

Aproksymacja falkowa funkcji w wahaniu ograniczonym wyższych rzędów

Paweł Bechler

- **Podstawowe definicje i fakty:** przestrzenie BV^r , układy falkowe wielu zmiennych, aproksymacja liniowa i n -członowa.
- **Oszacowania słabego typu** na współczynniki falkowe funkcji z przestrzeni BV^r .
- Jako wniosek: interpolacja przestrzeni BV^r i przestrzeni Besowa.
- **Nierówność Jacksona** dla aproksymacji $f \in BV^r$ w przestrzeni L_{d^*} , gdzie $d^* = \frac{d}{d-r-1}$.
- Odpowiadająca powyższej sytuacji **nierówność Bernsteina**.
- **Aproksymacja liniowa** funkcji z BV^r w przestrzeniach L_p , w tym także $p \neq d^*$.
- **Aproksymacja n -członowa** funkcji z BV^r w przestrzeniach L_p .
- Problem nieco „osobny”: **(Nie)równoważność układów falkowych** w przestrzeniach L_1 i BV .
- Kilka pytań na zakończenie.

Przestrzenie BV: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in \text{BV}(\Omega)$ wtw. gdy $f \in L_1(\Omega)$ i pochodne dystrybucyjne $D_{x_i} f$ są miarami o skończonej wariacji

$$\|f\|_{\text{BV}(\Omega)} := \|f\|_{L_1(\Omega)} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \text{Var}_{\Omega}(D_{x_i} f)}_{=|f|_{\text{BV}}}.$$

Stwierdzenie 1 $f \in \text{BV}$ wtw. gdy $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ oraz istnieje ciąg (f_n) funkcji z $W^1(L_1(\Omega))$ spełniający

$$\sup_n \|Df_n\|_{L_1(\Omega)} < \infty \quad \text{oraz} \quad \|f - f_n\|_{L_1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Semi-norma określona wzorem

$$|f|_{\text{BV}}^* := \inf_{(f_n)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Df_n\|_{L_1(\Omega)},$$

gdzie infimum jest po wszystkich ciągach (f_n) spełniających (1), jest równoważna semi-normie $|f|_{\text{BV}}$.

Przestrzenie BV^r : Dla $r = 0, 1, 2, \dots$ przestrzeń $BV^r(\Omega)$ składa się z dystrybucji $f \in L_1(\Omega)$, których pochodne $D^\alpha f$, $|\alpha| = r$ istnieją i należą do BV.

$$\|f\|_{BV^r(\Omega)} = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha f|_{BV(\Omega)}}_{=|f|_{BV^r}}.$$

Przestrzenie $BV^{[r]}$:

$$\|f\|_{BV^{[r]}(\Omega)} := \|f\|_{L_1(\Omega)} + \underbrace{\sum_{i=1}^d |D_{x_i}^r f|_{BV(\Omega)}}_{=|f|_{BV^{[r]}}}.$$

Włożenia: $W^{r+1}(L_1) \subset BV^r \subset BV^{[r]} \subset L_{d^*}$ dla $d^* = \frac{d}{d-r-1}$.

Uwaga: Na mocy wyniku Ornsteina [6] przestrzenie $BV^{[r]}$ i BV^r są różne o ile $d = 2$ i $r \geq 3$ lub $d \geq 3$ i $r \geq 2$.

ψ^1 - falka jednej zmiennej o nośniku zwartym

ψ^0 - odpowiadająca ψ^1 funkcja skalująca

Dla $e = (e_1, \dots, e_d)$, $e_i = 0, 1$ niech $\psi^e(x_1, \dots, x_d) := \prod_{i=1}^d \psi^{e_i}(x_i)$.

$E' = \{e = (e_1, \dots, e_d), e_i = 0, 1\}$, $E = E' \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Dla $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ i $\lambda = (e, j, k)$ określamy

$$\psi_\lambda(x) := \psi^e(2^j x - k).$$

$$\Delta = \{(e, j, k) : e \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$$

$$\blacktriangle = \{(e, 0, k) : e \in E'; k \in \mathbb{Z}^d\} \cup \{(e, j, k) : j > 0, e \in E, k \in \mathbb{Z}^d\}.$$

$\Psi = \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ – układ falkowy jednorodny,

$\Psi_0 = \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \blacktriangle}$ – układ falkowy niejednorodny

$\psi_{\lambda, X}$ – falki unormowane w normie przestrzeni X ,

$c_{\lambda, X}$ – odpowiadające $\psi_{\lambda, X}$ funkcjonały biortogonalne.

Niech $\Delta_j \subset \Delta$ będzie zbiorem indeksów falek z j -tego poziomu diadycznego i niech Q_j oznacza rzut ortogonalny na $\text{span}\{\psi_\lambda : \lambda \in \Delta_j\}$.

