, która jest krzywą Béziera w przestrzeni o 1 większym:

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

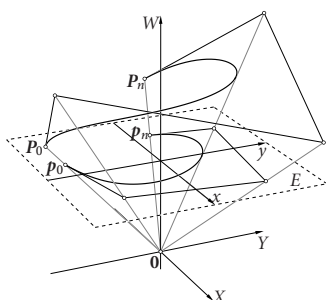
Są tu punkty kontrolne  $p_i$  i współczynniki wagowe (albo wagi)  $w_i$ .

Reprezentacja jednorodna

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$$

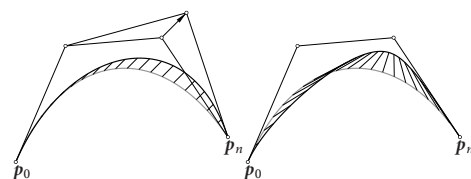
ma punkty kontrolne  $P_i = \begin{bmatrix} w_i p_i \\ w_i \end{bmatrix}$ .

52



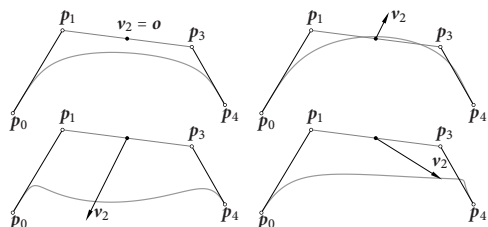
53

Zwiększanie wagi  $w_i$  powoduje „przyciąganie” łuku krzywej dla  $t \in (0, 1)$  do punktu  $p_i$  i zwiększa zmiany krzywej powodowane przesuwaniami tego punktu.



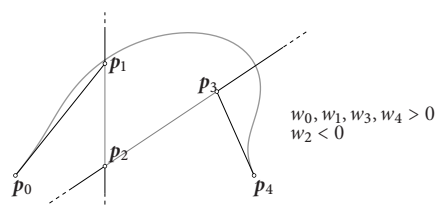
54

Jeśli  $w_i = 0$ , to punkt  $p_i$  nie ma wpływu na kształt krzywej. W takim przypadku można wprowadzić wektor kontrolny  $v_i$  i przyjąć punkt kontrolny reprezentacji jednorodnej  $P_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}$ .



55

Można wybierać wagi o różnych znakach. Łamana kontrolna ma wtedy odcinki zawierające punkty niewłaściwe.



Uwaga: Nie mogą wszystkie wagi być równe 0. Najlepiej, aby jednak wszystkie miały ten sam znak, wtedy (z własności otoczki wypukłej) mianownik nie ma miejsc zerowych w przedziale  $[0, 1]$ .

56

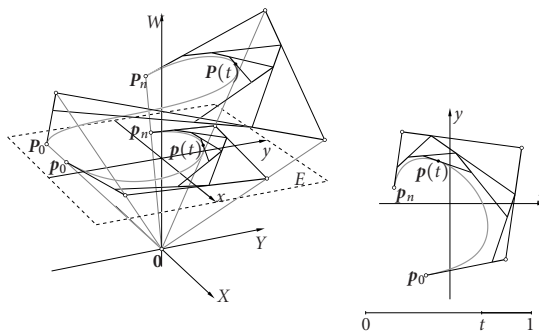
### Wymierny algorytm de Casteljau

```

/*  $p_i^{(0)} = p_i, w_i^{(0)} = w_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ . */
for ( j = 1; j ≤ n; j++ )
  for ( i = 0; i ≤ n - j; i++ ) {
     $w_i^{(j)} = (1 - t)w_i^{(j-1)} + tw_{i+1}^{(j-1)}$ ;
     $s_i^{(j)} = tw_{i+1}^{(j-1)} / w_i^{(j)}$ ;
     $p_i^{(j)} = (1 - s_i^{(j)})p_i^{(j-1)} + s_i^{(j)}p_{i+1}^{(j-1)}$ ;
  }
/*  $p(t) = p_0^{(n)}$ . */

```

57



58

Zamiast algorytmu wymiernego można użyć dowolnego algorytmu przetwarzania krzywych wielomianowych Béziera do reprezentacji jednorodnej (np. schematu Hornera). Po otrzymaniu punktu  $P(t)$  wystarczy obliczyć współrzędne punktu  $p(t)$ , dzieląc liczby  $X(t)$  i  $Y(t)$  (i ewentualnie  $Z(t)$ ) przez  $W(t)$ .

59

### Własności wymiernych krzywych Béziera

- **Uogólnienie krzywych wielomianowych:** Jeśli wszystkie wagi są jednakowe, to mianownik jest funkcją stałą i parametryzacja  $p$  jest wielomianowa.
- **Jednorodność układu wag:** Pomnożenie wszystkich wag przez tę samą stałą nie zmienia parametryzacji, a więc też kształtu krzywej. Jeśli pewne wagi są równe 0, to przez wspomnianą stałą trzeba pomnożyć wektory kontrolne, aby nie zmienić krzywej.
- **Własność otoczki wypukłej:** Jeśli wszystkie wagi mają ten sam znak, to łuk  $\{p(t) : t \in [0, 1]\}$  jest zawarty w otoczce wypukłej zbioru  $\{p_0, \dots, p_n\}$ .

60

- **Interpolacja skrajnych punktów kontrolnych:** Jeśli  $w_0 \neq 0$ , to  $p(0) = p_0$ . Jeśli  $w_n \neq 0$ , to  $p(1) = p_n$ .

- **Podział łuku:** Wymierny algorytm de Casteljau dla ustalonego  $t$  wytwarza punkty  $p_0^{(0)}, \dots, p_0^{(n)}$  i ich wagi  $w_0^{(0)}, \dots, w_0^{(n)}$  oraz  $p_n^{(0)}, \dots, p_n^{(n)}$  z wagami  $w_n^{(0)}, \dots, w_n^{(n)}$ , które reprezentują łuki odpowiadające przedziałom  $[0, t]$  i  $[t, 1]$ .

Można też dokonać podziału krzywej jednorodnej („zwykłym” algorytmem de Casteljau), otrzymując jednorodne reprezentacje tych łuków.

61

- **Krzywa jest styczna do skrajnych odcinków łamanej kontrolnej:** Jeśli wagi  $w_0$  i  $w_n$  nie są zerem i odcinki mają niezerową długość, to leżą na prostych stycznych do krzywej wymiernej w punktach  $p(0)$  i  $p(1)$ . Prosta, na której leżą punkty  $p_0^{(n-1)}$  i  $p_1^{(n-1)}$  otrzymane w przedostatnim kroku wymiernego algorytmu de Casteljau (jeśli są różne) jest styczna do krzywej w punkcie  $p(t)$ . Łatwo można to uzasadnić na podstawie pokazanej ilustracji algorytmu.

- **Podwyższenia stopnia** można łatwo dokonać przez podwyższenie stopnia krzywej jednorodnej. Ale można też pomnożyć krzywą jednorodną przez dowolny niezerowy wielomian.

62

### Obliczanie pochodnych

Najprostszy sposób polega na obliczeniu pochodnych krzywej jednorodnej i znalezieniu na ich podstawie pochodnych parametryzacji. Niech  $q(t)$  oznacza wielomianową funkcję wektorową otrzymaną przez odrzucenie ostatniej (wagowej) współrzędnej parametryzacji  $P(t)$ . Różniczkując  $q(t) = w(t)p(t)$ , otrzymamy

$$q'(t) = w'(t)p(t) + w(t)p'(t) \Rightarrow p'(t) = \frac{1}{w(t)}(q'(t) - w'(t)p(t)),$$

$$q''(t) = w''(t)p(t) + 2w'(t)p'(t) + w(t)p''(t)$$

$$\Rightarrow p''(t) = \frac{1}{w(t)}(q''(t) - 2w'(t)p'(t) - w''(t)p(t))$$

itd. Pochodne funkcji  $q(t)$  i  $w(t)$  otrzymamy, wybierając odpowiednie współrzędne wektorów  $P'(t)$ ,  $P''(t)$  itd.

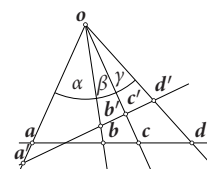
63

### Zasadnicze Twierdzenie Geometrii Rzutowej

Dwustosunek czwórki punktów współliniowych  $a, b, c, d$  ( $a \neq d$ ) jest to wielkość określona wzorem

$$\eta(a, b, c, d) = \frac{b-a}{d-b} : \frac{c-a}{d-c}$$

Dwustosunek jest zachowany przez przekształcenia afiniczne i przez rzuty środkowe na prostą.



64



Dla dowodu tej własności rzutów środkowych zauważmy, że dwustosunek można wyrazić przez pola trójkątów, które mają wspólną wysokość:

$$\eta(a, b, c, d) = \frac{|\Delta oba|}{|\Delta odb|} : \frac{|\Delta oca|}{|\Delta odc|} = \frac{|ob||oa| \sin \alpha}{|od||ob| \sin(\beta + \gamma)} : \frac{|oc||oa| \sin(\alpha + \beta)}{|od||oc| \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)} : \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma}$$

Dwustosunek zależy tylko od kątów między prostymi na których leży środek rzutowania  $o$  i punkty  $a, b, c, d$ , więc będzie taki sam dla punktów przecięcia tych prostych z dowolną inną prostą nieprzechodzącą przez  $o$ .

Zasadnicze twierdzenie geometrii rzutowej jest wnioskiem z zachowania dwustosunku: *Dowolne trzy różne punkty na prostej i ich (różne) obrazy na tej samej lub innej prostej określają jednoznacznie przekształcenie rzutowe pierwszej prostej na drugą.*

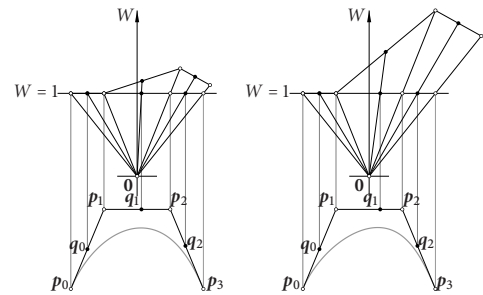
(Uogólnienie na przestrzeń o dowolnym wymiarze  $d$ : *Dane  $d + 2$  punkty, z których żadne  $d + 1$  nie leżą w podprzestrzeni o wymiarze  $d - 1$  oraz obrazy tych punktów spełniające takie samo ograniczenie określają jednoznacznie przekształcenie rzutowe pierwszej przestrzeni na drugą.*)

### Reprezentowanie wag przy użyciu punktów pomocniczych

W 1983 r. Gerald Farin, zainspirowany zasadniczym twierdzeniem geometrii rzutowej, zaproponował „rysunkowy” sposób wprowadzania wag (jako alternatywę do wklepywania liczb): na każdym odcinku  $p_i p_{i+1}$  łamanej kontrolnej należy wybrać punkt pomocniczy  $q_i$ . Punkty  $p_i$  i  $p_{i+1}$  są rzutami środkowymi punktów kontrolnych krzywej jednorodnej  $P_i$  i  $P_{i+1}$ . Przy założeniu, że punkt  $q_i$  jest obrazem w tym rzucie środka odcinka  $P_i P_{i+1}$ , to pozwala to obliczyć

$$q_i = \frac{w_i p_i + w_{i+1} p_{i+1}}{w_i + w_{i+1}}, \quad \frac{w_{i+1}}{w_i} = \frac{q_i - p_i}{p_{i+1} - q_i}$$

Jeśli przyjmiemy  $w_0 = 1$ , to możemy stąd obliczyć wszystkie wagi.

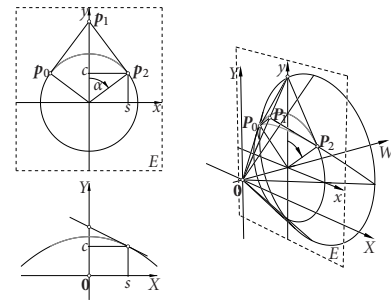


### Reprezentacje krzywych stożkowych

Prawie dowolny łuk krzywej stożkowej można reprezentować jako wymierną krzywą Béziera drugiego stopnia. Można przyjąć wagi  $w_0 = w_2 = 1$  i manipulować punktami  $p_0, p_1, p_2$  i wagą  $w_1$ . Jeśli punkty  $p_0, p_1$  i  $p_2$  nie leżą na jednej prostej, to mamy

$w_1 > 1$	łuk hiperboli
$w_1 = 1$	łuk paraboli (krzywa wielomianowa)
$0 < w_1 < 1$	krótszy łuk elipsy (lub okręgu)
$w_1 = 0$	odcinek $p_0 p_2$ (sparametryzowany ze zmienną prędkością)
$-1 < w_1 < 0$	dłuższy łuk elipsy (lub okręgu)
$w_1 = -1$	dwa łuki paraboli
$w_1 < -1$	trzy łuki hiperboli

Okrąg otrzymamy, dokonując rzutu perspektywicznego paraboli leżącej na stożku obrotowym na płaszczyznę prostopadłą do osi tego stożka. Do konstrukcji wygodnie jest przyjąć stożek  $X^2 + Y^2 - W^2 = 0$ .



Okazuje się, że trzeba przyjąć  $w_1 = \cos \alpha$  (jest  $P_1 = [0, 1, \cos \alpha]^T$ ).

Możemy w ten sposób reprezentować łuk odpowiadający dowolnemu kątowi  $2\alpha$ , z wyjątkiem  $\alpha = \pi/2$  i  $\alpha = \pi$ , ale jeśli kąt  $\alpha$  jest bliski jednej z tych „zabronionych” wartości, to reprezentacja jest bardzo niewygodna. Półokrąg albo okrąg możemy poskładać z kilku krótszych łuków. Inna możliwość to użycie reprezentacji stopnia większego niż 2.

Dokonując podwyższenia stopnia reprezentacji jednorodnej półokręgu, dostaniemy łamaną kontrolną  $p_0 p_1 p_2 p_3$ , której odcinki są trzema bokami kwadratu, a wagi to  $w_0 = w_3 = 1, w_1 = w_2 = 1/3$ .

Znajdziemy reprezentację całego okręgu: parabola  $C(u) = [2u, 1 - u^2, 1 + u^2]$  dla  $u \in \mathbb{R}$  jest jego reprezentacją jednorodną, bez jednego punktu. Podstawiając  $u = \frac{2t-1}{1-(2t-1)^2}$ , dokonujemy takiej reparametryzacji, że dla  $t \in (0, 1)$  zmienna  $u$  przebiega cały zbiór  $\mathbb{R}$ . Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika współrzędnych zreparametryzowanej paraboli i odrzuceniu go, otrzymamy parametryzację wielomianową pewnej krzywej położonej na stożku  $X^2 + Y^2 = W^2$ . Można ją reprezentować w bazie wielomianów Bernsteina stopnia 4: wtedy

$$P_0 = P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7/3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jak widać, dwa punkty kontrolne mają zerową współzrędną wagową. Kłopotów z tym związanych pozbawimy się przez podwyższenie stopnia do 5.

### Reparametryzacja homograficzna i postać standardowa krzywej

Niech  $\rho > 0$  i niech

$$t = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u}, \quad \text{wtedy} \quad 1-t = \frac{1-u}{(1-u) + \rho u}.$$

Wtedy  $u = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $u = 1 \Rightarrow t = 1$  i  $u$  rośnie monotonicznie ze wzrostem  $t$ . Mamy

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} \frac{\rho^i u^i (1-u)^{n-i}}{((1-u) + \rho u)^n} = \frac{\rho^i}{((1-u) + \rho u)^n} B_i^n(u),$$

skąd dalej otrzymamy

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i p_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i p_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n \rho^i w_i B_i^n(u)}.$$

Zatem, zastąpienie wag  $w_0, w_1, \dots, w_n$  przez  $w_0, \rho w_1, \dots, \rho^n w_n$  daje (z tymi samymi punktami kontrolnymi) inną parametryzację tej samej wymiernej krzywej Béziera.

Jeśli wagi  $w_0$  i  $w_n$  mają ten sam znak, to możemy przyjąć  $u_i = w_i \rho^i / w_0$ , gdzie  $\rho = \sqrt[n]{w_0 / w_n}$ . Otrzymamy w ten sposób ciąg wag  $u_0, \dots, u_n$ , w którym wagi punktów  $p_0$  i  $p_n$  są równe 1. Taka reprezentacja krzywej wymiernej nazywa się **standardowa**.

### Tensorowe płaty Béziera

Iloczyn tensorowy dwóch funkcji,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją o dziedzinie  $A \times B$ , określoną wzorem

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v).$$

Dla funkcji należących do pewnych przestrzeni liniowych  $V_1$  i  $V_2$  rozpatruje się iloczyn tensorowy tych przestrzeni, tj. przestrzeni liniowych

$$V_1 \otimes V_2 = \text{lin}\{f \otimes g: f \in V_1, g \in V_2\}.$$

Bazę tej przestrzeni otrzymamy, biorąc wszystkie iloczyny tensorowe par elementów (dowolnie wybranych) baz przestrzeni  $V_1$  i  $V_2$  — zatem wymiar przestrzeni  $V_1 \otimes V_2$  jest równy  $\dim V_1 \dim V_2$ .

Iloczyn tensorowy można określić dla więcej niż dwóch przestrzeni.

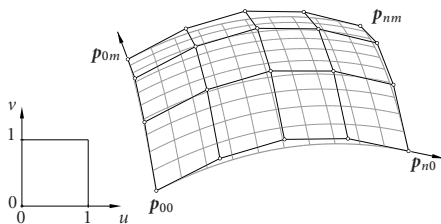
Biorąc przestrzenie  $\mathbb{R}[x]_n$  i  $\mathbb{R}[x]_m$  (wielomianów stopnia co najwyżej  $n$  i  $m$ ), otrzymamy przestrzeń wielomianów dwóch zmiennych. Z baz wielomianów Bernsteina dostaniemy bazę tensorową. Wzór

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

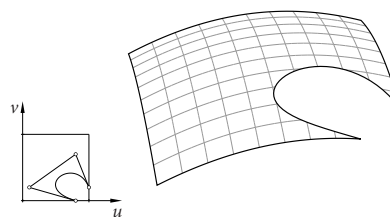
określa **tensorowy płat Béziera** stopnia  $(n, m)$  z **punktami kontrolnymi**  $p_{ij}$ . Odcinki  $p_{ij} p_{i+1, j}$  oraz  $p_{ij} p_{i, j+1}$  tworzą **siatkę kontrolną**, w której wyróżniamy **wiersze** i **kolumny**.

Kształtowanie płata polega na rozmieszczaniu punktów kontrolnych.

Zazwyczaj przyjmujemy, że dziedziną tak określonego płata jest kwadrat  $[0, 1]^2$ .



Można też przyjąć za dziedzinę dowolny obszar, np. wielokąt krzywoliniowy. Jeśli jest zawarty w kwadracie  $[0, 1]^2$ , to mamy **płat obcięty**.



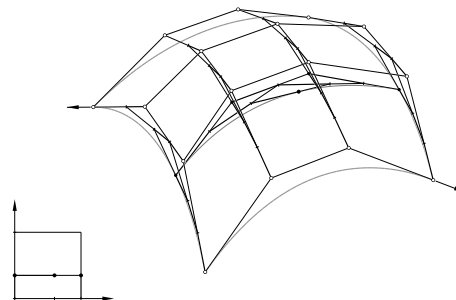
Aby obliczyć punkt  $p(u, v)$  dla danych liczb  $u, v$ , możemy przepisać wzór w postaci

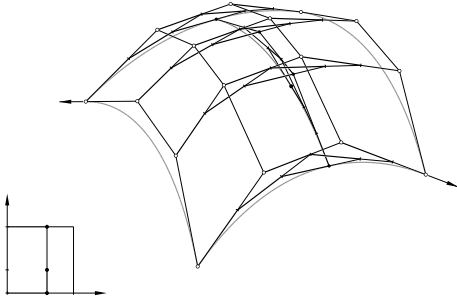
$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^m p_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n q_i B_i^n(u),$$

albo

$$p(u, v) = \sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^n p_{ij} B_i^n(u) \right) B_j^m(v) = \sum_{j=0}^m r_j B_j^m(v).$$

Punkty  $q_i$  są punktami krzywych Béziera, których łamanymi kontrolnymi są kolumny siatki kontrolnej płata. Punkty  $r_j$  są punktami krzywych reprezentowanych przez wiersze. Oba wzory umożliwiają sprowadzenie obliczenia do znalezienia punktów pewnej liczby krzywych Béziera.



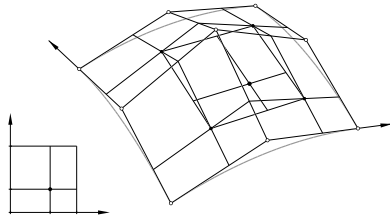


81

Każdy krok algorytmu de Casteljau wykonywanego na wierszach siatki kontrolnej jest działaniem przemiennym z dowolnym krokiem algorytmu wykonywanego na kolumnach. Dotyczy to też wielu innych algorytmów przetwarzania prostokątnych tablic współczynników funkcji w bazie tensorowej. Dlatego mając w sumie  $n$  kroków do wykonania na wierszach i  $m$  kroków przetwarzania kolumn, można te kroki wykonać w dowolnej kolejności.

82

W szczególności można połączyć jeden krok „na wierszach” z jednym krokiem „na kolumnach”, otrzymując krok algorytmu przetwarzającego ściany siatki kontrolnej.



83

### Własności tensorowych płatów Béziera

- **Afiniczna niezmienniczość reprezentacji.** Dla każdego  $u, v$  jest

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \cdot \sum_{j=0}^m B_j^m(v) = 1 \cdot 1 = 1$$

zatem dla każdego przekształcenia afinicznego  $f$  jest

$$f(p(u, v)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(p_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v).$$

- **Własność otoczki wypukłej.** Dla  $(u, v) \in [0, 1]^2$  punkt  $p(u, v)$  jest kombinacją wypukłą zbioru punktów kontrolnych  $p_{ij}$ .

84

- **Interpolacja elementów brzegowych siatki.**

$$p(0, v) = \sum_{j=0}^m p_{0j} B_j^m(v), \quad p(1, v) = \sum_{j=0}^m p_{nj} B_j^m(v),$$

$$p(u, 0) = \sum_{i=0}^n p_{i0} B_i^n(u), \quad p(u, 1) = \sum_{i=0}^n p_{im} B_i^n(u),$$

a ponadto  $p(0, 0) = p_{00}$ ,  $p(0, 1) = p_{0m}$ ,  $p(1, 0) = p_{n0}$ ,  $p(1, 1) = p_{nm}$ .

85

Tensorowa definicja płata umożliwia stosowanie dowolnych algorytmów przetwarzania krzywych do płatów. Można zatem

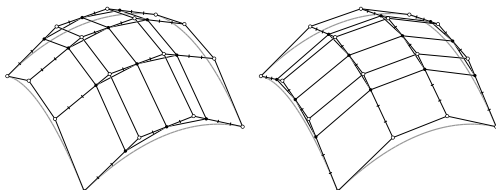
- **Obliczyć punkt płata**, za pomocą algorytmu de Casteljau lub schematu Hornera,
- **Dokonać podwyższenia stopnia** ze względu na każdy z parametrów:

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^m \hat{p}_{ij} B_i^{n+1}(u) B_j^m(v) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} B_i^n(u) B_j^{m+1}(v),$$

gdzie

$$\hat{p}_{ij} = \frac{i}{n+1} p_{i-1,j} + \frac{n+1-i}{n+1} p_{ij}, \quad \tilde{p}_{ij} = \frac{j}{m+1} p_{i,j-1} + \frac{m+1-j}{m+1} p_{ij}.$$

86

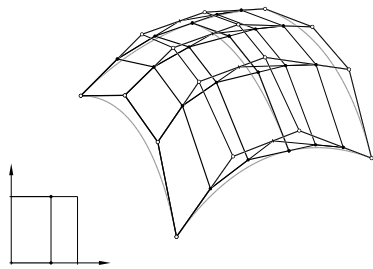


87

- **Dokonać podziału płata** za pomocą algorytmu de Casteljau — kwadrat  $[0, 1]^2$  dzielimy odcinkiem poziomym albo pionowym na dwa prostokąty, które możemy rekurencyjnie dzielić dalej.

W pierwszym przypadku dokonujemy podziału krzywych reprezentowanych przez kolumny siatki kontrolnej (i dostajemy kolumny siatek części podzielonego płata), a w drugim przypadku dzielimy krzywe reprezentowane przez wiersze.

88



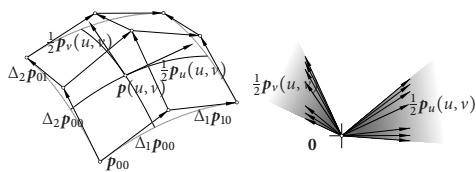
- Obliczyć pochodne cząstkowe parametryzacji:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m n(p_{i+1, j} - p_{ij}) B_i^{n-1}(u) B_j^m(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} m(p_{i, j+1} - p_{ij}) B_i^n(u) B_j^{m-1}(v).$$

Obliczenie pochodnych sprowadza się do obliczania punktów i pochodnych krzywych Béziera (w szczególności możemy użyć schematu Hornera).

Dla siatki złożonej z wierszy i kolumn wprowadzimy dwa operatory różnic:  $\Delta_1 \mathbf{p}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_{i+1, j} - \mathbf{p}_{ij}$  oraz  $\Delta_2 \mathbf{p}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_{i, j+1} - \mathbf{p}_{ij}$ .



- Własność hodografu jest przeniesieniem analogicznej własności krzywych Béziera, tj. zastosowaniem własności otoczki wypukłej do funkcji wektorowych opisujących pochodne cząstkowe. Dla  $(u, v) \in [0, 1]^2$  wektory  $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{p}(u, v)$  i  $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{p}(u, v)$  są odpowiednio kombinacjami wypukłymi wektorów  $n \Delta_1 \mathbf{p}_{ij}$  oraz  $m \Delta_2 \mathbf{p}_{ij}$ .

Stosując rekurencyjnie wzory na pochodne cząstkowe, możemy otrzymać pochodne cząstkowe i mieszane dowolnych rzędów.

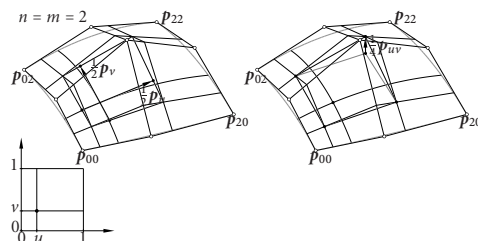
Operatory  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  są przemienne, tj.  $\Delta_1 \Delta_2 \mathbf{p}_{ij} = \Delta_2 \Delta_1 \mathbf{p}_{ij}$ , zatem wektor  $\Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{ij}$  nie zależy od kolejności obliczania różnic. Możemy zatem napisać ogólny wzór

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial u^k \partial v^l} \mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m-l} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{m!}{(m-l)!} \Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{ij} B_i^{n-k}(u) B_j^{m-l}(v).$$

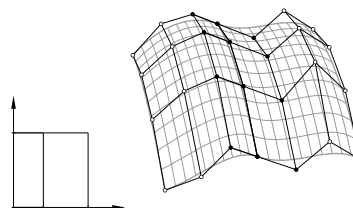
Co więcej, po wykonaniu  $n - k$  kroków algorytmu de Casteljau na wierszach i  $m - l$  kroków na kolumnach, otrzymamy siatkę złożoną z  $k + 1$  kolumn i  $l + 1$  wierszy; oznaczmy wierzchołki tej siatki symbolami  $\mathbf{p}_{ij}^{(n-k, m-l)}$ . Można wtedy obliczyć tylko jeden wektor różnicy rzędu  $(k, l)$  i podstawić go do wzoru

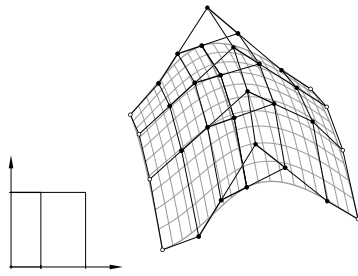
$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial u^k \partial v^l} \mathbf{p}(u, v) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{m!}{(m-l)!} \Delta_1^k \Delta_2^l \mathbf{p}_{00}^{(n-k, m-l)}.$$

Warto tu powtórzyć, że poszczególne kroki algorytmu de Casteljau na wierszach i kolumnach komutują, tj. możemy je wykonywać w dowolnej kolejności. Przemienność dotyczy też wszelkich innych algorytmów przetwarzania kolumn i wierszy, jakie poznaliśmy dla krzywych Béziera (np. podwyższania stopnia).



Gładkie połączenie dwóch płatów Béziera można osiągnąć przez połączenie wierszy (albo kolumn) ich siatek kontrolnych tak, aby osiągnąć gładkość połączenia krzywych Béziera reprezentowanych przez te wiersze (albo kolumny), ale proporcje odległości punktów współliniowych na odpowiednich odcinkach *muszą* być te same dla wszystkich wierszy (kolumn).





### Wymierny płat Béziera

Wzór

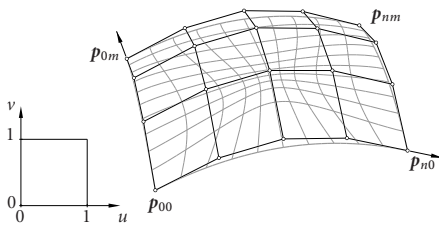
$$p(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} p_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$$

określa wymierny płat Béziera; ma on tyle samo punktów kontrolnych, co płat wielomianowy stopnia  $(n, m)$ , ale należy jeszcze podać wagi  $w_{ij}$ .

Płat wymierny można reprezentować za pomocą wielomianowego płata jednorodnego, znajdującego się w przestrzeni o wymiarze o 1 większym. Jest to tensorowy płat Béziera

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

z punktami kontrolnymi  $P_{ij} = \begin{bmatrix} w_{ij} p_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix}$ .



Wymierny algorytm de Casteljau można uogólnić, aby obliczać punkty płata wymiernego, ale wygodniej jest, mając punkt  $(u, v)$ , obliczyć punkt  $P(u, v)$ , a potem podzielić jego początkowe współrzędne przez współrzędną wagową.

Do przetwarzania wymiernych płatów Béziera możemy użyć wszystkich „wielomianowych” algorytmów, stosując je do płata jednorodnego. Możemy m.in. dokonywać podwyższania stopnia, rekurencyjnego podziału itd.

### Podstawowe własności płatów wymiernych

- **Interpolacja elementów brzegowych siatki.** Jeśli  $w_{00}, w_{n0}, w_{0m}, w_{nm} \neq 0$ , to  $p(0, 0) = p_{00}$ ,  $p(1, 0) = p_{n0}$ ,  $p(0, 1) = p_{0m}$ ,  $p(1, 1) = p_{nm}$ , a ponadto skrajne wiersze i kolumny siatki kontrolnej (razem z podanymi wagami) są reprezentacjami wymiernych krzywych Béziera będących krzywymi brzegowymi płata.
- **Pochodne cząstkowe płata** można obliczać na podstawie pochodnych płata jednorodnego, podobnie jak pochodne wymiernych krzywych Béziera. Jeśli  $q(u, v) = w(u, v)p(u, v)$  jest funkcją wektorową otrzymaną przez odrzucenie współrzędnej wagowej parametryzacji  $P(u, v)$ , to na przykład

$$q_u = w p_u + w_u p \Rightarrow p_u = \frac{1}{w}(q_u - w_u p).$$

- **Brak własności hodografu!** W ogólności wektory  $p_u(u, v)$  i  $p_v(u, v)$  dla  $(u, v) \in [0, 1]^2$  nie są kombinacjami liniowymi o nieujemnych współczynnikach zbiorów wektorów  $\{\Delta_1 p_{ij}; i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m\}$  i  $\{\Delta_2 p_{ij}; i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m-1\}$  (choć wymierne krzywe Béziera o dodatnich wagach analogiczną własność mają).

Własność hodografu ma miejsce w szczególnym przypadku, gdy istnieją ciągi liczb o stałych znakach (np. dodatnich)  $a_0, \dots, a_n$  i  $b_0, \dots, b_m$  takie że  $w_{ij} = a_i b_j$ .

- **Pochodne cząstkowe rzędu  $k$**  dla  $u = 0, u = 1, v = 0$  i  $v = 1$  są określone odpowiednio przez  $k + 1$  pierwszych i ostatnich kolumn i wierszy siatki kontrolnej i przez wagi punktów kontrolnych w tych kolumnach i wierszach. Umożliwia to m.in. gładkie łączenie płatów wymiernych, podobnie jak płatów wielomianowych.

- **Płaszczyznę styczną do płata wymiernego** w punkcie  $p(u, v)$  możemy znaleźć bezpośrednio na podstawie punktu i pochodnych cząstkowych płata wymiernego. Wektor

$$N = P(u, v) \wedge P_u(u, v) \wedge P_v(u, v)$$

jest wektorem normalnym hiperpłaszczyzny w  $\mathbb{R}^4$  zawierającej mnożone w powyższym wzorze wektory. Blok  $n$  powstały z  $N$  przez odrzucenie ostatniej współrzędnej ( $w_N$ ) jest wektorem normalnym płaszczyzny stycznej do płata  $p$ .

**Dowód.** Wektor

$$R = \frac{1}{w} P_u - \frac{w_u}{w^2} P = \left[ \frac{1}{w}(q_u - w_u p) \right] = \begin{bmatrix} p_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów  $P$  i  $P_u$ , a zatem jest prostopadły do  $N$ . Stąd

$$0 = \langle R, N \rangle = \langle p_u, n \rangle + 0 \cdot w_N.$$

Taki sam rachunek dowodzi, że  $\langle p_v, n \rangle = 0$ .  $\square$

Punkt  $\hat{p} = o - \frac{w_N}{(n, n)} n$  jest punktem płaszczyzny stycznej położonym najbliższej początku układu współrzędnych  $o$ .

## Krzywe B-sklejane

Krzywe Béziera są szczególnym przypadkiem krzywych B-sklejanych, które mogą składać się z dowolnie wielu łuków wielomianowych, połączonych w taki sposób, aby w każdym węźle była ustalona liczba ciągłych pochodnych.

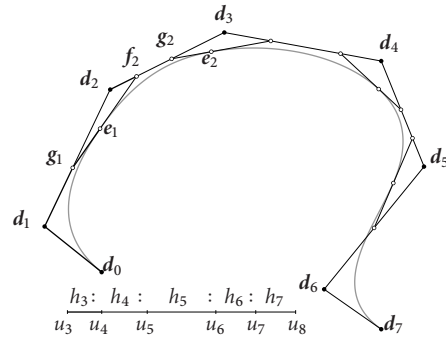
Parametryzacja jest opisana wzorem

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t), \quad t \in [u_n, u_{N-n}],$$

w którym występują **unormowane funkcje B-sklejane**  $N_i^n$ , określone przez niemalejący ciąg węzłów  $u_0, \dots, u_N$  oraz **punkty kontrolne**  $d_i$ . W każdym przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  funkcja  $N_i^n$  jest wielomianem stopnia  $n$  lub zerem.

Stopień krzywej, która ma dużo punktów kontrolnych może być niski, a kształt skomplikowany.

105



106

Definicji (równoważnych) funkcji B-sklejanych jest wiele, na początek przedstawiam najstarszą (klasyczną) — przy użyciu ilorazów różnicowych.

### Ilorazy różnicowe

Do zdefiniowania funkcji, a potem krzywych B-sklejanych przydadzą się ilorazy różnicowe. Niech  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą i niech  $u_0, \dots, u_n \in A$  będą różnymi liczbami. Wzór rekurencyjny

$$f[u_i] \stackrel{\text{def}}{=} f(u_i),$$

$$f[u_i, \dots, u_{i+k}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f[u_i, \dots, u_{i+k-1}] - f[u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]}{u_i - u_{i+k}}$$

określa ilorazy różnicowe rzędu  $k \leq n$  funkcji  $f$  na punktach (węzłach)  $u_0, \dots, u_n$ .

107

- Dla ustalonej funkcji  $f$  iloraz różnicowy rzędu  $k$  jest funkcją  $k + 1$  zmiennych. Funkcja ta jest symetryczna, tj. jej argumenty można dowolnie przestawiać, nie zmieniając wartości.

- Dla ustalonych węzłów  $u_i, \dots, u_{i+k+1}$  iloraz różnicowy jest funkcja liniowa (na przestrzeni funkcji ciągłych w zbiorze  $A$ ), a dokładniej kombinacją liniową (o współczynnikach zależnych od węzłów) wartości funkcji  $f$  w węzłach.

**Twierdzenie.** Jeśli funkcja  $f$  ma w przedziale  $A$ , do którego należą węzły  $u_i, \dots, u_{i+k}$ , ciągłą pochodną rzędu  $k \geq 1$ , to

$$f[u_i, \dots, u_{i+k}] = \int \dots \int_{S_k} f^{(k)}(t_0 u_i + t_1 u_{i+1} + \dots + t_k u_{i+k}) dt_1 \dots dt_k,$$

gdzie  $S_k = \{ (t_0, \dots, t_k) : \sum_{j=0}^k t_j = 1, t_0, \dots, t_k \geq 0 \}$ .

108

Podany w tym twierdzeniu wzór **Hermita-Genocchi** umożliwia określenie ilorazów różnicowych także dla węzłów pokrywających się (ale funkcja  $f$  musi mieć odpowiednie pochodne ciągłe).

Wynikający z niego wniosek, że

$$\lim_{u_{i+1}, \dots, u_{i+k} \rightarrow u_i} f[u_i, \dots, u_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(u_i)}{k!},$$

umożliwia przyjęcie dla wszystkich węzłów jednakowych

$$f[u_i, \dots, u_i] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^{(k)}(u_i)}{k!},$$

a jeśli tylko niektóre węzły pokrywają się, to można użyć wzoru dla węzłów jednokrotnych (jeśli w ciągu  $u_i, \dots, u_{i+k}$  są choć dwa różne) i wzoru podanego wyżej (gdy już wszystkie są jednakowe).

109

- Dla dowolnego ustalonego ciągu węzłów iloraz różnicowy  $f[u_i, \dots, u_{i+k}]$  jest funkcja liniowa, którego wartość jest kombinacją liniową wartości funkcji  $f$  i jej pochodnych w węzłach, przy czym jeśli pewien węzeł w tym ciągu występuje  $r$ -krotnie, to kombinacja liniowa obejmuje wartości pochodnych rzędu  $1, \dots, r - 1$  funkcji  $f$  w tym węźle.

- **Wzór Leibniza** dla ilorazów różnicowych: niech  $g$  i  $h$  będą funkcjami odpowiednio gładkimi i niech  $f = gh$ . Wtedy

$$f[u_0, \dots, u_k] = \sum_{i=0}^k g[u_0, \dots, u_i] h[u_i, \dots, u_k].$$

W otoczeniu węzła o krotności  $r$  funkcje  $g$  i  $h$  muszą być klasy  $C^{r-1}$ .

110

## Funkcje B-sklejane

**Obcięta funkcja potęgowa stopnia  $n$**  jest określona wzorem

$$(t - u)_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (t - u)^n & \text{dla } t \geq u, \\ 0 & \text{dla } t < u. \end{cases}$$

Dla ustalonego  $u$  funkcja ta jest klasy  $C^{n-1}(\mathbb{R})$ . Możemy zauważyć, że jeśli dwa wielomiany stopnia  $n$ ,  $p_1(t)$  i  $p_2(t)$ , mają w punkcie  $u$  tę samą wartość i pochodne rzędu  $\leq n - 1$ , to istnieje stała  $c$ , taka że  $p_2(t) = p_1(t) + c(t - u)^n$ , a zatem funkcja  $s(t) = p_1(t) + c(t - u)^n$  jest funkcją sklejaną klasy  $C^{n-1}$ , opisaną w przedziałach  $(-\infty, u]$  i  $[u, +\infty)$  odpowiednio przez wielomiany  $p_1$  i  $p_2$ .

