19.12.2005

Egzamin z MPI dla MSUI

1. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie ciąg zbiorów $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\rangle$ jest określony następująco:

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \; 3 + (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} \leq x < 5 + \frac{1}{n}\right\}.$$

2. (a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ w zbiorze $\mathbb{N}$, zdefiniowana następująco:

$$n \preceq m \Leftrightarrow \langle n \bmod 2,\ n\rangle \leq_{leks} \langle m \bmod 2,\ m\rangle.$$

jest dobrym porządkiem.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory częściowo uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \preceq\rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ są izomorficzne?

3. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ określona wzorem $f(x) = \langle |x|, x^2\rangle$.

(a) Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór $f[A]$, gdzie $A = (-2, 1]$.

(b) Znajdź zbiór $f^{-1}[B]$, gdzie $B = [0, 2] \times (1, 5]$.

4. Rozstrzygnij, czy dane algebry uniwersalne są izomorficzne (tzn. wskaż funkcję i udowodnij, że jest ona izomorfizmem lub wykaż, że izomorfizm nie istnieje):

(a) Grupy $\langle \mathbb{Z}_6,\ 0,\ +_{(6)}\rangle$ oraz $\langle S_3,\ \mathrm{id}_{\{1,2,3\}},\ \circ\rangle$.
Grupa $\mathbb{Z}_6$ jest zbiorem $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ (reszt z dzielenia przez 6) z dodawaniem modulo 6 (tzn. $n +_{(6)} m$ jest resztą z dzielenia liczby $n + m$ przez 6.
Grupa S_3 składa się ze wszystkich permutacji zbioru $\{1,\ 2,\ 3\}$ z działaniem składania przekształceń.

(b) $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \setminus\rangle$ oraz $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \ominus\rangle$, gdzie $\setminus$ oznacza działanie różnicy zbiorów, zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ składa się ze wszystkich nieskończonych ciągów binarnych, a działanie $\ominus$ jest określone wzorem:

$$(f \ominus g)(n) = f(n) \cdot (1 - g(n)) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

dla dowolnych ciągów $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

5. Niech $\mathcal{S} = \langle A^*, \circ\rangle$ będzie półgrupą wszystkich słów nad niepustym alfabetem A (z konkatenacją słów jako działaniem). Określamy relację $\equiv$ w zbiorze A^* w następujący sposób:

$$w \equiv v \quad \Leftrightarrow \quad lh(w) = lh(v),$$

gdzie $lh(w)$ oznacza długość słowa w.

(a) Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności w zbiorze A^*.

(b) Udowodnij, że zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\equiv$ jest przeliczalny.

(c) Udowodnij, że relacja $\equiv$ jest kongruencją w algebrze $\mathcal{S}$.

Żeby zaliczyć ćwiczenia należy uzyskać co najmniej 6 z możliwych do uzyskania 12 punktów za zadania 1, 2 oraz 3.

Przypominam o konieczności podawania starannych i kompletnych uzasadnień.

Bardzo proszę o napisanie rozwiązania każdego zadania na oddzielnej, podpisanej kartce.

Życzę powodzenia!