Egzamin z logiki matematycznej
1 marca 2005 r.

Zadanie 1.
Niech Fm będzie zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań zbudowanych za pomocą zmiennych zdaniowych z danego zbioru n-elementowego $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
W odpowiadającej temu zbiorowi algebrze Lindenbauma-Tarskiego $B(\emptyset)$ (której uniwersum jest zbiór $Fm/\equiv$ wszystkich klas abstrakcji relacji logicznej równoważności formuł) wskaż 2^n-elementowy łańcuch.
(*Przypomnienie*: dla elementów $a,\ b \in A$ algebry Boole'a A, $a \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b = a$).

Zadanie 2.
Znajdź formułę w prefiksowej postaci normalnej, logicznie równoważną następującej formule F logiki I rzędu (P i Q są predykatami dwuargumentowymi)

$$F: \quad \big(\forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x,y)\big)$$

Zadanie 3.
Niech r będzie predykatem dwuargumentowym i niech $r^{\mathbb{A}}$ będzie takim częściowym porządkiem w zbiorze A, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ istnieje n-elementowy łańcuch w A.
Udowodnij, że istnieje taki system relacyjny $\mathbb{B} = \langle B,\ r^{\mathbb{B}}\rangle$, który spełnia następujące warunki:
(i) relacja $r^{\mathbb{B}}$ jest częściowym porządkiem w zbiorze B i istnieje nieskończony łańcuch w B,
(ii) systemy relacyjne $\mathbb{A} = \langle A,\ r^{\mathbb{A}}\rangle$ oraz $\mathbb{B} = \langle B,\ r^{\mathbb{B}}\rangle$ są elementarnie równoważne, czyli spełniają dokładnie te same zdania języka I rzędu z r jako jedynym symbolem pozalogicznym.

Zadanie 4.
Niech p będzie ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$. W ultrapotędze $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/p,\ \cdot_p,\ <_p\rangle$ systemu $\langle \mathbb{R},\ \cdot,\ <\rangle$ wskaż liczbę dodatnią nieskończenie małą, tzn. taki element $[a]_p$ ultrapotęgi, który spełnia warunki:
(i) $[\overline{0}]_p \ <_p\ [a]_p$,
(ii) $[a]_p\ \cdot_p\ [\overline{n}]_p\ <_p\ [\overline{1}]_p$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Dla $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest ciągiem tożsamościowo równym n.

Bardzo proszę o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, podpisanej kartce.

Życzę powodzenia!