

Kolokwium z MPI dla MSUI

1. Dane są zbiory A_n , zdefiniowane w następujący sposób

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} < x < 8 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

Wyznacz zbiory $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. Naskicuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory $f[X]$ oraz $f^{-1}[X]$, gdzie funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x, y) = \langle x, x \rangle,$$

oraz $X = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1 \}$.

3. Znajdź relację równoważności w zbiorze \mathbb{N} mającą dokładnie pięć klas abstrakcji, z czego dwie mają po jednym elemencie, dwie po dwa tysiące elementów, a piąta jest nieskończona.

4. Udowodnij, że relacja porządku produktowego \leq_{prod} w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest dobrze ufundowanym częściowym porządkiem. Czy jest to porządek dobry?

5. Udowodnij, że zbiór

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q} \}$$

jest przeliczalny.

Bardzo proszę o podawanie starannych i kompletnych uzasadnień.

Proszę o napisanie rozwiązania każdego zadania na oddzielnej, podpisanej kartce.

Życzę powodzenia!