Seria 3 do TMiA (rok akad. 2005/2006).

1. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne:

(a) zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych całkowitych,
(b) zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych wymiernych,
(c) zbiór wszystkich punktów $\mathbb{R}^3$ o trzech współrzędnych wymiernych,
(d) zbiór wszystkich przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o obu końcach wymiernych,
(e) zbiór wszystkich kół otwartych w $\mathbb{R}^2$, które mają wymierne promienie i środki w punktach o obu współrzędnych wymiernych.

2. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Q}\ (x^2 + px + q = 0)\}$,
(b) $B = \{X \subseteq \mathbb{N} : \exists m \in X \forall n > m\ (n \notin X)\}$,
(c) $C = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists m \forall n > m\ x_n = 1\}$,
(d) $D = \{X \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus X| < |\mathbb{N}|\}$.

3. Udowodnij, że następujące zbiory są co najwyżej przeliczalne:

(a) dowolna rodzina rozłączna podzbiorów zbioru przeliczalnego,
(b) dowolna rodzina rozłączna złożona z przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$,
(c) dowolna rodzina rozłączna złożona z kół otwartych w $\mathbb{R}^2$,
(d) dowolna rodzina rozłączna złożona z kul otwartych w $\mathbb{R}^3$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, jeśli $|A| = |B|$, to $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, takich że $A \cap B = \emptyset$ i $C \cap D = \emptyset$, jeśli $|A| = |C|$ oraz $|B| = |D|$, to $|A \cup B| = |C \cup D|$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, jeśli $|A| = |C|$ i $|B| = |D|$, to $|A \times B| = |C \times D|$.

7. (a) Udowodnij, że zbiór

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}$$

jest przeliczalny,

(b) Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia dodatniego, to zbiór

$$B = \{x \in \mathbb{R} : W(x) \in \mathbb{Q}\}$$

jest co najwyżej przeliczalny.

(c) Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją taką, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x) - a = 0$$

ma co najwyżej przeliczalnie wiele rozwiązań, to przeciwobraz względem f dowolnego zbioru co najwyżej przeliczalnego jest co najwyżej przeliczalny.

8. Znajdź funkcję $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zbiór $f^{-1}[\{n\}]$ jest przeliczalny.

9. (a) Udowodnij, że zbiór $E = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists m \forall n > m\ x_n = 0\}$, wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych, o skończenie wielu wyrazach różnych od 0, jest przeliczalny.

(b) Udowodnij, że jeśli zbiór $A \neq \emptyset$ jest co najwyżej przeliczalny, to zbiór

$$\{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \exists a \in A \exists m \forall n > m\ x_n = a\}$$

wszystkich ciągów o wyrazach ze zbioru A *prawie stałych*, tzn. stałych od pewnego miejsca, jest przeliczalny.