Egzamin ze wstępu do matematyki
22 stycznia 2001 r.

Zadanie 1.
(a) Niech

$$A_{x,q} = \{n \in \mathbb{N} : \; |x - q| < \frac{1}{n+1}\} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \; q \in \mathbb{Q}.$$

Wyznacz zbiór:

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_{x,q}.$$

(b) Niech

$$B_{k,l} = \left\{\frac{k}{l}\right\} \quad \text{dla} \quad k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Wyznacz zbiór:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{k,l}.$$

Zadanie 2.
Funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem:

$$f(x,y) = \max(x,y) - \min(x,y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Niech $A = (0,2) \times (1,3)$ oraz $B = (0,1)$.
(a) Znajdź zbiór $f[A]$.
(b) Naszkicuj w prostokątnym układzie współrzędnych zbiór $f^{-1}[B]$.

Zadanie 3.
Niech $T = \{k \cdot \pi : \; k \in \mathbb{Z}\}$.
Znajdź moc zbioru:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; \exists p, q \in T \; (x^2 + px + q = 0)\}.$$

Zadanie 4.
Określamy relację $\equiv$ w zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \Big[\big(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \; g(m) = f(n)\big) \wedge \big(\forall k \in \mathbb{N} \exists l \in \mathbb{N} \; f(l) = g(k)\big)\Big].$$

a) Udowodnij, że $\equiv$ jest relacją równoważności.
b) Znajdź moce klas abstrakcji następujących ciągów:
(i) $f(n) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $g(n) = (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
(iii)* $h(n) = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Bardzo prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, podpisanej kartce.

Życzymy powodzenia!