23.03.2009

Egzamin z MPI dla MSUI

1. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie ciąg zbiorów $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\rangle$ jest określony następująco:

$$A_n = \Big\{x \in \mathbb{R} :\ 4 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq x < 6 + \frac{1}{n}\Big\}.$$

2. (a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ w zbiorze $\mathbb{N}$, zdefiniowana następująco:

$$n \preceq m \Leftrightarrow \langle n \bmod 2,\ n\rangle \leq_{leks} \langle m \bmod 2,\ m\rangle.$$

jest dobrym porządkiem zbioru $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ($n \bmod 2$ oznacza resztę z dzielenia n przez 2).

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory częściowo uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \preceq\rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ są izomorficzne?

3. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x, y) = |x + y| \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Znajdź zbiór $f[A]$, gdzie $A = [-1, 2) \times [-2, -1)$.

(b) Znajdź zbiór $f^{-1}[B] \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, gdzie $B = \{3\}$.

4. Rozstrzygnij, czy dane algebry uniwersalne są izomorficzne (tzn. wskaż funkcję i udowodnij, że jest ona izomorfizmem lub wykaż, że izomorfizm nie istnieje):

(a) Półgrupy $\langle \mathbb{N},\ +\rangle$ oraz $\langle \mathbb{N},\ \cdot\rangle$.

(b) $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \setminus\rangle$ oraz $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \circ\rangle$, gdzie $A \circ B = A \cup (\mathbb{N} \setminus B)$ dla dowolnych zbiorów $A,\ B \subseteq \mathbb{N}$.

5. Niech $\mathcal{S} = \langle A^*, \circ\rangle$ będzie półgrupą wszystkich słów nad niepustym alfabetem A (z konkatenacją słów jako działaniem). Określamy relację $\equiv$ w zbiorze A^* w następujący sposób:

$$w \equiv v \quad \Leftrightarrow \quad lh(w) = lh(v),$$

gdzie $lh(w)$ oznacza długość słowa w.

(a) Udowodnij, że relacja $\equiv$ jest kongruencją w algebrze $\mathcal{S}$.

(b) Udowodnij, że zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\equiv$ jest przeliczalny.

Przypominam o konieczności podawania starannych i kompletnych uzasadnień.

Bardzo proszę o napisanie rozwiązania każdego zadania na oddzielnej, podpisanej kartce.

Życzę powodzenia!