111

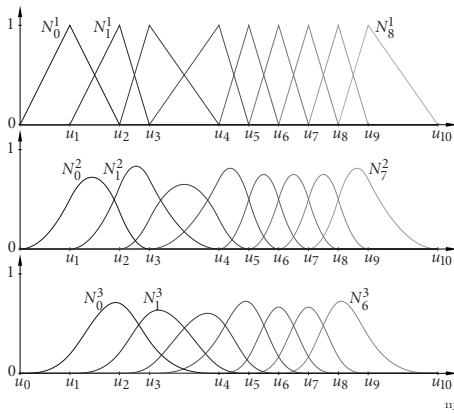
**Def.** Niech  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{N-1} \leq u_N$ . Niech  $f_i(u) = (t - u)_+^n$ . **Unormowana funkcja B-sklejana stopnia  $n$**  z węzłami  $u_i, \dots, u_{i+n+1}$  jest określona wzorem

$$N_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) f_i[u_i, \dots, u_{i+n+1}].$$

Jeśli  $u_i = \dots = u_{i+n+1}$ , to przyjmujemy, że funkcja  $N_i^n$  jest zerowa.

Nazwa wzięła się z dwóch źródeł: *basis spline*, bazowe funkcje sklejane, i *bell-shaped functions*, funkcje o kształcie dzwonu (wykresu).

112



**Własność 1.** Funkcja  $N_i^n$  poza przedziałem  $[u_i, u_{i+n+1}]$  ma wartość 0.

**Dowód.** Liczby  $u_i$  i  $u_{i+n+1}$  to najmniejszy i największy argument różnicy dzielonej w definicji funkcji  $N_i^n$ . Jeśli zatem  $t < u_i$ , to funkcja  $f_t$  ma wartość 0 dla każdego  $u \in \{u_i, \dots, u_{i+n+1}\}$  i jej różnica dzielona jest różnicą dzieloną funkcji zerowej. Z drugiej strony, dla  $u \leq t$  funkcja  $f_t(u)$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Jeśli więc  $t \geq u_{i+n+1} \geq \dots \geq u_i$ , to jej różnica dzielona rzędu  $n+1$  też jest równa 0.  $\square$

Jeśli  $u_i = u_{i+n+1}$ , to funkcja  $N_i^n$  jest funkcją zerową. Dlatego zwykle, mając ustalony stopień  $n$ , narzucamy na ciąg węzłów warunek **progresywności**: ma być  $u_i < u_{i+n+1}$  dla  $i = 0, \dots, N - n - 1$ .

**Własność 2.** Wartości funkcji  $N_i^n$  można obliczać za pomocą wzoru **Mansfielda-de Boora-Coxa**:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(t) + \frac{u_{i+n+1} - t}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t).$$

**Dowód.** Dla funkcji  $N_i^0$  mamy  $f_t(u) = (t - u)_+^0$ , skąd wynika

$$N_i^0(t) = -(u_{i+1} - u_i) \frac{(t - u_i)_+^0 - (t - u_{i+1})_+^0}{u_i - u_{i+1}},$$

i wystarczy zbadać trzy przypadki:  $t < u_i$ ,  $u_i \leq t < u_{i+1}$  i  $u_{i+1} \leq t$ .

Jeśli  $n > 0$ , to możemy przedstawić funkcję  $f_t(u)$  w postaci iloczynu funkcji  $g(u) = t - u$  i  $h(u) = (t - u)_+^{n-1}$  i skorzystać ze wzoru Leibniza:

$$f_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] = \sum_{k=0}^{n+1} g[u_i, \dots, u_{i+k}] h[u_{i+k}, \dots, u_{i+n+1}].$$

Ponieważ pierwszy czynnik jest wielomianem stopnia 1, jego różnice dzielone rzędów wyższych niż 1 są równe 0, stąd

$$f_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] = g[u_i] h[u_i, \dots, u_{i+n+1}] + g[u_{i+1}] h[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}],$$

przy czym  $g[u_i, u_{i+1}] = -1$ .

Na podstawie definicji funkcji B-sklejanych

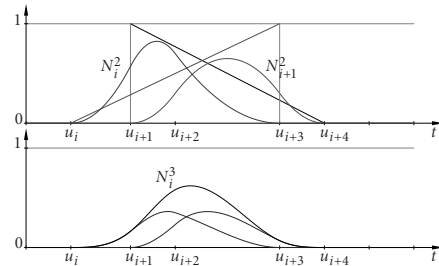
$$h[u_i, \dots, u_{i+n}] = \frac{(-1)^n N_i^{n-1}(t)}{u_{i+n} - u_i},$$

$$h[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}] = \frac{(-1)^n N_{i+1}^{n-1}(t)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}}.$$

Możemy na tej podstawie obliczyć

$$N_i^n(t) = (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) \times \left( (t - u_i) \frac{(-1)^n N_i^{n-1}(t)}{u_{i+n} - u_i} - \frac{(-1)^n N_{i+1}^{n-1}(t)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} \right).$$

Aby dokończyć dowód, wystarczy uporządkować wyrażenie po prawej stronie powyższej równości.  $\square$



W wielu książkach, zwłaszcza na temat grafiki komputerowej, wzór Mansfielda-de Boora-Coxa jest użyty do zdefiniowania funkcji B-sklejanych.

**Własność 3.** W każdym przedziale  $(u_j, u_{j+1}) \subset [u_i, u_{i+n+1}]$  funkcja  $N_i^n(t)$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Jeśli liczba  $u_j$  w ciągu  $u_i, \dots, u_{i+n+1}$  występuje  $r$  razy, to funkcja  $N_i^n$  ma w punkcie  $u_j$  ciągłe pochodne rzędu  $1, \dots, n - r$ .

**Dowód.** To, że między sąsiednimi węzłami funkcja B-sklejana jest wielomianem stopnia  $n$ , natychmiast wynika ze wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa. Fakt, że stopień wielomianu opisującego funkcję  $N_i^n$  w takim przedziale jest równy  $n$  można udowodnić, badając jej pochodną rzędu  $n$  (odpowiedni wzór będzie dalej).

Jeśli pewien węzeł ma krotność  $r > 1$ , to różnica dzielona funkcji  $f_t$  ma składniki, które są iloczynami stałych i pochodnych funkcji  $f_t(u)$  rzędu  $1, \dots, r - 1$  w punkcie  $u_j$ . Dla  $k \leq n$  pochodna rzędu  $k$  funkcji  $f_t$  w punkcie  $u_j$  jest równa  $(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (t - u_j)^{n-k}$ . Ponieważ dla każdego składnika jest  $k < r$ , wszystkie składniki mają pochodną rzędu  $n - r$  względem  $t$  ciągłą w  $u_j$ .  $\square$

**Własność 4 (rozkład jedynki).** Funkcje  $N_i^n$  są nieujemne i jeśli  $t \in [u_n, u_{N-n})$ , to

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} N_i^n(t) = 1.$$

Co więcej, jeśli  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$ , to

$$\sum_{i=k-n}^k N_i^n(t) = 1.$$

**Dowód** polecam jako ćwiczenie.  $\square$

Osiągnięciu tej własności służy czynnik  $(-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i)$  w definicji funkcji  $N_i^n$  i w tym sensie funkcje te są „normowane”.

**Własność 5 (otoczki wypukłej).** Jeśli  $t \in [u_k, u_{k+1}] \subset [u_n, u_{N-n}]$ , to wartość funkcji sklejanej

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t)$$

jest kombinacją wypukłą współczynników  $d_{k-n}, \dots, d_k$ .

**Dowód.** To jest natychmiastowy wniosek z własności 4.  $\square$

Z uwagi na te własności zwykle w zastosowaniach używa się funkcji B-sklejanych określonych dla ciągu węzłów wybranego tak, aby przedział  $[u_n, u_{N-n}]$  był potrzebny w konkretnym zastosowaniu dziedzina (dziedzina domykamy z prawej strony, przyjmując, że wartość funkcji sklejanej w  $u_{N-n}$  jest wartością wielomianu opisującego tę funkcję w przedziale  $[u_{N-n-1}, u_{N-n}]$ ).

**Własność 6.** Pochodna funkcji B-sklejanej stopnia  $n > 0$ , w punktach  $t$ , w których istnieje, wyraża się wzorem

$$\frac{d}{dt} N_i^n(t) = \frac{n}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(t) - \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t).$$

**Dowód.** Aby otrzymać pochodną funkcji  $N_i^n$ , możemy we wzorze ją definiującym zastąpić funkcję  $f_i(u)$  przez jej pochodną ze względu na parametr  $t$ , tj. przez funkcję  $p_t(u) = n(t-u)^{n-1}$ . Dostajemy wtedy równość

$$\begin{aligned} N_i^n(t) &= (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) p_t[u_i, \dots, u_{i+n+1}] \\ &= (-1)^{n+1} (u_{i+n+1} - u_i) \times \\ &\quad \times \frac{p_t[u_i, \dots, u_{i+n}] - p_t[u_{i+1}, \dots, u_{i+n+1}]}{u_i - u_{i+n+1}}, \end{aligned}$$

której przekształcenie do potrzebnej postaci pozostawiam jako ćwiczenie.  $\square$

Pochodna funkcji  $N_i^n$  nie istnieje, jeśli liczba  $t$  występuje  $n$  lub  $n+1$  razy w ciągu  $u_i, \dots, u_{i+n+1}$ .

Z własności 6 wynika, że jeśli  $s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t)$  oraz  $t \in (u_n, u_{N-n})$ , to

$$s'(t) = \sum_{i=0}^{N-n-2} \frac{n(d_{i+1} - d_i)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t),$$

przy czym jeśli  $t \in (u_k, u_{k+1}) \subset (u_n, u_{N-n})$ , to

$$s'(t) = \sum_{i=k-n}^{k-1} \frac{n(d_{i+1} - d_i)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t). \quad (\square)$$

Dowód tych wzorów też polecam jako ćwiczenie. Trzeba w nim skorzystać ze spostrzeżenia, że funkcje  $N_0^{n-1}$  i  $N_{N-n}^{n-1}$  są w przedziale  $[u_n, u_{N-n}]$  równe 0.

**Własność 7 (lokalna liniowa niezależność).** Jeśli  $u_k < u_{k+1}$ , to funkcje  $N_{k-n}^n, \dots, N_k^n$  w przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  są wielomianami liniowo niezależnymi.

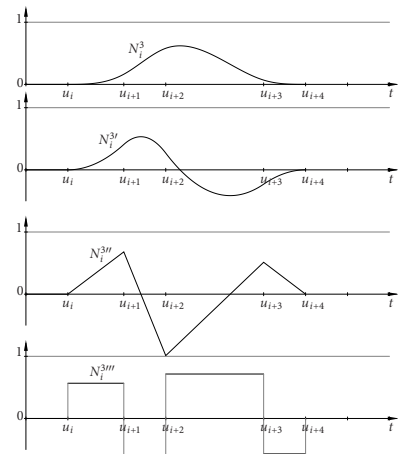
**Dowód.** Wystarczy wykazać, że jeśli funkcja  $s(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t)$  jest w całym przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  równa zero, to  $d_{k-n} = \dots = d_k = 0$ . Dla  $n = 0$  to jest oczywiste. Przypuśćmy zatem, że  $n > 0$  i że funkcje  $N_{k-n+1}^{n-1}, \dots, N_k^{n-1}$  w przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  są liniowo niezależnymi wielomianami stopnia  $n-1$ . Jeśli funkcja  $s$  znika w tym przedziale, to również jej pochodna jest w nim równa 0, ale ze wzoru  $(\square)$  i z przypuszczenia wynika, że  $d_{i+1} - d_i = 0$  dla  $i = k-n, \dots, k-1$ . Stąd funkcja zerowa  $s$  ma współczynniki  $d_{k-n} = \dots = d_k$ . Ale z własności otoczki wypukłej wynika, że dla każdego  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  jest  $\sum_{i=k-n}^k d_k N_i^n(t) = d_k$ , więc musi być  $d_k = 0$  i tym sposobem krok indukcyjny został zrobiony.  $\square$

Na podstawie własności 7 łatwo jest dowieść (ćwiczenie), że zbiór funkcji  $N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n$  określony dla progresywnego ciągu węzłów  $u_0, \dots, u_N$  jest liniowo niezależny, a nawet że zbiór nieskończony  $\{N_i^n; i \in \mathbb{Z}\}$  funkcji określonych dla nieskończonego progresywnego ciągu węzłów jest liniowo niezależny. Zatem zbiór funkcji B-sklejanych jest istotnie bazą przestrzeni funkcji sklejanych, którą rozpinają.

**Własność 8 (minimalnego nośnika).** Nie istnieje niezerowa funkcja sklejana stopnia  $\leq n$  z węzłami  $u_i, \dots, u_{i+n+1}$ , która w otoczeniu każdego węzła o krotności  $r$  jest klasy  $C^{n-r}$  i której nośnik (domknięcie zbioru, w którym funkcja przyjmuje niezerowe wartości) jest podzbiorem właściwym przedziału  $[u_i, u_{i+n+1}]$ , tj. nośnika funkcji  $N_i^n$ .

**Dowód.** Przypadki  $n = 0$  i  $n = 1$  są trywialne. Niech  $n > 1$ . Załóżmy, że wszystkie węzły są jednokrotne i przypuśćmy, że taka funkcja  $f$  (klasy  $C^{n-1}(\mathbb{R})$ ) istnieje i przyjmuje wartość dodatnią w pewnym punkcie  $t_0^{(0)} \in (u_i, u_{i+n+1})$ . Ponieważ  $f(u_i) = f(u_{i+n+1}) = 0$ , w pewnym przedziale funkcja  $f$  jest rosnąca, a po nim następuje przedział, w którym  $f$  maleje. To oznacza, że istnieją punkty  $t_0^{(1)}$  i  $t_1^{(1)}$ , takie że  $u_i < t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < u_{i+n+1}$  i  $f'(t_0^{(1)}) > 0$ ,  $f'(t_1^{(1)}) < 0$ . Z ciągłości  $f'$  jest też  $f'(u_i) = f'(u_{i+n+1}) = 0$ .

Stosując to rozumowanie do kolejnych ciągłych pochodnych (rzędu  $2, \dots, n-1$ ), stwierdzamy, że  $f^{(n-1)}$  ma co najmniej  $n+1$  przedziałów wewnątrz  $[u_i, u_{i+n+1}]$ , w których jest na przemian rosnąca i malejąca. Ale pochodna rzędu  $n-1$  funkcji sklejanej stopnia  $n$  jest funkcją sklejanej stopnia 1; pochodna rzędu  $n$  jest funkcją kawałkami stałą, która musi w co najmniej  $n+1$  przedziałach przyjmować na przemian wartości dodatnie i ujemne. Jedynymi punktami nieciągłości funkcji  $f^{(n)}$  mogą być węzły  $u_i, \dots, u_{i+n+1}$ , które wyznaczają potrzebne  $n+1$  przedziałów. Ich suma (po domknięciu) daje cały przedział  $[u_i, u_{i+n+1}]$ . Dowód dla przypadku, gdy pewne węzły mają krotność większą niż 1, zostawiam jako ćwiczenie.  $\square$





Algorytm de Boora ma na celu obliczenie, dla danego  $t \in [u_n, u_{N-n})$  obliczenie wartości w tym punkcie funkcji B-sklejanych określonych przez ciąg węzłów  $u_0, \dots, u_N$ . Dokładniej, dla  $k \in \{n, \dots, N-n-1\}$  algorytm oblicza wartości wielomianów opisujących funkcje  $N_{k-1}^n, \dots, N_k^n$ , które w przedziale  $[u_k, u_{k+1})$  mają wartości niezerowe.

Obliczenie jest wykonywane na podstawie wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa.

129

```

/*  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$  */
b[k] = 1; /*  $N_k^0 = 1$  */
for ( j = 1; j <= n; j++ ) {
    beta = (u_{k+1} - t) / (u_{k+1} - u_{k-j+1}); /*  $\beta = \beta_{k-j+1}^{(j)}$  */
    b[k-j] = beta * b[k-j+1]; /*  $N_{k-j}^j = \beta N_{k-j+1}^{j-1}$  */
    for ( i = k-j+1; i < k; i++ ) {
        alpha = 1 - beta; /*  $\alpha = \alpha_i^{(j)}$  */
        beta = (u_{i+j+1} - t) / (u_{i+j+1} - u_{i+1}); /*  $\beta = \beta_{i+1}^{(j)}$  */
        b[i] = alpha * b[i] + beta * b[i+1]; /*  $N_i^j = \alpha N_i^{j-1} + \beta N_{i+1}^{j-1}$  */
    }
    b[k] *= (1 - beta); /*  $N_k^j = \alpha N_k^{j-1}$  */
}
/*  $b[i] = N_i^n(t)$  dla  $i = k-n, \dots, k$  */

```

130

Drugi algorytm de Boora (zwany czasami uogólnionym algorytmem de Casteljau) na podstawie ciągu węzłów  $u_0, \dots, u_N$ , ciągu punktów kontrolnych  $d_0, \dots, d_{N-n-1}$  i liczby  $t \in [u_n, u_{N-n})$  znajduje punkt krzywej B-sklejanej odpowiadający punktowi  $t$ .

Niech  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$ . Wtedy mamy również

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=k-n}^k d_i N_i^n(t).$$

131

Jeśli  $n > 0$ , to na podstawie wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{i=k-n}^k d_i \left( \frac{t-u_i}{u_{i+n}-u_i} N_i^{n-1}(t) + \frac{u_{i+n+1}-t}{u_{i+n+1}-u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \right) \\
 &= \sum_{i=k-n+1}^k \alpha_i^{(n)} d_i N_i^{n-1}(t) + \sum_{i=k-n}^{k-1} (1 - \alpha_{i+1}^{(n)}) d_{i+1} N_{i+1}^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=k-n+1}^k \alpha_i^{(n)} d_i N_i^{n-1}(t) + \sum_{i=k-n+1}^k (1 - \alpha_i^{(n)}) d_{i-1} N_{i-1}^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=k-n+1}^k (\alpha_i^{(n)} d_i + (1 - \alpha_i^{(n)}) d_{i-1}) N_i^{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

132

Oznaczmy  $d_i^{(1)} = \alpha_i^{(n)} d_i + (1 - \alpha_i^{(n)}) d_{i-1}$ . Jeśli  $n > 1$ , to takie przekształcenie możemy zastosować rekurencyjnie i otrzymać

$$s(t) = \sum_{i=k}^k d_i^{(n)} N_i^0(t) = d_k^{(n)}.$$

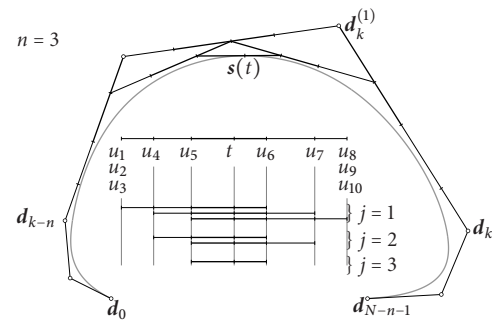
Na tym rachunku opiera się algorytm obliczania punktu  $s(t)$ :

```

/*  $d_i^{(0)} = d_i$  dla  $i = k-n, \dots, k$ ,  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$  */
for ( j = 1; j <= n; j++ ) {
    for ( i = k-n+j; i <= k; i++ ) {
        alpha = (t - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i); /*  $\alpha = \alpha_i^{(n+1-j)}$  */
        d_i^{(j)} = (1 - alpha) * d_{i-1}^{(j-1)} + alpha * d_i^{(j-1)};
    }
}
/*  $d_k^{(n)} = s(t)$  */

```

133



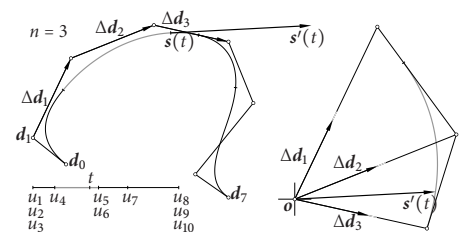
134

## Własności krzywych B-sklejanych

- Afiniczna niezmienniczość reprezentacji:** Jeśli  $f$  jest dowolnym przekształceniem afinicznym, to obraz krzywej  $s$  w tym przekształceniu jest reprezentowany przez punkty kontrolne  $f(d_i)$ .
- Niezmienniczość ze względu na afiniczne przekształcenia ciągu węzłów:** Biorąc węzły  $u'_i = au_i + b$ , gdzie  $a > 0$ , otrzymamy nową parametryzację (o dziedzinie  $[u'_n, u'_{N-n})$ ) krzywej, której kształt się nie zmienia.
- Silna własność otoczki wypukłej:** Łuk  $s(t)$  dla  $t \in [u_k, u_{k+1})$  jest położony w otoczce wypukłej zbioru  $\{d_{k-n}, \dots, d_k\}$ .

135

- Silna własność hodografu:** Wektor  $s'(t)$  dla  $t \in [u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n})$  jest kombinacją liniową o dodatnich współczynnikach wektorów  $\Delta d_{k-n}, \dots, \Delta d_{k-1}$ .



136

- **Lokalna kontrola kształtu krzywej:** Zmiana punktu  $d_i$  powoduje odkształcenie tylko łuku odpowiadającego parametrom  $t \in [u_i, u_{i+n+1}]$ , czyli co najwyżej  $n + 1$  luków wielomianowych, z których składa się krzywa.

- **Krzywe Béziera jako szczególny przypadek:** Jeśli  $N = 2n + 1$  i  $u_1 = \dots = u_n = 0, u_{n+1} = \dots = u_{2n},$  to  $N_i^n = B_i^n$  (unormowane funkcje B-sklejane w przedziale  $[0, 1]$  są wielomianami Bernsteina) i krzywa B-sklejana jest krzywą Béziera stopnia  $n$ .

Co więcej, jeśli  $u_{k-n+1} = \dots = u_k < u_{k+1} = \dots = u_{k+n},$  to punkty  $d_{k-n}, \dots, d_k$  reprezentują łuk  $s(t)$  dla  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  w bazie Bernsteina lokalnego parametru przyjmującego w przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  wartości od 0 do 1.

137

- **Możliwość wcześniejszego obliczenia punktu  $s(t)$ :** Jeśli parametr  $t$  pokrywa się z węzłem o krotności  $r$ , to możemy algorytm de Boora zakończyć po wykonaniu  $n - r$  przebiegów zewnętrznej pętli; jest  $s(t) = d_{k-r}^{(k-r)}$ . W dalszych przebiegach zawsze będzie  $\alpha = 0$ , więc nie otrzymamy żadnego nowego punktu.

W szczególności, jeśli  $u_{k-n+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$  (tj. węzeł  $u_k$  ma krotność  $n$  lub większą), to  $s(t) = d_{k-n}$ .

- **Ciągłość pochodnych parametryzacji jest opisana prostą regułą:** Jeśli węzeł  $u_k$  (dla  $k \in \{n + 1, \dots, u_{N-n-1}\}$ ) ma krotność  $r$ , to krzywa B-sklejana ma w tym węzle ciągle pochodne do rzędu  $n - r$  włącznie. Ciągłość pochodnych wyższych rzędów zależy od punktów kontrolnych.

138

### Wstawianie węzłów

Przestrzeń funkcji sklejanego stopnia z danymi węzłami jest podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcji sklejanego stopnia z danymi węzłami i jeszcze węzły dodatkowe. Operacja **wstawiania węzła** (W. Boehm, 1980 r.) ma na celu obliczenie, na podstawie węzłów i punktów kontrolnych krzywej B-sklejanej, reprezentacji tej krzywej w bazie B-sklejanej przestrzeni, której elementy mają jeden dodatkowy węzeł.

Jedną z definicji krzywych B-sklejanych opiera się na tej konstrukcji.

139

Dla ustalonych węzłów  $u_1, \dots, u_{N-1}$  określimy współrzędną Greville'a:

$$\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}(u_{i+1} + \dots + u_{i+n}). \quad (3)$$

Zauważmy, że węzły  $u_0$  i  $u_N$  nie mają wpływu na krzywą i nie są tu potrzebne. Jeśli ciąg węzłów jest progresywny, tj. dla każdego  $i$  jest  $u_i < u_{i+n+1}$ , to ciąg współrzędnych Greville'a jest ściśle rosnący.

Współrzędnych Greville'a jest tyle, ile punktów kontrolnych (tj. ich liczba jest wymiarem przestrzeni). Dla krzywej B-sklejanej  $s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t)$  będziemy rozpatrywać punkty  $(\xi_i, d_i)$  (albo dla uproszczenia ilustracji  $(\xi_i, d_i)$ , gdzie  $d_i$  to współczynniki skalarnej funkcji sklejanego  $s(t)$ ) dla  $i = 0, \dots, N - n - 1$ .

140

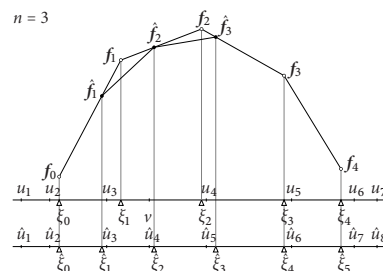
Rozważmy funkcję sklejaną pierwszego stopnia,  $d(t)$ , której wykres jest łamaną o wierzchołkach  $(\xi_0, d_0), \dots, (\xi_{N-n-1}, d_{N-n-1})$ .

Niech  $v \in [u_k, u_{k+1}] \subset [u_n, u_{N-n})$ . Wstawienie liczby  $v$  do ciągu węzłów z zachowaniem uporządkowania daje ciąg  $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N+1}$ . Możemy obliczyć współrzędne Greville'a dla tego ciągu, a następnie wartości  $\hat{d}_0 = d(\hat{\xi}_0), \dots, \hat{d}_{N-1} = d(\hat{\xi}_{N-1})$ . Liczby  $\hat{d}_v$  są współczynnikami funkcji  $s(t)$  w bazie B-sklejanej  $\{\hat{N}_0^n, \dots, \hat{N}_{N-1}^n\}$  odpowiadającej nowemu ciągowi węzłów:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=0}^{N-n} \hat{d}_i \hat{N}_i^n(t).$$

141

Zanim to wykazemy, zobaczmy rysunek.



142

Dla  $v \in [u_k, u_{k+1})$  nowe są tylko współrzędne Greville'a  $\hat{\xi}_i$  i nowe liczby  $\hat{d}_i$  dla  $i = k - n + 1, \dots, k - r$ , gdzie  $r = 0$  jeśli  $v > u_k$ , a jeśli  $v = u_k$ , to  $r$  jest krotnością węzła  $u_k$ . Przy tym mamy  $\xi_{i-1} < \xi_i^v < \xi_i$ , skąd wynika, że każdy nowy punkt  $f_i^v$  leży na innym odcinku  $f_{i-1}f_i$ . To zjawisko jest nazywane **przesiewaniem**. Dla  $i > k$  jest  $\hat{d}_i = d_{i-1}$  (zatem zmieniła się tylko numeracja punktów kontrolnych). Jest

$$\begin{aligned} d_i^v &= \frac{\xi_i - \xi_i^v}{\xi_i - \xi_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\xi_i^v - \xi_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} d_i \\ &= \frac{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_{i+1} + \dots + u_{i+n-1} + t)/n}{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n} d_{i-1} + \\ &\quad \frac{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n-1} + t)/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n}{(u_{i+1} + \dots + u_{i+n})/n - (u_i + \dots + u_{i+n-1})/n} d_i \\ &= \frac{u_{i+n} - t}{u_{i+n} - u_i} d_{i-1} + \frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i} d_i, \end{aligned}$$

zatem wstawianie węzła jest wykonalne bez obliczania współrzędnych Greville'a.

143

```

/* u[i] = u_i dla i = 1, ..., N-1, */
/* d[i] = d_i dla i = 0, ..., N-n-1, t \in [u_n, u_{N-n}]. */
k = N-1;
while ( t < u[k] )
    k--;
r = 0; i = k;
while ( i >= 1 && t == u[i] )
    { i--; r++; }
for ( i = N-n-1; i >= k-r; i-- )
    d[i+1] = d[i];
for ( i = k-r; i > k-n; i-- )
    d[i] = ((u[i+n]-t)d[i-1] + (t-u[i])d[i]) / (u[i+n]-u[i]);
for ( i = N-1; i > k; i-- )
    u[i+1] = u[i];
u[k+1] = t;
N = N+1;
/* zmienna N oraz tablice u i d zawierają wynik
wstawiania węzła. */

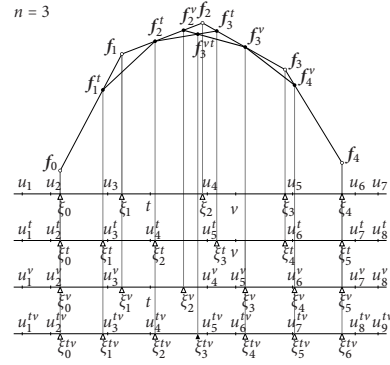
```

144

Wykażemy, że wstawienie kolejno kilku węzłów daje ten sam końcowy wynik, niezależnie od kolejności, w jakiej są one wstawiane. Wystarczy to pokazać dla dwóch różnych węzłów,  $t$  i  $v$ .

Współrzędne Greville'a otrzymane po wstawieniu węzła  $t$  oznaczmy symbolem  $\xi_i^t$ , otrzymane po wstawieniu węzła  $v$  symbolem  $\xi_i^v$ , a wstawienie drugiego węzła da ten samy wynik niezależnie od kolejności:  $\xi_i^{tv} = \xi_i^{vt}$  dla każdego  $i$ . Trzeba wykazać, że także  $d_i^{tv} = d_i^{vt}$  dla każdego  $i$ .

Niech  $t < v$  i niech  $t \in [u_k, u_{k+1})$  oraz  $v \in [u_l, u_{l+1})$ ; wtedy  $k \leq l$ . Jeśli  $l - k \geq n - 1$ , to żaden współczynnik  $d_i^{tv}$  nie zależy od obu nowych węzłów, a więc można je wstawić w dowolnej kolejności, otrzymując ten sam wynik.



Współrzędne Greville'a, które zależą od obu wstawionych węzłów to  $\xi_i^{tv}$  dla  $i = l - n, \dots, k$ . Rozważmy punkty  $f_{i-1}^t, f_{i-1}^v, f_{i-1}^t, f_i^t, f_i^v, f_i^t$  i  $f_i^{tv}$ . Wtedy, ponieważ żaden wektor w wyrażeniu po lewej stronie nie jest pionowy, ma miejsce równość

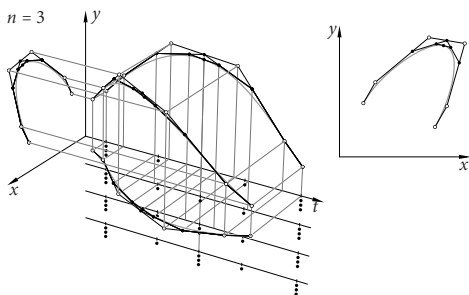
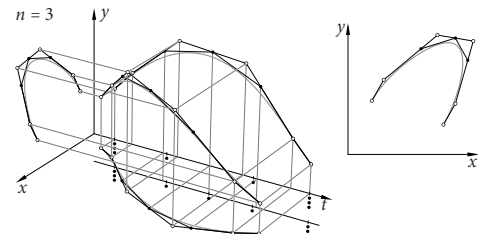
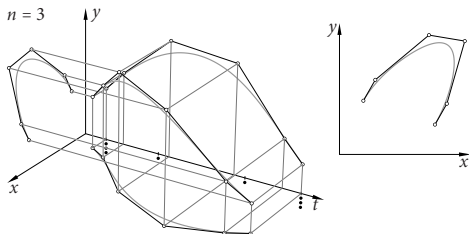
$$\frac{f_{i-1}^t - f_{i-1}^v}{f_{i-1}^v - f_{i-1}^t} \cdot \frac{f_i^t - f_i^v}{f_i^v - f_i^t} = \frac{\xi_{i-1}^t - \xi_{i-1}^v}{\xi_{i-1}^v - \xi_{i-1}^t} \cdot \frac{\xi_i^t - \xi_i^v}{\xi_i^v - \xi_i^t}$$

Podstawiając węzły, których współrzędne Greville'a są średnimi arytmetycznymi, wyrażenie po prawej stronie przekształcimy do postaci

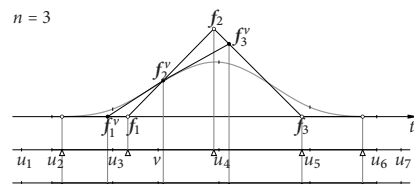
$$\frac{t - u_{i+n-1}}{v - t} \cdot \frac{t - u_i}{u_{i+n-1} - t} \cdot \frac{t - v}{u_i - t} = -1.$$

Stąd i z twierdzenia Menelaosa wynika, że punkt  $f_i^{tv}$  jest punktem wspólnym odcinków  $f_{i-1}^t f_i^t$  i  $f_{i-1}^v f_i^v$ . Punkt  $f_i^{tv}$  też i ma tę samą współrzędną  $\xi_i^{tv}$ , a więc  $f_i^{tv} = f_i^{vt}$ . □

Porównując wstawianie węzła z pierwszym krokiem algorytmu de Boora, możemy zauważyć, że w trakcie obliczeń powstają te same liczby (albo punkty). Kolejne kroki algorytmu de Boora wytwarzają te same wyniki, co wstawianie kolejno nowego węzła tyle razy, aby końcowa krotność była równa  $n$  (jeśli więc chcemy znaleźć punkt  $s(t)$  krzywej B-sklejanej dla  $t = u_k$ , gdzie  $u_k$  jest węzłem o krotności  $r$ , trzeba wstawić węzeł  $t$   $n - r$ -krotnie).



Baza B-sklejana otrzymana po wstawieniu węzła  $v$  powstaje przez wymianę tych funkcji ze starej bazy, które w punkcie  $v$  są różne od zera. Podany niżej rysunek uwiidocznia fakt, że każda z tych funkcji jest kombinacją liniową dwóch elementów nowej bazy.



Niech  $v \in [u_k, u_{k+1}]$ . Dla  $i = k - n$  współrzędne tej kombinacji liniowej są równe 1 i  $\frac{u_{k+1}-v}{u_{k+1}-u_{k-n+1}}$  (na odcinku  $f_{i-1}f_i$  nie powstaje nowy wierzchołek). Dla  $i = k - n + 1, \dots, k - r - 1$  współrzędne są równe  $\frac{v-u_i}{u_{i+n}-u_i}$  i  $\frac{u_{i+n+1}-v}{u_{i+n+1}-u_{i+1}}$ . Jeśli  $i = k - r$ , to na odcinku  $f_i f_{i+1}$  nie powstaje nowy wierzchołek i współrzędne funkcji  $N_k^n$  w nowej bazie są równe  $\frac{v-u_{k-r}}{u_{k-r+n}-u_{k-r}}$  i 1. Mamy zatem

$$N_{k-n}^n(t) = \hat{N}_{k-n}^n(t) + \frac{u_{k+1}-v}{u_{k+1}-u_{k-n+1}} \hat{N}_{k-n+1}^n(t),$$

$$N_i^n(t) = \frac{v-u_i}{u_{i+n}-u_i} \hat{N}_i^n(t) + \frac{u_{i+n+1}-v}{u_{i+n+1}-u_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^n(t) \quad \text{dla } i = k - n + 1, \dots, k - r - 1,$$

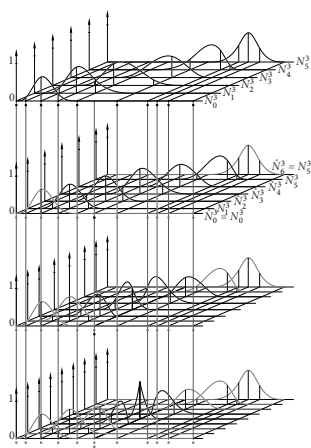
$$N_{k-r}^n(t) = \frac{v-u_{k-r}}{u_{k-r+n}-u_{k-r}} \hat{N}_{k-r}^n(t) + \hat{N}_{k-r+1}^n(t).$$

153

Mamy również  $N_i^n(t) = \hat{N}_i^n(t)$  dla  $i < k - n$  i  $N_i^n(t) = \hat{N}_{i+1}^n(t)$  dla  $i > k - r$ . Na tej podstawie możemy napisać ogólny wzór (wzór Boehma):

$$\begin{cases} N_i^n(t) = \alpha_i \hat{N}_i^n(t) + (1 - \alpha_{i+1}) \hat{N}_{i+1}^n(t), \\ \alpha_i = \max\left(0, \min\left(1, \frac{t_0 - u_i}{u_{i+n} - u_i}\right)\right) \end{cases} \quad \text{dla } i = 0, \dots, N - n - 1.$$

154



155

Usuwanie węzła bez zmiany krzywej jest możliwe, jeśli węzeł ten ma krotność  $r$ , a w jego otoczeniu krzywa ma ciągłą pochodną rzędu  $n + 1 - r$ . Można zatem usunąć węzeł, który dopiero co został wstawiony. Jeśli pochodna rzędu  $n + 1 - r$  jest nieciągła, to zadanie usuwania węzła jest zadaniem aproksymacyjnym. Jednym ze sposobów jego rozwiązania jest potraktowanie układu równań

$$\begin{cases} d_{k-n} = \hat{d}_{k-n}, \\ (1 - \alpha_i) d_{i-1} + \alpha_i d_i = \hat{d}_i, \quad i = k - n + 1, \dots, k - r, \\ d_{k-r} = \hat{d}_{k-r+1} \end{cases}$$

jak liniowego zadania najmniejszych kwadratów.

156

## Zastosowania

- **Zwiększenie swobody projektowania.** „Zgrubny” projekt można otrzymać, korzystając z reprezentacji mającej niewiele punktów kontrolnych. Po jego otrzymaniu można wstawić dodatkowe węzły i ukształtować szczegóły.
- **Zmniejszenie klasy ciągłości w wybranych punktach** — po wstawieniu węzła reprezentacja umożliwia „złamanie” kolejnej pochodnej w tym węźle.
- **Podział krzywej na łuki wielomianowe.** Wstawienie węzłów do krzywej stopnia  $n$  tak, aby wszystkie węzły miały krotność  $n$  daje łamaną kontrolną składającą się z łamanych kontrolnych Béziera poszczególnych łuków. Umożliwia to np. narysowanie krzywej B-sklejanej przy użyciu procedur rysowania krzywych Béziera.

157

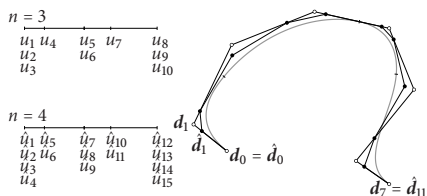
- **Podwyższenie stopnia.** Zadanie polega na obliczeniu punktów  $\hat{d}_0, \dots, \hat{d}_{N-n-2}$ , takich że

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i N_i^n(t) = \sum_{i=0}^{N-n-2} \hat{d}_i \hat{N}_i^{n+1}(t),$$

przy czym funkcje B-sklejane stopnia  $n + 1$  są oparte na takim ciągu węzłów  $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N$ , w którym każdy węzeł  $u_k$  oryginalnej reprezentacji dla  $k = n + 1, \dots, N - n - 1$  został zastąpiony przez węzeł o krotności o 1 większej.

Najprostszy sposób podwyższenia stopnia polega na podwyższeniu krotności oryginalnych węzłów do  $n$ , podwyższeniu stopnia otrzymanych krzywych Béziera, dopisaniu po jednym egzemplarzu wymienionych wyżej węzłów (dla zwiększenia krotności) i usunięciu węzłów wstawionych w pierwszym kroku algorytmu.

158



159

- **Otrzymanie łamanej bliskiej krzywej, którą można narysować zamiast krzywej.** Później udowodnimy, że jeśli ciąg liczb  $v_1, v_2, \dots$  jest gęsty w przedziale  $[u_n, u_{N-n}]$ , to otrzymany ciąg łamanych zbiega jednostajnie do krzywej reprezentowanej przez wszystkie te łamane, co więcej, odległość łamanej od krzywej jest proporcjonalna do kwadratu maksymalnej odległości między węzłami.

- **Implementacja działań algebraicznych na funkcjach i krzywych.** W szczególności mnożenie i dodawanie (skalarynych i wektorowych) funkcji sklejanych jest podstawowym elementem rozmaitych konstrukcji, np. płatów powierzchni. Działania algebraiczne są łatwe do wykonania na wielomianach (reprezentowanych w bazach Bernsteina), idea implementacji jest taka sama jak dla podwyższenia stopnia.

