

### Egzamin z logiki matematycznej, 1.03.2010r. Część pierwsza.

1. Niech  $\phi(p_1, \dots, p_n, q)$  będzie formułą rachunku zdań, w której występują wyłącznie zmienne zdaniowe  $p_1, \dots, p_n$  oraz (różna od nich) zmienna  $q$ . Przez  $\phi(p_1, \dots, p_n, r)$  oznaczmy formułę powstałą z  $\phi(p_1, \dots, p_n, q)$  przez zamianę wszystkich  $q$  na  $r$ , gdzie  $r$  jest zmienną zdaniową różną od  $p_1, \dots, p_n$  oraz  $q$ .

Udowodnij, że jeśli

$$\{\phi(p_1, \dots, p_n, q), \phi(p_1, \dots, p_n, r)\} \models (q \Leftrightarrow r),$$

to istnieje taka formuła  $\eta(p_1, \dots, p_n)$ , w której występują wyłącznie zmienne  $p_1, \dots, p_n$ , że

$$\phi(p_1, \dots, p_n, q) \models (q \Leftrightarrow \eta(p_1, \dots, p_n)).$$

2. Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami:

(a)  $(\forall x \exists y Q(x, y) \Rightarrow \forall x P(x)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x, y) \Rightarrow P(x))$ ,

(b)  $\forall x \exists y (Q(x, y) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow (\forall x \exists y Q(x, y) \Rightarrow \forall x P(x))$ .

( $P$  i  $Q$  to symbole relacyjne, odpowiednio jedno- i dwuargumentowy).

3. Udowodnij, że klasa tych struktur  $\mathbb{A} = (A, f^{\mathbb{A}})$  (w sygnaturze z jednym jednoargumentowym symbolem funkcyjnym  $f$ ), w których przeciwobraz singletonu każdego elementu zbioru  $A$  względem funkcji  $f^{\mathbb{A}}$  jest skończony, nie jest zamknięta na ultraprodukty.

### Egzamin z logiki matematycznej, 1.03.2010r. Część druga.

4. W zbiorze  $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq n\}$  określamy relację równoważności  $\simeq_A$  w następujący sposób:

$$(n_1, m_1) \simeq_A (n_2, m_2) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n_1 = n_2.$$

Pokaż, że istnieje struktura  $(B, \simeq_B)$  (w sygnaturze z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym  $\simeq$ ) taka, że  $(B, \simeq_B) \equiv (A, \simeq_A)$ , zbiór  $B$  jest mocy kontinuum oraz relacja  $\simeq_B$  ma co najmniej dwie klasy abstrakcji mocy kontinuum.

5. Udowodnij, że nie istnieje formuła  $\phi$  w języku z dwuargumentowym symbolem relacyjnym  $\leq$  i jednoargumentowym symbolem relacyjnym  $P$  taka, że:

- $\phi$  jest prawdziwa w tych strukturach skończonych  $\mathbb{A} = (A, P^{\mathbb{A}}, \leq^{\mathbb{A}})$ , w których  $\leq^{\mathbb{A}}$  jest liniowym porządkiem, a  $P^{\mathbb{A}}$  jest odcinkiem początkowym (w sensie porządku  $\leq^{\mathbb{A}}$ ) zbioru  $A$ , zawierającym dokładnie połowę jego elementów,
- $\phi$  jest fałszywa we wszystkich pozostałych strukturach skończonych danej sygnatury.