

KOŁOKWIUM ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

17.12.2009

Zadanie 1. Znajdź zbiory:

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in [n, +\infty)} [t, t^2]$,
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t \in [n, +\infty)} [t, t^2]$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, określona wzorem

$$f(x) = \langle |x|, (1 - |x|)^2 \rangle.$$

- znajdź i narysuj $f[A]$, gdzie $A = [-1, 2]$;
- znajdź $f^{-1}[B]$, gdzie $B = \mathbb{R} \times (0, 1]$.

Zadanie 3. Niech Z będzie zbiorem tych nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych, które mają tylko skończenie wiele wyrazów niezerowych, tzn.

$$Z = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \ f(n) = 0\}.$$

Dla $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy

$$W_f = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k \ g(n) \leq f(n)\}.$$

- Wykaż, że jeżeli $f \in Z$ oraz $g \in W_f$, to $g \in Z$.
- Wykaż, że zbiór W_f jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in Z$.

Przypominamy o podawaniu kompletnych i szczegółowych **uzasadnień**. Każde zadanie prosimy oddać na **oddzielnej, podpisanej kartce**.

Czas pracy: **90 minut**. Powodzenia!

KOŁOKWIUM ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

17.12.2009

Zadanie 1. Znajdź zbiory:

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in [n, +\infty)} [t, t^2]$,
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t \in [n, +\infty)} [t, t^2]$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, określona wzorem

$$f(x) = \langle |x|, (1 - |x|)^2 \rangle.$$

- znajdź i naskicuj $f[A]$, gdzie $A = [-1, 2]$;
- znajdź $f^{-1}[B]$, gdzie $B = \mathbb{R} \times (0, 1]$.

Zadanie 3. Niech Z będzie zbiorem tych nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych, które mają tylko skończenie wiele wyrazów niezerowych, tzn.

$$Z = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \ f(n) = 0\}.$$

Dla $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy

$$W_f = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k \ g(n) \leq f(n)\}.$$

- Wykaż, że jeżeli $f \in Z$ oraz $g \in W_f$, to $g \in Z$.
- Wykaż, że zbiór W_f jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in Z$.

Przypominamy o podawaniu kompletnych i szczegółowych **uzasadnień**. Każde zadanie prosimy oddać na **oddzielnej, podpisanej kartce**.

Czas pracy: **90 minut**. Powodzenia!