160

## Blossoming

Punkty kontrolne  $d_{k-n}, \dots, d_k$ , które określają łuk wielomianowy krzywej B-sklejanej  $s(t)$  dla  $t \in [u_k, u_{k+1}]$ , są wartościami formy biegunowej  $b_k(t_1, \dots, t_n)$  tego łuku; dokładniej,

$$d_i = b_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n}).$$

Algorytm de Boora dla  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  możemy zinterpretować jako obliczanie wartości tej formy biegunowej. Uogólniając, mamy

```

/*  $d_i^{(0)} = b_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$  dla  $i = k-n, \dots, k$  */
for ( j = 1; j ≤ n; j++ )
  for ( i = k-n+j; i ≤ k; i++ ) {
     $\alpha = (t_j - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$ ;
     $d_i^{(j)} = (1 - \alpha) * d_{i-1}^{(j-1)} + \alpha * d_i^{(j-1)}$ ;
  }
/*  $d_k^{(n)} = b(t_1, \dots, t_n)$  */

```

161

Aby to udowodnić, wystarczy zauważyć, że kolejne punkty, w których dane są wartości formy  $b_k$ , różnią się tylko jedną współrzędną. Korzystając z symetrii formy, możemy przestawić tę współrzędną na koniec, a potem interpolować: w  $j$ -tym kroku, jeśli

$$d_{i-1}^{(j-1)} = b(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}, t_1, \dots, t_{j-1}, u_i)$$

oraz

$$d_i^{(j-1)} = b(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}, \underbrace{t_1, \dots, t_{j-1}}_{j-1}, u_{i+n+1-j}),$$

to

$$d_i^{(j)} = b(u_{i+1}, \dots, u_{i+n-j}, \underbrace{t_1, \dots, t_{j-1}}_{j-1}, t_j).$$

W tym obliczeniu występuje ułamek  $\alpha = (t_j - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$ , w którego mianowniku  $u_i \leq u_k$  oraz  $u_{i+n+1-j} \geq u_{k+1}$ ; zatem nie ma tu dzielenia przez 0 i wynik jest dobrze określony.

162

To jest krok indukcyjny dowodu następującego faktu:

**Stwierdzenie 1** Jeśli ciąg  $u_{k-n+1}, \dots, u_{k+n}$  jest niemalejący, to aby forma biegunowa  $b$  była jednoznacznie określona przez ciąg wartości  $b(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$  dla  $i = k-n, \dots, k$ , potrzeba i wystarczy, aby było  $u_k < u_{k+1}$ .

Rozważając wielomiany i ich formy biegunowe (o wartościach skalarnych), na podstawie jednoznaczności wyniku opisanego wyżej algorytmu, stwierdzamy, że przekształcenie liniowe  $F: \mathbb{R}[t]_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dane wzorem  $F(p) = [d_{k-n}, \dots, d_k]$  jest różnowartościowe, a więc ma odwrotność.

163

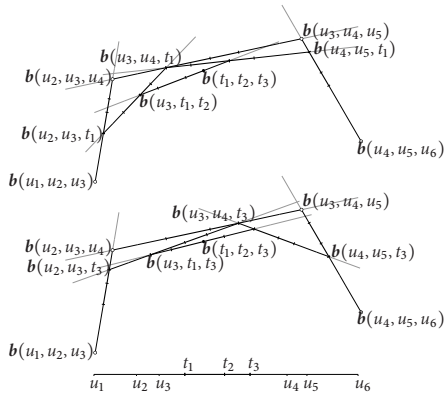
Stąd wynika

**Twierdzenie 1** Dla dowolnych liczb  $u_{k-n+1} \leq \dots \leq u_k < u_{k+1} \leq \dots \leq u_{k+n}$  i punktów  $d_{k-n}, \dots, d_k$  istnieje jednoznacznie określona funkcja wielomianowa  $b(t_1, \dots, t_n)$ , pierwszego stopnia ze względu na każdą zmienną, symetryczna i spełniająca równania  $d_i = b(u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$  dla  $i = k-n, \dots, k$ .

**Wniosek 1** Wielomiany powstałe z obcięć funkcji B-sklejanych  $N_{k-n}^n, \dots, N_k^n$  do przedziału  $[u_k, u_{k+1}]$  są liniowo niezależne (stanowią bazę przestrzeni  $\mathbb{R}[x]_n$ ).

**Wniosek 2** Punkt  $d_k^{(n)}$ , który jest wynikiem procedury rozpatrywanej w dowodzie stwierdzenia 1, nie zależy od uporządkowania liczb  $t_1, \dots, t_n$ .

164



165

Jeśli  $u_{k-r} < u_{k-r+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$ , tj. węzeł  $u_k$  ma krotność  $r$ , przy czym  $r \leq n$ , to formy biegunowe łuków wielomianowych krzywej  $s$  dla  $t \in [u_{k-r}, u_{k-r+1}]$  oraz  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  mają wspólne wartości w punktach  $(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, (u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+1})$ . Wykażemy, że stąd wynika, że w punkcie  $u_k$  łuki te mają wspólny punkt i pochodne rzędu  $1, \dots, n-r$ , ale przedtem znajdziemy ogólny warunek ciągłości sklejenia pochodnych łuków wielomianowych wyrażony za pomocą form biegunowych.

166

**Twierdzenie 2** Niech  $b_1(t_1, \dots, t_n)$  i  $b_2(t_1, \dots, t_n)$  oznaczają formy biegunowe krzywych  $p_1(t)$  i  $p_2(t)$ . Warunkiem koniecznym i dostatecznym spełnienia przez te krzywe równań

$$p_1(u) = p_2(u), \quad \frac{d}{dt} p_1(u) = \frac{d}{dt} p_2(u), \quad \dots, \quad \frac{d^m}{dt^m} p_1(u) = \frac{d^m}{dt^m} p_2(u) \quad (4)$$

dla ustalonego  $u$  oraz  $m \leq n$  jest równość

$$b_1(\underbrace{t_1, \dots, t_m}_m, \underbrace{u, \dots, u}_{n-m}) = b_2(\underbrace{t_1, \dots, t_m}_m, \underbrace{u, \dots, u}_{n-m}) \quad (5)$$

dla każdego układu liczb  $t_1, \dots, t_m$ .

167

**Dowód.** Niech  $b(t_1, \dots, t_n)$  oznacza formę biegunową krzywej  $p(t)$ .

Dla ustalonego  $u$  wprowadzimy nowe zmienne,  $s = t - u$ ,  $s_1 = t_1 - u, \dots, s_n = t_n - u$ . Istnieją wektory  $a_0, \dots, a_m$ , takie że

$$p(t) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad b(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\binom{n}{i}} a_i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} s_{j_1} \dots s_{j_i}.$$

Znając wektory  $a_0, \dots, a_m$ , łatwo możemy wskazać pochodne krzywej  $p$  w punkcie  $u$ :

$$\frac{d^k}{dt^k} p(u) = k! a_k. \quad (6)$$

Podstawiając  $t_{m+1} = \dots = t_n = u$ , czyli  $s_{m+1} = \dots = s_n = 0$ , otrzymujemy

$$b(\underbrace{t_1, \dots, t_m}_m, \underbrace{u, \dots, u}_{n-m}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\binom{n}{i}} a_i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq m} s_{j_1} \dots s_{j_i}.$$

168

Funkcję  $b$  obcięta do zbioru  $t_{m+1} = \dots = t_n = u$  oznaczmy symbolem  $b_u^{m*}$ ; jest ona formą biegunową pewnej krzywej  $p_u^{m*}$  stopnia co najwyżej  $m$ , którą nazwalimy formą diagonalną stopnia  $m$  krzywej  $p$  stopnia  $n$  w punkcie  $u$ .

Krzywe  $p_1$  i  $p_2$  i ich formy biegunowe przedstawimy w opisanym wyżej sposób za pomocą wektorów odpowiednio  $a_{1,0}, \dots, a_{1,n}$  i  $a_{2,0}, \dots, a_{2,n}$ . Funkcje otrzymane w wyniku podstawienia  $t_{m+1} = \dots = t_n = u$  do form  $b_1$  i  $b_2$  oznaczmy symbolami  $b_{1,u}^{m*}$  i  $b_{2,u}^{m*}$ .

169

Możemy teraz napisać cztery zdania, takie że równoważność każdego z nich jest oczywista:

- Równania (4) są spełnione.
- Równania  $a_{1,0} = a_{2,0}, \dots, a_{1,m} = a_{2,m}$  są spełnione.
- Funkcje  $b_{1,u}^{m*}$  i  $b_{2,u}^{m*}$  są identyczne.
- Równanie (5) jest spełnione dla wszystkich liczb  $t_1, \dots, t_m$ .  $\square$

170

**Twierdzenie 3** Krzywa B-sklejana stopnia  $n$  w otoczeniu węzła  $r$ -krotnego ma ciągle pochodne do rzędu  $n - r$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $u_{k-r} < u_{k-r+1} = \dots = u_k < u_{k+1}$ . Mamy wykazać odpowiednią regularność połączenia w punkcie  $u_k$  łuków wielomianowych  $p_{k-r}(t)$  i  $p_k(t)$ , opisujących rozpatrywaną krzywą odpowiednio w przedziałach  $[u_{k-r}, u_{k-r+1})$  i  $[u_k, u_{k+1})$ .

Zgodnie z twierdzeniem 1 łuk  $p_{k-r}$  jest określony przez punkty kontrolne

$$d_{k-n-r} = b_{k-r}(u_{k-n-r+1}, \dots, u_{k-r}), \dots, d_{k-r} = b_{k-r}(u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+n}),$$

a łuk  $p_k$  przez

$$d_{k-n} = b_k(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, d_k = b_k(u_{k+1}, \dots, u_{k+n}).$$

171

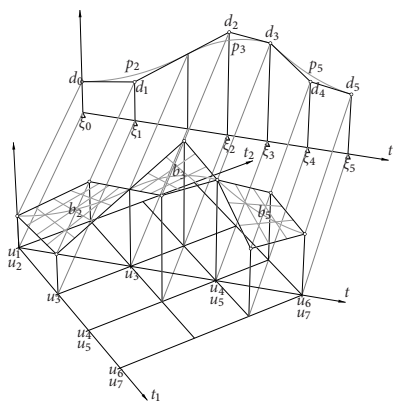
Punkty  $d_{k-n}, \dots, d_{k-r}$  występują w reprezentacjach łuków  $p_{k-r}$  i  $p_k$ , a zatem reprezentacja B-sklejana krzywej  $s$  jawnie zakłada równość form biegunowych  $b_{k-r}$  i  $b_k$  obu tych łuków w punktach  $(u_{k-n+1}, \dots, u_k), \dots, (u_{k-r+1}, \dots, u_{k-r+n})$ . Zauważmy, że w każdym ciągu liczb opisujących te punkty liczba  $u = u_k$  występuje dokładnie  $r$  razy. Pozostałe liczby tworzą  $(n - r)$ -elementowe podciągi kolejnych elementów niemalejącego ciągu węzłów  $u_{k-n+1}, \dots, u_{k-r}, u_{k+1}, \dots, u_{k-r+n}$ . Ponieważ  $u_{k-r} < u_{k+1}$ , więc (na mocy stwierdzenia 1) ciąg  $n - r + 1$  punktów  $d_{k-n}, \dots, d_{k-r}$  jednoznacznie określa równe sobie formy

$$b_{k-r, u_k}^{n-r*}(t_1, \dots, t_{n-r}) = b_{k-r}(t_1, \dots, t_{n-r}, u_k, \dots, u_k)$$

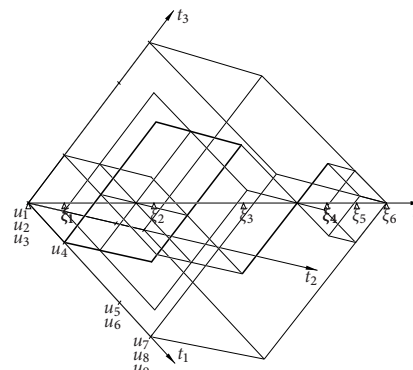
$$\text{oraz } b_{k, u_k}^{n-r*}(t_1, \dots, t_{n-r}) = b_k(t_1, \dots, t_{n-r}, u_k, \dots, u_k).$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia pochodne rzędu co najmniej  $n - r$  krzywych  $p_{k-r}$  i  $p_k$  w punkcie  $u_k$  są równe.  $\square$

172



173



174

Wstawianie węzła  $v \in [u_k, u_{k+1})$  polega na obliczeniu wartości formy biegunowej  $b_k$  w nowych punktach; blossoming daje czytelną interpretację współrzędnych Greville'a i lamanej kontrolnej. Mianowicie, w przestrzeni  $n + d$ -wymiarowej wyróżnimy podprzestrzeń  $n$ -wymiarową (dziedzina formy  $b_k$ ) z naturalnie określonym układem współrzędnych kartezjańskich  $(t_1, \dots, t_n)$ , oraz prostopadłą do niej przestrzeń  $E$ , w której znajduje się krzywa. Do wektorów współrzędnych wierzchołków lamanej kontrolnej doczepiamy wektory współrzędnych odpowiednich punktów w dziedzinie, w taki sposób, aby dla sąsiednich wierzchołków wektory te różniły się tylko na jednym miejscu. Wtedy dla dowolnego punktu  $u = (u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$  w dziedzinie jego rzut prostopadły na prostą  $L = \{(t_1, \dots, t_n) : t_1 = \dots = t_n\}$  ma wszystkie współrzędne równe średniej arytmetycznej współrzędnych tego punktu. Rzutując prostopadłe punkt  $u = (u_{i+1}, \dots, u_{i+n}, b_k(u_{i+1}, \dots, u_{i+n}))$  na podprzestrzeń  $L \times E$ , otrzymamy punkt  $(\xi_i, d_i)$  — wierzchołek lamanej rozpatrywanej w przedstawieniu algorytmu Boehma.

175

### Algorytm Oslo

Mając wstawić wiele węzłów do krzywej sklepanej, można wielokrotnie użyć algorytmu Boehma. Alternatywą jest odkryty w 1980r. przez E. Cohen, T. Lyche i R.F. Riesenfelda algorytm Oslo, który dla danej krzywej B-sklepanej i docelowego ciągu węzłów  $u_1, \dots, u_{N-1}$  (zawierającego podciąg węzłów oryginalnych  $u_1, \dots, u_{N-1}$ ) jawnie oblicza punkty kontrolne  $d_i$  końcowej reprezentacji, jako wartości form biegunowych odpowiednich łuków wielomianowych.

176

```

for ( l = 0; l < N - n; l ++ ) {
    . . . . Znajdź k, takie że  $\hat{u}_l \in [u_k, u_{k+1})$ , albo k = 0 jeśli  $\hat{u}_l < u_0$ ,
    lub k = N - n - 1 jeśli  $\hat{u}_l \geq u_{N-n}$ ;
    for ( i = k - n; i ≤ k; i ++ )
         $d_i^{(0)} = d_i$ ;
    for ( j = 1; j ≤ n; j ++ )
        for i = k - n + j; i ≤ k; i ++ ) {
             $\alpha_i^{(j)} = (\hat{u}_{l+n+1-j} - u_i) / (u_{i+n+1-j} - u_i)$ ;
             $d_i^{(j)} = (1 - \alpha_i^{(j)})d_{i-1}^{(j-1)} + \alpha_i^{(j)}d_i^{(j-1)}$ ;
        }
     $\hat{d}_l = d_k^{(n)}$ ;
}

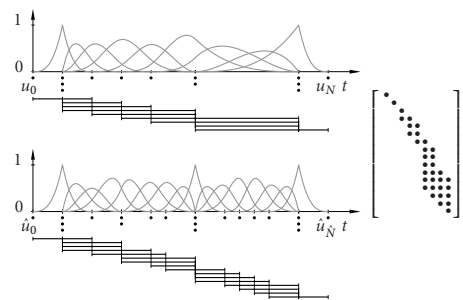
```

Jeśli trzeba wstawić wiele węzłów, to algorytm Oslo jest bardziej kosztowny niż wielokrotnie użyty algorytm Boehma, a ponadto ma wadę: niektóre wartości form biegunowych są obliczane przy użyciu ekstrapolacji (liczby  $\alpha_i^{(j)}$  mogą być poza przedziałem  $[0, 1]$ ), co narusza numeryczną stabilność algorytmu.

W algorytmie Boehma jest wykonywana tylko interpolacja, dzięki czemu zaburzenia spowodowane błędami zaokrągleń są podczas wstawiania kolejnych węzłów mnożone przez ułamki właściwe — końcowe wyniki są obliczone z dużą dokładnością.

Z drugiej strony, algorytm Oslo jest inspiracją dla rozwiązania zadania usuwania węzłów: jeśli ma być usunięte wiele węzłów z krzywej, która wskutek tego zmieni kształt (bo zmniejszamy krotności węzłów w sposób uniemożliwiający reprezentowanie nieciągłości pochodnych krzywej danej) przez rozwiązywanie liniowych zadań najmniejszych kwadratów, to końcowy wynik może zależeć od kolejności usuwania.

Na podstawie algorytmu Oslo można znaleźć macierz przejścia między reprezentacjami krzywych opartych na ciągach  $u_1, \dots, u_{N-1}$  i  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}$  i rozwiązać tylko jedno (duże) LZNK dla układu równań z taką macierzą. Ale algorytm Boehma też umożliwia znalezienie tej macierzy — ona jest iloczynem macierzy opisujących wstawianie węzłów po jednym. Macierz jest wstęgowa, można i warto reprezentować ją w sposób oszczędzający pamięć.



### Zbieżność procesu wstawiania wielu węzłów

**Twierdzenie 4** Niech  $s$  oznacza ciągłą krzywą B-sklejaną stopnia  $n$ , której węzły skrajne mają krotność  $n$ . Jeśli wszystkie elementy ciągu  $v_1, v_2, \dots$  należą do przedziału  $(u_n, u_{N-n})$ , a zbiór wartości tego ciągu jest w tym przedziale gęsty, to ciąg  $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots$  zbiega jednostajnie do krzywej  $s$ . Co więcej, istnieje stała  $L$ , taka że jeśli po wstawieniu węzłów  $v_1, \dots, v_m$  największa odległość węzłów nie przekracza  $h < \frac{2}{n-1}$ , to dla każdego  $t \in [u_n, u_{N-n}]$  jest spełniona nierówność

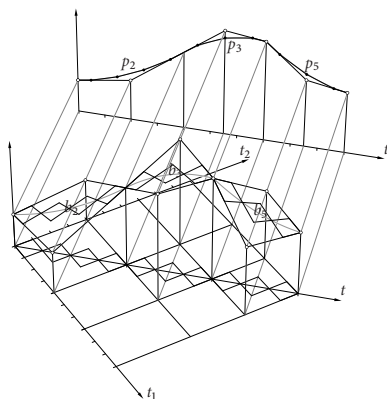
$$\|s(t) - d^{(m)}(t)\| \leq Lh^2.$$

Dowód przedstawię w zarysie. Podstawą jest

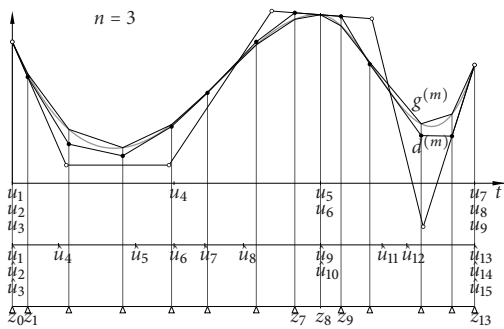
**Lemat 1** Niech  $b(t_1, \dots, t_n)$  będzie formą biegunową wielomianu  $p(t)$  stopnia co najwyżej  $n$  ( $n \geq 2$ ). Jeśli  $0 \leq t_{i+1} - t_i \leq h \leq \frac{2}{n-1}$  dla  $i = 1, \dots, n-1$ , to dla  $\xi = \frac{1}{n}(t_1 + \dots + t_n)$  jest spełniona nierówność

$$|b(t_1, \dots, t_n) - p(\xi)| \leq \frac{(n-1)^2}{4} \sum_{i=2}^n \frac{1}{i!} \left| \frac{d^i}{dt^i} p(\xi) \right| h^2. \quad (7)$$

Jego też tu nie udowodnię, ale idea jest świetnie widoczna na rysunku.



Wierzchołki otrzymanej po wstawieniu węzłów łamanej kontrolnej przybliżają (z błędem ograniczonym przez wyrażenie proporcjonalne do  $h^2$ ) punkty  $s(\xi_i)$ . Łamana, której te punkty są wierzchołkami, jest dla danej krzywej  $s$  interpolacyjną krzywą sklejaną stopnia 1. Druga część dowodu polega na wykazaniu, że dowolną odpowiednio gładką krzywą można przybliżyć łamaną (tj. krzywą sklejaną stopnia 1) z błędem proporcjonalnym do  $h^2$ .



185

## Wymierne krzywe B-sklejane (krzywe NURBS)

Wzór

$$s(t) = \frac{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i d_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)}, \quad t \in [u_n, u_{N-n}]$$

określa parametryzację kawałkami wymierną krzywej, za pomocą funkcji B-sklejanych stopnia  $n$  określonych przez ciąg węzłów  $u_0, \dots, u_N$  i punktów kontrolnych  $d_0, \dots, d_{N-n-1}$  oraz wag  $w_0, \dots, w_{N-n-1}$ . Skrót NURBS pochodzi od określenia *non-uniform rational B-splines*, przy czym *non-uniform* (nierównomiernie) oznacza, że węzły mogą być dowolne (niekoniecznie równoodległe).

186

Wagi powinny być niezerowe, przy czym minimalnym wymaganiem jest przyjęcie, że w każdym podciągu  $w_i, \dots, w_{i+n}$  co najmniej jedna waga nie jest zerem. Jeśli są zerowe wagi, to można użyć wzoru

$$s(t) = \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i \neq 0} w_i d_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i \neq 0} w_i N_i^n(t)} + \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i = 0} v_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, w_i = 0} w_i N_i^n(t)}$$

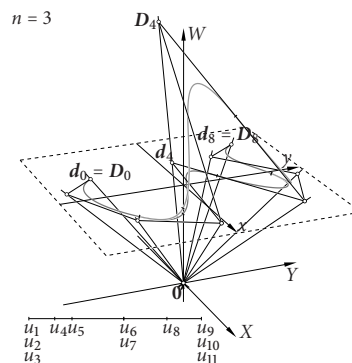
Zamiast punktów  $d_i$ , których wagi są zerem, występują tu wektory kontrolne  $v_i$ . Reprezentacja jednorodna krzywej NURBS jest zwykłą krzywą B-sklejaną w przestrzeni współrzędnych jednorodnych:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} D_i N_i^n(t),$$

gdzie

$$D_i = \begin{bmatrix} w_i d_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad \text{dla } w_i \neq 0 \quad \text{lub} \quad D_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla } w_i = 0.$$

187



188

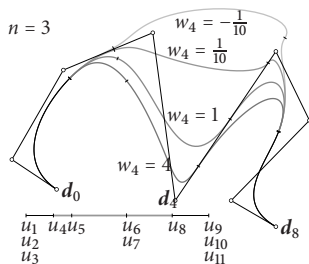
### Własności

- **Uogólnienie krzywych B-sklejanych:** Jeśli wszystkie wagi mają tę samą wartość, to otrzymujemy krzywe B-sklejane kawałkami wielomianowe.
- **Jednorodność układu wag:** Pomnożenie wszystkich wag przez tę samą liczbę nie zmienia krzywej (ani jej parametryzacji). Jeśli pewne wagi są równe 0, to przez wspomnianą liczbę trzeba też pomnożyć odpowiednie wektory  $v_i$ .
- **Niezmienniczość afiniczna reprezentacji:** Aby przesunąć, obrócić lub przeskalować krzywą, wystarczy podać temu przekształceniu punkty  $d_i$ ; wektory  $v_i$  (jeśli są) trzeba podać przekształceniu liniowemu związanemu z tym przekształceniem afinicznym.

189

- **Niezmienniczość ze względu na reparametryzację afiniczną:** Zastąpienie węzłów  $u_0, \dots, u_N$  przez  $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N$ , takie że  $\hat{u}_i = au_i + b$ , gdzie  $a > 0$  nie zmienia kształtu krzywej, zmienia tylko jej parametryzację.
- **Lokalna kontrola kształtu:** Zmiana punktu  $d_i$  lub wagi  $w_i$  powoduje zmianę punktów  $s(t)$  dla  $t \in [u_n, u_{N-n}] \cap [u_i, u_{i+n+1})$ .
- **Silna własność otoczki wypukłej,** jeśli wszystkie wagi mają ten sam znak.

190



191

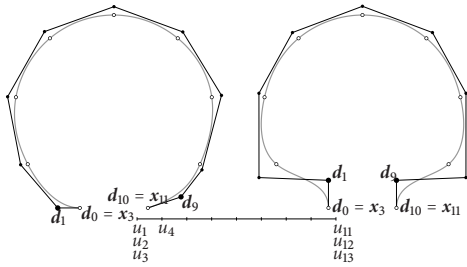
- **Pochodna rzędu  $n-r$  w otoczeniu węzła o krotności  $r$  jest ciągła,** pod warunkiem, że węzeł ten nie jest miejscem zerowym funkcji  $w(t) = \sum_{i=0}^{N-n-1} w_i N_i^n(t)$ . Pochodna rzędu  $k$  jest w ogólności sklejającą krzywą wymierną stopnia  $(k+1)n$ .  
Zazwyczaj nie wyznacza się jawnie reprezentacji NURBS pochodnych; w razie potrzeby zamiast tego lepiej jest obliczać pochodne krzywej jednorodnej (jej pochodna rzędu  $k$  jest krzywą stopnia  $n-k$ ), a następnie obliczać pochodne krzywej wymiernej na podstawie pochodnych krzywej jednorodnej.
- **Silna własność hodografu:** jeśli wagi  $w_{k-n}, \dots, w_k$  mają ten sam znak, to dla  $t \in (u_k, u_{k+1})$  wektor  $s'(t)$  jest kombinacją liniową o dodatnich współczynnikach wektorów  $\Delta d_i = d_{i+1} - d_i$  dla  $i = k-n, \dots, k-1$ .

192



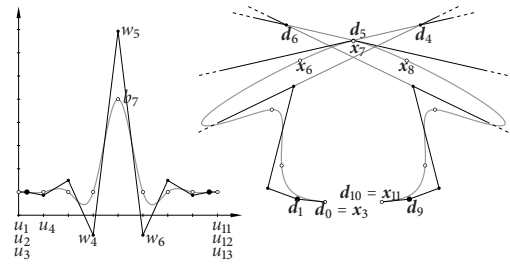


Jak widać, zmiany punktów  $d_1$  i  $d_{N-n-2}$  mają znikomy wpływ na kształt krzywej w oddali od punktów końcowych.



201

Można postawić zadanie interpolacji wymiernej, dołączając indywidualne wagi do punktów  $x_i$  (konstruujemy wtedy interpolacyjną krzywą jednorodną). Ale wtedy, nawet jeśli wszystkie wagi są dodatnie, możemy otrzymać krzywą z niektórymi wagami ujemnymi.



202

### Twierdzenie Schoenberga–Whitney

Zbadamy zadanie interpolacji sklejanej w pełnej ogólności: mając dany niemalejący ciąg węzłów  $u_0, \dots, u_N$  (który określa funkcje B-sklejane  $N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n$ ) oraz ciąg węzłów interpolacyjnych  $v_0, \dots, v_{N-n-1}$ , które niekoniecznie pokrywają się z węzłami  $u_i$ , chcemy znaleźć warunek konieczny i dostateczny istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadania interpolacji Lagrange'a: ma być  $s(v_i) = x_i$ , gdzie liczby  $x_i$  są dane.

**Twierdzenie.** Niech  $v_0, \dots, v_{N-n-1}$  oznacza rosnący ciąg liczb. Dla dowolnych liczb  $x_0, \dots, x_{N-n-1}$  istnieje dokładnie jedna funkcja sklejana  $s$  stopnia  $n$  z węzłami  $u_0, \dots, u_N$ , taka że  $s(v_i) = x_i$  dla  $i = 0, \dots, N-n-1$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $N_i^n(v_i) \neq 0$  dla  $i = 0, \dots, N-n-1$ .

203

**Dowód:** Niech  $A$  oznacza macierz układu równań interpolacyjnych. Jej współczynnik w  $k$ -tym wierszu i  $i$ -tej kolumnie jest równy  $N_i^n(v_k)$ . Jeśli  $N_i^n(v_i) = 0$  dla pewnego  $i$ , to macierz  $A$  możemy przedstawić w postaci blokowo-trójkątnej

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix},$$

w której jedyny współczynnik bloku  $A_{22} = [N_i^n(v_i)]$  jest równy 0. Wyznacznik macierzy blokowo-trójkątnej jest równy iloczynowi wyznaczników bloków na diagonalu, więc macierz  $A$  jest osobliwa, a zatem nierówności  $N_i^n(v_i) \neq 0$  dla  $i = 0, \dots, N-n-1$  stanowią warunek konieczny jej nieosobliwości.

204

Przyjmijmy  $n > 0$  i załóżmy, że  $u_j < v_j < u_{j+n+1}$  dla każdego  $j$ . Rozważmy macierz  $A$ . Jeśli  $v_j \leq u_{j+1}$ , to dla  $k \leq j$  oraz  $i > j$  mamy  $N_i^n(v_k) = 0$ . Jeśli  $v_j \geq u_{j+n}$ , to  $N_i^n(v_k) = 0$  dla  $i \leq j, k > j$ . W wymienionych sytuacjach macierz  $A$  ma postać odpowiednio

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Jest też możliwe spełnienie obu nierówności,  $v_j \leq u_{j+1}$  i  $v_j \geq u_{j+n}$ , wtedy, gdy  $v_j = u_{j+1} = \dots = u_{j+n}$ . Nieosobliwość macierzy blokowo-trójkątnej  $A$  jest równoważna nieosobliwości kwadratowych bloków diagonalnych  $A_{11}$  i  $A_{22}$ . Każdy z nich jest macierzą układu równań spełnianego przez współczynniki interpolacyjnych krzywych sklejanych w odpowiednich bazach B-sklejanych. Na przykład jeśli  $v_j \leq u_{j+1}$ , to blok  $A_{11}$  jest macierzą układu dla krzywej, której węzłami są liczby  $u_0, \dots, u_{j+n+1}$ , a węzłami interpolacyjnymi liczby  $v_0, \dots, v_j$ .

205

Jeśli ciąg  $v_0, \dots, v_j$ , odpowiadający blokowi  $A_{11}$ , jest jednoelementowy, to ten blok jest macierzą  $1 \times 1$ , o dodatnim współczynniku. W przeciwnym razie, jeśli w tym ciągu występuje liczba  $v_k$ , taka że  $v_k \leq u_{k+1}$  lub  $v_k \geq u_{k+n}$ , to blok  $A_{11}$  możemy dalej przedstawić w postaci blokowo-trójkątnej w podobny sposób. To samo dotyczy bloku  $A_{22}$  i bloków na diagonalu, wyróżnionych rekurencyjnie w  $A_{11}$  i  $A_{22}$ . W ten sposób macierz  $A$  możemy przedstawić w postaci blokowej, takiej że jeśli wszystkie bloki na jej diagonalu są nieosobliwe, to macierz  $A$  jest nieosobliwa. Każdy taki blok o wymiarach większych niż  $1 \times 1$  jest macierzą układu równań, określającego interpolacyjną funkcję sklejaną stopnia  $n$ , z węzłami  $u_l, \dots, u_m$  (dla  $l$  i  $m$  takich, że  $0 \leq l < l+n < m \leq N$ ) i węzłami interpolacyjnymi  $v_l, \dots, v_{m-n-1}$ , spełniającymi warunek  $u_{j+1} < v_j < u_{j+n}$ .

206

Możemy teraz dowieść, że  $N_i^n(v_i) \neq 0$  dla  $i = 0, \dots, N-n-1$  jest warunkiem dostatecznym, aby macierz  $A$  była nieosobliwa. Dla  $n = 0$  twierdzenie jest oczywiste, przyjmijmy więc dowolne  $n > 0$  i załóżmy, że zachodzi ono dla funkcji sklejanych stopnia mniejszego niż  $n$ .

Rozważmy ciąg węzłów  $u_l \leq \dots \leq u_m$ , taki że dla  $j = l, \dots, m-n-1$  jest spełniony warunek  $u_{j+1} < v_j < u_{j+n}$ . Funkcje  $N_i^n$  dla  $i = l, \dots, m-n-1$  są określone tylko przez te węzły. Ponieważ krotność żadnego z nich nie przewyższa  $n-1$ , dowolna funkcja sklejana  $s(t) = \sum_{i=l}^{m-n-1} d_i N_i^n(t)$  ma ciągłą pochodną. Załóżmy, że  $s(v_j) = 0$  dla  $j = l, \dots, m-n-1$ , a ponadto mamy  $s(u_l) = s(u_m) = 0$ . Na podstawie twierdzenia Rolle'a istnieją liczby  $w_l \in (u_l, v_l)$ ,  $w_{j+1} \in (v_j, v_{j+1})$  dla  $j = l, \dots, m-n-2$  oraz  $w_{m-n} \in (v_{m-n-1}, u_m)$ , takie że  $s'(w_j) = 0$  dla  $j = l, \dots, m-n$ .

207

Ale pochodna funkcji  $s$  jest funkcją sklejaną stopnia  $n-1$ , którą możemy opisać wzorem  $s'(t) = \sum_{i=l}^{m-n-1} e_i N_i^{n-1}(t)$ , z pewnymi liczbami  $e_i$ . Dla  $j = l, \dots, m-n$  jest  $w_j \in (u_i, u_{i+n})$ , więc na mocy założenia indukcyjnego tylko jedna funkcja  $s'$  spełnia równania  $s'(w_j) = 0$  dla  $j = l, \dots, m-n$ . Funkcja  $s$  ma miejsca zerowe i pochodną tożsamościowo równą 0, zatem  $s(t) = 0$  dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ .

Ponieważ jedynym rozwiązaniem układu równań  $\sum_{i=l}^{m-n-1} d_i N_i^n(v_j) = 0$  dla  $j = l, \dots, m-n-1$  jest wektor współrzędnych  $d_i$  funkcji zerowej, odpowiedni blok na diagonalu macierzy  $A$  jest nieosobliwy, co kończy dowód.  $\square$

208

Choć twierdzenie rozstrzyga problem z punktu widzenia algebry, tak postawione zadanie interpolacyjne może być bardzo źle uwarunkowane. Dlatego należy wybierać węzły tak, aby dla każdego  $i$  funkcja  $N_i^n$  w punkcie  $v_j$  miała jak największą wartość.

Istnieje twierdzenie ogólniejsze, orzekające o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zadań interpolacyjnych Hermite'a.

209

## Krzywe aproksymacyjne

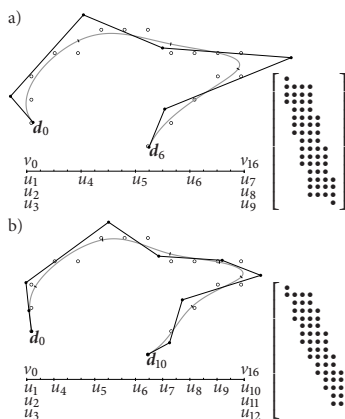
Mając dane warunki interpolacyjne, których liczba jest znacznie większa niż wymiar przestrzeni, w której chcemy wybrać krzywą, możemy rozwiązać zadanie aproksymacyjne, w którym zminimalizujemy sumę kwadratów odległości punktów krzywej od punktów danych. Pozwoli to „wygładzić” dane. W tym celu, po wybraniu węzłów funkcji sklejanej, napiszemy układ równań liniowych

$$s(v_j) = x_j, \quad j = 0, \dots, M.$$

Układ ten będzie na ogół sprzeczny, przy czym jeśli da się z niego wybrać równania spełniające założenia twierdzenia Schoenberga-Whitney, to liniowe zadanie najmniejszych kwadratów postawione dla całego układu będzie regularne.

Przykłady pokażę na obrazkach.

210



211

## Tensorowe płaty B-sklejane

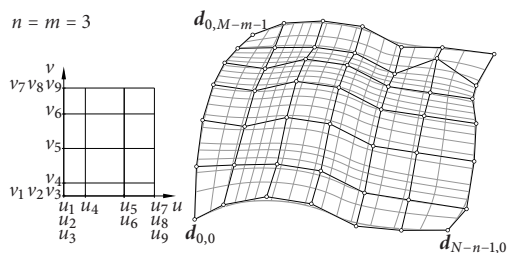
Z baz  $\{N_0^n, \dots, N_{N-n-1}^n\}$  i  $\{N_0^m, \dots, N_{M-m-1}^m\}$  przestrzeni funkcji sklejanych stopni  $n$  i  $m$ , określonych przez węzły  $u_0, \dots, u_N$  oraz  $v_0, \dots, v_M$  można otrzymać bazę tensorową i użyć jej do określenia tensorowego płata B-sklejanego stopnia  $(n, m)$ :

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} d_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v).$$

Dziedziną określonej wyżej parametryzacji jest prostokąt  $[u_n, u_{N-n}] \times [v_m, v_{M-m}]$ , w którym funkcje bazowe określają rozkład jedynki.

Punkty kontrolne  $d_{ij}$  wyznaczają siatkę kontrolną, w której można wyróżnić wiersze i kolumny.

212



213

## Podstawowe własności

- Węzły  $u_0, u_N, v_0, v_M$ , potrzebne do określenia funkcji bazowych, nie mają wpływu na kształt płata i są w zasadzie „dekoracją”.
- **Niezmienniczość afiniczna reprezentacji:** Suma funkcji bazowych w dziedzinie płata jest równa 1. Stąd aby poddać płat dowolnemu przekształceniu afinicznemu, wystarczy zastosować to przekształcenie do punktów kontrolnych.
- **Niezmienniczość płata ze względu na afiniczne reparametryzacje:** Ciągi węzłów  $u_0, \dots, u_N$  oraz  $v_0, \dots, v_M$  można zastąpić przez  $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N$  i  $\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_M$ , gdzie  $\hat{u}_i = au_i + b$ ,  $\hat{v}_i = cv_i + d$ ,  $a, c > 0$ . Zmieni się wtedy parametryzacja (z zachowaniem własności analitycznych), ale nie zmieni się płat.

214

- **Krzywe stałego parametru są krzywymi sklejającymi:** Reprezentację B-sklejaną krzywej  $c(u) = s(u, v)$  dla ustalonego  $v \in [v_m, v_{M-m}]$  można otrzymać, obliczając punkty

$$c_i = \sum_{j=0}^{M-m-1} d_{ij} B_j^m(v).$$

Wtedy

$$c(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} c_i N_i^n(u).$$

Podobnie możemy wyznaczyć krzywe stałego parametru  $v$ .

To oznacza, że do przetwarzania płata tensorowego można użyć wszystkich znanych algorytmów przetwarzania krzywych B-sklejanych.

215

- **Silna własność otoczki wypukłej:** Płat wielomianowy będący częścią płata B-sklejanego dla  $(u, v) \in [u_k, u_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}]$  jest zawarty w otoczce wypukłej zbioru punktów  $\{d_{ij}; i = k-n, \dots, k, j = l-m, \dots, l\}$ .

- **Lokalna kontrola kształtu:** Zmiana punktu  $d_{ij}$  powoduje tylko zmianę punktów  $s(u, v)$  dla  $(u, v) \in [u_i, u_{i+n+1}] \times [v_j, v_{j+m+1}]$ .

