**Seria 2 do TMiA (rok akad. 2005/2006).**

1. Znajdź liczbę wszystkich relacji w danym zbiorze $n$-elementowym.

2. Ile jest w danym zbiorze $n$-elementowym relacji:
(a) zwrotnych?
(b) symetrycznych?

3. Znajdź wszystkie relacje równoważności w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Wskaż odpowiadające im podziały tego zbioru.

4. Znajdź liczbę wszystkich relacji równoważności w danym zbiorze $n$-elementowym, gdzie $n > 0$, mających dokładnie:

(a) dwie klasy abstrakcji,

(b) $n - 1$ klas abstrakcji.

5. Czy istnieje relacja równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, której wszystkie klasy abstrakcji są skończone i jest ich skończenie wiele?

6. (a) Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ mającą dokładnie pięć klas abstrakcji, z czego dwie mają po jednym elemencie, dwie po dwa tysiące elementów, a piąta jest nieskończona.

(b) Znajdź relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ mającą dokładnie dwie klasy abstrakcji, obie nieskończone.

W każdym z poniższych przypadków (zadania 7–15) udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności w zbiorze $X$ i opisz jej klasy abstrakcji.

7. $X = \mathbb{R}$,

$$x \equiv y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = y \text{ lub } \exists k \in \mathbb{Z}\ \big(x, y \in (k, k+1)\big),$$

8. $X = \mathbb{R}$,

$$x \equiv y \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x - y \in \mathbb{Z} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

9. $X = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$,

$$f \equiv g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{n\to\infty}(f(n) - g(n)) = 0 \text{ dla } f, g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

10. $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$$f \equiv g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall n \in \mathbb{N}\ 2|(f(n) - g(n)) \text{ dla } f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

11. $X$ jest zbiorem wszystkich funkcji niemalejących $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$f \equiv g \Leftrightarrow \Big[\big(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad g(n) \geq f(m)\big) \wedge \big(\forall k \in \mathbb{N}\ \exists l \in \mathbb{N} \quad f(l) \geq g(k)\big)\Big].$$

12. $X = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

$$f \equiv g \Leftrightarrow \Big[\big(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}\ g(m) = f(n)\big) \wedge \big(\forall k \in \mathbb{N} \exists l \in \mathbb{N}\ f(l) = g(k)\big)\Big].$$

13. $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$A \equiv B \ \Leftrightarrow\ (|A \cap \mathbb{N}| = |B \cap \mathbb{N}| \ \wedge\ |A \setminus \mathbb{N}| = |B \setminus \mathbb{N}|).$$

14. $X = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$,

$$f \equiv g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f|f^{-1}[\mathbb{N}] = g|g^{-1}[\mathbb{N}] \text{ dla } f, g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

15. $X = \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 2\}$,

$$n \equiv m \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall p \in \mathbb{P}(n) \exists q \in \mathbb{P}(m)(p \leq q) \wedge \forall p \in \mathbb{P}(m) \exists q \in \mathbb{P}(n)(p \leq q),$$

gdzie $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych i dla każdej liczby $n \in X$, $\mathbb{P}(n) = \{p \in \mathbb{P} : \ p|n\}$.

16. Niech $\equiv$ będzie relacją w zbiorze $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$A \equiv B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór } A \triangle B \text{ jest skończony.}$$

(a) Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności w zbiorze $X$,
(b) Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$[A]_{\equiv} = \{A \triangle S : \ S \text{ jest skończonym podzbiorem zbioru } \mathbb{N}\}.$$

17. Niech $r_1$ i $r_2$ będą relacjami równoważności w zbiorze $A$.

(a) Udowodnij, że relacja $r = r_1 \cap r_2$, tzn. relacja określona następująco:

$$arb \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } ar_1b \text{ i } ar_2b,$$

jest relacją równoważności w $A$.

(b) Opisz, jak otrzymać podział $\mathcal{P} = {}^{A}/_{r}$ zbioru $A$, mając dane podziały $\mathcal{P}_1 = {}^{A}/_{r_1}$ i $\mathcal{P}_2 = {}^{A}/_{r_2}$.

18. Niech $r_1$ i $r_2$ będą relacjami równoważności w zbiorze $A$.

Rozstrzygnij, czy zawsze relacja $r = r_1 \cup r_2$, tzn. relacja określona następująco:

$$arb \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } ar_1b \text{ lub } ar_2b,$$

jest relacją równoważności w $A$.

19. Niech $S(n,k)$ oznacza liczbę wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\{1,\ldots,n\}$, które mają dokładnie $k$ klas abstrakcji ($n \geq k \geq 1$), a $s_{n,k}$ – liczbę wszystkich funkcji ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$ *na* zbiór $\{1,\ldots k\}$.

(a) Udowodnij, że

$$s_{n,k} = k! \cdot S(n,k).$$

(b) Uzasadnij, że $S(n,k)$ jest liczbą sposobów posadzenia $n$ osób przy $k$ stołach tak, by przy każdym stole usiadła przynajmniej jedna osoba, przy czym dwa sposoby uważamy za różne jedynie wówczas, gdy istnieje osoba, która za każdym razem ma inne towarzystwo przy swoim stole (nie jest istotne, kto siedzi na jakim krześle i przy którym stole – liczy się wyłącznie grono osób, z którym dzieli się ten sam stół; oczywiście dopuszczamy i taką możliwość, że ktoś siedzi przy stole sam).