- **Pochodne cząstkowe płata są płatami B-sklejanych stopni  $(n-1, m)$  oraz  $(n, m-1)$ :**

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-2} \sum_{j=0}^{M-m-1} \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} (d_{i+1,j} - d_{ij}) N_{i+1}^{n-1}(u) N_j^m(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-2} \frac{m}{v_{j+m+1} - v_{j+1}} (d_{i,j+1} - d_{ij}) N_i^n(u) N_{j+1}^{m-1}(v).$$

216

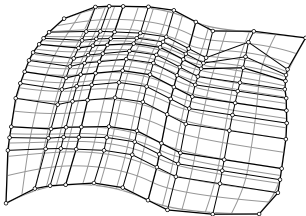
- **Ciągłość pochodnych:** Jeśli płat jest ciągły i w ciągu  $u_1, \dots, u_{N-1}$  występuje węzeł o krotności  $r \leq n$ , to w otoczeniu odcinka  $u = u_i$  pochodne cząstkowe płata względem  $u$  rzędu co najmniej  $n - r$  są ciągłe. Podobne stwierdzenie dotyczy pochodnych cząstkowych względem  $v$ .
- **Silna własność hodografu:** Z podanych wzorów na pochodne wynika, że punktami kontrolnymi płatów opisujących pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są wektory o kierunkach i zwrotach  $\Delta_1 d_{ij} = d_{i+1,j} - d_{ij}$  oraz  $\Delta_2 d_{ij} = d_{i,j+1} - d_{ij}$ . Stosując do tych płatów silną własność otoczki wypukłej, dostaniemy silną własność hodografu — jej dokładne sformułowanie zostawiam jako temat do zastanowienia.

- Jeśli  $u_{i+1} = \dots = u_{i+n} < u_{i+n+1}$ , to kolumna siatki kontrolnej złożona z punktów  $d_{i,0}, \dots, d_{i,M-m-1}$  jest B-sklejaną reprezentacją krzywej stałego parametru  $u = u_{i+n}$ . W szczególności dla  $i = 0$  jest to krzywa brzegowa płata, określona przez pierwszą kolumnę siatki, a dla  $i = N - n - 1$  jest to krzywa brzegowa wyznaczona przez ostatnią kolumnę (tu nie musi być  $u_N > u_{N-1}$ ).

Podobne stwierdzenie dotyczy węzłów  $v_0, \dots, v_M$  i wierszy siatki kontrolnej. Krotność dowolnego węzła możemy zwiększyć, wstawiając węzły.

- **Reprezentacje Béziera** płatów wielomianowych z których składa się płat B-sklejany, możemy otrzymać, wstawiając węzły tak, aby krotność każdego węzła w ciągu „ $u$ ” była równa  $n$ , a w ciągu „ $v$ ” była równa  $m$ . Siatka kontrolna płata B-sklejanego będzie się wtedy składać z połączonych siatek płatów Béziera.

W zasadzie lepiej jest podwyższyć krotność węzłów odpowiednio do  $n + 1$  i  $m + 1$ , bo wtedy siatki kontrolne płatów Béziera będą rozłączne. Daje to możliwość znajdowania płatów reprezentujących pochodne płata B-sklejanego, które mogą być nieciągłe w otoczeniu odcinków wyznaczonych w dziedziny przez węzły.



### Wymiernie tensorowe płaty B-sklejane (powierzchnie NURBS)

Wymierną powierzchnię sklejaną otrzymamy za pomocą wzoru

$$s(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} d_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}$$

Do każdego punktu kontrolnego trzeba dołączyć wagę  $w_{ij}$ . Jeśli  $w_{ij} = 0$ , to zamiast punktu  $d_{ij}$  można wybrać wektor  $v_{ij}$  i podstawić go do wzoru

$$s(u, v) = \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, j=0, \dots, M-m-1, w_{ij} \neq 0} w_{ij} d_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)} + \frac{\sum_{i=0, \dots, N-n-1, j=0, \dots, M-m-1, w_{ij}=0} v_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}$$

Reprezentacją jednorodną wymiernego płata B-sklejanego jest **płat jednorodny**, opisany wzorem

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} D_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)$$

z punktami kontrolnymi

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} w_{ij} d_{ij} \\ w_{ij} \end{bmatrix}, \text{ jeśli } w_{ij} \neq 0, \quad \text{albo} \quad D_{ij} = \begin{bmatrix} v_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ jeśli } w_{ij} = 0.$$

### Powierzchnie rozpinane

**Rozpinanie** (*lofting* albo *skinning*) jest to konstrukcja powierzchni interpolacyjnej, na podstawie pewnej liczby danych krzywych stałego parametru. Tensorowa definicja płata B-sklejanego jest podstawą tej konstrukcji przebiegającej podobnie jak konstrukcja sklejanego krzywej interpolacyjnej.

Zobaczymy przykład konstrukcji płata stopnia  $(3, m)$  (dla dowolnego  $m$ ) Dane krzywe sklejanego stopnia  $m$ ,  $x_i$ , mają być krzywymi stałego parametru  $u$ , dla  $u = u_i, i = 3, \dots, N - 3$ . Krzywe te są *punktami* pewnej przestrzeni. Płat tensorowy jest krzywą interpolacyjną dla tych punktów.

Mamy zatem te same równania, co w konstrukcji krzywej trzeciego stopnia,

$$N_{k-3}^3(u_k) d_{k-3} + N_{k-2}^3(u_k) d_{k-2} + N_{k-1}^3(u_k) d_{k-1} = x_k, \quad k = 4, \dots, N - 4.$$

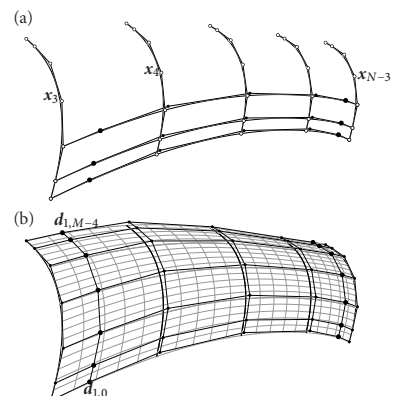
z warunkami brzegowymi a przykład określonymi przez pochodne,

$$s'(u_3) = \frac{3}{u_4 - u_1} (d_1 - d_0),$$

$$s'(u_{N-3}) = \frac{3}{u_{N-1} - u_{N-4}} (d_{N-4} - d_{N-5}),$$

ale teraz zarówno punkty dane  $x_i = x_i(v)$ , warunki brzegowe  $s'(u_3)$  i  $s'(u_{N-3})$  oraz niewiadome  $d_j$  są krzywymi B-sklejanymi stopnia  $m$ . Wszystkie je można reprezentować w bazie B-sklejanej (dowolnej, ale tej samej).

Jeśli baza ta składa się z  $M - m$  elementów, to przestrzeń, której punktami są krzywe dane i krzywe niewiadome, ma wymiar  $3(M - m)$ . Krzywe te utożsamiamy z łamanymi kontrolnymi. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy kolumny siatki kontrolnej płata rozpinanego.



## Powierzchnie zakreślane

Zakreślanie (*sweeping*) polega na „przesuwaniu” krzywej  $q$  (tzw. **przekroju**) wzdłuż (innej) krzywej  $p$  (**przewodnicy**).

W najprostszym przypadku

$$s(u, v) = p(u) + (q(v) - q_0).$$

Do ogólniejszego wzoru

$$s(u, v) = p(u) + x_2(u)x_q(v) + x_3(u)y_q(v) + x_1(u)z_q(v)$$

trzeba podstawić jeszcze trzy kierownice  $x_1, x_2, x_3$ , tj. krzywe określające dodatkowe przekształcenia przekroju podczas przesuwania.

225

Wzór definiujący powierzchnię zakreślaną można przepisać w postaci

$$s(u, v) = [x_2(u), x_3(u), x_1(u)]q(v) + p(u).$$

Dla każdego  $u$  przewodnica i kierownice określają pewne przekształcenie afiniczne; obraz przekroju w tym przekształceniu jest krzywą stałego parametru  $u$  powierzchni.

226

Jeśli wszystkie krzywe w tej konstrukcji są krzywymi B-sklejanymi, tj.

$$q(v) = \sum_{j=0}^{M-m-1} q_j N_j^m(v), \quad p(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} p_i N_i^n(u),$$

$$x_1(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} x_{1,i} N_i^n(u), \quad x_2(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} x_{2,i} N_i^n(u),$$

$$x_3(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} x_{3,i} N_i^n(u),$$

dla pewnych ustalonych ciągów węzłów  $u_1, \dots, u_{N-1}$  i  $v_1, \dots, v_{M-1}$  to punkty kontrolne zakreślonego płata B-sklejanego są takie:

$$d_{ij} = [x_{2,i}, x_{3,i}, x_{1,i}]q_j + p_i.$$

227

Często kierownice są konstruowane „automatycznie” na podstawie przewodnicy. Jeśli przewodnica jest gładką krzywą o niezerowej krzywiznie, jest możliwa konstrukcja kierownic na podstawie układu Freneta:

$$x_1(u) = \frac{f_1(u)}{\|p'(u)\|_2} p'(u),$$

$$x_2(u) = \frac{f_2(u)}{\|p'(u) \wedge p''(u)\|_2} p'(u) \wedge p''(u),$$

$$x_3(u) = \frac{f_3(u)}{\|(p'(u) \wedge p''(u)) \wedge p'(u)\|_2} (p'(u) \wedge p''(u)) \wedge p'(u).$$

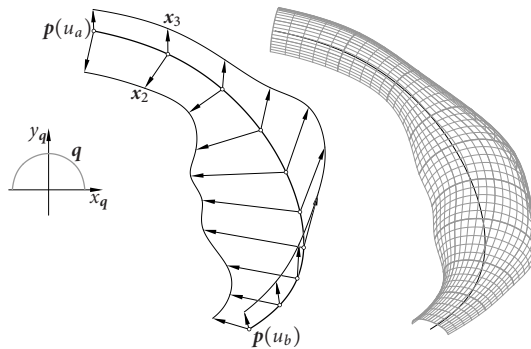
Funkcje  $f_1, f_2$  i  $f_3$  dla każdego  $u$  określają długości wektorów  $x_1(u), x_2(u)$  i  $x_3(u)$ .

228

Inna możliwość to podstawienie do powyższych wzorów arbitralnie wybranej krzywej w miejsce  $p''(u)$  (w szczególności trzeba tak postąpić, jeśli krzywizna krzywej  $p$  jest zerowa).

Podana konstrukcja wytwarza krzywe opisane przez funkcje przestępne, ale można je aproksymować funkcjami sklejanymi z błędem w granicach przyjętej tolerancji.

229



230

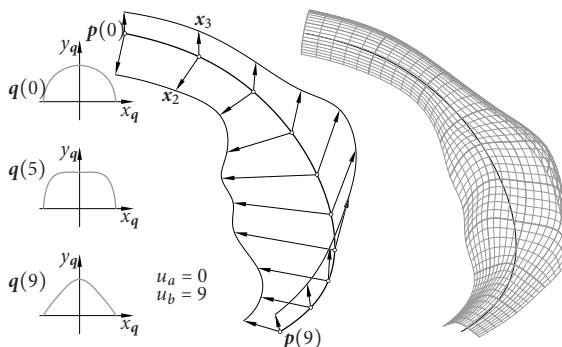
Konstrukcję powierzchni zakreślonej można jeszcze uogólnić, zmieniając przekrój w trakcie „przesuwania”. Taki przekrój jest jednoparametrową rodziną krzywych, czyli w zasadzie płatem tensorowym. Powierzchnia jest wtedy dana wzorem

$$s(u, v) = [x_2(u), x_3(u), x_1(u)]q(u, v) + p(u).$$

W tym przypadku potrzebne jest mnożenie funkcji sklejanych tej samej zmiennej, co jest działaniem trudniejszym do zaimplementowania niż iloczyn tensorowy.

W praktyce często wystarczy konstrukcja aproksymacyjna: dla odpowiednio wybranych węzłów  $u_i$  można znaleźć krzywe  $q(u_i, v)$ , a następnie skonstruować powierzchnię rozpinaną na obrazach tych krzywych w przekształceniach afinicznych odpowiadających tym węzłom.

231



232

### Iloczyn sferyczny

Dwie krzywe płaskie, zwane **równoleżnikiem** i **południkiem** umożliwiają konstrukcję płata tensorowego zwanego **iloczynem sferycznym**. Jeśli

$$\mathbf{r}(u) = \begin{bmatrix} x_r(u) \\ y_r(u) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(v) = \begin{bmatrix} x_q(v) \\ y_q(v) \end{bmatrix},$$

to

$$\mathbf{s}(u, v) = \begin{bmatrix} x_r(u)x_q(v) \\ y_r(u)x_q(v) \\ y_r(u)y_q(v) \end{bmatrix}.$$

Podstawiając odpowiednie funkcje trygonometryczne, otrzymamy parametryczny opis sfery, stąd nazwa tego działania. Jak widzimy, funkcje zmiennych  $u$  i  $v$  są mnożone tensorowo, co ułatwia znalezienie punktów kontrolnych płata, jeśli równoleżnik i południk są krzywymi B-sklejnymi.

Jeśli

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \begin{bmatrix} x_{ri} \\ y_{ri} \end{bmatrix} N_i^n(u), \quad \mathbf{q}(v) = \sum_{j=0}^{M-m-1} \begin{bmatrix} x_{qj} \\ y_{qj} \end{bmatrix} N_j^m(v),$$

to

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-n-1} \sum_{j=0}^{M-m-1} \begin{bmatrix} x_{ri}x_{qj} \\ y_{ri}x_{qj} \\ y_{ri}y_{qj} \end{bmatrix} N_i^n(u)N_j^m(v).$$

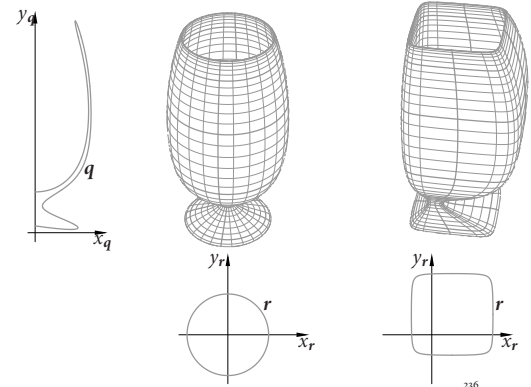
W praktyce warto rozważyć, czy lepiej jest utworzyć tablicę punktów kontrolnych płata tensorowego, czy też obliczać punkty płata na podstawie definicji iloczynu sferycznego i punktów równoleżnika i południka — ten drugi sposób daje mniejsze koszty czasowe i pamięciowe, ale wymaga osobnego oprogramowania tego przypadku.

Iloczyn sferyczny krzywych wymiernych stopnia  $n$  i  $m$  jest wymiernym płatem B-sklejnym stopnia  $(n, m)$ . Łatwo można pokazać, że jeśli krzywe jednorodnie reprezentujące równoleżnik i południk mają punkty kontrolne

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} X_{ri} \\ Y_{ri} \\ W_{ri} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} X_{qj} \\ Y_{qj} \\ W_{qj} \end{bmatrix},$$

to iloczyn sferyczny jest reprezentowany przez płat jednorodny o punktach kontrolnych

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ri}X_{qj} \\ Y_{ri}X_{qj} \\ W_{ri}Y_{qj} \\ W_{ri}W_{qj} \end{bmatrix}.$$



### Krzywe B-sklejane z węzłami równoodległymi

Ograniczenie ciągów węzłów do takich, że  $u_{i+1} - u_i = h = \text{const}$  umożliwia przetwarzanie krzywych i płatów B-sklejanych z takimi węzłami za pomocą algorytmów specjalnych. Ponieważ można dokonać dowolnej afinicznej reparametryzacji krzywej bez zmiany kształtu, jeśli istotny jest tylko kształt, to można zrezygnować z przechowywania węzłów w pamięci komputera (i w razie potrzeby przyjmować, że węzły są kolejnymi liczbami całkowitymi).

Jeśli zatem  $u_i = ih$  dla  $i \in \mathbb{Z}$ , to funkcje B-sklejane spełniają warunek

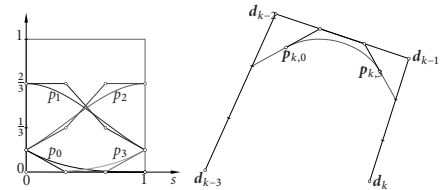
$$N_i^n(t) = N_{i+k}^n(t + kh)$$

dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  oraz  $t \in \mathbb{R}$ .

Aby narysować krzywą, można znaleźć reprezentacje Béziera jej łuków wielomianowych i narysować te łuki. Punkty kontrolne każdego takiego łuku można obliczyć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k,0} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{k,n} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k-n} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix},$$

w którym macierz  $M$  zależy tylko od stopnia krzywej.



### Algorytm Lanéa-Riesenfelda

Można też skorzystać z faktu, że wstawianie węzłów z ciągu gęstego w dziedzinie krzywej wytwarza ciąg łamanych kontrolnych zbiegających jednostajnie do krzywej. Nadają się do tego algorytmy Boehma i Oslo, ale istnieje algorytm wstawiania wielu węzłów naraz tak, aby zagęścić ciąg węzłów, zachowując jego równoodległość.

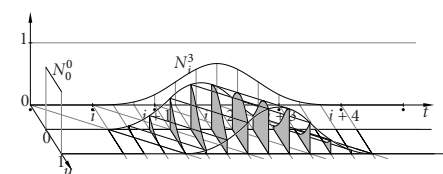
Wyprowadzenie zaczniemy od napisania wzoru na pochodną funkcji B-sklejanej stopnia  $n$  z węzłami  $u_i = i$  dla  $i \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{d}{dt} N_i^n(t) = N_i^{n-1}(t) - N_{i+1}^{n-1}(t).$$

Z pochodnej odtworzymy funkcję, obliczając całkę:

$$N_i^n(t) = \int_{-\infty}^t N_i^{n-1}(u) - N_{i+1}^{n-1}(u) du = \int_{t-1}^t N_i^{n-1}(u) du = \int_{\mathbb{R}} N_i^{n-1}(t-u) N_0^0(u) du.$$

Ostatnie wyrażenie opisuje **spot** dwóch funkcji:  $N_i^n = N_i^{n-1} * N_0^0$ . Można go zilustrować tak:



Niech  $M_i^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} N_0^n(2t - i)$ . Funkcje  $M_i^n$  są unormowanymi funkcjami sklejanymi, których węzły są równoodległe, rozmieszczone dwukrotnie gęściej. Przestrzeń rozpięta przez funkcje  $N_i^n$  jest podprzestrzenią przestrzeni rozpiętej przez funkcje  $M_i^n$ . Zatem, mając funkcję lub krzywą sklejaną

$$s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^n(t),$$

można (i należy) znaleźć jej współczynniki  $d_i$  w bazie  $\{M_i^n: i \in \mathbb{Z}\}$ .

Krzywa stopnia 0 składa się ze swoich własnych punktów kontrolnych. Jest  $N_i^0(t) = M_{2i}^0(t) + M_{2i+1}^0(t)$ , skąd wynika, że

$$s^{(0)}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^0(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i (M_{2i}^0(t) + M_{2i+1}^0(t)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{(0)} M_i^0(t),$$

a więc  $d_{2i}^{(0)} = d_{2i+1}^{(0)} = c_i$  dla  $i \in \mathbb{Z}$ . Dla krzywej stopnia 0 punkty kontrolne wystarczy podwoić.

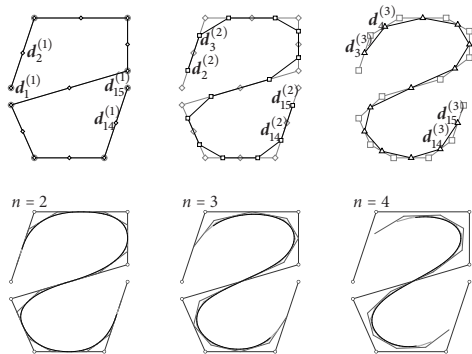
241

Podstawiając dla krzywej stopnia  $j > 0$  spłot,  $M_i^j = 2M_i^{j-1} * M_0^0$  i biorąc pod uwagę, że  $N_0^0 = M_0^0 + M_1^0$ , obliczamy

$$\begin{aligned} s^{(j)}(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^j(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i N_i^{j-1}(t-u) N_0^0(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{(j-1)} M_i^{j-1}(t-u) (M_0^0(u) + M_1^0(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{(j-1)} (M_i^j(t) + M_{i+1}^j(t)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (d_{i-1}^{(j-1)} + d_i^{(j-1)}) M_i^j(t). \end{aligned}$$

Punkty kontrolne krzywej stopnia  $j$  są więc środkami odcinków łamanej kontrolnej krzywej stopnia  $j-1$ , której wierzchołki są współczynnikiemami w bazie  $\{M_i^{j-1}: i \in \mathbb{Z}\}$ . Obliczenie punktów  $d_i^{(j)}$  polega na **uśrednieniu** ciągu punktów  $d_i^{(j-1)}$ .

242



243

Jeśli ciąg węzłów jest skończony,  $u_i = i$  dla  $i = 0, \dots, N$ , to algorytm możemy zapisać tak:

```

for ( i = 0; i < N - n; i++ )
    d[2i] = d[2i+1] = c[i];
for ( j = 1; j <= n; j++ )
    for ( i = 0; i < 2(N-n) - j; i++ )
        d[i] = 1/2 * (d[i] + d[i+1]);

```

Wielokrotne powtarzanie tego algorytmu daje ciąg łamanych bardzo szybko zbieżny do krzywej, zatem, aby narysować krzywą, wystarczy zwykle wykonać tylko kilka powtórzeń.

244

Algorytm można uogólnić tak, aby zagęszczać ciąg węzłów w jednym kroku więcej niż dwukrotnie. Niech  $p \geq 2$ . Algorytm składający się z kroku powielania, w którym przyjmuje się

$$d_{pi}^0 = \dots = d_{pi+p-1}^0 = c_i,$$

a potem wykonuje  $n$  kroków uśredniania, czyli obliczania

$$d_i^{(j)} = \frac{1}{p} (d_{i-p+1}^{(j-1)} + \dots + d_i^{(j-1)}) \quad \text{dla } j = 1, \dots, n,$$

wytwarza reprezentację krzywej danej z ciągiem węzłów  $p$  razy gęstszym.

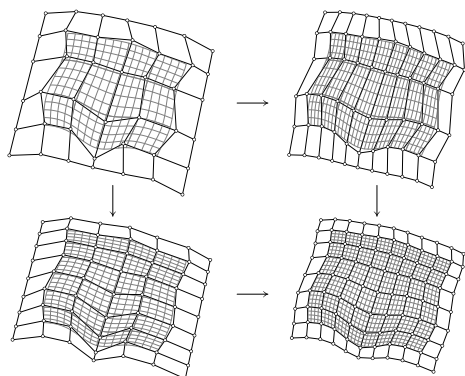
Zachęcam do udowodnienia tego faktu.

245

## Platy tensorowe z węzłami równoodległymi

B-sklejany płat tensorowy stopnia  $(n, m)$  z węzłami równoodległymi możemy przetwarzać tak samo, jak każdy inny, ale możemy też stosować algorytm Lane'a-Riesenfelda do zagęszczania jednego lub drugiego ciągu węzłów. Te operacje komutują, tj. jeśli trzeba zagęścić oba ciągi węzłów, to można przetwarzać wiersze i kolumny siatki w dowolnej kolejności.

246



247

Co więcej, okazuje się, że zarówno podwajanie, jak i uśrednianie wierszy komutuje z podwajaniem i uśrednianiem kolumn. Można zatem dokonać podwajania wierszy i kolumn, a potem wykonać (w całkowicie dowolnej kolejności)  $n$  uśrednień wierszy i  $m$  uśrednień kolumn.

W szczególności, jeśli  $n = m$ , to można dokonać podwajania wierszy i kolumn, a następnie  $n$  uśrednień wierszy i kolumn. W tym przypadku podwajanie polega na zastąpieniu każdej kolumny dwiema kopiami i potem (lub przedtem) każdego wiersza dwiema kopiami:

$$d_{2i,2k}^{(0)} = d_{2i+1,2k}^{(0)} = d_{2i,2k+1}^{(0)} = d_{2i+1,2k+1}^{(0)} = c_{ik}.$$

248

Otrzymana siatka ma ściany, czyli czworokąty o wierzchołkach  $d_{ij}$ ,  $d_{i+1,j}$ ,  $d_{i,j+1}$ ,  $d_{i+1,j+1}$ . W dodatku do ścian pokrywających się ze ścianami siatki danej, podwajanie wytwarza ściany zdegenerowane do odcinków (w miejscu krawędzi siatki danej) i ściany zdegenerowane do punktów (w miejscu wierzchołków siatki danej, tj. oryginalnych punktów kontrolnych).

Jednoczesne uśrednianie wierszy i kolumn polega na obliczeniu środka ciężkości każdej ściany:

$$d_{ik}^{(j)} = \frac{1}{4}(d_{i-1,k-1}^{(j-1)} + d_{i,k-1}^{(j-1)} + d_{i-1,k}^{(j-1)} + d_{i,k}^{(j-1)}).$$

249

Powtarzając zagęszczanie, otrzymujemy ciąg siatek kontrolnych tej samej powierzchni B-sklejanej, zbiegający do niej. Siatkę otrzymaną po kilku krokach można narysować (np. zamieniając ściany na pary trójkątów).

Ponieważ płyty B-sklejane są powierzchniami o swobodnym brzegu, „zewnątrzne” ściany siatki trzeba pominąć. Dokładniej, jeśli  $n$  jest nieparzyste, to należy odrzucić  $(n-1)/2$  wierszy i kolumn siatki od każdego brzegu i narysować ściany tego, co pozostało. Jeśli  $n$  jest parzyste, to najlepiej jest po ostatnim zagęszczeniu wykonać jeszcze jeden krok uśredniania i odrzucić  $n/2$  wierszy i kolumn brzegowych.

250

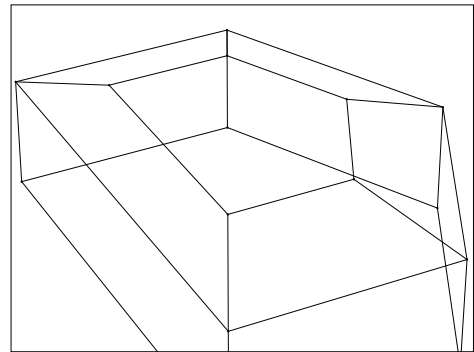
### Uogólnienie na siatki nieregularne

Algorytm dla powierzchni tensorowych można uogólnić na przypadek siatek nieregularnych. Siatka taka jest grafem, którego wierzchołki są punktami w przestrzeni (np.  $\mathbb{R}^3$ ). Określamy krawędzie, tj. odcinki łączące wierzchołki, oraz ściany — wielokąty utworzone z krawędzi. Każda krawędź należy do jednej lub co najwyżej dwóch ścian. W pierwszym przypadku krawędź jest brzegowa, a w drugim wewnętrzna.

Ściany czworokątne w takiej siatce nazwiemy ścianami regularnymi, pozostałe są specjalne.

Wierzchołki wewnętrzne (tj. incydentne tylko z krawędziami wewnętrznymi) nazywamy wierzchołkami regularnymi, jeśli ich stopień jest równy 4. Pozostałe wierzchołki wewnętrzne są specjalne.

251



252

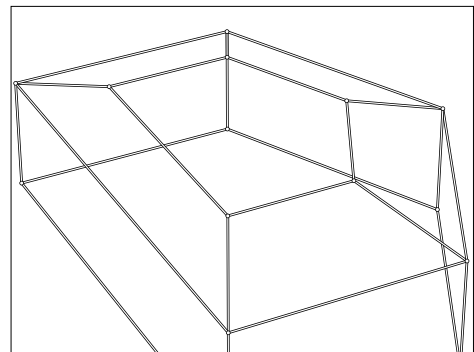
Określimy dwie operacje przetwarzania siatek nieregularnych.

**Podwajanie** polega na wprowadzeniu dla każdej krawędzi i wierzchołka nowej ściany.

Ściana odpowiadająca krawędzi jest czworokątem; dwa z jej boków są zdegenerowane do punktu, tj. zamiast jednego punktu (wierzchołka grafu) są dwa wierzchołki nowej ściany, o tym samym położeniu.

Ściana odpowiadająca wierzchołkowi stopnia  $k$  (z którego wychodzi  $k$  krawędzi) jest  $k$ -kątem zdegenerowanym do punktu;  $k$  wierzchołków grafu ma to samo położenie.

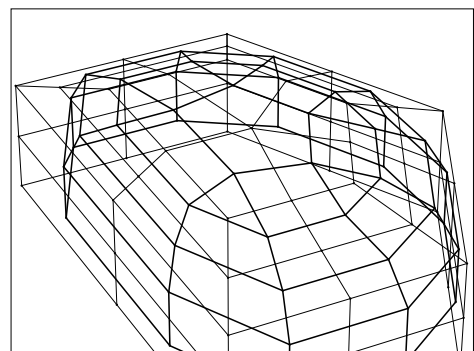
253



254

**Uśrednianie** jest to konstrukcja grafu dualnego do siatki będącej argumentem tej operacji; dla każdej ściany w siatce danej określamy wierzchołek w środku ciężkości wierzchołków tej ściany. Każdą krawędź wewnętrzną siatki danej odwzorowujemy na krawędź nowej siatki, łączącą wierzchołki otrzymane dla ścian mających tę krawędź wspólną. Ściany nowej siatki odpowiadają wierzchołkom wewnętrznym siatki danej.

255



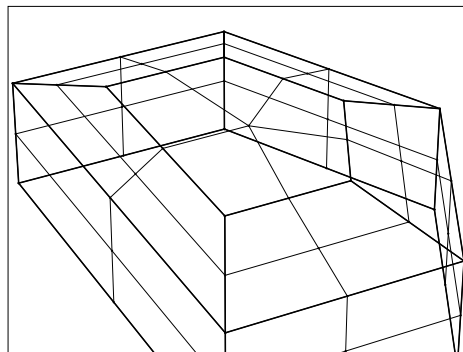
256



Obie te operacje w przypadku regularnej siatki czworokątnej są identyczne z odpowiednimi operacjami wykonywanymi w algorytmie Lane'a-Riesenfelda.

Jeśli po podwajaniu ma być wykonane uśrednianie, to obie operacje można połączyć w jedno **rozdrabnianie**. W tej operacji każdą krawędź dzielimy nowym wierzchołkiem na połowy. Dla każdej ściany wprowadzamy nowy wierzchołek w środku ciężkości jej zbioru wierzchołków i łącząc ten wierzchołek z wierzchołkami w środkach starych krawędzi, dzielimy ścianę  $k$ -kątną na  $k$  ścian czworokątnych.

257



258

Algorytm Lane'a-Riesenfelda uogólniony dla siatki nieregularnej polega na wykonaniu jednego kroku podwajania, a potem  $n$  kroków uśredniania, albo równoważnie na wykonaniu rozdrabniania, po którym następuje  $n - 1$  kroków uśredniania.

Jeśli siatka jest regularna prostokątna, to to jest algorytm tensorowy rozpatrywany wcześniej; nowa siatka prostokątna reprezentuje tę samą powierzchnię B-sklejaną stopnia  $(n, n)$ . Iterując algorytm, otrzymujemy ciąg siatek zbieżny do tego płata.

259

Jeśli siatka zawiera wierzchołki lub ściany specjalne, to liczba elementów specjalnych w nowej siatce nie może być większa.

Zauważmy, że operator rozdrabniania wytwarza siatkę, której wszystkie ściany są czworokątne (czyli regularne) — ściany specjalne  $k$ -kątnie zostają zamienione na wierzchołki specjalne stopnia  $k$ .

Operator uśredniania zamienia wierzchołki specjalne stopnia  $k$  na ścianę  $k$ -kątną, a ścianę  $k$ -kątną na wierzchołek stopnia  $k$  (lub niższego, jeśli ściana ma krawędź brzegową).

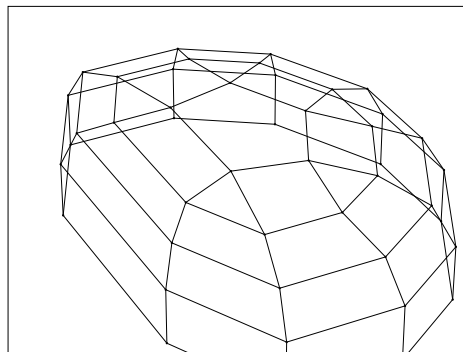
Zatem po wykonaniu rozdrabniania wszystkie elementy specjalne siatki są wierzchołkami. Jeśli  $n$  jest parzyste, to następnie po  $n - 1$  uśrednieniach mamy siatkę, w której specjalne są tylko ściany. Dla  $n$  nieparzystego mamy siatkę, w której specjalne są tylko wierzchołki.

260

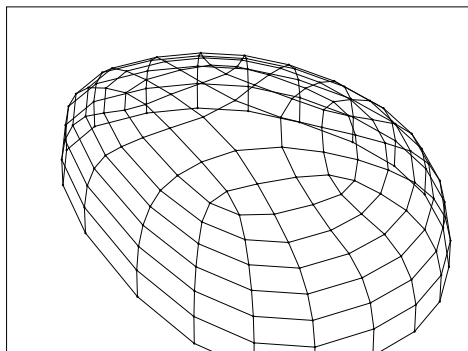
Siatki otrzymane w kolejnych iteracjach algorytmu mają coraz większe podgrafy, będące regularnymi siatkami prostokątnymi. Podgrafy te reprezentują płyty B-sklejane stopnia  $(n, n)$ , które stanowią części powierzchni granicznej.

Dwa przypadki szczególne, dla  $n = 2$  oraz  $n = 3$ , są znane odpowiednio jako **algorytmy Doo-Sabina** i **Catmulla-Clarka**. Ich opisy zostały opublikowane w 1978 r., przy czym ich oryginalne sformułowania były inne. Obecnie te algorytmy to klasyka modelowania geometrycznego i grafiki komputerowej.

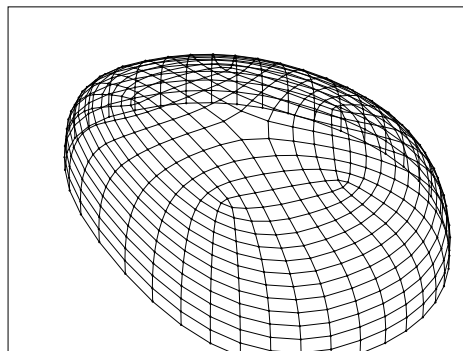
261



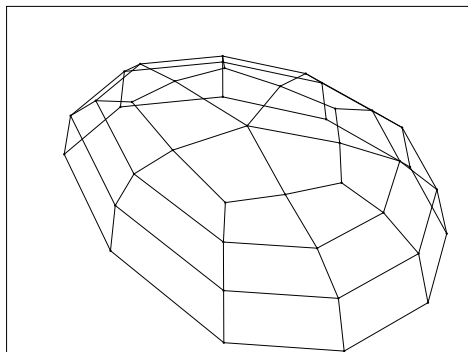
262



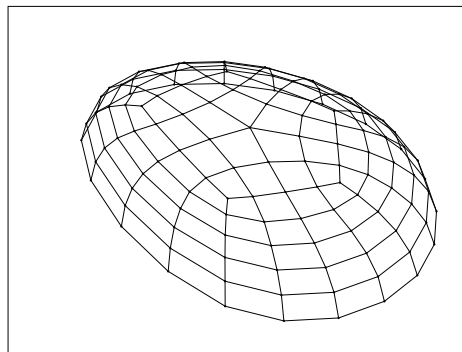
263



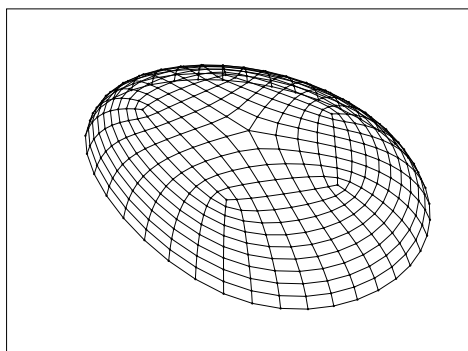
264



265



266



267

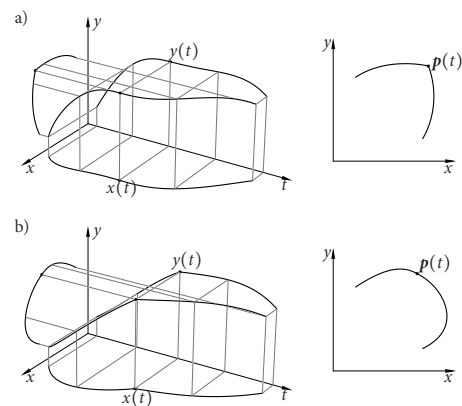
Nietrywialne jest badanie własności (kształtu) powierzchni w otoczeniu punktów specjalnych, tj. punktów, do których zbiegają ciągi elementów specjalnych w kolejnych siatkach. Problem postawiony w roku 1978 przez Doo, Sabina, Catmulla i Clarka znalazł pełne rozwiązanie w roku 1997 (H. Prautzsch). Wiąże się to z pojęciem **ciągłości geometrycznej** powierzchni — o tym będzie mowa dalej.

268

## Ciągłość geometryczna krzywych

Dla krzywych i powierzchni parametrycznych wydaje się, że kształt jest tym gładszy, im więcej ciągłych pochodnych ma parametryzacja. Ale krzywa może nie być gładka, jeśli parametryzacja ma osobliwość, tj. jeśli pochodna parametryzacji jest wektorem zerowym.

269



270

Pojęcie **ciągłości geometrycznej** określa własność kształtu krzywej lub powierzchni, niezależną od reprezentacji. Daną krzywą lub powierzchnię można reprezentować za pomocą różnych parametryzacji, w tym także nieciągłych, lub w postaci niejawniej, jako zbiór miejsc zerowych pewnej funkcji, niekoniecznie gładkiej.

**Definicja.** Niech  $n \geq 0$ . Krzywa wykazuje **ciągłość geometryczną rzędu  $n$**  (albo: jest klasy  $G^n$ ), jeśli w otoczeniu każdego jej punktu istnieje jej regularna parametryzacja klasy  $C^n$ . Regularna, tzn. o niezerowej pochodnej.

Parametryzacja, o której mowa w definicji nie musi być tą używaną do reprezentowania krzywej.

271

Interpretacja geometryczna jest taka:

- Krzywa klasy  $G^1$  ma w każdym punkcie jednoznacznie określoną styczną; kierunek ruchu po krzywej ze stałą prędkością zmienia się w sposób ciągły.
- Krzywa klasy  $G^2$  ma ponadto ciągłą krzywiznę, która jest określona przez pochodne rzędu 1 i 2.
- Krzywa klasy  $G^3$  w przestrzeni ma ciągłe skręcenie (czyli drugą krzywiznę). Ogólnie, krzywa klasy  $G^m$  w przestrzeni  $n$ -wymiarowej dla  $m \leq n$  ma ciągłe krzywizny rzędu  $1, \dots, m-1$ , choć warunki ciągłości tych krzywizn można osłabić — krzywa tzw. klasy  $F^m$  (o ciągłym układzie Freneta i  $m$ -pierwszej krzywiznie) nie musi być klasy  $G^m$ .

272



(iii) Suma funkcji  $P_0^n, \dots, P_{N-n}^n$  w przedziale  $[u_n, u_{N-n}]$  jest równa 1.

(iv) Wielomiany  $p_{i,l-1}$  i  $p_{i,l}$ , dla każdego  $i$  oraz  $l$ , spełniają następujące równanie:

$$\begin{bmatrix} p_{i,l}(u_l) \\ p_{i,l}(u_l) \\ \vdots \\ p_{i,l}^{(n-1)}(u_l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{l,1,1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{l,n-1,1} & \dots & a_{l,n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i,l-1}(u_l) \\ p_{i,l-1}(u_l) \\ \vdots \\ p_{i,l-1}^{(n-1)}(u_l) \end{bmatrix}, \quad (\otimes)$$

czyli w skrócie  $q_{i,l} = C_l p_{i,l-1}$ ; współczynniki  $a_{l,j,k}$  macierzy połączenia  $C_l$  są określone przez parametry połączenia  $\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,n-1}$ .

Jeśli dla każdego  $l$  jest  $\beta_{l,1} = 1$  oraz  $\beta_{l,k} = 0$  dla  $k > 1$ , to funkcje  $P_i^n$  są unormowanymi funkcjami B-sklejnymi stopnia  $n$ , klasy  $C^{n-1}$ .

281

Najpierw podam konstrukcję funkcji  $\beta$ -sklejanych, a potem wykazemy, że one istnieją i są jednoznacznie określone dla prawie każdego wyboru parametrów połączenia.

Do reprezentowania wielomianu  $p_{i,l}$ , opisującego funkcję  $P_i^n$  w przedziale  $[u_i, u_{i+1}]$  użyjemy „lokalnej” bazy wielomianów Bernsteina:

$$B_{k,m}^n(t) \stackrel{\text{def}}{=} B_m^n(s_k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, n,$$

przy czym  $t = u_k + h_k s_k$  (zatem  $t \in [u_k, u_{k+1}] \Leftrightarrow s_k \in [0, 1]$ ).

Wielomian  $p_{i,k}(t)$  równy  $P_i^n(t)$  dla  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  reprezentujemy przez wektor  $\mathbf{b}_{i,k} = [b_{i,k,0}, \dots, b_{i,k,n}]^T$ , taki że

$$p_{i,k}(t) = b_{i,k,0} B_{k,0}^n(t) + \dots + b_{i,k,n} B_{k,n}^n(t) \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}.$$

282

Mając taką reprezentację funkcji  $\beta$ -sklejanych, możemy obliczyć punkty kontrolne reprezentacji Béziera łuków wielomianowych krzywej  $\beta$ -sklejanej reprezentowanej przez punkty  $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{N-n-1}$ . Dla  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  mamy

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=k-n}^k \mathbf{d}_i p_{i,k}(t) = \sum_{i=k-n}^k \mathbf{d}_i \sum_{m=0}^n b_{i,k,m} B_{k,m}^n(t) \\ &= \sum_{m=0}^n \left( \sum_{i=k-n}^k b_{i,k,m} \mathbf{d}_i \right) B_{k,m}^n(t) = \sum_{m=0}^n \mathbf{p}_{k,m} B_{k,m}^n(t); \end{aligned}$$

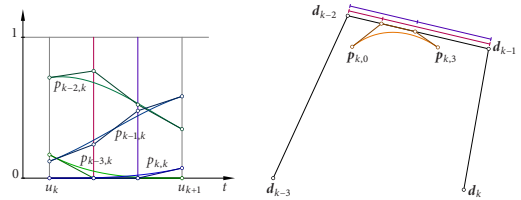
stąd  $\mathbf{p}_{k,m} = \sum_{i=k-n}^k b_{i,k,m} \mathbf{d}_i$ , a w zapisie macierzowym jest

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k,0} \\ \mathbf{p}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k-n,k,0} & b_{k-n+1,k,0} & \dots & b_{k,k,0} \\ b_{k-n,k,1} & b_{k-n+1,k,1} & \dots & b_{k,k,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k-n,k,n} & b_{k-n+1,k,n} & \dots & b_{k,k,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k-n} \\ \mathbf{d}_{k-n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix}.$$

Chcemy więc znaleźć macierze  $M_k$ , których kolumnami są wektory  $\mathbf{b}_{i,k}$ .

283

W pierwszej i ostatniej kolumnie macierzy  $M_k$  wszystkie współczynniki oprócz jednego są równe 0. Suma współczynników w każdym wierszu jest równa 1,



284

Konstrukcję funkcji  $\beta$ -sklejanych zaczniemy od pomocniczych funkcji  $\beta$ -sklejanych,  $G_i^n$ . W przedziale  $[u_k, u_{k+1}]$  funkcja ta jest wielomianem  $g_{i,k}$ , takim że

(i')  $g_{i,k} = 0$  dla  $k < i$  (stąd  $G_i^n(t) = 0$  dla  $t < u_i$ ),

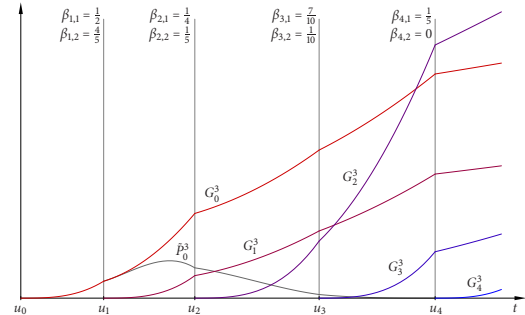
(ii')  $g_{i,i}(t) = (t - u_i)^n$ ,

(iii') jeśli  $k > i$ , to stopień wielomianu  $g_{i,k}(t)$  jest mniejszy niż  $n$ ,

(iv') Równanie  $(\otimes)$  jest spełnione przez wielomiany  $g_{i,l-1}$  i  $g_{i,l}$  podstawione w miejsce  $p_{i,l-1}$  i  $p_{i,l}$ .

Powyższe warunki definiują funkcje  $G_i^n$  jednoznacznie; funkcje te spełniają podobną rolę jak obciąża funkcja potęgowa w definicji funkcji B-sklejanych.

285



Funkcje  $G_i^n, \dots, G_{i+n}^n$  w przedziale  $[u_{i+n-1}, u_{i+n+2}]$  są wielomianami stopnia  $\leq n$ , które są z rzędu liniowo zależne. Zatem istnieje niezzerowa kombinacja liniowa tych funkcji,  $\tilde{P}_i^n$ , równa 0 w tym przedziale.

286

Okazuje się, że nośnikiem funkcji  $\tilde{P}_i^n$  jest przedział  $[u_i, u_{i+n+1}]$ , a więc ta funkcja jest „prawie gotową” funkcją  $\beta$ -sklejaną  $P_i^n$ . Brakujący do wypełnienia definicji warunek to unormowanie; trzeba będzie dobrać taki czynnik stały, aby mieć własność (iii).

Określmy dla każdego węzła  $u_l$  przekształcenie liniowe  $K_l$ , którego argumentem jest wielomian  $p$  i którego wartością jest wektor  $[p(u_l), p'(u_l), \dots, p^{(n-1)}(u_l)]^T \in \mathbb{R}^n$ ; przekształcenie  $K_l$  obcięte do przestrzeni wielomianów stopnia mniejszego niż  $n$  jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Oznaczmy  $\mathbf{p}_{i,l-1} = K_l(p_{i,l-1})$ ,  $\mathbf{q}_{i,l} = K_l(p_{i,l})$ , oraz  $\mathbf{g}_{i,l-1} = K_l(g_{i,l-1})$ ,  $\mathbf{h}_{i,l} = K_l(g_{i,l})$ . Z definicji funkcji  $P_i^n$  oraz  $G_i^n$  wynika, że

$$\mathbf{q}_{i,l} = C_l \mathbf{p}_{i,l-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{h}_{i,l} = C_l \mathbf{g}_{i,l-1}.$$

287

Ponieważ  $g_{i,i}(t) = (t - u_i)^n$ , mamy

$$\mathbf{g}_{i,i} = \begin{bmatrix} g_{i,i}(u_{i+1}) \\ g_{i,i}'(u_{i+1}) \\ \vdots \\ g_{i,i}^{(n-1)}(u_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n!}{n!} h_i^n \\ \frac{n!}{(n-1)!} h_i^{n-1} \\ \vdots \\ \frac{n!}{1!} h_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie  $h_i = u_{i+1} - u_i$ .

Określmy macierze  $D_l$  o wymiarach  $n \times n$  wzorem

$$d_{l,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ h_l^{k-j} & \text{if } k \geq j, \end{cases}$$

Macierz  $D_l$  jest trójkątna dolna z jedynkami na diagonalu. Dla dowolnego wielomianu  $p$  stopnia mniejszego niż  $n$  zachodzi równość  $K_{l+1}(p) = D_l K_l(p)$ ; w szczególności  $\mathbf{g}_{i,l} = D_l \mathbf{h}_{i,l}$  dla  $l > i$ .

288

Mając macierze połączenia  $C_l$  i macierze  $D_l$ , możemy rekurencyjnie obliczać wektory

$$\mathbf{h}_{i,l} = C_l \mathbf{g}_{i,l-1}, \quad \mathbf{g}_{i,l} = D_l \mathbf{h}_{i,l}, \quad (2)$$

reprezentujące kolejne wielomiany  $g_{i,l}$  opisujące funkcję pomocniczą  $G_l^n$ .

Liniowa zależność wielomianów  $g_{i,i+n+1}, \dots, g_{i+n,i+n+1}$  jest równoważna liniowej zależności wektorów  $\mathbf{h}_{i,l+i+n+1}, \dots, \mathbf{h}_{i+n,i+n+1}$ . Ponieważ macierz  $C_{i+n+1}$  jest nieosobliwa, również wektory  $\mathbf{g}_{i,l+i+n}, \dots, \mathbf{g}_{i+n,i+n}$  są liniowo zależne:

$$\sum_{j=0}^n a_j g_{i+j,i+n+1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n a_j \mathbf{g}_{i+j,i+n} = \mathbf{0}.$$

Umożliwia to znalezienie funkcji  $\tilde{P}_i^n$  przez rozwiązanie układu równań liniowych

$$A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{g}_{i,i+n} \quad (3)$$

z macierzą  $A_i = [\mathbf{g}_{i+1,i+n}, \dots, \mathbf{g}_{i+n,i+n}]$ .

289

Mając rozwiązanie  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T$ , możemy otrzymać funkcję

$$\tilde{P}_i^n = G_i^n - (x_{i1} G_{i+1}^n + \dots + x_{in} G_{i+n}^n)$$

reprezentowaną przez wielomiany

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,i} &= g_{i,i}, \\ \tilde{P}_{i,i+k} &= g_{i,i+k} - (x_{i1} g_{i+1,i+k} + \dots + x_{ik} g_{i+k,i+k}), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

opisujące  $\tilde{P}_i^n$  w przedziałach  $[u_i, u_{i+1}], \dots, [u_{i+n}, u_{i+n+1}]$ .

290

Mając wielomiany  $\tilde{p}_{i,i}, \dots, \tilde{p}_{i+n,i+n}$ , znajdziemy czynnik normalizacyjny  $c_i$ , taki że  $P_i^n = c_i \tilde{P}_i^n$ . Z definicji funkcji  $\beta$ -sklejanych suma  $S_i = P_i^n + \dots + P_{i+n}^n$  w przedziale  $[u_{i+n}, u_{i+n+1}]$  jest równa 1. Obliczając sumy wektorów przyporządkowanych przez przekształcenia  $K_{i+n}$  odpowiednim wielomianom, dostaniemy

$$\mathbf{t}_{i,i+n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=i}^{i+n} \mathbf{p}_{j,i+n-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{s}_{i,i+n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=i}^{i+n} \mathbf{q}_{j,i+n}.$$

Wielomian  $p_{i+n,i+n-1}$  jest zerowy, zatem  $\mathbf{q}_{i+n,i+n} = C_{i+n} \mathbf{p}_{i+n,i+n-1} = \mathbf{0}$ , dzięki czemu ostatni składnik każdej z powyższych sum możemy pominąć. Określone wyżej wektory spełniają równość

$$\mathbf{s}_{i,i+n} = C_{i+n} \mathbf{t}_{i,i+n}.$$

Łatwo jest sprawdzić, że  $\mathbf{s}_{i,i+n} = \mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ , a ponieważ pierwsza kolumna macierzy  $C_{i+n}$  jest pierwszą kolumną macierzy jednostkowej, także  $\mathbf{t}_{i,i+n} = \mathbf{e}_1$ .

291

Wielomiany  $p_{i+1,k}, \dots, p_{i+n,k}$  są kombinacjami liniowymi wielomianów  $g_{i+1,k}, \dots, g_{i+n,k}$  i  $p_{i,i+n} = c_i \tilde{p}_{i,i+n}$ , zatem istnieją liczby  $y_{i2}, \dots, y_{in}$ , takie że

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{i,i+n} &= c_i \tilde{\mathbf{q}}_{i,i+n} + \sum_{j=i+1}^{i+n-1} y_{i,j-i+1} \mathbf{h}_{j,i+n}, \\ \mathbf{t}_{i,i+n} &= c_i \tilde{\mathbf{p}}_{i,i+n-1} + \sum_{j=i+1}^{i+n-1} y_{i,j-i+1} \mathbf{g}_{j,i+n-1}. \end{aligned}$$

Ostatni wzór pozwala zapisać równość  $\mathbf{t}_{i,i+n} = \mathbf{e}_1$  jako układ równań liniowych

$$B_i \mathbf{y}_i = \mathbf{e}_1, \quad (4)$$

z macierzą  $B_i = [\tilde{p}_{i,i+n-1}, \mathbf{g}_{i+1,i+n-1}, \dots, \mathbf{g}_{i+n,i+n-1}]$  o wymiarach  $n \times n$ .

292

Do wektorów  $\mathbf{g}_{i,k} \in \mathbb{R}^n$  możemy dołączyć  $n$  i pierwszą współrzędną, równą pochodnej rzędu  $n$  w punkcie  $u_{k+1}$ ; dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  jest  $g_{i,i}^{(n)}(t) = n!$  oraz  $g_{i,k}^{(n)} = 0$  dla  $i \neq k$ . Tak otrzymane wektory  $\hat{g}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n+1}$  reprezentują jednoznacznie wielomiany  $g_{i,k}$ , których stopień nie przewyższa  $n$ . Obliczając następnie wektory

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_{i,i} &= c_i \hat{g}_{i,i}, \\ \hat{\mathbf{p}}_{i,i+k} &= c_i (\hat{g}_{i,i+k} - (x_{i1} \hat{g}_{i+1,i+k} + \dots + x_{ik} \hat{g}_{i+k,i+k})), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

otrzymujemy pełną reprezentację wielomianów  $p_{i,i}, \dots, p_{i,i+n}$ .

293

Ostatni krok konstrukcji to znalezienie docelowej reprezentacji wielomianów reprezentujących funkcje  $\beta$ -sklejane i utworzenie macierzy  $M_n, \dots, M_{N-n-1}$ . Przejście od (przesuniętej i przeskalowanej) bazy potęgowej do („lokalnej”) bazy wielomianów Bernsteina polega na rozwiązaniu zadania interpolacji Hermite’a dla tej bazy, przez rozwiązanie układu równań liniowych

$$E \mathbf{b}_{i,l} = F_l \hat{\mathbf{p}}_{i,l}, \quad (6)$$

z macierzami  $E$  i  $F_l$  o wymiarach  $(n+1) \times (n+1)$ , których współczynniki są takie:

$$\begin{aligned} e_{j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{dla } j < k, \\ (-1)^{n-k} \binom{j-1}{n+1-j-k} & \text{dla } j \geq k, \end{cases} \\ f_{l,j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \frac{(n+1-j)!}{n!} h_l^{j-1} & \text{dla } j = k. \end{cases} \end{aligned}$$

294

Na przykład dla  $n = 3$  jest

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_l/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_l^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_l^3/6 \end{bmatrix}.$$

Macierz  $E$  jest (dla każdego  $n$ ) trójkątna i nieosobliwa.

295

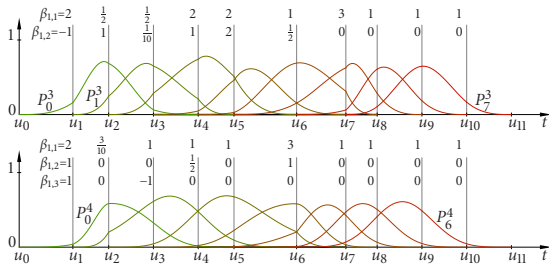
**Algorytm:**

*Dane:* stopień  $n$ , węzły  $u_0 < \dots < u_N$ , parametry  $\beta_{i,j}$  dla  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = 1, \dots, n-1$

1. Dla  $k = 1, \dots, N-1$  oblicz macierze  $C_k$  i  $D_k$ .
2. Dla  $i = 0, \dots, N-2$  skonstruuj wektory  $\mathbf{g}_{i,i}$  ze wzoru (1).
3. Dla  $i = 0, \dots, N-3$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $i+j < N$  oblicz wektory  $\mathbf{g}_{i,i+j}$  z (2).
4. Dla  $i = 0, \dots, N-n-1$ 
  - 4.1. Utwórz macierz  $A_i$  i oblicz wektor  $\mathbf{x}_i$ , rozwiązując układ (3).
  - 4.2. Utwórz macierz  $B_i$  i oblicz  $c_i$ , rozwiązując układ (4).
  - 4.3. Dla  $k = \max\{i, n\}, \dots, \min\{i+n, N-n-1\}$  oblicz wektor  $\hat{\mathbf{p}}_{i,k}$  za pomocą (5), rozwiąż układ (6), aby znaleźć wektor  $\mathbf{b}_{i,k}$ , i zapisz go jako kolumnę macierzy  $M_k$ .

*Wynik:* współczynniki  $b_{i,k,m}$  wielomianów  $p_{i,k}$ , zapisane w kolumnach macierzy  $M_k$

296



Algorytm ma dwa potencjalnie zawodne kroki: może się okazać, że układy równań (3) i (4) są nieokreślone lub sprzeczne. Trzeba to zbadać.

Najpierw przykłady. Niech  $n = 3$  i niech  $u_i = i$  dla  $i = 0, \dots, N$ . Biorąc  $\beta_{1,1} = 1$  i  $\beta_{1,2} = 0$  dla każdego  $l$ , otrzymamy macierz  $C_l$  jednostkową  $3 \times 3$  oraz nieosobliwe macierze (takie same dla każdego  $i$ )

$$A_i = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 1 \\ 15 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Funkcje  $\beta$ -sklejane są w tym przypadku zwykłymi unormowanymi funkcjami B-sklejnymi trzeciego stopnia z węzłami równoodległymi.

Jeśli przyjmiemy te same węzły i  $\beta_{1,1} = 1$  i  $\beta_{1,2} = -4$  dla każdego  $l$ , to dostaniemy

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad g_{i,i+n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

Wprawdzie układ (3) jest niesprzeczny, ale to nie jest żadna pociecha.

Ustalmy  $n$  i rosnący ciąg węzłów,  $u_0, \dots, u_N$ . Niech  $\beta$  oznacza wektor z  $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$ , którego współrzędne są parametrami połączeń  $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N-1,n-1}$ . Chcemy znaleźć opis zbioru  $S \subset \mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$ , takiego że jeśli  $\beta \in S$ , to pewna macierz  $A_i$  lub  $B_i$  jest osobliwa.

**Twierdzenie.** Funkcja, która wektorowi parametrów połączenia  $\beta$  przyporządkowuje jednoznacznie określoną rodzinę funkcji  $\beta$ -sklejanych jest określona w  $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)} \setminus S$ ; zbiór  $S$  jest rozmiernością algebraiczną, której wnętrze jest zbiorem pustym.

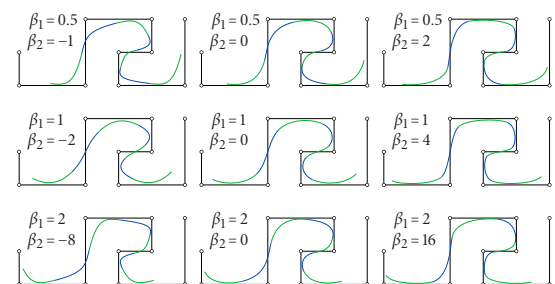
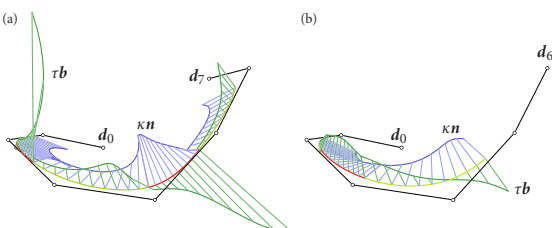
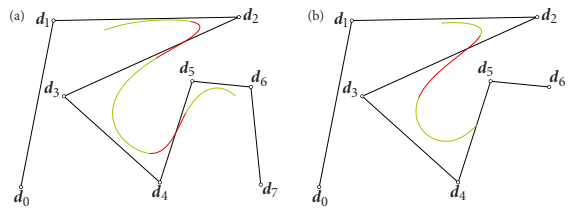
**Dowód.** Jednoznacznie określona funkcja  $\tilde{P}_i^n$  istnieje, jeśli wielomiany  $g_{i+1,i+n+1}, \dots, g_{i+n,i+n+1}$  są liniowo niezależne; wtedy kolumny macierzy  $A_i$  są liniowo niezależne i macierz ta jest nieosobliwa. Podobnie, normalizacja jest wykonalna, jeśli wielomiany  $\tilde{p}_{i,i+n}, \dots, \tilde{p}_{i+n,i+n}$  które opisują funkcje  $\tilde{P}_i^n, \dots, \tilde{P}_{i+n}^n$  w przedziale  $[u_{i+n}, u_{i+n+1}]$  są liniowo niezależne. Wtedy tworzą one bazę przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej  $n$  i funkcja stała równa 1 jest ich jednoznaczną kombinacją liniową.

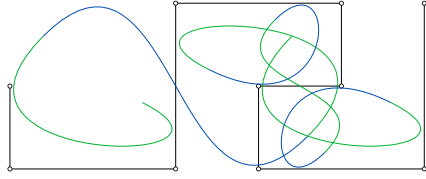
Wszystkie wielomiany  $g_{il}$  zależą od parametrów połączenia w sposób ciągły. Co więcej, współczynniki macierzy  $A_i$  zależą w sposób ciągły od tych parametrów (są ich wielomianami). Zapisując rozwiązanie układu (3) przy użyciu wzorów Cramera, zauważamy, że współrzędne rozwiązania układu (3) są wymiernymi funkcjami parametrów połączenia.

Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną. Zatem współczynniki macierzy  $B_i$  w układach równań (4) są również funkcjami wymiernymi parametrów połączenia  $\beta_{l,k}$ . Niech  $R(\beta)$  będzie funkcją, której wartość jest iloczynem wyznaczników wszystkich macierzy  $A_i$  i  $B_i$ ; jest to funkcja wymierna, czyli iloraz wielomianów parametrów połączenia, cokolwiek monstrualnego stopnia. Rodzina funkcji  $\beta$ -sklejanych odpowiadająca pewnemu układowi parametrów połączenia nie istnieje, jeśli licznik lub mianownik funkcji  $R$  jest równy 0.

Wiemy, że jeśli parametry połączenia są dobrane tak, aby macierze  $C_l$  były macierzą jednostkową, to odpowiednia rodzina funkcji  $\beta$ -sklejanych istnieje; jest to rodzina funkcji B-sklejanych klasy  $C^{n-1}$ . Odpowiedni wektor  $\beta$  nie jest elementem zbioru  $S$ , który jest sumą zbiorów miejsc zerowych licznika i mianownika funkcji  $R$ . Stąd  $S \neq \mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$ .

Jeśli zatem  $\beta_0 \notin S$  (istnieje taki punkt w  $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)}$ ) oraz  $\beta_1 \in S$ , to funkcja  $r(t) = R((1-t)\beta_0 + t\beta_1)$  jest niezerową wymierną funkcją jednej zmiennej; jej licznik i mianownik mają tylko skończenie wiele miejsc zerowych. Wynika stąd, że dla każdego punktu  $\beta_0 \notin S$  istnieje jego otoczenie rozłączne z  $S$ , a więc zbiór  $\mathbb{R}^{(N-1)(n-1)} \setminus S$  jest otwarty. Zbiór  $S$  jest zatem rozmiernością algebraiczną, która nie zawiera żadnej kuli. Czyli jego wnętrze jest zbiorem pustym.  $\square$





$$\beta_1 = 1, \beta_2 = -9.5$$

305

Mając daną krzywą  $\beta$ -sklejaną z węzłami  $u_0, \dots, u_N$ , parametrami połączenia  $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{N-1,n-1}$  i punktami kontrolnymi  $d_0, \dots, d_{N-n-1}$ , znajdziemy reprezentację tej samej krzywej z jednym węzłem dodatkowym,  $\hat{u}_{k+1} \in (u_k, u_{k+1}) \subset [u_n, u_{N-n}]$ .

Po wstawieniu otrzymamy rosnący ciąg węzłów,  $\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N+1}$ . Jest oczywiste, że parametry połączenia nowej reprezentacji krzywej są takie:  $\hat{\beta}_{l,j} = \beta_{l,j}$  jeśli  $l \leq k$ ,  $\hat{\beta}_{l,j} = \beta_{l-1,j}$  jeśli  $l > k + 1$ , oraz  $\hat{\beta}_{k+1,1} = 1$  i  $\hat{\beta}_{k+1,j} = 0$  dla  $j = 2, \dots, n - 1$ . Parametryzacja krzywej musi zostać niezmieniona.

306

Rozważmy funkcję  $\hat{P}_i^n(t)$ , która w przedziale  $[u_i, u_{i+1}]$  jest równa  $(t - u_i)^n$ , jest  $P_i^n = c_i \hat{P}_i^n$ , z czynnikiem normalizacyjnym  $c_i$  otrzymanym przez rozwiązanie układu (4). Dla funkcji  $\beta$ -sklejanych, z których składa się baza dla nowej reprezentacji, jest  $\hat{P}_i^n = \hat{c}_i \hat{P}_i^n$ . Jeśli  $i \in \{k - n, \dots, k\}$ , to  $\hat{P}_i^n$  jest kombinacją liniową

$$\hat{P}_i^n = \hat{p}_i^n + b_i \hat{P}_{i+1}^n,$$

dla pewnego  $b_i \in \mathbb{R}$ . Czynniki, przy  $\hat{P}_i^n$  jest równy 1, bo obcięcie obu funkcji,  $\hat{P}_i^n$  i  $\hat{P}_{i+1}^n$ , do  $[\hat{u}_i, \hat{u}_{i+1}]$  jest tym samym wielomianem  $(t - u_i)^n$ . Stąd

$$P_i^n = \frac{c_i}{\hat{c}_i} \hat{P}_i^n + \frac{c_{i+1} b_i}{\hat{c}_{i+1}} \hat{P}_{i+1}^n \quad \text{oraz} \quad P_{i-1}^n = \frac{c_{i-1}}{\hat{c}_{i-1}} \hat{P}_{i-1}^n + \frac{c_i b_{i-1}}{\hat{c}_i} \hat{P}_i^n.$$

Z własności  $\sum_{i=k-n}^k P_i^n(t) = 1 = \sum_{i=k-n}^{k+1} \hat{P}_i^n(t)$  dla każdego  $t \in [u_k, u_{k+1}]$  wynika, że

$$\frac{c_i b_{i-1}}{\hat{c}_i} + \frac{c_i}{\hat{c}_i} = 1; \quad \text{stąd} \quad P_i^n = \alpha_i \hat{P}_i^n + (1 - \alpha_i) \hat{P}_{i+1}^n,$$

gdzie  $\alpha_i = c_i / \hat{c}_i$ . Dla  $i \leq k - n$  mamy  $\alpha_i = 1$  i jeśli  $i > k$ , to  $\alpha_i = 0$ .

307

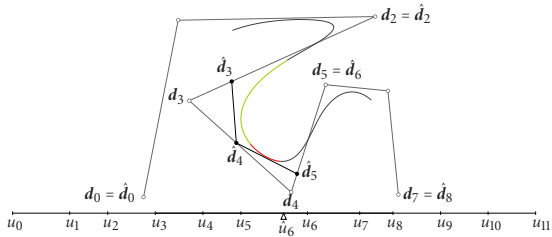
Końcowy rachunek jest taki:

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i P_i^n = \sum_{i=0}^{N-n-1} d_i (\alpha_i \hat{P}_i^n + (1 - \alpha_{i+1}) \hat{P}_{i+1}^n) \\ &= \sum_{i=0}^{N-n-1} \alpha_i d_i \hat{P}_i^n + \sum_{i=1}^{N-n} (1 - \alpha_i) d_{i-1} \hat{P}_i^n = \sum_{i=0}^{N-n} ((1 - \alpha_i) d_{i-1} + \alpha_i d_i) \hat{P}_i^n. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= d_i & \text{dla } i \leq k - n, \\ \hat{d}_i &= \left(1 - \frac{c_i}{\hat{c}_i}\right) d_{i-1} + \frac{c_i}{\hat{c}_i} d_i & \text{dla } i = k - n + 1, \dots, k, \\ \hat{d}_i &= d_{i-1} & \text{dla } i > k. \end{aligned}$$

308



309

## Platy Coonsa

Konstrukcje opracowane w 1967 r. przez S. Coonsa służą do otrzymania płatów powierzchni o zadanych brzegach.

**Płat dwuliniowy** (bilinearly blended Coons patch) jest określony przez cztery krzywe brzegowe,  $c_{00}(u)$ ,  $c_{10}(u)$ ,  $d_{00}(v)$  i  $d_{10}(v)$ . Zakładamy, że parametry  $u, v$  tych krzywych przebiegają przedział  $[0, 1]$ , a ponadto krzywe te są połączone w krzywą zamkniętą, czyli

$$c_{00}(0) = d_{00}(0), \quad c_{00}(1) = d_{10}(0), \quad c_{10}(0) = d_{00}(1), \quad c_{10}(1) = d_{10}(1).$$

Wspólne końce tych krzywych są narożnikami konstruowanego płata.

310

Ustawmy krzywe w macierze  $C(u) = [c_{00}(u), c_{10}(u)]$ ,  
 $D(v) = [d_{00}(v), d_{10}(v)]$ . Oznaczmy też macierz

$$P = \begin{bmatrix} c_{00}(0) & c_{10}(0) \\ c_{00}(1) & c_{10}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00}(0) & d_{10}(0) \\ d_{00}(1) & d_{10}(1) \end{bmatrix}.$$

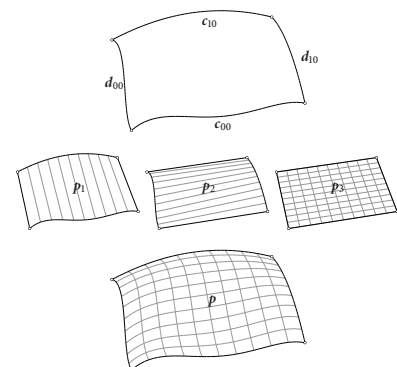
Funkcje mieszające w tym przypadku są wielomianami stopnia 1:  
 $H_{00}(t) = t, H_{10}(t) = 1 - t$ . Niech  $H(t) = [H_{00}(t), H_{10}(t)]^T$ .  
 Określmy płaty

$$p_1(u, v) = C(u)H(v)^T, \quad p_2(u, v) = H(u)D(v)^T, \\ p_3(u, v) = H(u)PH(v)^T.$$

Dwuliniowy płat Coonsa jest określony wzorem

$$p(u, v) = p_1(u, v) + p_2(u, v) - p_3(u, v).$$

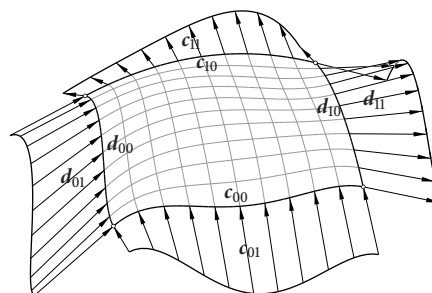
311



312

Jeśli dana jest siatka przecinających się krzywych, której „oczka” mają być wypełnione płytami, to wprawdzie wypełnienie będzie szczelne, ale na wspólnych krzywych między płytami dwuliniowymi wystąpią nieciągłości płaszczyny stycznnej. Aby otrzymać powierzchnię gładką, można skonstruować **bikubiczne płyty Coonsa** (*bicubically blended Coons patches*). Oprócz czterech krzywych brzegowych trzeba podać jeszcze cztery funkcje wektorowe opisujące **pochodne cząstkowe w kierunku poprzecznym do brzegu** (*cross derivatives*),  $c_{01}(u)$ ,  $c_{11}(u)$ ,  $d_{01}(v)$ ,  $d_{11}(v)$ .

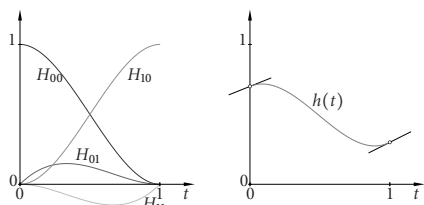
313



314

Funkcje mieszające w konstrukcji płyty bikubicznego są wielomianami stopnia 3:

$$\begin{aligned} H_{00}(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, & H_{10}(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ H_{01}(t) &= t^3 - 2t^2 + t, & H_{11}(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned}$$



Za ich pomocą łatwo jest rozwiązać zadanie interpolacyjne Hermite'a dla dwóch węzłów, 0 i 1, o krotności 2.

315

Podane krzywe muszą być takie, aby macierz

$$P = \begin{bmatrix} c_{00}(0) & c_{10}(0) & c_{01}(0) & c_{11}(0) \\ c_{00}(1) & c_{10}(1) & c_{01}(1) & c_{11}(1) \\ c'_{00}(0) & c'_{10}(0) & c'_{01}(0) & c'_{11}(0) \\ c'_{00}(1) & c'_{10}(1) & c'_{01}(1) & c'_{11}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00}(0) & d_{10}(0) & d'_{00}(0) & d'_{10}(0) \\ d_{00}(1) & d_{10}(1) & d'_{00}(1) & d'_{10}(1) \\ d_{01}(0) & d_{11}(0) & d'_{01}(0) & d'_{11}(0) \\ d_{01}(1) & d_{11}(1) & d'_{01}(1) & d'_{11}(1) \end{bmatrix}$$

istniała. Równości wektorów w odpowiednich miejscach tej macierzy to tzw. **warunki zgodności**. W szczególności wektory na przecięciu ostatnich dwóch kolumn i wierszy będą pochodnymi mieszanymi konstruowanego płyta w jego narożnikach.

316

Za pomocą macierzy  $P$  oraz macierzy

$$\begin{aligned} C(u) &= [c_{00}(u), c_{10}(u), c_{01}(u), c_{11}(u)], \\ D(v) &= [d_{00}(v), d_{10}(v), d_{01}(v), d_{11}(v)], \\ H(t) &= [H_{00}(t), H_{10}(t), H_{01}(t), H_{11}(t)] \end{aligned}$$

możemy definicję bikubicznego płyta Coonsa zapisać wzorem

$$p(u, v) = p_1(u, v) + p_2(u, v) - p_3(u, v),$$

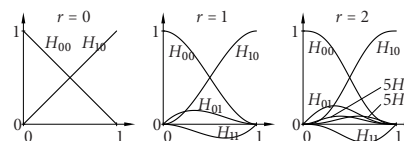
w którym

$$\begin{aligned} p_1(u, v) &= C(u)H(v)^T, & p_2(u, v) &= H(u)D(v)^T, \\ p_3(u, v) &= H(u)PH(v)^T. \end{aligned}$$

317

Zasadę konstrukcji płytów Coonsa można stosować do osiągnięcia interpolacji pochodnych poprzecznych rzędu wyższego niż 1 — dla pochodnych rzędu  $1, \dots, r$  trzeba użyć jako funkcji mieszających wielomianów stopnia  $2r + 1$ . Na przykład dla  $r = 2$  użyteczne są wielomiany stopnia 5:

$$\begin{aligned} H_{00}(t) &= (6t^2 + 3t + 1)(1 - t)^3, & H_{10}(t) &= t^3(6t^2 - 15t + 10), \\ H_{01}(t) &= (3t^2 + t)(1 - t)^3, & H_{11}(t) &= t^3(1 - t)(3t - 4), \\ H_{02}(t) &= \frac{1}{2}t^2(1 - t)^3, & H_{12}(t) &= \frac{1}{2}t^3(1 - t)^2. \end{aligned}$$



318

Użycie **dwupiętnych płytów Coonsa** (*biquintically blended Coons patches*) umożliwia łączenie płytów z zachowaniem ciągłości krzywizny, ale konstrukcja jest jeszcze bardziej kłopotliwa z powodu konieczności spełnienia dalszych warunków zgodności przez krzywe będące podstawą konstrukcji.

Jeśli krzywe opisujące brzeg i pochodne poprzeczne rzędu  $1, \dots, r$  są krzywymi wielomianowymi stopnia co najwyżej  $2r + 1$  (czyli takiego, jak stopień wielomianów użytych jako funkcje mieszające), to wszystkie trzy płyty,  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  są identyczne:  $p(u, v) = p_1(u, v) = p_2(u, v) = p_3(u, v)$ . Same krzywe są określone przez podanie punktów końcowych (odpowiadających parametrom 0 i 1) oraz pochodne rzędu  $1, \dots, r$ .

319

Jeśli krzywe określające płyt Coonsa są wielomianowe, różnych stopni, to można znaleźć reprezentację Béziera płyta. W tym celu stopnie krzywych  $c_{00}, c_{10}, \dots, c_{0r}, c_{1r}$  trzeba wyrównać (tj. dokonać takiego podwyższenia stopnia niektórych z nich, aby wszystkie stopnie były równe i większe lub równe  $2r + 1$ ), to samo zrobić z krzywymi  $d_{00}, d_{10}, \dots, d_{0r}, d_{1r}$ , a następnie przedstawić wielomiany  $H_{00}, \dots, H_{0r}$  w bazach Bernsteina odpowiednich stopni. Można zacząć od przedstawienia np.

$$\begin{aligned} H_{00}(t) &= (6t^2 + 3t + 1)(1 - t)^3 = B_0^5(t) + B_1^5(t) + B_2^5(t), \\ H_{01}(t) &= (3t^2 + t)(1 - t)^3 = \frac{1}{5}B_1^5(t) + \frac{2}{5}B_2^5(t) \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

i dokonać odpowiedniego podwyższenia stopnia tej reprezentacji. Sposób mnożenia np.  $C(u)H(v)^T$  jest oczywisty.

320



## Ciągłość geometryczna powierzchni

Związek własności analitycznych parametryzacji powierzchni z jej kształtem jest równie niejednoznaczny, jak dla krzywych. Gładkość parametryzacji *nie gwarantuje* gładkości powierzchni, a gładka powierzchnia może być złożona z kawałków, których parametryzacje nie sklejają się gładko. Dla otrzymania powierzchni gładkiej, na parametryzację trzeba nałożyć warunek regularności.

**Definicja.** Niech  $n \geq 0$ . Powierzchnia wykazuje **ciągłość geometryczną rzędu  $n$**  (albo: jest klasy  $G^n$ ), jeśli w otoczeniu każdego jej punktu istnieje jej regularna parametryzacja klasy  $C^n$ . Regularna, czyli taka, której pochodne cząstkowe są wektorami liniowo niezależnymi.

Parametryzacja, o której mowa w definicji, może nie mieć nic wspólnego z parametryzacjami używanymi do reprezentowania poszczególnych kawałków powierzchni.

321

Interpretacja geometryczna:

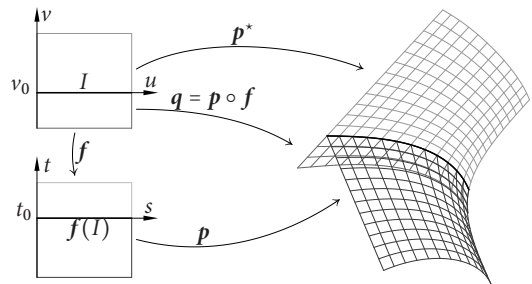
- Powierzchnia klasy  $G^1$  ma w każdym punkcie określoną płaszczyznę styczną i wektor normalny. Poruszając się po powierzchni, obserwujemy ciągłe zmiany kierunku wektora normalnego.
- Powierzchnia klasy  $G^2$  ma ponadto tę własność, że każdy jej przekrój płaszczyzną, która nie jest do tej powierzchni styczna, jest krzywą o ciągłej krzywiznie.
- Interpretacja ciągłości geometrycznych wyższych rzędów jest mniej oczywista, a zastosowania, w których taka gładkość byłaby wymagana, są bardzo rzadkie.

322

W praktyce powierzchnie gładkie są zbudowane z płatów wielomianowych lub wymiernych o regularnych parametryzacjach — zatem płaty te są klasy  $G^\infty$ . W zastosowaniach potrzebne są jednak powierzchnie gładkie, których topologia wyklucza lub bardzo utrudnia sparowanie płatów parametryzacyjnych tak, aby zapewnić *istnienie* odpowiednio gładkiej i regularnej parametryzacji w otoczeniu *każdego* punktu wspólnych krzywych brzegowych połączonych płatów.