(c) Udowodnij kombinatorycznie (można wykorzystać ,,biesiadną" charakteryzację z punktu (a)), że dla $n \geq k \geq 1$

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k \cdot S(n,k).$$

W każdym z poniższych przypadków (zadania 17–19) udowodnij, że $\preceq$ jest częściowym porządkiem zbioru $X$. Narysuj diagram Hassego. Wskaż elementy minimalne i maksymalne, a także element największy i najmniejszy, o ile istnieją.

20. $X = \{2,3,4,5,6,7,8\}$,

$$n \preceq m \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } m|n.$$

21. $X = \mathcal{P}(1,2,3\}$,

$$A \preceq B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } B \subseteq A.$$

22. $X = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$,

$$\langle n_1, m_1\rangle \preceq \langle n_2, m_2\rangle \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n_1 \leq n_2 \text{ i } m_1 \leq m_2.$$

23. Znajdź wszystkie częściowe porządki zbioru $\{1,2,3\}$. Narysuj ich diagramy Hassego.

24. Znajdź wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu porządkowego, częściowe porządki zbioru $\{1,2,3,4\}$. Narysuj ich diagramy Hassego.

25. Niech $\langle X, \leq_X\rangle$, $\langle Y, \leq_Y\rangle$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi.
Udowodnij, że relacja (*porządku produktowego*) $\leq_{prod}$ w zbiorze $X \times Y$, zdefiniowana następująco:

$$\langle x_1, y_2\rangle \leq_{prod} \langle x_2, y_2\rangle \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \big(x_1 \leq_X x_2 \wedge y_1 \leq_Y y_2\big),$$

częściowo porządkuje zbiór $X \times Y$.

26. Niech $\langle X, \leq_X\rangle$, $\langle Y, \leq_Y\rangle$ będą zbiorami liniowo uporządkowanymi.
Udowodnij, że relacja (*porządku leksykograficznego*) $\leq_{leks}$ w zbiorze $X \times Y$, zdefiniowana następująco:

$$\langle x_1, y_2\rangle \leq_{leks} \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow$$

$$x_1 <_X x_2 \text{ lub } \big(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_Y y_2\big),$$

liniowo porządkuje zbiór $X \times Y$.

27. Ile jest w danym zbiorze $n$-elementowym relacji:
(a) antysymetrycznych?
(b) spójnych?

28. Niech $\langle L \leq\rangle$ będzie dowolnym zbiorem liniowo uporządkowanym.
Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
1) każdy niepusty ograniczony z góry podzbiór zbioru $L$ ma kres górny w $L$,
2) każdy niepusty ograniczony z dołu podzbiór zbioru $L$ ma kres dolny w $L$.

29. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$$k \preceq l \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (k \cdot l < 0 \wedge k > l) \vee (k \cdot l \geq 0 \wedge |k| \leq |l|).$$

(a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ jest dobrym porządkiem zbioru $\mathbb{Z}$.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \preceq\rangle$ są porządkowo izomorficzne.

W zadaniach 30–32 niech $\leq_{leks}$ oznacza porządek leksykograficzny w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

30. (a) Udowodnij, że $\leq_{leks}$ jest dobrym porządkiem zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ i $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{leks}\rangle$ są porządkowo izomorficzne.

31. W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$\langle n_1, m_1\rangle \preceq \langle n_2, m_2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$(\max(n_1, m_1) < \max(n_2, m_2)) \vee (\max(n_1, m_1) = \max(n_2, m_2) \wedge \langle n_1, m_1\rangle \leq_{leks} \langle n_2, m_2\rangle).$$

(a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ i $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq\rangle$ są porządkowo izomorficzne.

32. W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$\langle n_1, m_1\rangle \preceq \langle n_2, m_2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$(\min(n_1, m_1) < \min(n_2, m_2)) \vee (\min(n_1, m_1) = \min(n_2, m_2) \wedge \langle n_1, m_1\rangle \leq_{leks} \langle n_2, m_2\rangle).$$

(a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq \rangle$ są porządkowo izomorficzne.

33. W zbiorze $P$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$$X \preceq Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X = Y \vee (X \neq Y \wedge \max(X \triangle Y) \in Y.$$

(a) Udowodnij, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór $P$.

(b) Rozstrzygnij, czy zbiory dobrze uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle P, \preceq \rangle$ są porządkowo izomorficzne.

34. Udowodnij, że relacja porządku produktowego $\leq_{prod}$ w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest dobrze ufundowanym częściowym porządkiem. Czy jest to porządek dobry?

35. Udowodnij, że dla dowolnego niepustego zbioru $A$, zbiór wszystkich słów nad $A$ uporządkowany porządkiem prefiksowym jest dobrze ufundowany. Czy jest to porządek dobry?

36. Udowodnij, że jesli niepusty zbiór $A$ jest dobrze uporządkowany za pomocą relacji $\preceq$, to zbiór wszystkich słów nad $A$ uporządkowany porzadkiem standardowym $\preceq^*$ jest dobrze uporządkowany.

37. Udowodnij, że jeśli niepusty zbiór $A$ jest liniowo uporządkowany za pomocą relacji $\preceq$, to zbiór wszystkich słów nad $A$ uporządkowany porządkiem leksykograficznym $\preceq_{leks}$ jest liniowo uporządkowany. Czy jeśli $\preceq$ jest dobrym porządkiem, to $\preceq_{leks}$ – również?