Konstrukcja powierzchni gładkiej jest redukowana do następującego problemu: mając dany jeden płatek, należy skonstruować drugi tak, aby miał z tym pierwszym wspólną krzywą brzegową i aby można było skonstruować wspólną parametryzację tych płatów regularną i odpowiednio gładką.

323



Dany płatek  $p$ , poddamy reparametryzacji, za pomocą funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Przyjmijmy, że krzywa brzegowa i pochodne poprzeczne płata  $p^*$  są takie, jak krzywa brzegowa i pochodne płata  $q$ .

324

Pochodne cząstkowe dowolnego rzędu złożenia gładkich funkcji wektorowych opisuje **uogólniony wzór Faa di Bruno**, podany w 1980 r. przez Constantinea i Savitsa. Jest on zbyt skomplikowany, aby był praktyczny. Jego przypadek szczególny (potrzebny w zastosowaniu do konstrukcji połączeń płatów), opisujący pochodne ze względu na tylko jedną zmienną, też jest niepraktyczny.

Mianowicie, dla  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  oraz  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest

$$\frac{\partial^j}{\partial v^j} h(u, v) = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k a_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} g(s, t),$$

$$a_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \frac{\partial^{m_1} s}{\partial v^{m_1}} \dots \frac{\partial^{m_h} s}{\partial v^{m_h}} \frac{\partial^{m_{h+1}} t}{\partial v^{m_{h+1}}} \dots \frac{\partial^{m_k} t}{\partial v^{m_k}}$$

Sumowanie w wyrażeniu  $a_{jkh}$  przebiega po wszystkich ciągach  $k$  liczb dodatnich, których suma jest równa  $j$ .

325

Przyjmijmy umowę, że nadkreślenie symbolu  $p$  oznacza obcięcie parametryzacji  $p$  do brzegu dziedziny, odpowiadającego rozpatrywanej krzywej brzegowej, dla ustalenia uwagi  $t = t_0$ ; to samo dotyczy pochodnych cząstkowych parametryzacji  $p$ . Z kolei podkreślenie symbolu  $p^*$  oznacza obcięcie parametryzacji konstruowanego płata do tego brzegu jego dziedziny, który odpowiada tejże krzywej — tu jest to odcinek  $I$  prostej  $v = v_0$ .

Załóżmy, że  $f(u, v_0) = (s, t_0)$ , przy czym jeśli  $v = v_0$ , to dla każdego  $u$  jest  $s = u$ .

Wartości funkcji  $f$  mają dwie współrzędne,  $s, t$ . Obcinając ich pochodne względem  $v$  do prostej  $v = v_0$ , otrzymamy funkcje skalarne  $s_1, \dots, s_n$  oraz  $t_1, \dots, t_n$ .

326

**Twierdzenie 5** Warunkiem koniecznym i dostatecznym ciągłości  $G^n$  połączenia gładkich regularnych płatów parametryzacyjnych  $p$  i  $p^*$  mających wspólny brzeg  $\underline{p}^* = \bar{p}$  jest spełnienie, dla  $j = 1, \dots, n$ , równań

$$\frac{\partial^j}{\partial v^j} \underline{p}^*(u, v) = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k a_{jkh}(u) \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{p}(s, t),$$

$$a_{jkh}(u) = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_1 > 0, l=1, \dots, k \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} \times$$

$$\times s_{m_1}(u) \dots s_{m_h}(u) t_{m_{h+1}}(u) \dots t_{m_k}(u),$$

przez pewne funkcje  $s_1, \dots, s_n$  i  $t_1, \dots, t_n$  zmiennej  $u$ , przy czym znak funkcji  $t_1$  ma być dodatni, aby uniknąć zagięcia powierzchni wzdłuż wspólnej krzywej płatów.

Funkcje  $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$  nazwiemy **funkcjami połączenia**.

327

**Dowód.** Mając funkcje  $s_1, \dots, s_n$  i  $t_1, \dots, t_n$ , możemy skonstruować funkcje

$$s(u, v) = u + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} s_k(u) (v - v_0)^k, \quad t(u, v) = t_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} t_k(u) (v - v_0)^k$$

i określić za ich pomocą wektorową funkcję  $f$ . Równania podane w twierdzeniu otrzymamy, obliczając pochodne funkcji  $q = p \circ f$  z uogólnionego wzoru Faa di Bruno i przyrównując ich obcięcia do odcinka  $I$  do odpowiednich pochodnych parametryzacji  $\underline{p}^*$ .  $\square$

328

W konstrukcjach powierzchni klasy  $G^1$  i  $G^2$  wystarczą wzory

$$\begin{aligned} \underline{p}_v^* &= s_1 \bar{p}_s + t_1 \bar{p}_t, \\ \underline{p}_{vv}^* &= s_2 \bar{p}_s + t_2 \bar{p}_t + s_1^2 \bar{p}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{p}_{st} + t_1^2 \bar{p}_{tt}. \end{aligned}$$

Możemy rozpatrywać także połączenia płatów wymiernych reprezentowanych przez płaty jednorodne,  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{P}^*$ . Wtedy, oprócz dokonania reparametryzacji płata  $\mathbf{P}$ , możemy go pomnożyć przez dowolną gładką i różną od zera funkcję  $r(u, v)$ , otrzymując płat

$$\mathbf{Q}(u, v) = r(u, v) \mathbf{P}(s(u, v), t(u, v)).$$

Analogiczne twierdzenie, podające równania ciągłości geometrycznej połączenia, pominię, podam tylko wzory dla  $n = 1$  i  $n = 2$ .

329

Mamy tu trzy rodziny funkcji połączenia, funkcje  $r_j$  są obcięciami pochodnych funkcji  $r(u, v)$ .

$$\begin{aligned} \underline{p}^* &= r_0 \bar{p}, \\ \underline{p}_v^* &= r_1 \bar{p} + r_0 s_1 \bar{p}_s + r_0 t_1 \bar{p}_t, \\ \underline{p}_{vv}^* &= r_2 \bar{p} + (r_0 s_2 + 2r_1 s_1) \bar{p}_s + (r_0 t_2 + 2r_1 t_1) \bar{p}_t + \\ &\quad r_0 s_1^2 \bar{p}_{ss} + 2r_0 s_1 t_1 \bar{p}_{st} + r_0 t_1^2 \bar{p}_{tt}. \end{aligned}$$

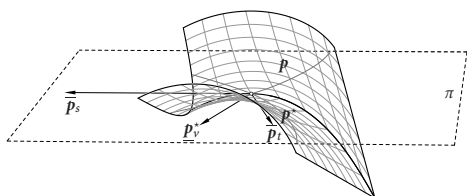
Jeśli nie potrzebujemy konstruować połączenia klasy  $G^3$ , to ostatni wzór można przedstawić w prostszej postaci

$$\underline{p}_{vv}^* = r_2 \bar{p} + \bar{s}_2 \bar{p}_s + \bar{t}_2 \bar{p}_t + r_0 s_1^2 \bar{p}_{ss} + 2r_0 s_1 t_1 \bar{p}_{st} + r_0 t_1^2 \bar{p}_{tt}.$$

Swoboda wyboru funkcji  $s_2$  i  $t_2$  jest równoważna swobodzie wyboru funkcji  $\bar{s}_2$  i  $\bar{t}_2$ .

330

Równanie  $\underline{p}_v^* = s_1 \bar{p}_s + t_1 \bar{p}_t$  oznacza, że w każdym punkcie wspólnego brzegu wektor  $\underline{p}_v^*$  leży w płaszczyźnie stycznej do płata  $\mathbf{p}$ . Ponieważ także wektor  $\underline{p}_u^* = \bar{p}_s$  leży w tej płaszczyźnie, jest to wspólna płaszczyzna styczna obu płatów.



331

Niech  $\underline{q}_2 = s_1^2 \bar{p}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{p}_{st} + t_1^2 \bar{p}_{tt}$ . Rzut prostopadły tego wektora na kierunek wspólnego wektora normalnego  $\mathbf{n}$  połączonych płatów, razem z wektorami  $\bar{p}_u$  i  $\bar{p}_v$ , określa krzywą położoną na obu płatach krzywej powstałej z ich przecięcia płaszczyzną zawierającą wektor  $\mathbf{n}$  i wektor prostopadły do niego i do brzegu płatów. Rzut ten nie zmienia się po dodaniu dowolnej kombinacji liniowej wektorów  $\bar{p}_u$  i  $\bar{p}_v$ , a zatem krzyżowna ta się nie zmienia. Z faktu, że płaty mają wspólną krzywą brzegową i z twierdzenia Meusnier'a wynika, że krzyżowna każdej krzywej powstałej z przecięcia płatów płaszczyzną, która nie jest do nich styczna, jest ciągła.

332

## Równania ciągłości geometrycznej dla płatów wielomianowych i wymiernych

W równaniach ciągłości geometrycznej połączenia płatów wielomianowych i wymiernych występują krzywe wielomianowe opisujące wspólny brzeg płatów i pochodne cząstkowe na tym brzegu. Dokładniej, dla płatów wielomianowych

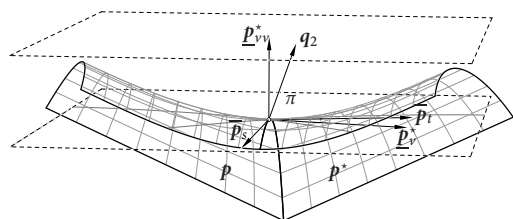
$$\begin{aligned} \underline{p}^* &= \bar{p}, \\ \underline{p}_{vj}^* &= s_j \bar{p}_s + t_j \bar{p}_t + \underline{q}_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

a dla płatów wymiernych

$$\begin{aligned} \underline{p}^* &= r_0 \bar{p}, \\ \underline{p}_{vj}^* &= r_j \bar{p} + s_j \bar{p}_s + t_j \bar{p}_t + \underline{Q}_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Jest  $\underline{q}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\underline{Q}_1 = \mathbf{0}$ , a dla  $j > 1$  krzywe  $\underline{q}_j$  i  $\underline{Q}_j$  są określone przez pochodne rzędu  $2, \dots, j$  płata  $\mathbf{p}$  albo  $\mathbf{P}$  na brzegu oraz funkcje  $s_1, t_1, \dots, s_{j-1}, t_{j-1}$  albo  $r_0, r_1, s_1, t_1, \dots, r_{j-1}, s_{j-1}, t_{j-1}$ .

334



333

Występujące w tych równaniach funkcje wektorowe są wielomianowe. Dlatego funkcje połączenia  $r_j, s_j, t_j$  są funkcjami wymiernymi. Mnożąc strony równań przez wspólne mianowniki tych funkcji, otrzymamy równania, w których występują tylko wielomiany.

Ogólna postać równań jest taka:

$$a_1 \mathbf{c}_1 + \dots + a_k \mathbf{c}_k + a_{k+1} \mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Dane są w nim wielomianowe funkcje wektorowe  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , przy czym  $d > k$ . Zbadamy istnienie rozwiązań składających się z wielomianów  $a_1, \dots, a_{k+1}$  i wielomianowych funkcji  $\mathbf{c}_{k+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Po lewej stronie równania występuje kombinacja liniowa funkcji  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1}$ , ale współczynniki tej kombinacji są wielomianami. Zbiór wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej jest pierścieniem, a nie ciałem. Nie mamy tu więc do czynienia z przestrzenią liniową wektorową krzywych wielomianowych.

335

Struktura algebraiczna podobna do przestrzeni liniowej, w której rolę ciała skalarów pełni pierścień, jest nazywana **modułem**.

Moduł krzywych wielomianowych w przestrzeni  $\mathbb{R}^d$  oznaczamy symbolem  $\mathbb{R}[x]^d$ . Równanie (10) wyraża liniową zależność zbioru krzywych  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{k+1}$  nad pierścieniem wielomianów  $\mathbb{R}[x]$ . Zauważmy, że dla dowolnej liczby  $u$  sprowadza się to do „zwykłej” liniowej zależności wektorów  $\mathbf{c}_1(u), \dots, \mathbf{c}_{k+1}(u) \in \mathbb{R}^d$ .

336

Istotny dla rozwiązywania równań postaci (10) jest fakt, że pierścień  $\mathbb{R}[x]$  jest dziedzicą idealów głównych, a nawet jest pierścieniem euklidesowym. Jest to pierścień przemienny bez dzielników zera, którego każdy ideał (podzbiór zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie) ma jeden generator (w tym przypadku składa się z wszystkich wielomianów podzielnych przez pewien ustalony wielomian).

W pierścieniu euklidesowym każde dwa elementy mają wspólny dzielnik, który można znaleźć za pomocą algorytmu Euklidesa.

337

Zbiór  $\Theta$ , taki że dowolny element modułu  $M$  jest kombinacją liniową elementów  $\Theta$  o jednoznacznie określonych współczynnikach, nazywa się **bazą modułu**  $M$ . Na przykład zbiór wektorów  $[1, 0, 0]^T$ ,  $[0, 1, 0]^T$ ,  $[0, 0, 1]^T$  jest bazą modułu  $\mathbb{R}[x]^3$ ; mnożąc te wektory przez odpowiednie wielomiany i dodając, możemy otrzymać dowolną krzywą wielomianową w  $\mathbb{R}^3$ .

Podobnie jak przestrzeń liniowa, moduł może mieć różne bazy. Inaczej niż przestrzeń liniowa, moduł może bazy nie mieć. Moduł, który ma bazę, jest nazywany **modułem wolnym**. Liczba elementów bazy (odpowiednik wymiaru przestrzeni liniowej) nazywa się **rangą modułu**. Oznacza się ją symbolem  $\text{rank } M$ .

338

Podzbiór modułu, który jest modułem, jest tak zwanym **podmodułem**; jest to pojęcie analogiczne do podprzestrzeni liniowej. Inaczej niż dla skończonej wymiarowej przestrzeni liniowych, jeśli  $L$  jest podmodułem  $M$  i  $\text{rank } L = \text{rank } M$ , to nie wynika stąd, że  $L = M$ .

Rozważmy macierz  $A$ , której kolumnami są krzywe  $c_1, \dots, c_k$ . Każda kolumna składa się z  $d$  wielomianów opisujących kolejne współrzędne krzywej. Liczba wierszy,  $d$ , jest większa niż liczba kolumn,  $k$ , możemy więc skreślić dowolne  $d - k$  wierszy i otrzymać macierz kwadratową. Wyznacznik tej macierzy jest wielomianem, który nazwiemy **minorem** macierzy  $A$ . Największy wspólny dzielnik wszystkich  $\binom{d}{k}$  minorów nazwiemy **największym czynnikiem** układu krzywych  $c_1, \dots, c_k$  i oznaczymy symbolem  $\mathcal{F}(c_1, \dots, c_k)$ . Jeśli krzywe są liniowo zależne nad  $\mathbb{R}[x]$ , to wszystkie minory i największy czynnik są równe 0. Załóżymy, że tak nie jest.

339

**Twierdzenie 6** Jeśli istnieją ciągłe funkcje  $a_1, \dots, a_{k+1}$ , nie wszystkie równe 0, spełniające równanie (10) dla ustalonych krzywych  $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{R}[x]^d$ , to istnieją wielomiany  $a_1, \dots, a_k$  spełniające to równanie razem z tymi krzywymi i z wielomianem  $a_{k+1} = \mathcal{F}(c_1, \dots, c_k)$ .

**Twierdzenie 7** Dla ustalonych krzywych  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}[x]^d$ , liniowo niezależnych nad  $\mathbb{R}[x]$ , istnieją krzywe  $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k \in \mathbb{R}[x]^d$ , takie że dowolną krzywą  $c_{k+1}$  spełniającą równanie (10) razem z pewnymi wielomianami  $a_1, \dots, a_{k+1}$  można przedstawić w postaci

$$c_{k+1} = \hat{a}_1 \hat{c}_1 + \dots + \hat{a}_k \hat{c}_k,$$

za pomocą pewnych wielomianów  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ .

340

Zbiór funkcji wielomianowych  $c_{k+1}$  spełniających równanie (10) z danymi funkcjami  $c_1, \dots, c_k$  i z pewnymi wielomianami  $a_1, \dots, a_{k+1}$  jest modułem wolnym (podmodułem modułu  $\mathbb{R}[x]^d$ ). Oznaczmy go symbolem  $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k)$ .

Zbiór funkcji wielomianowych będących kombinacjami liniowymi funkcji  $c_1, \dots, c_k$  nad pierścieniem  $\mathbb{R}[x]$  oznaczymy symbolem  $\mathcal{L}(c_1, \dots, c_k)$ ; jest to podmoduł wolny modułu  $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k)$ , jego bazą jest zbiór  $\{c_1, \dots, c_k\}$ . Ranga obu modułów jest równa  $k$ .

341

Rozważmy jeszcze równanie

$$a_1 c_1 + \dots + a_k c_k + a_{k+1}(\mathbf{k} - \mathbf{e}s) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

w którym dane są krzywe  $c_1, \dots, c_k$  i  $\mathbf{k}$  oraz wielomian  $e$ .

**Twierdzenie 8** Jeżeli zbiór rozwiązań  $s$  równania (11) jest niepusty, to istnieje krzywa wielomianowa  $k_1$ , taka że każde rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$s = k_1 + \hat{a}_1 \hat{c}_1 + \dots + \hat{a}_k \hat{c}_k,$$

przy czym krzywe  $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k$  są elementami bazy modułu  $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k)$ , a funkcje  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$  są wielomianami.

Zgodnie z tym twierdzeniem zbiór krzywych  $s$  spełniających równanie (11) jest pusty albo jest warstwą modułu  $\mathbb{R}[x]^d$ , równoległą do podmodułu  $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k)$ .

342

Dla regularnego płata wielomianowego  $p$  pochodne cząstkowe  $\bar{p}_s$  i  $\bar{p}_t$  są liniowo niezależne.

**Twierdzenie 9** Istnienie funkcji  $s_1, \dots, s_n$  oraz  $t_1, \dots, t_n$  spełniających równania (8) dla  $j = 1, \dots, n$  jest równoważne istnieniu wielomianów  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  i  $d$  spełniających dla  $j = 1, \dots, n$  równania

$$b_j \bar{p}_s + c_j \bar{p}_t + d \left( k_j - d^{2j-2} \frac{\partial^j}{\partial v^j} p^* \right) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

w których  $k_1 = \mathbf{0}$ , a dla  $j > 1$

$$k_j = \sum_{k=2}^j \sum_{h=0}^k \hat{a}_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{p},$$

$$\hat{a}_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_j > 0, \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} b_{m_1} \dots b_{m_n} c_{m_{n+1}} \dots c_{m_k}.$$

343

Dla  $j = 1, 2$  równania (12) mają postać

$$b_1 \bar{p}_s + c_1 \bar{p}_t - d \bar{p}_s^* = \mathbf{0}, \quad (12.1)$$

$$b_2 \bar{p}_s + c_2 \bar{p}_t + d(b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt} - d^2 \bar{p}_{vv}^*) = \mathbf{0}. \quad (12.2)$$

Mamy zatem krzywą  $k_1 = \mathbf{0}$  i  $k_2 = b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt}$ .

344

Dla regularnego płata wielomianowego  $p$  pochodne cząstkowe  $\bar{p}_s$  i  $\bar{p}_t$  są liniowo niezależne.

**Twierdzenie 9** Istnienie funkcji  $s_1, \dots, s_n$  oraz  $t_1, \dots, t_n$  spełniających równania (8) dla  $j = 1, \dots, n$  jest równoważne istnieniu wielomianów  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  i  $d$  spełniających dla  $j = 1, \dots, n$  równania

$$b_j \bar{p}_s + c_j \bar{p}_t + d \left( k_j - d^{2j-2} \frac{\partial^j}{\partial v^j} p^* \right) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

w których  $k_1 = \mathbf{0}$ , a dla  $j > 1$

$$k_j = \sum_{k=2}^j \sum_{h=0}^k \hat{a}_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{p},$$

$$\hat{a}_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{\substack{m_j > 0, \\ m_1 + \dots + m_k = j}} \frac{j!}{k! m_1! \dots m_k!} b_{m_1} \dots b_{m_n} c_{m_{n+1}} \dots c_{m_k}.$$

343

Dla  $j = 1, 2$  równania (12) mają postać

$$b_1 \bar{p}_s + c_1 \bar{p}_t - d \bar{p}_s^* = \mathbf{0}, \quad (12.1)$$

$$b_2 \bar{p}_s + c_2 \bar{p}_t + d(b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt} - d^2 \bar{p}_{vv}^*) = \mathbf{0}. \quad (12.2)$$

Mamy zatem krzywą  $k_1 = \mathbf{0}$  i  $k_2 = b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt}$ .

344

**Twierdzenie 10** Istnienie funkcji  $r_0 = 1, r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$  spełniających równania (9) dla  $j = 0, \dots, n$  jest równoważne istnieniu wielomianów  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  i  $d$  spełniających dla  $j = 1, \dots, n$  równania

$$a_j \bar{p} + b_j \bar{p}_s + c_j \bar{p}_t + d \left( K_j - d^{2j-2} \frac{\partial^j}{\partial v^j} \mathbf{p}^* \right) = 0, \quad (13)$$

w których

$$K_j = \sum_{k=1}^j \sum_{h=0}^k \hat{A}_{jkh} \frac{\partial^k}{\partial s^h \partial t^{k-h}} \bar{p},$$

$$\hat{A}_{jkh} = \binom{k}{h} \sum_{i=k, \dots, j} \binom{j}{i} \sum_{\substack{m_1 > 0, \dots, m_k \\ m_1 + \dots + m_k = i}} \frac{i!}{k! m_1! \dots m_k!} \times \\ \times a_{j-i} b_{m_1} \dots b_{m_h} c_{m_{h+1}} \dots c_{m_k} d^{k-1}$$

i (na podstawie umowy)  $a_0 = 1/d$ .

345

**Uwaga:** Ponieważ w każdym składniku wyrażenia opisującego  $\hat{A}_{jkh}$ , w którym występuje funkcja  $a_0$ , występuje również  $d$ , wszystkie funkcje  $\hat{A}_{jkh}$  są wielomianami.

Dla  $j = 1, 2$  równania (13) mają postać

$$a_1 \bar{p} + b_1 \bar{p}_s + c_1 \bar{p}_t - d \mathbf{p}_v^* = 0, \quad (13.1)$$

$$a_2 \bar{p} + b_2 \bar{p}_s + c_2 \bar{p}_t + \\ d(2a_1 b_1 \bar{p}_s + 2a_1 c_1 \bar{p}_t + b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt} - d^2 \mathbf{p}_{vv}^*) = 0. \quad (13.2)$$

Jeśli nie trzeba konstruować powierzchni o ciągłości geometrycznej rzędu wyższego niż 2 (czyli często), ostatnie równanie możemy zapisać w prostszej postaci

$$a_2 \bar{p} + \tilde{b}_2 \bar{p}_s + \tilde{c}_2 \bar{p}_t + d(b_1^2 \bar{p}_{ss} + 2b_1 c_1 \bar{p}_{st} + c_1^2 \bar{p}_{tt} - d^2 \mathbf{p}_{vv}^*) = 0, \quad (13.2')$$

z dowolnymi wielomianami  $\tilde{b}_2$  i  $\tilde{c}_2$  zamiast  $b_2$  i  $c_2$ . Wielomiany  $b_2$  i  $c_2$  są potrzebne do określenia krzywej  $K_3$ , występującej w warunku ciągłości  $G^3$ , i dalszych.

346

Zatem, aby skonstruować płat  $\mathbf{p}^*$  gładko połączony z  $\mathbf{p}$ , trzeba znaleźć pochodne płata  $\mathbf{p}$  na wspólnym brzegu, dobrać wielomiany, skonstruować krzywą  $\mathbf{p}_v^*$  i ewentualnie  $\mathbf{p}_{vv}^*$  i skonstruować płat  $\mathbf{p}^*$ , którego to są pochodne w kierunku poprzecznym.

Przyjęcie wielomianu  $d = \mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  w konstrukcji krzywej  $\mathbf{p}_v^*$  umożliwia otrzymanie wszystkich możliwych krzywych wielomianowych opisujących pochodne płata  $\mathbf{p}^*$  w kierunku poprzecznym (wszystkich elementów modułu  $\mathcal{M}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$ ). Zamiast tego przyjmuje się wielomian  $d = 1$ , co daje dostęp do elementów podmodułu  $\mathcal{L}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$ . Zobaczmy powody tego ograniczenia.

347

- Znalezienie bazy modułu  $\mathcal{M}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  jest dość trudnym i kosztownym obliczeniem numerycznym, przy czym *prawie zawsze* bazą tą jest zbiór  $\{\bar{p}_s, \bar{p}_t\}$  (czyli na ogół niczego się nie traci).

- Jest tak dlatego, bo wielomian  $\mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  jest wspólnym dzielnikiem wszystkich trzech minorów macierzy  $[\bar{p}_s, \bar{p}_t]$ , a zatem zbiór jego miejsc zerowych (rzeczywistych i zespolonych) jest przecięciem zbiorów miejsc zerowych minorów. Dowolnie małe zaburzenie płata  $\mathbf{p}$  może tak zmienić minory, że nie będą mieć ani jednego wspólnego zera. Zatem konstrukcja przy użyciu wielomianu  $\mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  jest niestabilna.

348

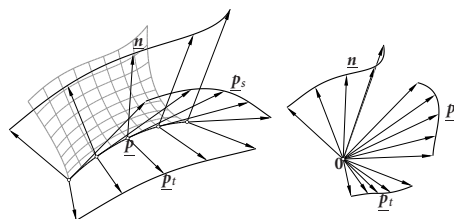
- Jeśli wielomian  $d$  ma stopień większy od 0, to w konstrukcji połączenia płatów klasy  $G^2$  lub wyższej, po znalezieniu funkcji wektorowej  $d^2 \mathbf{p}_{vv}^*$ , trzeba ją podzielić przez  $d^2$  — ale takie dzielenie może nie być wykonalne.

- Ograniczenie do  $d = 1$  łatwo jest ominąć, konstruując płat pomocniczy i „doklejając” dwa płaty docelowe do niego (po „przeciwnych stronach” wspólnej krzywej).

Te same uwagi dotyczą konstrukcji gładko połączonych płatów wymiernych poprzez skonstruowanie reprezentujących je jednorodnych płatów wielomianowych. Przyjęcie wielomianu  $d = 1$  ogranicza wybór krzywej  $\mathbf{p}_v^*$  do podmodułu  $\mathcal{L}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  modułu  $\mathcal{M}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$ .

349

Przyjrzyjmy się modułowi  $\mathcal{M}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$ . Trzy minory macierzy  $[\bar{p}_s, \bar{p}_t]$ , z odpowiednimi znakami, opisują wektor normalny płata  $\mathbf{p}$  na brzegu: wartość funkcji wektorowej  $\bar{n} = \bar{p}_s \wedge \bar{p}_t$  dla każdego  $s$  jest wektorem prostopadłym do wektorów  $\bar{p}_s(s)$  i  $\bar{p}_t(s)$ . Zatem, moduł  $\mathcal{M}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  zawiera wszystkie krzywe wielomianowe, których wartości w każdym punkcie są wektorami w odpowiedniej płaszczyźnie stycznej płata  $\mathbf{p}$ .



350

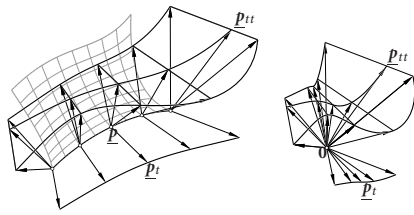
Stopień krzywej  $\bar{n}$  nie przekracza sumy stopni krzywych  $\bar{p}_s$  i  $\bar{p}_t$ , określonych przez stopień płata  $\mathbf{p}$ . Jeśli  $\mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t) \neq \text{const}$ , to można podzielić współrzędne krzywej  $\bar{n}$  przez ten wielomian i otrzymać funkcję niższego stopnia opisującą wektor normalny płata  $\mathbf{p}$  na brzegu. To oznacza, że kształt płata  $\mathbf{p}$  jest *mniej skomplikowany* niż to wynika z jego stopnia.

W skrajnym przypadku, gdy  $\deg \mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t) = \deg \bar{p}_s + \deg \bar{p}_t$ , dzieląc krzywą  $\bar{n}$  przez  $\mathcal{F}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$ , otrzymamy funkcję stałą opisującą wektor normalny płata  $\mathbf{p}$  na brzegu — to oznacza istnienie płaszczyzny stycznej do płata w wszystkich punktach jego krzywej brzegowej (która wtedy musi być płaska).

351

Niech  $d = 1$ . Jeśli ustalimy wielomiany  $b_1$  i  $c_1$ , to mamy ustaloną funkcję wektorową  $\mathbf{k}_2$ ; na przykład jeśli  $b_1 = 0, c_1 = 1$ , to  $\mathbf{k}_2 = \bar{p}_{tt}$ . „Dobrze” (tj. zapewniającą połączenie klasy  $G^2$ ) pochodną drugiego rzędu w kierunku poprzecznym płata  $\mathbf{p}^*$  otrzymamy, dodając do  $\mathbf{k}_2$  dowolną kombinację liniową nad  $\mathbb{R}[x]$  funkcji  $\bar{p}_s$  i  $\bar{p}_t$  — wystarczy wybrać wielomiany  $b_2$  i  $c_2$ . Warstwa modułu  $\mathbb{R}[x]^3$  równoległa do podmodułu  $\mathcal{L}(\bar{p}_s, \bar{p}_t)$  i zawierająca funkcję  $\mathbf{k}_2$  reprezentuje wszystkie warstwy równoległe do płaszczyzn stycznych do płata  $\mathbf{p}$  na jego brzegu, zawierające wektory  $\mathbf{q}_2$  takie jak na rysunku na slajdzie 333.

352



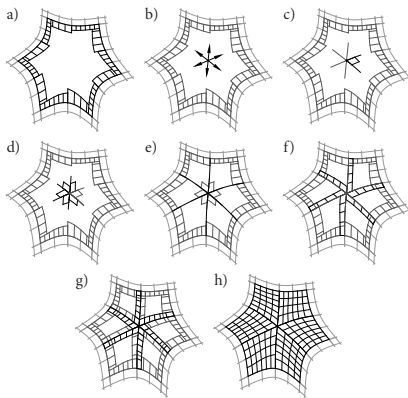
353

## Gładkie wypełnianie wielokątnych otworów

Zagęszczanie siatki nieregularnej wytwarza ciąg siatek zbieżny do powierzchni granicznej. Jeśli nie chcemy obliczać takiego ciągu, to możemy dokonać zagęszczania tylko parę razy i na podstawie otrzymanej siatki wygenerować płyty wielomianowe reprezentowane przez jej regularne fragmenty, a pozostałe części powierzchni skonstruować z płytów połączonych zgodnie z opisem wyżej.

Dla ustalenia uwagi, rozważamy powierzchnie, których „regularne” części składają się z płytów bikubicznych. Operacja zagęszczania składa się z podwajania i  $n = 3$  kroków uśredniania. Dla dowolnej siatki początkowej po dwukrotnym zagęszczaniu otrzymamy siatkę z elementami specjalnymi dostatecznie „odizolowanymi” od siebie. Każdemu takiemu elementowi odpowiada wielokątny otwór w powierzchni, który trzeba wypełnić gładko. Do brzegu otworu  $k$ -kątnego przylega  $2k$  płytów bikubicznych.

354



355

Pokazany na rysunku schemat Hahna (1989 r.) opisuje ideę konstrukcji.

W pierwszym kroku (a) znajdowane są pochodne w kierunku poprzecznym do brzegu płytów otaczających otwór.

Następnie (b) określa się punkt środkowy, tj. wspólny punkt płytów czworokątnych wypełniających otwór oraz pochodne wspólnych krzywych w tym punkcie.

Kolejne dwa etapy (c,d) to ustalenie pochodnych wyższych rzędów oraz pochodnych mieszanych, spełniających tzw. warunki zgodności, konieczne, aby była wykonalna konstrukcja regularnych płytów docelowych.

W kroku (e) są konstruowane krzywe wspólne płytów, łączące punkt środkowy z punktami wspólnymi płytów otaczających otwór.

356

Płyty pomocnicze konstruowane w kroku (f) przylegają do skonstruowanych w poprzednim kroku krzywych wspólnych i spełniają określone wcześniej warunki interpolacyjne nałożone na pochodne w kierunku poprzecznym i mieszane.

W kroku (g) na podstawie płytów pomocniczych i wybranych funkcji połączenia są konstruowane pochodne poprzeczne płytów docelowych dla każdej z czterech krzywych brzegowych każdego takiego płyta.

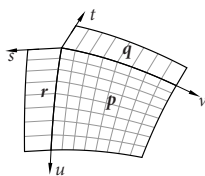
Ostatni krok to konstrukcja płytów Coonsa, mających zadane brzegi i pochodne poprzeczne.

357

Jednym z trudniejszych elementów konstrukcji jest spełnienie warunków zgodności. Okazuje się, że jeśli otrzymana powierzchnia ma być klasy  $G^1$ , to narzuca to ograniczenia na pochodne rzędu 2 płytów pomocniczych w punkcie środkowym (czyli także na pochodne drugiego rzędu krzywych wspólnych), a jeśli ma być powierzchnia klasy  $G^2$ , to warunki zgodności obejmują pochodne rzędu 4. Ponadto wielomiany przyjmowane jako funkcje połączenia muszą spełniać pewne warunki interpolacyjne Hermite’a, co wpływa na wysoki stopień płytów docelowych.

358

## Lokalne warunki zgodności $G^1$



Podkreślenia i nadkreślenia parametryzacji oznaczają obciążenia płytów do odpowiednich brzegów. Obie kreski oznaczają oba obciążenia. Płyty pomocnicze  $q$  i  $r$  mają wspólny narożnik z docelowym płytą  $p$ . Podkreślenie symbolu funkcji połączenia oznacza jej wartość w punkcie odpowiadającym wspólnemu narożnikowi płytów.

359

Pochodne poprzeczne płyta  $p$  otrzymamy ze wzorów

$$\underline{p}_v = b_1 \bar{r}_u + c_1 \bar{r}_s, \quad (14)$$

$$\bar{p}_u = f_1 \bar{q}_v + g_1 \bar{q}_t, \quad (15)$$

z funkcjami połączenia  $b_1, c_1, f_1, g_1$ .

Zgodność pozycyjna: wszystkie płyty mają wspólny narożnik,  $\bar{r} = \bar{q}$ .

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu: ma być

$$\bar{q}_v = b_1 \bar{r}_u + c_1 \bar{r}_s, \quad (16)$$

$$\bar{r}_u = f_1 \bar{q}_v + g_1 \bar{q}_t. \quad (17)$$

360

Zgodność pochodnych mieszanych: z warunku  $p_{uv} = p_{vu}$  wynika, że

$$\underline{b}'_i \bar{e}_u + \underline{c}'_i \bar{e}_s + \underline{b}_i \bar{e}_{uu} + \underline{c}_i \bar{e}_{su} = \underline{f}'_i \bar{q}_v + \underline{g}'_i \bar{q}_t + \underline{f}_i \bar{q}_{vv} + \underline{g}_i \bar{q}_{tv}.$$

Po uporządkowaniu:

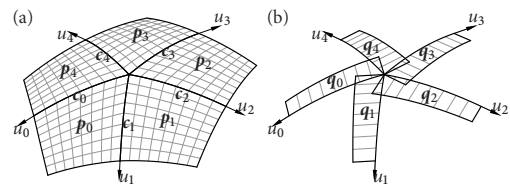
$$\underline{b}'_i \bar{e}_u + \underline{c}'_i \bar{e}_s - \underline{f}'_i \bar{q}_v - \underline{g}'_i \bar{q}_t = -\underline{b}_i \bar{e}_{uu} - \underline{c}_i \bar{e}_{su} - \underline{f}_i \bar{q}_{vv} + \underline{g}_i \bar{q}_{tv}. \quad (18)$$

Zauważmy, że mając dane płaty pomocnicze, możemy z równań (16) i (17) obliczyć wartości funkcji połączenia, a równanie (18) musi być spełnione przez pochodne tych funkcji. Ale, trzeba zapewnić niesprzeczność tego równania. Lewa strona przedstawia kombinację liniową wektorów stycznych do płatów w narożniku, zatem prawa strona musi też być wektorem stycznym do niej. Czyli wektorem prostopadłym do wektora normalnego  $\mathbf{n}$  płatów w wspólnym narożniku. Stąd musi być

$$+ \underline{c}_1(\mathbf{n}, \bar{e}_{su}) - \underline{g}_1(\mathbf{n}, \bar{q}_{tv}) = -\underline{b}_1(\mathbf{n}, \bar{e}_{uu}) + \underline{f}_1(\mathbf{n}, \bar{q}_{vv}). \quad (19)$$

361

Globalne warunki zgodności  $G^1$



Dla  $k$  płatów pomocniczych i  $k$  płatów docelowych otaczających wspólny narożnik napiszemy równania

$$\underline{p}_{iv} = b_{1,i} \underline{c}'_i + c_{1,i} \underline{q}_{is},$$

$$\underline{p}_{iu} = f_{1,i} \underline{c}'_{i+1} + g_{1,i} \underline{q}_{i+1s}.$$

Występuje w nich  $4k$  funkcji pomocniczych.

362

Zestawiając wszystkie lokalne warunki zgodności nałożone na krzywe wspólne, płaty pomocnicze i funkcje połączenia, otrzymamy takie warunki globalne:

Zgodność pozycyjna: wszystkie płaty pomocnicze mają wspólny narożnik,  $\underline{q}_0 = \dots = \underline{q}_{k-1}$ .

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu: równania

$$\underline{c}'_{i+1} = \underline{b}_{1,i} \underline{c}'_i + \underline{c}_{1,i} \underline{q}_{is}, \quad (20)$$

$$\underline{c}'_i = \underline{f}_{1,i} \underline{c}'_{i+1} + \underline{g}_{1,i} \underline{q}_{i+1s}, \quad (21)$$

są niesprzeczne i określone, jeśli wszystkie płaty pomocnicze są regularne i mają tę samą płaszczyznę styczną w wspólnym narożniku.

363

Zgodność pochodnych mieszanych: z równań (19) powstaje układ  $k$  równań liniowych

$$\begin{bmatrix} \underline{c}_0 & -\underline{g}_0 & & \\ & \underline{c}_1 & \ddots & \\ & & \ddots & -\underline{g}_{k-2} \\ -\underline{g}_{k-1} & & & \underline{c}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \bar{q}_{0us} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \bar{q}_{k-1us} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{b}_0 & \underline{f}_0 & & \\ & -\underline{b}_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \underline{f}_{k-2} \\ \underline{f}_{k-1} & & & -\underline{b}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \underline{c}'_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \underline{c}'_{k-1} \rangle \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Jeśli pochodne płatów pomocniczych spełniają go, to równania

$$\underline{b}'_{1,i} \underline{c}'_i + \underline{c}'_{1,i} \underline{q}_{is} - \underline{f}'_{1,i} \underline{c}'_{i+1} - \underline{g}'_{1,i} \underline{q}_{i+1s} = -\underline{b}_{1,i} \underline{c}'_{i+1} - \underline{c}_{1,i} \underline{q}_{i+1s} + \underline{f}_{1,i} \underline{c}'_{i+1} + \underline{g}_{1,i} \underline{q}_{i+1s}, \quad (23)$$

są niesprzeczne i możemy je rozwiązać ze względu na pochodne funkcji połączenia.

364

**Twierdzenie 11** Układ równań (22), którego współczynniki są określone przez krzywe  $\underline{c}_0, \dots, \underline{c}_{k-1}$ :

- ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy, gdy liczba  $k$  jest nieparzysta;
- dla  $k$  parzystego jest nieokreślony i jest niesprzeczny wtedy, gdy

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\det[\underline{c}'_{i-1}, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]}{\det[\underline{c}'_{i-1}, \underline{c}'_i, \mathbf{n}] \det[\underline{c}'_i, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]} \langle \mathbf{n}, \underline{c}''_i \rangle = 0. \quad (24)$$

365

**Szkic dowodu.** Układ (22) można zapisać w postaci  $AY = BX$ , przy czym macierze  $A$  i  $B$  są tzw. cykliczne dwudiagonalne. Łatwo jest obliczyć

$$\det A = \prod_{i=0}^{k-1} \underline{c}_{1,i} - \prod_{i=0}^{k-1} \underline{g}_{1,i}.$$

Współczynniki  $\underline{c}_{1,i}$  i  $\underline{g}_{1,i}$  można obliczyć ze wzorów Cramera:

$$\underline{c}_{1,i} = \frac{\det[\underline{c}'_i, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]}{\det[\underline{c}'_i, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]}, \quad \underline{g}_{1,i} = \frac{\det[\underline{c}'_{i+1}, \underline{c}'_i, \mathbf{n}]}{\det[\underline{c}'_{i+1}, \underline{c}'_{i+1}, \mathbf{n}]}.$$

Dla płatów regularnych wszystkie te liczby są różne od 0. Ich iloczyn mają te same wartości bezwzględne i dla  $k$  nieparzystego mają przeciwne znaki, a dla parzystego te same. Zatem macierz  $A$  jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy  $k$  jest nieparzyste.

366

Przyjmijmy parzyste  $k$ . Można bez straty ogólności przyjąć, że dla każdego  $i$  płat  $\underline{q}_i$  jest identyczny z płatem  $\underline{p}_i$ . Wtedy  $\underline{q}_{is} = \underline{c}'_{i+1}$ , a stąd  $\underline{b}_{1,i} = 0$  oraz  $\underline{c}_{1,i} = 1$  i mamy układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{g}_0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -\underline{g}_{k-2} \\ -\underline{g}_{k-1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \bar{p}_{0uv} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \bar{p}_{k-1uv} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_0 & & & \\ & \underline{f}_{k-2} & & \\ & & \underline{f}_{k-2} & \\ \underline{f}_{k-1} & & & \underline{f}_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{n}, \underline{c}''_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{n}, \underline{c}''_{k-1} \rangle \end{bmatrix}.$$

Macierz  $A$  jest rzędu  $k-1$ . Wykonując (symbolicznie) eliminację Gaussa, aby doprowadzić ją do postaci trójkątnej górnej, otrzymamy macierz z ostatnim wierszem zerowym. Dlatego przekształcona prawa strona, tj. iloczyn  $BX$  musi być wektorem z zerową ostatnią współrzędną. Ta współrzędna jest wartością wyrażenia po lewej stronie równania (24).

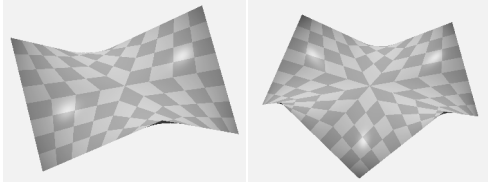
□

367

Jak wynika z twierdzenia, jeśli we wspólnym narożniku spotyka się nieparzysta liczba płatów, to ich wspólne krzywe można dobrać dowolnie, byleby styczne do nich były w jednej płaszczyźnie. Pochodne mieszane płatów pomocniczych będą wtedy określone jednoznacznie przez te krzywe i warunki zgodności.

Dla parzystego  $k$  istnieje ograniczenie pochodnych drugiego rzędu krzywych. Jeśli jest spełnione, to pochodne mieszane płatów pomocniczych nie są określone jednoznacznie, a zatem trzeba nałożyć na nie jakiś dodatkowy warunek. Można go wziąć z pewnego kryterium optymalizacji kształtu — zazwyczaj chcemy, aby powierzchnia docelowa miała jak najmniejsze załadowania.

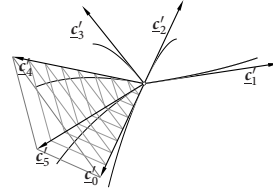
368



Niejednoznaczność rozwiązania dla parzystego  $k$  objawia się możliwością konstruowania małych siodeł.

369

„Geometryczna” interpretacja współczynników występujących w warunku niesprzeczności globalnego warunku zgodności pochodnych mieszanych dla parzystego  $k$ .



370

### Lokalne warunki zgodności $G^2$

Zakładając, że płaty pomocnicze i docelowe konstruowanej powierzchni klasy  $G^2$  są połączone zgodnie ze schematem rozpatrywanym wcześniej, oprócz pochodnych pierwszego rzędu w kierunku poprzecznym do brzegu musimy skonstruować pochodne drugiego rzędu:

$$\underline{p}_{vv} = b_2 \underline{r}_u + c_2 \underline{r}_s + b_1^2 \underline{r}_{uu} + 2b_1 c_2 \underline{r}_{us} + c_1^2 \underline{r}_{ss}, \quad (25)$$

$$\underline{p}_{uu} = f_2 \underline{q}_v + g_2 \underline{q}_t + f_1^2 \underline{q}_{vv} + 2f_1 g_2 \underline{q}_{vt} + f_1^2 \underline{q}_{tt}. \quad (26)$$

W równaniach tych występują cztery nowe funkcje połączenia,  $c_2$ ,  $d_2$ ,  $f_2$  i  $g_2$ .

371

Różniczkując strony powyższych równań, otrzymamy następujące warunki zgodności  $G^2$ :

Zgodność pochodnych drugiego rzędu: strony równań

$$\underline{q}_{vv} = b_2 \underline{r}_u + c_2 \underline{r}_s + b_1^2 \underline{r}_{uu} + 2b_1 c_2 \underline{r}_{us} + c_1^2 \underline{r}_{ss}, \quad (27)$$

$$\underline{r}_{uu} = f_2 \underline{q}_v + g_2 \underline{q}_t + f_1^2 \underline{q}_{vv} + 2f_1 g_2 \underline{q}_{vt} + g_2^2 \underline{q}_{tt} \quad (28)$$

są równe odpowiednio  $\underline{p}_{vv}$  i  $\underline{p}_{uu}$ .

372

Zgodność pochodnych mieszanych trzeciego rzędu: strony równań

$$\begin{aligned} f_1'' \underline{q}_v + g_1'' \underline{q}_t + 2f_1' \underline{q}_{vv} + 2g_1' \underline{q}_{vt} + f_1 \underline{q}_{vvv} + g_1 \underline{q}_{vvt} = \\ b_2' \underline{r}_u + c_2' \underline{r}_s + (2b_1 b_1' + b_2) \underline{r}_{uu} + (2b_1 c_1 + 2b_1 c_1' + c_2) \underline{r}_{us} + \\ 2c_1 c_1' \underline{r}_{ss} + b_1^2 \underline{r}_{uuu} + 2b_1 c_1 \underline{r}_{uus} + c_1^2 \underline{r}_{uss}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} b_1'' \underline{r}_u + c_1'' \underline{r}_s + 2b_1' \underline{r}_{uu} + 2c_1' \underline{r}_{us} + b_1 \underline{r}_{uuu} + c_1 \underline{r}_{uus} = \\ f_2' \underline{q}_v + g_2' \underline{q}_t + (2f_1 f_1' + f_2) \underline{q}_{vv} + (2f_1' g_1 + 2f_1 g_1' + g_2) \underline{q}_{vt} + \\ 2g_1 g_1' \underline{q}_{tt} + f_1^2 \underline{q}_{vvv} + 2f_1 g_1 \underline{q}_{vvt} + g_1^2 \underline{q}_{vtt} \end{aligned} \quad (30)$$

są równe  $\underline{p}_{uvv}$  i  $\underline{p}_{uuv}$ .

373

Zgodność pochodnych mieszanych czwartego rzędu: wyrażenia z obu stron poniższego równania są równe  $\underline{p}_{uuvv}$ :

$$\begin{aligned} f_2'' \underline{q}_v + g_2'' \underline{q}_t + 2(f_1 f_1'' + f_1^2 + f_2') \underline{q}_{vv} + \\ 2(f_1' g_1 + 2f_1' g_1' + f_1 g_1'' + g_2') \underline{q}_{vt} + 2(g_1 g_1'' + g_1^2) \underline{q}_{tt} + \\ (4f_1 f_1' + f_2) \underline{q}_{vvv} + (4f_1' g_1 + 4f_1 g_1' + g_2) \underline{q}_{vvt} + 4g_1 g_1' \underline{q}_{vtt} + \\ f_1^2 \underline{q}_{vvvv} + 2f_1 g_1 \underline{q}_{vvvt} + g_1^2 \underline{q}_{vttt} = \\ b_2'' \underline{r}_u + c_2'' \underline{r}_s + 2(b_1 b_1'' + b_1^2 + b_2') \underline{r}_{uu} + \\ 2(b_1' c_1 + 2b_1 c_1' + b_1 c_1'' + c_2') \underline{r}_{us} + 2(c_1 c_1'' + c_1^2) \underline{r}_{ss} + \\ (4b_1 b_1' + b_2) \underline{r}_{uuu} + (4b_1' c_1 + 4b_1 c_1' + c_2) \underline{r}_{uus} + 4c_1 c_1' \underline{r}_{uss} + \\ b_1^2 \underline{r}_{uuuu} + 2b_1 c_1 \underline{r}_{uuus} + c_1^2 \underline{r}_{uuss}. \end{aligned} \quad (31)$$

374

Jeśli płaty pomocnicze  $q$  i  $r$  są ustalone, to każde z powyższych równań jest układem równań liniowych z dwiema lub czterema niewiadomymi, które nie występują w równaniach napisanych wcześniej. Jeśli równania są niesprzeczne, to można kolejno rozwiązać je ze względu na  $b_2$ ,  $c_2$ :  $f_2$ ,  $g_2$ :  $b_1''$ ,  $c_1''$ ,  $b_2'$ ,  $c_2'$ ,  $f_1''$ ,  $g_1''$ ,  $f_2'$ ,  $g_2'$  i  $b_2''$ ,  $c_2''$ ,  $f_2''$ ,  $g_2''$ .

W każdym równaniu wektor niewiadomych jest pomnożony przez macierz  $3 \times 2$  albo  $4 \times 2$ , przy czym rząd każdej z tych macierzy jest równy 2. Wektor prawej strony utworzony z danych składników musi być prostopadły do wektora normalnego  $n$  wszystkich płatów we wspólnym narożniku.

375

Jeśli  $b_1 = f_1 = b_2 = c_2 = f_2 = g_2 = 0$ , to równania zgodności są takie:

$$\underline{q}_v = c_1 \underline{r}_s, \quad (16')$$

$$\underline{r}_u = g_1 \underline{q}_t, \quad (17')$$

$$f_1' \underline{q}_v + g_1' \underline{q}_t + g_1 \underline{q}_{vt} = b_1' \underline{r}_u + c_1' \underline{r}_s + c_1 \underline{r}_{us}, \quad (18')$$

$$\underline{q}_{vv} = c_1^2 \underline{r}_{ss}, \quad (27')$$

$$\underline{r}_{uu} = g_1^2 \underline{q}_{tt}, \quad (28')$$

$$\begin{aligned} f_1'' \underline{q}_v + g_1'' \underline{q}_t + 2f_1' \underline{q}_{vv} + 2g_1' \underline{q}_{vt} + g_1 \underline{q}_{vvt} = \\ b_2' \underline{r}_u + c_2' \underline{r}_s + 2b_1' c_1 \underline{r}_{us} + 2c_1 c_1' \underline{r}_{ss} + c_1^2 \underline{r}_{uss}, \end{aligned} \quad (29')$$

$$\begin{aligned} b_1'' \underline{r}_u + c_1'' \underline{r}_s + 2b_1' \underline{r}_{uu} + 2c_1' \underline{r}_{us} + c_1 \underline{r}_{uus} = \\ f_2' \underline{q}_v + g_2' \underline{q}_t + 2f_1' g_1 \underline{q}_{vt} + 2g_1 g_1' \underline{q}_{tt} + g_1^2 \underline{q}_{vtt}, \end{aligned} \quad (30')$$

$$\begin{aligned} f_2'' \underline{q}_v + g_2'' \underline{q}_t + 2(f_1^2 + f_2') \underline{q}_{vv} + 2(f_1' g_1 + 2f_1' g_1' + g_2') \underline{q}_{vt} + \\ 2(g_1 g_1'' + g_1^2) \underline{q}_{tt} + 4f_1' g_1 \underline{q}_{vvt} + 4g_1 g_1' \underline{q}_{vtt} + g_1^2 \underline{q}_{vttt} = \\ b_2'' \underline{r}_u + c_2'' \underline{r}_s + 2(b_1^2 + b_2') \underline{r}_{uu} + 2(b_1' c_1 + 2b_1 c_1' + c_2') \underline{r}_{us} + \\ 2(c_1 c_1'' + c_1^2) \underline{r}_{ss} + 4b_1' c_1 \underline{r}_{uus} + 4c_1 c_1' \underline{r}_{uss} + c_1^2 \underline{r}_{uuss}. \end{aligned} \quad (31')$$

376

To jest ważny przypadek szczególny, gdy pochodne płatów pomocniczych są całkowicie zgodne, tj. ich krzywe stałego parametru mogą skleić się gładko z krzywymi stałego parametru płata  $p$ . Nie ma wtedy ograniczeń na pochodne krzywych brzegowych rzędu 3 i 4.

377

## Globalne warunki zgodności $G^2$

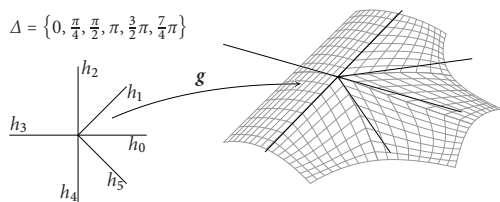
„Bezpośrednia” analiza podobna do przypadku  $G^2$  raczej nie ma szans powodzenia. Zamiast tego można rozpatrywać parametryzację klasy  $C^2$  fragmentu powierzchni wokół wspólnego narożnika nad obszarem płaszczyzny zawierającym punkt  $(0, 0)$ , podzielonym półprostymi  $h_0, \dots, h_{k-1}$  na stożki. Zasadnicze znaczenie dla zgodności mają kierunki tych półprostych, które nazwiemy **liniami połączenia**.

Zbiór liczb

$$\Delta = \{ \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}; \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_0 + 2\pi \}$$

nazwiemy **podziałem kąta pełnego**. Liczba  $\alpha_i$  określa kierunek (kąt nachylenia) półprostej  $h_i$ .

378



Zbiór półprostych stycznych do wspólnych krzywych płatów we wspólnym narożniku jest obrazem zbioru linii połączenia w pewnym przekształceniu afinicznym.

379

Oznaczmy  $\delta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$  dla  $i = 0, \dots, k-2$  i niech  $\delta_{k-1} = \alpha_0 + 2\pi - \alpha_{k-1}$ . Oczywiście,  $\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i = 2\pi$ . Określmy wektory  $u_i = [\cos \alpha_i, \sin \alpha_i]^T$  oraz  $v_i = [-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i]^T$ . Każdej parze wektorów  $(u_i, v_i)$  użyjemy do określenia układu współrzędnych, które oznaczymy symbolami  $x_i, y_i$ ; półprosta  $h_i$  wyznacza pierwszą dodatnią półoś tego układu.

Jeśli  $\delta_i < \pi$ , to stożek  $C_i$ , którego brzeg składa się z półprostych  $h_i$  i  $h_{i+1}$  jest zbiorem wypukłym:  $C_i = \{ a u_i + b v_{i+1}; a, b \geq 0 \}$ .

Jeśli  $\delta_i = \pi$ , to stożek  $C_i = \{ a u_i + b v_i; a \in \mathbb{R}, b \geq 0 \}$  jest półpłaszczyzną, a jeśli  $\delta_i > \pi$ , to stożek jest wklęsły:  $C_i = \{ a u_i + b v_{i+1}; a \leq 0 \text{ lub } b \leq 0 \}$ .

380

Niech  $f_i$  oznacza funkcję klasy  $C^{2n}$  określoną w stożku  $C_i$  i niech  $f$  oznacza funkcję, której obcięciem do stożka  $C_i$  dla każdego  $i$  jest funkcja  $f_i$ . Dla funkcji  $f$  klasy  $C^n(\mathbb{R}^2)$  warunki zgodności znajdziemy, badając składniki stopnia  $0, \dots, 2n$  szeregów Taylora funkcji  $f_i$ .

Wielomian dwóch zmiennych stopnia  $2n$  jest sumą  $2n + 1$  składników jednorodnych:

$$p(x, y) = a_{00} + (a_{10}x + a_{11}y) + (a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2) + \dots + (a_{2n,0}x^{2n} + a_{2n,1}x^{2n-1}y + \dots + a_{2n,2n}y^{2n}). \quad (32)$$

Niech  $\mathcal{H}^l$  oznacza przestrzeń liniową, której elementami są jednorodne wielomiany stopnia  $l$  dwóch zmiennych. Każdy taki wielomian, przedstawiony jako funkcja współrzędnych kartezjańskich  $x, y$ , jest także jednorodnym wielomianem stopnia  $l$  zmiennych  $x_i$  i  $y_i$ .

381

Rozważmy teraz funkcje  $g_i(x, y)$ , których obcięcie do stożków  $C_0, \dots, C_{k-1}$  są jednorodnymi wielomianami stopnia  $l$ . Możemy opisać argumenty funkcji  $g_i$  za pomocą współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$ :

$$g_i(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^l s_i(\varphi). \quad (33)$$

Funkcjom  $s_i$ , które mogą wystąpić w tym wzorze, przyjrzymy się dalej. Teraz zauważmy, że obcięcie funkcji  $g_i$  do dowolnej półprostej w  $\mathbb{R}^2$ , której początkiem jest punkt  $(0, 0)$ , jest albo funkcją zerową, albo jednorodnym wielomianem stopnia  $l$ .

Symbolem  $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)}$  oznaczymy przestrzeń funkcji klasy  $C^n$ , których obcięcie do stożków  $C_i$  są jednorodnymi wielomianami zmiennych  $x, y$ , stopnia  $l$ .

382

**Twierdzenie 12** Niech  $h$  oznacza liczbę par liczb  $\{\alpha_j, \alpha_j + \pi\}$  w podziale kąta pełnego  $\Delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\}$ . Wtedy

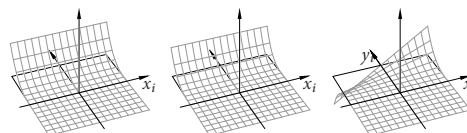
$$\dim \mathcal{H}_\Delta^{(l,n)} = \max\{l+1, k(l-n), h(l-n) + l+1\}.$$

Dowód polega na znalezieniu bazy.

Pierwsze  $l+1$  elementów to jednorodne wielomiany stopnia  $l$ :  $x^l, x^{l-1}y, \dots, y^l$ . Jeśli  $l \leq n$ , to to już wszystko, wtedy  $\mathcal{H}_\Delta^{(l,n)} = \mathcal{H}^l$ .

383

Jeśli  $h > 0$ , to istnieje  $h$  prostych złożonych z półprostych — linii podziału. Wtedy jeśli  $l > n$ , to do poszukiwanej bazy możemy dołączyć obcięte wielomiany, tj. funkcje, które w jednej półpłaszczyźnie są wielomianami, a w drugiej są równe 0. Dla każdej takiej prostej jest  $l-n$  takich funkcji liniowo niezależnych.



384

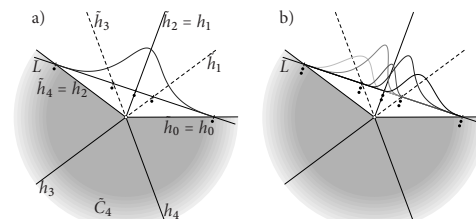


Teraz usuniemy  $h$  linii połączenia, tak aby pozostało  $k - h$  półprostych, z których każda jest częścią innej prostej. Dalej, każdą półprostą nachyloną pod kątem większym niż  $\alpha_i = \alpha_0 + \pi$ , zastąpimy półprostą nachyloną pod kątem  $\alpha_i - \pi$ . Otrzymany podział kąta pełnego oznaczmy  $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{k-h}\}$ .

Półproste  $\tilde{h}_0$  i  $\tilde{h}_{k-h}$  wyznaczają brzeg stożka wypukłego zawierającego wszystkie pozostałe półproste, zatem istnieje prosta  $L$  przecinająca wszystkie te proste w punktach innych niż  $(0, 0)$  (np. prostopadła do osi symetrii stożka).

Wybierając układ współrzędnych, którego oś  $x$  jest równoległa do prostej  $L$ , a oś  $y$  jest osią symetrii stożka, punkty przecięcia prostej  $L$  z półprostymi przyjmijmy za węzły funkcji sklejanych stopnia  $l$ , o krotnościach  $l - n$ .

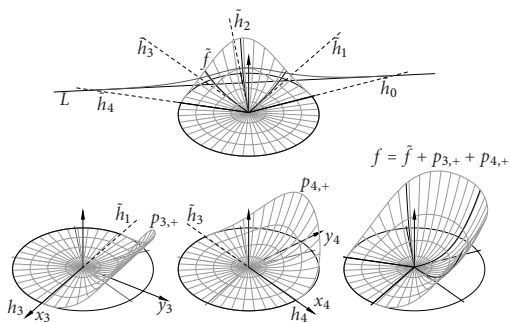
385



Jeśli liczba tych węzłów jest dostatecznie duża (większa niż  $l + 1$ ), to istnieje  $(l - n)(k - h) - l - 1$  funkcji B-sklejanych stopnia  $l$  z tymi węzłami. Skonstruujemy z tych funkcji pozostałe poszukiwane elementy bazy.

Funkcje określone na prostej  $L$  rozszerzamy na całą płaszczyznę tak, aby na każdej półprostej o początku w  $(0, 0)$  była wielomianem jednorodnym stopnia  $l$ , a potem dodajemy obcięte funkcje potęgowe dwóch zmiennych tak, aby „przenieść” sklejanie różnych wielomianów na linie połączenia nachylone pod kątami  $\alpha_i > \alpha_0 + \pi$ .

386



387

Mamy zatem bazę składającą się z  $d_1 = l + 1$  wielomianów,  $d_2 = \max\{0, h(l - n)\}$  obciętych funkcji potęgowych oraz  $d_3 = \max\{0, (l - n)(k - h) - l - i\}$  funkcji skonstruowanych z funkcji B-sklejanych na prostej  $L$ . Wystarczy dodać  $d_1 + d_2 + d_3$  i uporządkować.  $\square$

Udowodnione twierdzenie opisuje *wszystkie* stopnie swobody wyboru pochodnych we wspólnym wierzchołku płatów połączonych z ciągłością  $G^n$  (dla każdego  $n$ ).

Przyjrzyjmy się jeszcze funkcjom otrzymanym z funkcji B-sklejanych na prostej  $L$ . Dla pełności konstrukcji trzeba umieć obliczać ich pochodne i w szczególności różnice wielomianów rozgraniczonych liniami połączenia.

388

**Definicja 1** Niech  $L = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y = 1\}$  i niech  $u_1, \dots, u_{i+n+1}$  będzie niemalejącym ciągiem liczb (węzłów). **Rozszerzona unormowana funkcja B-sklejana stopnia  $n$  z tymi węzłami** jest określona wzorem

$$E_i^n(x, y) = \begin{cases} (-1)^{n+1}(u_{i+n+1} - u_i) f_{x,y}^n[u_1, \dots, u_{i+n+1}] & \text{jeśli } y > 0, \\ 0 & \text{jeśli } y \leq 0, \end{cases} \quad (34)$$

przy czym  $f_{x,y}^n[u_1, \dots, u_{i+n+1}]$  jest to różnica dzielona rzędu  $n + 1$  funkcji

$$f_{x,y}^n(u) \stackrel{\text{def}}{=} (x - uy)_+^n = \begin{cases} (x - uy)^n & \text{jeśli } x \geq uy, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście,  $E_i^n(x, 1) = N_i^n(x)$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , a więc obcięcie funkcji  $E_i^n$  do prostej  $L$  jest unormowaną funkcją B-sklejaną stopnia  $n$ . Ponadto obcięcie funkcji  $E_i^n$  do dowolnej półprostej w  $\mathbb{R}^2$  o początku w punkcie  $(0, 0)$ , czyli funkcja  $E_i^n(tx, ty)$  zmiennej  $t$  jest albo funkcją zerową, albo jednorodnym wielomianem stopnia  $n$ .

389

**Stwierdzenie 2** Funkcje  $E_i^n$  mogą być otrzymane ze wzoru

$$E_i^0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y > 0 \text{ i } x \in [u_i y, u_{i+1} y], \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \quad (35)$$

$$E_i^n(x, y) = \frac{x - u_i y}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y) + \frac{u_{i+n+1} y - x}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} E_{i+1}^{n-1}(x, y) \quad \text{dla } n > 0, \quad (36)$$

który jest odpowiednikiem wzoru Mansfielda-de Boora-Coxa.

**Stwierdzenie 3** Niech  $n > 0$ . Jeśli  $y > 0$  i liczba  $x/y$  nie jest węzłem o krotności  $n$ , lub jeśli  $y \leq 0$ , to pochodne cząstkowe funkcji  $E_i^n$  są opisane wzorami

$$\frac{\partial}{\partial x} E_i^n(x, y) = \frac{n}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y) - \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} E_{i+1}^{n-1}(x, y), \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_i^n(x, y) = \frac{nu_{i+n+1} - E_{i+1}^{n-1}(x, y)}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} - \frac{nu_i}{u_{i+n} - u_i} E_i^{n-1}(x, y). \quad (38)$$

390

## Trygonometryczne funkcje sklejane

Chcąc znaleźć jawne ograniczenia dla pochodnych krzywych wspólnych płatów połączonych z ciągłością  $G^2$  lub jeszcze gładziej, można dokonać przejścia do współrzędnych biegunowych:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Wielomian dwóch zmiennych stopnia  $2n$  przedstawimy w postaci

$$\rho(x, y) = r^0 T_0(\varphi) + r^1 T_1(\varphi) + r^2 T_2(\varphi) + \dots + r^{2n} T_{2n}(\varphi).$$

Funkcja  $T_l$  jest parzystym albo nieparzystym (zależnie od parzystości  $l$ ) wielomianem trygonometrycznym stopnia  $l$ :

$$T_l(\varphi) = \begin{cases} a_{l,0} + \sum_{j=1}^{l/2} (a_{l,2j} \cos 2j\varphi + b_{l,2j} \sin 2j\varphi) & \text{jeśli } l \text{ jest parzyste,} \\ \sum_{j=0}^{(l-1)/2} (a_{l,2j+1} \cos(2j+1)\varphi + b_{l,2j+1} \sin(2j+1)\varphi) & \text{jeśli } l \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

391

Funkcję sklejaną klasy  $C^n$ , stopnia  $2n$  nad podziałem kąta pełnego  $\Delta$  przedstawimy w postaci

$$g(x, y) = r^0 s_0(\varphi) + r^1 s_1(\varphi) + r^2 s_2(\varphi) + \dots + r^{2n} s_{2n}(\varphi).$$

Funkcje  $s_j$  dla  $l \leq n$  są wielomianami trygonometrycznymi, a dla  $l > n$  są okresowymi parzystymi albo nieparzystymi trygonometrycznymi funkcjami sklejany klasy  $C^n$ , które w przedziałach  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  są parzystymi albo nieparzystymi wielomianami trygonometrycznymi stopnia  $l$ .

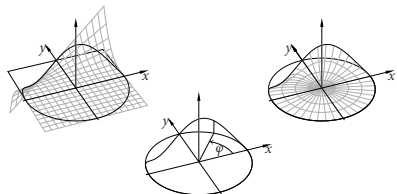
392

**Twierdzenie 13** Przestrzenie  $T_{\Delta}^{(l,n)}$  i  $\mathcal{H}_{\Delta}^{(l,n)}$  mają taki sam wymiar,

$$\dim T_{\Delta}^{(l,n)} = \max\{l+1, k(l-n), h(l-n) + l + 1\}.$$

Symbol  $k$  oznacza liczbę elementów podziału  $\Delta$ , zaś  $h$  jest liczbą par  $\{\alpha_i, \alpha_i + \pi\}$  w tym podziale.

**Dowód:** obcięcie funkcji z przestrzeni  $\mathcal{H}_{\Delta}^{(l,n)}$  do okręgu jednostkowego jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. □



393

Pochodne wielomianu  $q$ , który w stożku  $C_i$  opisuje funkcję  $g$ , można obliczać ze wzorów

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= s_0(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i} &= s_1(\alpha_i), & \bar{q}_{i,y_i} &= s'_1(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i,x_i} &= 2s_2(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i,y_i} &= s'_2(\alpha_i), & \bar{q}_{i,y_i,y_i} &= 2s_2(\alpha_i) + s''_2(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i,x_i,x_i} &= 6s_3(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i,x_i,y_i} &= 2s'_3(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i,y_i,y_i} &= 3s_3(\alpha_i) + s''_3(\alpha_i), \\ \bar{q}_{i,x_i,x_i,x_i,x_i} &= 24s_4(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i,x_i,x_i,y_i} &= 6s'_4(\alpha_i), & \bar{q}_{i,x_i,x_i,y_i,y_i} &= 8s_4(\alpha_i) + 2s''_4(\alpha_i). \end{aligned}$$

Te wzory są szczególnymi przypadkami uogólnionego wzoru Faa di Bruno, choć prościej jest znaleźć je „na piechotę”.

394

### Globalny warunek zgodności $G^1$ – rewizyta

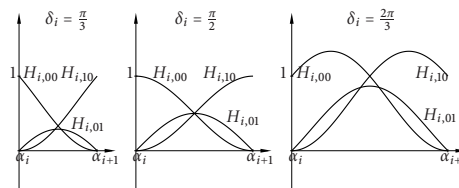
Funkcja sklejana klasy  $C^1$  stopnia 2 nad podziałem  $\Delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}\}$  w postaci trygonometrycznej ma tylko 3 składniki:

$$g(x, y) = s_0 + r s_1(\varphi) + r^2 s_2(\varphi).$$

Funkcja  $s_0$  jest stała i równa  $g(0, 0)$ . Funkcja  $s_1$  jest nieparzystym wielomianem trygonometrycznym pierwszego stopnia, który wyznacza płaszczyznę styczną do wykresu funkcji  $g$  w punkcie  $(0, 0)$ . Aby zbadać ostatni składnik, dla każdego przedziału  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , o długości  $\delta_i$ , określimy trzy funkcje:

$$\begin{aligned} H_{i,00}(\varphi) &= \frac{\sin^2(\varphi - \alpha_{i+1})}{\sin^2 \delta_i}, & H_{i,10}(\varphi) &= \frac{\sin^2(\varphi - \alpha_i)}{\sin^2 \delta_i}, \\ H_{i,01}(\varphi) &= \frac{\sin(\varphi - \alpha_i) \sin(\alpha_{i+1} - \varphi)}{\sin \delta_i}. \end{aligned}$$

395



$$\begin{aligned} H_{i,00}(\alpha_i) &= 1, & H_{i,10}(\alpha_i) &= 0, & H_{i,01}(\alpha_i) &= 0, \\ H_{i,00}(\alpha_{i+1}) &= 0, & H_{i,10}(\alpha_{i+1}) &= 1, & H_{i,01}(\alpha_{i+1}) &= 0. \end{aligned}$$

396

### Wielomian trygonometryczny

$$p_i(\varphi) = a_i H_{i,00}(\varphi) + a_{i+1} H_{i,10}(\varphi) + b_i H_{i,01}(\varphi),$$

niezależnie od wartości współczynnika  $b_i$ , spełnia warunki interpolacyjne  $p_i(\alpha_i) = a_i$  i  $p_i(\alpha_{i+1}) = a_{i+1}$ . Wartość wielomianu trygonometrycznego

$$p_{i-1}(\varphi) = a_{i-1} H_{i-1,00}(\varphi) + a_i H_{i-1,10}(\varphi) + b_{i-1} H_{i-1,01}(\varphi)$$

w punkcie  $\alpha_i$  jest też równa  $a_i$ . Dlatego dowolne liczby  $a_0, \dots, a_{k-1}$  i  $b_0, \dots, b_{k-1}$  umożliwiają określenie funkcji  $s_2$ , której obcięcie do każdego przedziału  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  jest trygonometrycznym wielomianem  $p_i$  drugiego stopnia; funkcja  $s_2$  jest ciągła i spełnia warunek  $s_2(\alpha_i) = a_i$  dla każdego  $i$ .

397

Poszukujemy funkcji  $s_2$  klasy  $C^1$ . Możemy sprawdzić, że

$$\begin{aligned} H'_{i,00}(\alpha_i) &= \frac{\sin 2(\varphi - \alpha_{i+1})}{\sin^2 \delta_i}, & H'_{i,10}(\alpha_i) &= 0, & H'_{i,01}(\alpha_i) &= 1, \\ H'_{i,00}(\alpha_{i+1}) &= 0, & H'_{i,10}(\alpha_{i+1}) &= \frac{\sin 2(\varphi - \alpha_i)}{\sin^2 \delta_i}, & H'_{i,01}(\alpha_{i+1}) &= -1. \end{aligned}$$

Stąd otrzymamy pochodne funkcji  $p_{i-1}$  i  $p_i$  w punkcie  $\alpha_i$ :

$$p'_{i-1}(\alpha_i) = \frac{\sin 2\delta_{i-1}}{\sin^2 \delta_{i-1}} a_i - b_{i-1}, \quad p'_i(\alpha_i) = -\frac{\sin 2\delta_i}{\sin^2 \delta_i} a_i + b_i.$$

Po uporządkowaniu równania  $p'_{i-1}(\alpha_i) = p'_i(\alpha_i)$  otrzymujemy następującą równość:

$$b_{i-1} + b_i = \left( \frac{\sin 2\delta_{i-1}}{\sin^2 \delta_{i-1}} + \frac{\sin 2\delta_i}{\sin^2 \delta_i} \right) a_i.$$

398

Z elementarnych tożsamości trygonometrycznych wynika, że

$$\frac{\sin 2\delta_{i-1}}{\sin^2 \delta_{i-1}} + \frac{\sin 2\delta_i}{\sin^2 \delta_i} = 2(\operatorname{ctg} \delta_{i-1} + \operatorname{ctg} \delta_i) = \frac{2 \sin(\delta_{i-1} + \delta_i)}{\sin \delta_{i-1} \sin \delta_i}.$$

Stąd układ równań, który opisuje ciągłość pochodnej funkcji  $s_2$  we wszystkich punktach  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$  ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{k-1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} (\operatorname{ctg} \delta_0 + \operatorname{ctg} \delta_1) a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (\operatorname{ctg} \delta_{k-1} + \operatorname{ctg} \delta_0) a_0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

399

Wyznacznik macierzy po prawej stronie jest równy 2, jeśli  $k$  jest parzyste i 0, jeśli nieparzyste — wtedy rząd macierzy jest równy  $k-1$ .

Warunek niespreczności układu dla parzystego  $k$  ma postać równania

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\operatorname{ctg} \delta_{i-1} + \operatorname{ctg} \delta_i) a_i,$$

które możemy przepisać w postaci

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\sin(\delta_{i-1} + \delta_i)}{\sin \delta_{i-1} \sin \delta_i} s_2(\alpha_i) = 0.$$

400

## Warunki zgodności $G^2$

Oznaczmy  $\phi_i = \phi - \alpha_i$ . Dowolny element przestrzeni  $T_{\Delta}^{(3,2)}$  jest funkcją klasy  $C^2$ , która w każdym przedziale  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  jest określona wzorem

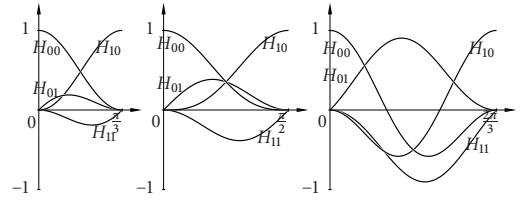
$$s(\phi) = a_i \cos \phi_i + b_i \sin \phi_i + c_i \cos 3\phi_i + d_i \sin 3\phi_i. \quad (40)$$

Aby rozwiązywać zadania interpolacyjne, dla każdego takiego przedziału skonstruujemy (jeśli to możliwe) lokalną bazę Hermite'a przestrzeni nieparzystych wielomianów trygonometrycznych trzeciego stopnia. Jej elementami są funkcje  $H_{i,00}, H_{i,01}, H_{i,10}, H_{i,11}$ , takie że macierz

$$\begin{bmatrix} H_{i,00}(\alpha_i) & H'_{i,00}(\alpha_i) & H_{i,00}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,00}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,01}(\alpha_i) & H'_{i,01}(\alpha_i) & H_{i,01}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,01}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,10}(\alpha_i) & H'_{i,10}(\alpha_i) & H_{i,10}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,10}(\alpha_{i+1}) \\ H_{i,11}(\alpha_i) & H'_{i,11}(\alpha_i) & H_{i,11}(\alpha_{i+1}) & H'_{i,11}(\alpha_{i+1}) \end{bmatrix}$$

jest jednostkowa.

401



402

Znając lokalną bazę Hermite'a dla każdego przedziału  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , dla dowolnych liczb  $x_i$  i  $y_i$  możemy otrzymać funkcję klasy  $C^1$ , która w przedziale  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  jest opisana wzorem

$$s(\phi) = H_{i,00}(\phi)x_i + H_{i,01}(\phi)y_i + H_{i,10}(\phi)x_{i+1} + H_{i,11}(\phi)y_{i+1},$$

w którym  $s(\alpha_i) = x_i$ , a  $s'(\alpha_i) = y_i$ . Ponadto można żądać ciągłości pochodnej drugiego rzędu w punkcie  $\alpha_i$ , przez nałożenie warunku  $s''(\alpha_i) = s''_i(\alpha_i)$ . W wyniku, dla  $i = 0, \dots, k-1$  otrzymamy układ równań liniowych podobny do tego, który powstaje w konstrukcji zamkniętej interpolacyjnej krzywej sklejanej trzeciego stopnia.

403

Żmudne rachunki (obejmujące znalezienie tych lokalnych baz i obliczenie ich pochodnych w węzłach) prowadzą do otrzymania równania

$$\sin \delta_i y_{i-1} + 2 \sin(\delta_{i-1} + \delta_i) y_i + \sin \delta_{i-1} y_{i+1} = 3 \left( -\frac{\cos \delta_{i-1} \sin \delta_i}{\sin \delta_{i-1}} x_{i-1} + \frac{\cos 2\delta_{i-1} - \cos 2\delta_i}{2 \sin \delta_{i-1} \sin \delta_i} x_i + \frac{\cos \delta_i \sin \delta_{i-1}}{\sin \delta_i} x_{i+1} \right),$$

w którym  $x_i = s(\alpha_i)$ ,  $y_i = s'(\alpha_i)$ .

Równania te bierzemy w układ równań liniowych  $A_3 Y_3 = B_3 X_3$ , w którym wektor  $X_3$  składa się z wartości funkcji  $s$  w węzłach, wektor  $Y_3$  składa się z pochodnych, a macierze  $A_3$  i  $B_3$  są cykliczne trójdiagonalne.

404

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \sin(\delta_{k-1} + \delta_0) & \sin \delta_{k-1} & & \sin \delta_0 \\ \sin \delta_1 & 2 \sin(\delta_0 + \delta_1) & & \\ & & \dots & \dots \\ \sin \delta_{k-2} & & \sin \delta_{k-1} & 2 \sin(\delta_{k-2} + \delta_{k-1}) \end{bmatrix},$$

$$B_3 = 3 \begin{bmatrix} \frac{\cos 2\delta_{k-1} - \cos 2\delta_0}{2 \sin \delta_{k-1} \sin \delta_0} & \frac{\cos \delta_0 \sin \delta_{k-1}}{\sin \delta_0} & & -\frac{\cos \delta_{k-1} \sin \delta_0}{\sin \delta_{k-1}} \\ -\frac{\cos \delta_0 \sin \delta_1}{\sin \delta_0} & \frac{\cos 2\delta_0 - \cos 2\delta_1}{2 \sin \delta_0 \sin \delta_1} & & \\ & & \dots & \dots \\ \frac{\cos \delta_{k-1} \sin \delta_{k-2}}{\sin \delta_{k-1}} & & -\frac{\cos \delta_{k-2} \sin \delta_{k-1}}{\sin \delta_{k-2}} & \frac{\cos 2\delta_{k-2} - \cos 2\delta_{k-1}}{2 \sin \delta_{k-2} \sin \delta_{k-1}} \end{bmatrix}.$$

405

Wyniki analizy są takie (zakładamy, że  $0 < \delta_i < \pi$  dla każdego  $i$ ):

- Jeśli  $k = 3$ , to dla dowolnego podziału  $\Delta$  nie ma ograniczeń na pochodne trzeciego rzędu krzywych wspólnych, rozwiązanie układu jest niejednoznaczne, bo istnieją wielomianowe małpie siodła.

- Jeśli  $k = 4$ , to dla  $h = 0$  (tj.  $\alpha_2 \neq \alpha_1 + \pi$ ,  $\alpha_3 \neq \alpha_1 + \pi$ ) i dowolnego  $X_3$  układ ma jednoznaczne rozwiązanie  $Y_3$ .

Jeśli  $h = 1$  ( $\alpha_2 = \alpha_0 + \pi$ ,  $\alpha_3 \neq \alpha_1 + \pi$ ) rozwiązania  $Y_3$  istnieją, gdy  $x_0 = -x_2$ . Wtedy zbiór tych rozwiązań jest warstwą dwuwymiarową.

Jeśli  $h = 2$ , to  $X_3$  może być dowolne, układ ma dwuwymiarową warstwę rozwiązań  $Y_3$ .

406

- Dla  $k = 5$  może być  $h = 0, 1, 2$ . W pierwszym przypadku nie ma ograniczeń na  $X_3$ , rozwiązanie  $Y_3$  jest jednoznaczne.

Dla  $h = 1$ , jeśli  $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \pi$  to musi być  $x_{i+2} = -x_i$ , zbiór rozwiązań  $Y_3$  jest warstwą jednowymiarową.

Dla  $h = 2$  nie ma ograniczeń na  $X_3$ , warstwa rozwiązań  $Y_3$  jest jednowymiarowa.

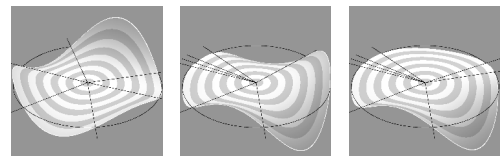
- Dla  $k = 6$  może być  $h = 0, 1, 2, 3$ . Jeśli  $h = 3$ , to nie ma ograniczeń dla  $X_3$ , zbiór rozwiązań  $Y_3$  jest warstwą jednowymiarową (istnieją małpie siodła).

Jeśli  $h < 3$ , to  $\dim T_{\Delta}^{(3,2)} = 6$ . Jeśli  $h = 2$ , to macierz  $A_3$  jest nieosobliwa (rozwiązanie  $Y_3$  jest jednoznaczne).

Jeśli  $h < 2$  oraz macierz  $A_3$  jest osobliwa, to warunek istnienia rozwiązań  $Y_3$  ma postać jednego jednorodnego równania, które musi spełniać wektor  $X_3$ .

407

- Dla  $k > 6$  niewiele wiadomo poza tym, że istnieją małpie siodła dla dowolnego  $k$ .



Ale, jeśli podział  $\Delta$  jest w przybliżeniu równomierny (jeśli jest  $\delta_{i-1} + \delta_1 < \frac{2\pi}{3}$  dla każdego  $i$ ), to macierz  $A_3$  jest diagonalnie dominująca, czyli nieosobliwa.

408

Badanie warunków zgodności  $G^2$  dla pochodnych rzędu 4 można sprowadzić do badania przestrzeni  $T_{\Delta}^{(4,2)}$ . Oprócz wartości  $x_i$  funkcji  $s$  i jej pochodnych  $y_i$  w węzłach  $\alpha_i$  są tu dodatkowe zmienne  $z_i$ , które są składnikami pochodnych drugiego rzędu. Funkcją  $s \in T_{\Delta}^{(4,2)}$  ma ciągłą pochodną drugiego rzędu w węzle  $\alpha_i$ , jeśli

$$\begin{aligned} & (\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)(z_i - z_{i-1}) + \\ & 6(\sin 2(\delta_{i-1} + \delta_i) - \sin 2\delta_{i-1} - \sin 2\delta_i) y_i = \\ & 4(\cos 2\delta_{i-1} + 2)(\cos 2\delta_i - 1)(x_i - x_{i-1}) + \\ & 4(\cos 2\delta_i + 2)(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(x_{i+1} - x_i), \end{aligned}$$

Układ wszystkich tych równań ma postać  $A_4 Z_4 + B_4 Y_4 = C_4 X_4$ , z macierzami, które można napisać na podstawie powyższego wzoru.

409

• Jeśli  $\delta_i + \delta_{i+1} \neq \pi$  dla każdego  $i$  (czyli  $h = 0$ ), to dla dowolnych wektorów  $X_4$  i  $Z_4$  układ ma jednoznaczne rozwiązanie  $Y_4$ .

• Układ jednorodny  $A_4 Z_4 = 0$  ma zawsze rozwiązania postaci  $Z = a[1, \dots, 1]^T$ . Dla ustalonych wektorów  $X_4$  i  $Y_4$  układ  $A_4 Z_4 + B_4 Y_4 = C_4 X_4$  ma rozwiązania  $Z_4$ , gdy

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sin 2(\delta_{i-1} + \delta_i) - \sin 2\delta_{i-1} - \sin 2\delta_i}{(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)} y_i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4(\cos 2\delta_{i-1} - \cos 2\delta_i)}{(\cos 2\delta_{i-1} - 1)(\cos 2\delta_i - 1)} x_i.$$

410

- Dla  $k = 4$ ,  $h = 2$  układ z dowolnymi wektorami  $X_4$  i  $Z_4$  ma rozwiązania  $Z_4$ .
- W pozostałych przypadkach układ z niewiadomymi  $Y_4$  i  $Z_4$  jest niesprzeczny, wymiar przestrzeni układu jednorodnego  $A_4 Z + B_4 Y = 0$  jest równy  $k$  (zatem, nie ma ograniczeń na pochodne czwartego rzędu krzywych wspólnych).

411

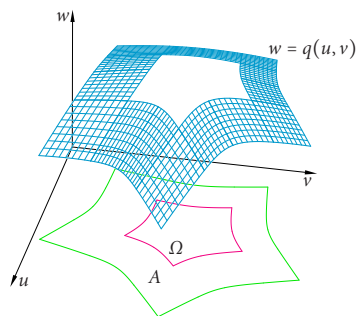
## Wypełnianie wielokątnych otworów

Konstrukcję powierzchni wypełniającej wielokątne otwory można oprzeć na schemacie Hahna, ale „ręczne” dobowanie wartości wycępujących w nim parametrów jest zbyt pracochłonne dla człowieka, przygotowującego projekt. Automatyzacja doboru tych parametrów powinna korzystać z pewnego kryterium optymalizacji kształtu — celem jest otrzymanie powierzchni wypełniającej, która w żaden sposób się nie „wyróżnia”.

Dlatego schematu Hahna lepiej jest użyć do skonstruowania bazy pewnej przestrzeni liniowej, której elementami są funkcje mające tę własność, że jeśli parametryzacja, której współrzędne są opisane przez te funkcje jest regularna, to powierzchnia wykazuje potrzebny rząd ciągłości geometrycznej (np.  $G^1$  lub  $G^2$ ).

412

Powierzchnię z otworem (przy założeniu, że to jest możliwe) przedstawiamy w układzie współrzędnych, w którym jest ona wykresem funkcji skalarnej:



413

Funkcja jest określona w obszarze  $A \setminus \Omega$ , który jest krzywoliniowym wielokątem z otworem będącym  $k$ -kątnym wielokątem krzywoliniowym.

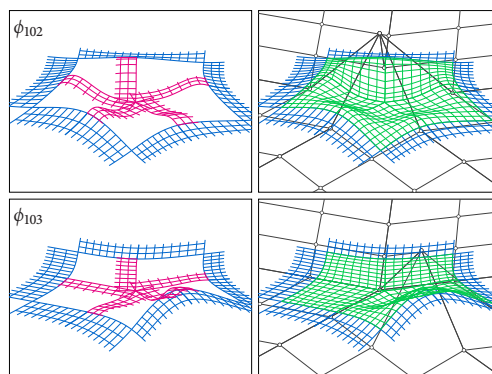
Przy założeniu, że powierzchnia jest zbudowana z płatów bikubicznych połączonych w sposób zapewniający ciągłość pochodnych rzędu 2, brzeg otworu i pochodne rzędu 1 i 2 są określone przez  $6k + 1$  punktów kontrolnych (wierzchołków siatki reprezentującej powierzchnię z otworem). Trzeba więc skonstruować bazę przestrzeni (ozn.  $V_1$ ) składającą się z  $m = 6k + 1$  funkcji klasy  $C^1$  lub  $C^2$  w całym obszarze  $A$  — funkcje te są przedłużeniem na obszar  $\Omega$  funkcji  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  danych „na zewnątrz” tego obszaru.

414

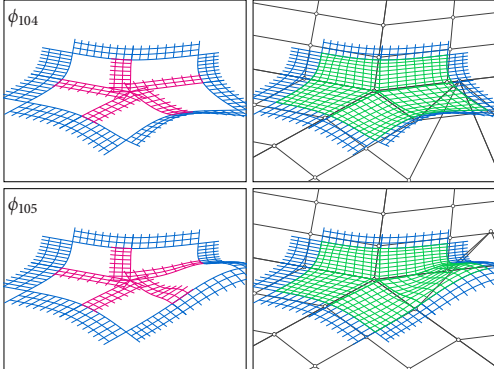
Obszar  $\Omega$  można za pomocą  $k$  krzywych podzielić na  $k$  czworokątów krzywoliniowych,  $\Omega_0, \dots, \Omega_{k-1}$ , których wspólnym wierzchołkiem jest „punktem środkowym” obszaru  $\Omega$ . Dla każdego z tych czworokątów wprowadzimy parametryzację wielomianową  $d_j: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega_j$  (tzw. **pląt dziedziny**). Funkcja  $\phi_i$  w obszarze  $\Omega_j$  jest złożeniem  $\beta_{ji} \circ d_j$ , gdzie  $\beta_{ji}$  oznacza wielomian nazwany **platem funkcji bazowej**.

Można przyjąć, że funkcje otrzymane przez rozszerzenie funkcji bazowych związanych z wierzchołkami siatki mają w punkcie środkowym obszaru  $\Omega$  wartość 0, razem z pochodnymi rzędu 1 i 2 albo  $1, \dots, 4$ .

415



416



417

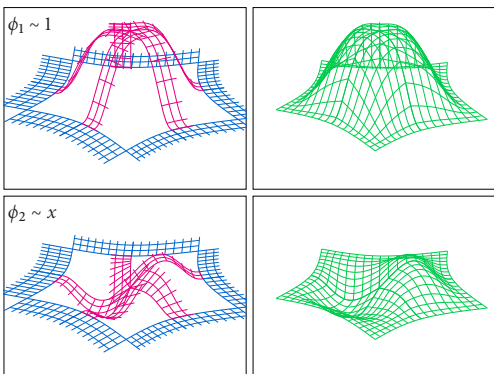
Do tego dochodzi przestrzeń  $V_0$ , której elementy są funkcjami klasy  $C^1$  lub  $C^2$ , które na brzegu i na zewnątrz obszaru  $\Omega$  mają wartość i pochodne rzędu 1 (lub 2) równe 0.

Wartości w punkcie środkowym funkcji i pochodnych elementów bazy tej przestrzeni są określone przez element bazy przestrzeni  $\mathcal{H}^{(n,1)}$  albo  $\mathcal{H}^{(n,2)}$  przestrzeni funkcji sklepanych nad podziałem kąta pełnego przez styczne do krzywych brzegowych obszarów  $\Omega_l$  w punkcie środkowym. Liczby tych funkcji w konstrukcji powierzchni klasy  $G^1$  i  $G^2$  to odpowiednio

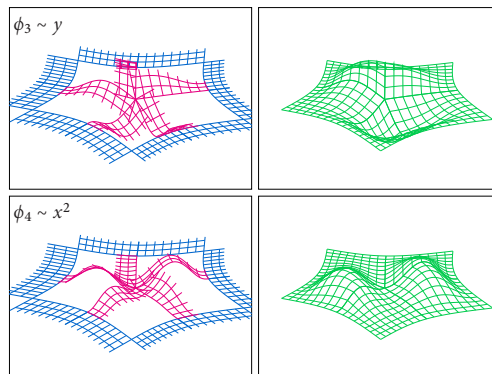
$$\dim \mathcal{H}^{(0,1)} + \dim \mathcal{H}^{(1,1)} + \dim \mathcal{H}^{(2,1)}$$

$$\text{albo } \dim \mathcal{H}^{(0,2)} + \dim \mathcal{H}^{(1,2)} + \dim \mathcal{H}^{(2,2)} + \dim \mathcal{H}^{(3,2)} + \dim \mathcal{H}^{(4,2)}$$

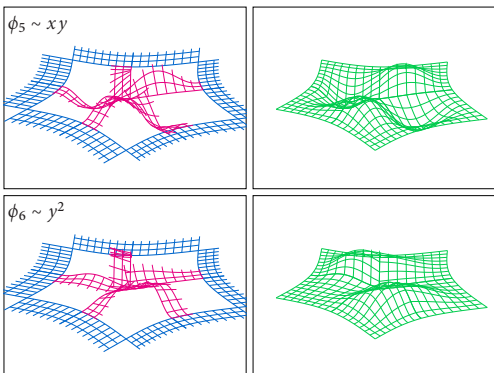
418



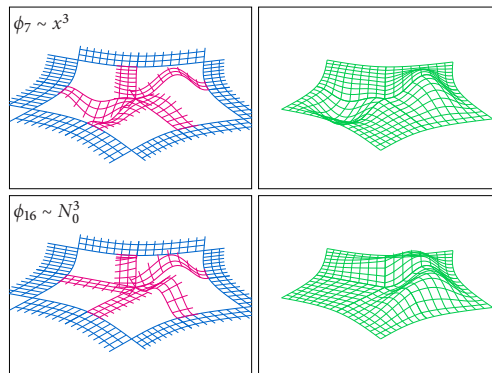
419



420



421



422

Powierzchnię wypełniającą przedstawimy w postaci

$$p = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i + \sum_{i=1}^m b_i \phi_{n+i}$$

gdzie  $m = 6k + 1$ , wektory  $b_1, \dots, b_m$  są wierzchołkami siatki określającymi otwór, a wektory  $a_1, \dots, a_n$  będą dobrane przez procedurę optymalizacji.

Najpierw trzeba tę przestrzeń skonstruować, a potem dobrać kryterium optymalizacji i zaimplementować algorytm.

423

### Konstrukcja funkcji bazowych:

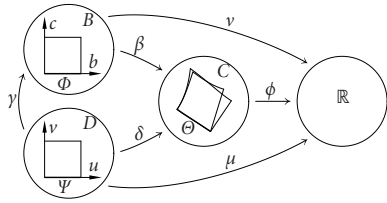
Funkcje  $\phi_1, \dots, \phi_{n+m}$  są określone kawałkami. Użycie wielomianów zapewnia, że funkcja  $\phi_{il}$  opisująca  $\phi_i$  w  $\Omega_l$  jest klasy  $C^\infty$ .

Na wspólnej krzywej obszarów  $\Omega_l$  i  $\Omega_{l+1}$  funkcje  $\phi_{il}$  i  $\phi_{i,l+1}$  muszą mieć te same wartości oraz pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2.

Ponadto: funkcje  $\phi_1, \dots, \phi_n$  na brzegu  $\Omega$  muszą mieć wartości i pochodne rzędu 1 i 2 równe 0.

Funkcje  $\phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+m}$  na brzegu  $\Omega$  muszą mieć wartości i pochodne rzędu 1 i 2 takie jak funkcje  $\phi_1, \dots, \phi_m$ .

424



Dla układu gładkich przekształceń jak wyżej jest  $\delta = \gamma \circ \beta$  i  $\mu = \gamma \circ \nu$ .  
 Jeśli  $\delta$  jest bijekcją, oraz przekształcenia  $\mu$  i  $\mu^*: D \rightarrow \mathbb{R}$  mają na krzywej  $\Psi$  takie same wartości i pochodne rzędu 1 i 2, to funkcje  $\phi$  i  $\phi^* = \delta^{-1} \circ \mu^*$  sklejają się na krzywej  $\Theta = \delta(\Psi)$  z ciągłością  $C^2$ .

Pochodne rzędu 1 i 2 funkcji złożonej  $\kappa = \gamma \circ \lambda$ , gdzie  $\gamma(u, v) = [b(u, v), c(u, v)]$ , wyrażają się wzorami

$$\frac{\partial \kappa}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial c},$$

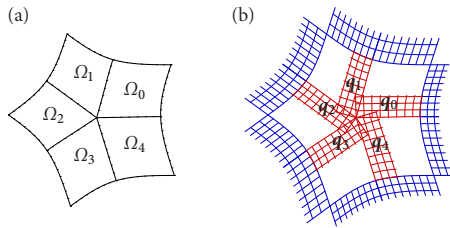
$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \left( \frac{\partial b}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b^2} + 2 \frac{\partial b}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b \partial c} + \left( \frac{\partial c}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial c^2}.$$

Symbole  $\kappa$  i  $\lambda$  oznaczają odpowiednio  $\delta$  i  $\beta$ , albo  $\mu$  i  $\nu$ .  
 Funkcje  $b$  i  $c$  są w obu przypadkach identyczne. Funkcje

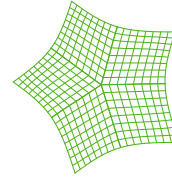
$$b_1 = \frac{\partial b}{\partial v} \Big|_{\Psi}, \quad c_1 = \frac{\partial c}{\partial v} \Big|_{\Psi}, \quad b_2 = \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \Big|_{\Psi}, \quad c_2 = \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} \Big|_{\Psi}$$

nazwiemy **funkcjami połączenia**.

Przekształcenie  $\beta$  jest tzw. **płatem pomocniczym dziedziny**, lub **płatem otaczającym dziedzinę**. Określa ono m.in. krzywą wspólną obszarów  $\Omega_i$  i  $\Omega_{i+1}$ , albo fragment brzegu obszaru  $\Omega$ .

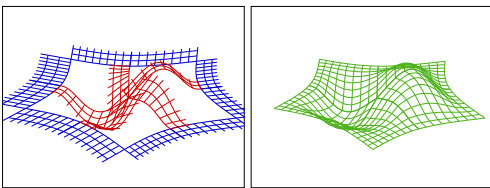


Płat dziedziny  $d_i: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega_i$  określa cztery przekształcenia  $\delta$  — po jednym dla każdego boku kwadratu jednostkowego.



Przekształcenie  $\gamma$  określa reparametryzację płata pomocniczego dziedziny, w wyniku której powstaje płat dziedziny, i jest reprezentowane przez cztery funkcje połączenia.

Przekształcenie  $\nu$  jest tzw. **płatem pomocniczym funkcji bazowej**. Służy ono do określenia wartości i pochodnych funkcji  $\mu$  na odpowiednim boku krzywoliniowego czworokąta  $\Omega_i$  — w ten sposób są określone wartości i pochodne przekształcenia  $\mu^*$ , czyli płata funkcji bazowej  $p_{i1}$  na brzegu  $\Omega_i$ .



Schemat konstrukcji jest taki:

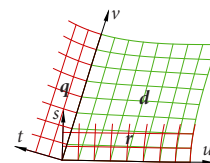
- Konstruujemy siatkę płaską z jednym wierzchołkiem specjalnym (wspólnym końcem  $k$  krawędzi) otoczonym przez  $4k$  czworokątnych ścian. Siatka ta wyznacza kształt obszaru  $\Omega$  (dziedziny) oraz płaty bikubiczne otaczające ten obszar.
- Wybieramy punkt środkowy obszaru  $\Omega$  i łączymy go krzywymi wielomianowymi z ze wspólnymi narożnikami płatów otaczających dziedzinę. Wyznacza to obszary  $\Omega_0, \dots, \Omega_l$ .
- Wybieramy pochodne poprzeczne rzędu 1 (albo 1 i 2) **pomocniczych płatów dziedziny**, których brzegami są skonstruowane krzywe.
- Konstruujemy **funkcje połączenia**, rozwiązując równania wynikające z warunków zgodności.

- Wyznaczamy pochodne poprzeczne do każdego zakrzywionego boku obszaru  $\Omega_i$  i konstruujemy **platy dziedziny**, jako platy Coonsa (bikubiczne lub dwupiętne).

- Dla każdej funkcji bazowej ustalamy jej wartości i pochodne poprzeczne na brzegu obszaru  $\Omega$  oraz wartości i pochodne w punkcie środkowym. Dla każdego z czterech zakrzywionych boków obszaru  $\Omega_i$  znajdujemy **pomocniczy płat funkcji bazowej**, który określa wartości funkcji bazowej na tym boku, a także ma określone pochodne poprzeczne.

- Korzystając z funkcji połączenia użytych do skonstruowania płatów dziedziny, wyznaczamy pochodne poprzeczne płatów funkcji bazowych i konstruujemy platy funkcji bazowej, tj. skalarne wielomiany dwóch zmiennych, jako bikubiczne albo dwupiętne platy Coonsa.

Płaty pomocnicze dziedziny  $q$  i  $r$  oraz płat dziedziny  $d$  są płaskie.



$$\underline{d} = \bar{r},$$

$$\underline{\bar{d}} = \underline{q},$$

$$\underline{d}_v = b_1 \bar{r}_u + c_1 \bar{r}_s,$$

$$\underline{\bar{d}}_u = f_1 \underline{q}_v + g_1 \underline{q}_t,$$

$$\underline{d}_{vv} = b_2 \bar{r}_{uu} + c_2 \bar{r}_{ss} + b_1^2 \bar{r}_{uu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{us} + c_1^2 \bar{r}_{ss},$$

$$\underline{\bar{d}}_{uu} = f_2 \underline{q}_v + g_2 \underline{q}_t + f_1^2 \underline{q}_{vv} + 2f_1 g_1 \underline{q}_{vt} + g_1^2 \underline{q}_{tt}.$$

Zgodność pozycyjna:  $\bar{d} = \bar{q} = \bar{r}$ .

Zgodność pochodnych pierwszego rzędu:

$$\bar{q}_v = b_1 \bar{r}_u + c_1 \bar{r}_s,$$

$$\bar{r}_u = f_1 \bar{q}_v + g_1 \bar{q}_t.$$

Zgodność pochodnych mieszanych:

$$f_1' \bar{q}_v + g_1' \bar{q}_t + f_1 \bar{q}_{vv} + g_1 \bar{q}_{vt} = b_1' \bar{r}_u + c_1' \bar{r}_s + b_1 \bar{r}_{uu} + c_1 \bar{r}_{ss}.$$

Zgodność pochodnych drugiego rzędu:

$$\bar{q}_{vv} = b_2 \bar{r}_u + c_2 \bar{r}_s + b_1^2 \bar{r}_{uu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{us} + c_1^2 \bar{r}_{ss},$$

$$\bar{r}_{uu} = f_2 \bar{q}_v + g_2 \bar{q}_t + f_1^2 \bar{q}_{vv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vt} + g_1^2 \bar{q}_{tt}.$$

433

Zgodność pochodnych mieszanych trzeciego rzędu:

$$f_1'' \bar{q}_v + g_1'' \bar{q}_t + 2f_1' \bar{q}_{vv} + 2g_1' \bar{q}_{vt} + f_1 \bar{q}_{vvv} + g_1 \bar{q}_{vvt} =$$

$$b_2' \bar{r}_u + c_2' \bar{r}_s + (2b_1 b_1' + b_2) \bar{r}_{uu} + (2b_1 c_1' + c_2) \bar{r}_{us} +$$

$$2c_1 c_1' \bar{r}_{ss} + b_1^2 \bar{r}_{uuu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{uus} + c_1^2 \bar{r}_{uss},$$

$$b_1'' \bar{r}_u + c_1'' \bar{r}_s + 2b_1' \bar{r}_{uu} + 2c_1' \bar{r}_{us} + b_1 \bar{r}_{uuu} + c_1 \bar{r}_{uus} =$$

$$f_2' \bar{q}_v + g_2' \bar{q}_t + (2f_1 f_1' + f_2) \bar{q}_{vv} + (2f_1 g_1' + 2f_1 g_1' + g_2) \bar{q}_{vt} +$$

$$2g_1 g_1' \bar{q}_{tt} + f_1^2 \bar{q}_{vvv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vvt} + g_1^2 \bar{q}_{vtt}.$$

434

Zgodność pochodnych mieszanych czwartego rzędu:

$$f_2'' \bar{q}_v + g_2'' \bar{q}_t + 2(f_1 f_1'' + f_1'^2 + f_2') \bar{q}_{vv} +$$

$$2(f_1' g_1' + 2f_1' g_1' + f_1 g_1'' + g_2') \bar{q}_{vt} + 2(g_1 g_1'' + g_2') \bar{q}_{tt} +$$

$$(4f_1 f_1' + f_2) \bar{q}_{vvv} + (4f_1' g_1' + 4f_1 g_1'' + g_2) \bar{q}_{vvt} + 4g_1 g_1' \bar{q}_{vtt} +$$

$$f_1^2 \bar{q}_{vvvv} + 2f_1 g_1 \bar{q}_{vvvt} + g_1^2 \bar{q}_{vttt} =$$

$$b_2'' \bar{r}_u + c_2'' \bar{r}_s + 2(b_1 b_1'' + b_1'^2 + b_2'') \bar{r}_{uu} +$$

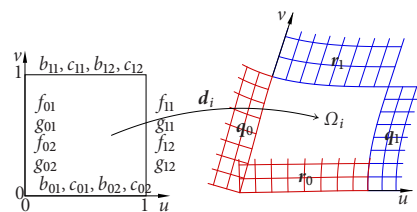
$$2(b_1' c_1' + 2b_1 c_1'' + c_2'') \bar{r}_{us} + 2(c_1 c_1'' + c_2'') \bar{r}_{ss} +$$

$$(4b_1 b_1' + b_2) \bar{r}_{uuu} + (4b_1' c_1' + 4b_1 c_1'' + c_2) \bar{r}_{uus} + 4c_1 c_1' \bar{r}_{uss} +$$

$$b_1^2 \bar{r}_{uuuu} + 2b_1 c_1 \bar{r}_{uuus} + c_1^2 \bar{r}_{uuss}.$$

435

Funkcje połączenia konstruuje się rozwiązując równania warunków zgodności dla czterech narożników, a potem rozwiązując zadania interpolacyjne Hermite'a.



436

Pewne równania są nieokreślone, co można wykorzystać do obniżenia stopni funkcji połączenia. W konstrukcji powierzchni klasy  $G^1$  możemy obliczać kolejno

Krok	Oblicz	Na podstawie
1	$b_{0i}(0), c_{0i}(0), f_{0i}(0), g_{0i}(0),$ $b_{0i}(1), c_{0i}(1), f_{0i}(1), g_{0i}(1),$ $b_{1i}(0), c_{1i}(0), f_{1i}(0), g_{1i}(0),$ $b_{1i}(1), c_{1i}(1), f_{1i}(1), g_{1i}(1)$	równań (16), (17)
2	$c_{0i}'(0), c_{0i}'(1), g_{0i}'(0), g_{0i}'(1)$	$\deg c_{0i} = \deg g_{0i} = 1$
3	$b_{0i}''(0), f_{0i}''(0)$	równania (18)
4	$b_{0i}''(1), f_{0i}''(1)$	$\deg b_{0i} = \deg f_{0i} = 2$
5	$b_{1i}'(0), c_{1i}'(0), f_{1i}'(0), g_{1i}'(0)$	równań (18)
6	$c_{1i}'(1), g_{1i}'(1)$	$\deg c_{1i} = \deg g_{1i} = 2$
7	$b_{1i}''(1), f_{1i}''(1)$	równania (18)

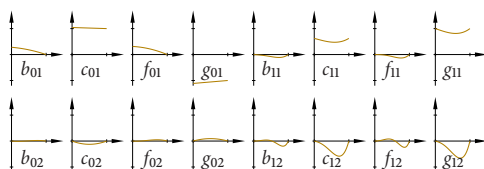
437

Dla powierzchni klasy  $G^2$  mamy tabelkę

Krok	Oblicz	Na podstawie
1	$b_{0i}(0), c_{0i}(0), f_{0i}(0), g_{0i}(0),$ $b_{0i}(1), c_{0i}(1), f_{0i}(1), g_{0i}(1),$ $b_{1i}(0), c_{1i}(0), f_{1i}(0), g_{1i}(0),$ $b_{1i}(1), c_{1i}(1), f_{1i}(1), g_{1i}(1)$	równań (16), (17)
2	$b_{0i}''(0), c_{0i}''(0), f_{0i}''(0), g_{0i}''(0),$ $b_{0i}''(1), c_{0i}''(1), f_{0i}''(1), g_{0i}''(1),$ $b_{1i}''(0), c_{1i}''(0), f_{1i}''(0), g_{1i}''(0),$ $b_{1i}''(1), c_{1i}''(1), f_{1i}''(1), g_{1i}''(1)$	równań (27), (28)
3	$c_{0i}'''(0), c_{0i}'''(1), g_{0i}'''(0), g_{0i}'''(1),$ $g_{0i}'''(0), g_{0i}'''(1), g_{0i}'''(0), g_{0i}'''(1)$	$\deg c_{0i} = \deg g_{0i} = 1$
4	$b_{0i}'''(0), f_{0i}'''(0)$	równania (18)
5	$b_{0i}'''(1), c_{0i}'''(1), f_{0i}'''(1), g_{0i}'''(1),$ $f_{0i}'''(0), f_{0i}'''(1), f_{0i}'''(0), f_{0i}'''(1)$	$\deg b_{0i} = \deg f_{0i} = 2$
6	$b_{1i}'''(0), c_{1i}'''(0), f_{1i}'''(0), g_{1i}'''(0),$ $b_{1i}'''(1), c_{1i}'''(1), f_{1i}'''(1), g_{1i}'''(1)$	równania (18)
7	$b_{1i}'''(0), c_{1i}'''(0), f_{1i}'''(0), g_{1i}'''(0),$ $b_{1i}'''(1), c_{1i}'''(1), f_{1i}'''(1), g_{1i}'''(1)$	równań (29), (30)

438

Krok	Oblicz	Na podstawie
8	$c_{0i}^{(4)}(0), c_{0i}^{(4)}(1), c_{0i}^{(4)}(0), c_{0i}^{(4)}(1),$ $g_{0i}^{(4)}(0), g_{0i}^{(4)}(1), g_{0i}^{(4)}(0), g_{0i}^{(4)}(1)$	$\deg c_{0i} = \deg g_{0i} = 2$
9	$b_{0i}^{(4)}(0), f_{0i}^{(4)}(0)$	równania (31)
10	$b_{0i}^{(4)}(1), c_{0i}^{(4)}(1), f_{0i}^{(4)}(1), g_{0i}^{(4)}(1)$	$\deg b_{0i} = \deg f_{0i} = 3$
11	$f_{0i}^{(4)}(0), g_{0i}^{(4)}(0), b_{0i}^{(4)}(0), c_{0i}^{(4)}(0)$	równań (29), (30)
12	$f_{0i}^{(4)}(1), g_{0i}^{(4)}(1), b_{0i}^{(4)}(1), c_{0i}^{(4)}(1)$	równań (31)
13	$c_{1i}^{(4)}(0), c_{1i}^{(4)}(1), g_{1i}^{(4)}(0), g_{1i}^{(4)}(1)$	$\deg c_{1i} = \deg g_{1i} = 3$
14	$b_{1i}^{(4)}(0), f_{1i}^{(4)}(0)$	równania (18)
15	$b_{1i}^{(4)}(1), f_{1i}^{(4)}(1)$	$\deg b_{1i} = \deg f_{1i} = 4$
16	$f_{1i}^{(4)}(0), g_{1i}^{(4)}(0), b_{1i}^{(4)}(0), c_{1i}^{(4)}(0)$	równań (29), (30)
17	$c_{1i}^{(4)}(1), g_{1i}^{(4)}(1)$	$\deg c_{1i} = \deg g_{1i} = 4$
18	$b_{1i}^{(4)}(1), f_{1i}^{(4)}(1)$	równania (31)



439

Dla każdego elementu bazy przestrzeni  $\oplus_{l=0}^4 \mathcal{P}_{\Delta}^{(l,2)}$  trzeba skonstruować płaty pomocnicze funkcji bazowych. Jeśli wielomian  $r_{il}$  opisuje funkcję  $r_i$  w stożku  $C_l$ , to funkcja  $\phi_{il}$  opisująca  $\phi_i$  w  $\Omega_i$  ma w punkcie środkowym wartość i pochodne rzędu  $1, \dots, 4$  takie jak  $r_{il}$  w punkcie  $0$ . Jest

$$\phi = d_l^{-1} \circ v_{il} = \beta^{-1} \circ v.$$

Dlatego pochodne funkcji  $v_{il}$  są równe pochodnym funkcji

$$d_l \circ r_{il}.$$

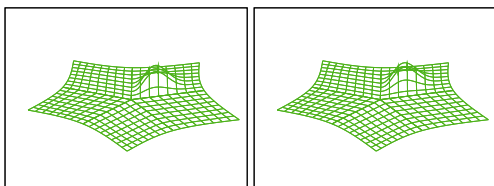
Na brzegu obszaru  $\Omega$  funkcje  $\phi_1, \dots, \phi_n$  spełniają jednorodne warunki brzegowe. Wartości funkcji  $v_{il}$  i jej pochodnych poprzecznych rzędu 1 i 2 na odcinku  $[0, 1]$  są określone przez rozwiązanie zadań interpolacyjnych Hermite'a.

Płaty funkcji bazowych  $p_{il}$  są wielomianami, otrzymanymi w taki sam sposób, jak płaty dziedziny  $d_l$ .

440

W efekcie starań, aby stopnie płyt pomocniczych i funkcji połączenia były jak najniższe, otrzymane płyty dziedziny oraz płyty funkcji bazowych mają dla powierzchni klasy  $G^1$  stopień (5, 5), a dla powierzchni klasy  $G^2$  stopień (9, 9).

Przestrzeń  $V_0$  można jeszcze rozszerzyć, dołączając  $4k$  albo  $16k$  funkcji bazowych, w których zamiast wielomianów  $p_{i,l}$  konstruowanych w podany wcześniej sposób są przyjęte funkcje  $B_s^2 \otimes B_t^3$  dla  $s, t \in \{2, 3\}$  albo  $B_s^3 \otimes B_t^3$ , dla  $s, t \in \{3, \dots, 6\}$ . Na przykład:



441

## Kryteria optymalizacji

Parametryzacja powierzchni nad obszarem  $\Omega$  jest argumentem funkcjonału, którego wartość oznacza „brzydkość” powierzchni. Może to być brzydkość parametryzacji lub brzydkość kształtu. Uznając, że powierzchnia jest tym brzydsza, im bardziej jest „pofalowana”, możemy chcieć zminimalizować całkę z kwadratu krzywizny średniej — to jest kryterium odpowiednie dla konstrukcji powierzchni klasy  $G^1$ . Dla powierzchni klasy  $G^2$  lepiej jest poszukiwać minimum całki z kwadratu długości gradientu krzywizny średniej na powierzchni. Miejsca zerowe tych funkcjonałów to odpowiednio powierzchnia płaska (idealne wypełnienie otworu w płaszczyźnie) oraz powierzchnia o stałej krzywiznie średniej (idealne wypełnienie otworu w sferze lub walcu).

Ale, minimalizacja tych funkcjonałów jest dosyć trudnym zadaniem optymalizacji nieliniowej. Znacznie łatwiej jest znaleźć minimum całki z kwadratu laplasjanu lub kwadratu długości gradientu laplasjanu parametryzacji, bo to sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych.

442

Kryteria optymalizacji można oprzeć na poniższym twierdzeniu:

**Twierdzenie 14** Jeśli funkcja  $g: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^3(A)$  i  $\|\nabla g\| \leq \varepsilon \ll 1$ , to

$$H = \frac{1}{2}\Delta g + O(\varepsilon^2),$$

$$\nabla H = \frac{1}{2}\nabla\Delta g + O(\varepsilon),$$

gdzie  $H$  oznacza krzywiznę średnią powierzchni, będącej wykresem funkcji  $g$ .

443

Za kryterium optymalizacji kształtu powierzchni klasy  $G^1$  najprościej jest więc przyjąć funkcjał

$$\mathcal{F}_1(p) = \int_{\Omega} (\Delta p)^2 d\Omega,$$

który ma być minimalizowany przez każdą z trzech funkcji opisujących współrzędne  $x, y, z$  z parametryzacji  $p$ .

Dla powierzchni wypełniających klasy  $G^2$  możemy przyjąć

$$\mathcal{F}_2(p) = \int_{\Omega} \|\nabla\Delta p\|_2^2 d\Omega.$$

444

Stosując wzór Greena, możemy znaleźć równania Eulera–Lagrange’a tych funkcjonałów. W pierwszym przypadku jest to równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 p = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^4 p}{\partial u^4} + 2\frac{\partial^4 p}{\partial u^2 \partial v^2} + \frac{\partial^4 p}{\partial v^4} = 0,$$

a w drugim przypadku równanie trójharmoniczne

$$-\Delta^3 p = 0, \quad \text{czyli} \quad -\frac{\partial^6 p}{\partial u^6} - 3\frac{\partial^6 p}{\partial u^4 \partial v^2} - 3\frac{\partial^6 p}{\partial u^2 \partial v^4} - \frac{\partial^6 p}{\partial v^6} = 0.$$

Na rozwiązania nakładamy warunki brzegowe — mamy określony brzeg otworu (czyli wartości funkcji  $p$  na brzegu  $\Gamma$  dziedziny  $\Omega$ ) i pochodne poprzeczne rzędu 1 lub 1 i 2 na tym brzegu.

Symbolem  $\dot{s}$  oznaczmy funkcję daną na zewnątrz obszaru  $\Omega$ , która opisuje współrzędną powierzchni z otworem. Litera  $n$  oznacza jednostkowy wektor prostopadły do brzegu  $\Omega$  w każdym jego punkcie.

445

Okazuje się, że zagadnienia brzegowe

$$\begin{cases} \Delta^2 p(x, y) = 0 & \text{dla } (x, y) \in \Omega, \\ p(x, y) = \dot{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial n}(x, y) = \frac{\partial \dot{s}}{\partial n}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} -\Delta^3 p(x, y) = 0 & \text{dla } (x, y) \in \Omega, \\ p(x, y) = \dot{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial n}(x, y) = \frac{\partial \dot{s}}{\partial n}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial n^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \dot{s}}{\partial n^2}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

są *dobrze postawione*, tj. mają jednoznaczne rozwiązania, które zależą w sposób ciągły od warunków brzegowych.

446

Numeryczne rozwiązanie każdego z tych zagadnień polega na znalezieniu jego aproksymacji w przestrzeni  $V$ , której bazę skonstruowaliśmy. Funkcjonały te są **formami kwadratowymi**. Dla każdego z nich można wskazać **formę dwuliniową**, która jest (pewnym) iloczynem skalarnym w przestrzeni  $V_0$ : jest  $\mathcal{F}_i(f) = \mathcal{A}_i(f, f)$ , gdzie

$$\mathcal{A}_1(f, g) = \int_{\Omega} \Delta f \Delta g d\Omega,$$

$$\mathcal{A}_2(f, g) = \int_{\Omega} \langle \nabla \Delta f, \nabla \Delta g \rangle d\Omega.$$

447

**Metoda Ritza** minimalizacji polega na podstawieniu wyrażenia

$$p = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i + \sum_{i=1}^m b_i \phi_{n+i}$$

jako argumentu formy kwadratowej i rozwiązaniu układu równań, z których każde przedstawia znikanie pochodnej otrzymanej funkcji zmiennych  $a_1, \dots, a_n$  ze względu na każdą z tych zmiennych. Układ ten ma postać

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{A}(\phi_i, \phi_j) a_j = -\sum_{j=1}^m \mathcal{A}(\phi_i, \phi_{n+j}) b_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ponieważ forma dwuliniowa  $\mathcal{A}$  jest iloczynem skalarnym, macierz symetryczna, której współczynnikami są liczby  $\mathcal{A}(\phi_i, \phi_j)$  jest dodatnio określona.

448