Stwierdzenie 2 Załóżmy, że $1 \leq p < \infty$. Wówczas

$$C_1 \|Q_j(f)\|_{L_p} \leq \left(\sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda,p}(f)|^p \right)^{1/p} \leq C_2 \|Q_j(f)\|_{L_p} \quad (2a)$$

$$\|Q_j(f)\|_{L_p} \leq C_3 \|f\|_{L_p}, \quad (2b)$$

Stwierdzenie 3 Zachodzą nierówności:

$$|Q_j(f)|_{\text{BV}^r} \leq \sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda,\text{BV}^r}(f)| \leq C_1 |Q_j(f)|_{\text{BV}^r}, \quad (3a)$$

$$|Q_j(f)|_{\text{BV}^r} \leq C_2 |f|_{\text{BV}^r}. \quad (3b)$$

$(X, \| \cdot \|)$ – przestrzeń unormowana, $\Psi = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$.

$$X_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad E_n(f)_X = \text{dist}(f, X_n)$$

Stwierdzenie 4 *Jeżeli Ψ jest bazą Schaudera w X z operatorami sum częściowych P_n , to*

$$E_n(f)_X \simeq \|f - P_n(f)\|_X.$$

$(X, \| \cdot \|)$ – przestrzeń unormowana, $\Psi = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$.

$$\Sigma_n = \left\{ \sum_{k \in \Lambda} a_k e_k : \#\Lambda = n \right\}, \quad \sigma_n(f)_X = \text{dist}(f, \Sigma_n)$$

Stwierdzenie 5 *Jeżeli Ψ jest bazą bezwarunkową i demokratyczną w X , to*

$$\sigma_n(f)_X \simeq \|f - \mathcal{G}_n(f)_X\|_X,$$

gdzie $\mathcal{G}_n(f)_X$ otrzymujemy dodając n największych składników rozwinięcia f w bazie Ψ .

Stwierdzenie 6 *Niech Ψ będzie bazą falkową w L_p . Jeżeli*

$(c_{\lambda, L_p}(f))_{\lambda \in \Delta} \in w\ell_\tau$ i $\alpha = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{p}$, to

$$\sigma_n(f)_{L_p} \leq C n^{-\alpha} \left\| (c_{\lambda, L_p}(f))_{\lambda} \right\|_{w\ell_\tau},$$

gdzie stała C zależy tylko od p, τ i Ψ .

Przestrzeń ciągowe $w\ell_1^\gamma$: Dla $\gamma \in \mathbb{R}$ przestrzeń $w\ell_1^\gamma$ składa się z ciągów $(c_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ (lub $(c_\lambda)_{\lambda \in \blacktriangle}$) t. że

$$\|(c_\lambda)_\lambda\|_{w\ell_1^\gamma} := \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \sum_{|c_\lambda| > \varepsilon |I(\lambda)|^\gamma} |I(\lambda)|^\gamma \right) < \infty,$$

gdzie $I(\lambda) = 2^{-j}([0, 1]^d + k)$ dla $\lambda = (e, j, k)$.

Twierdzenie 7 *Jeżeli $\gamma > 1$ lub $\gamma < 1 - 1/d$, to istnieje stała $C = C(\Psi, d, \gamma)$ taka, że dla $f \in BV^r(\mathbb{R}^d)$*

$$\|(c_\lambda(f))_{\lambda \in \Delta}\|_{w\ell_1^\gamma} \leq C |f|_{BV^r(\mathbb{R}^d)}$$

oraz

$$\|(c_\lambda(f))_{\lambda \in \blacktriangle}\|_{w\ell_1^\gamma} \leq C \|f\|_{BV^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Jest to uogólnienie wyniku z [3] A. Cohena, W. Dahmena, R. DeVore'a i I. Daubechies dla BV.

Oszacowania słabego typu – szkic dowodu

Niech $b_I(g, f) := 2^j \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(2^j x - k)dx$, $I = 2^{-j}([0, 1]^d + k)$.

Stwierdzenie 8 Niech g będzie funkcją określoną na \mathbb{R}^d , taką że

$$\text{supp } g \in \mathbb{R}^d, \quad \|g\|_\infty \leq 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = 0.$$

Wówczas dla dowolnej liczby $\gamma > 1$ lub $\gamma < 1 - 1/d$ istnieje stała $C = C(d, g, \gamma)$ taka, że dla wszystkich $f \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{|b_I(\phi, f)| > \varepsilon |I|^\gamma} |I|^\gamma \leq C |f|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad (4)$$

gdzie $b_I(g, f) := 2^j \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(2^j x - k)dx$, $I = 2^{-j}([0, 1]^d + k)$

Ustalmy $e \in E$ i wybierzmy multi-indeks $\alpha = \alpha(e)$: niech $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ takie, że $e_{i_0} = 1$ i przyjmijmy

$$\alpha_{i_0} = r \quad \text{oraz} \quad \alpha_i = 0 \quad \text{dla } i \neq i_0. \quad (5)$$

Oszacowania słabego typu – szkic dowodu

$$\xi^0(t) := \psi^1(t) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

$$\xi^s(t) := \int_{-\infty}^t \xi^{s-1}(u) du \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \dots, r$$

$$\xi^{e,\alpha}(x) := \prod_{i:\alpha_i \neq 0} \xi^{\alpha_i}(x_i) \cdot \prod_{i:\alpha_i = 0} \psi^{e_i}(x_i) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^d.$$

$g = \xi^{e,\alpha}$ spełnia założenia Stw. 8. Dla $\lambda = (e, j, k)$, $I = I(j, k)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi_{\lambda, \text{BV}^r}(x) dx = (-1)^r 2^{-jr} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f(x) \xi_{I(\lambda)}^{e,\alpha}(x) dx.$$

Dostajemy więc

$$|b_{I(\lambda)}(\xi^{e,\alpha}, D^\alpha f)| = |c_{\lambda, \text{BV}^r}(f)|.$$

Korzystając ze Stw 8. dostajemy odpowiednie oszacowania.

Interpolacja BV^r i przestrzeni Besowa

Wniosek 9 Załóżmy, że $\gamma > 1$ lub $\gamma < 1 - \frac{1}{d}$, s i p spełniają

$$\frac{s - r - 1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \gamma - 1.$$

Wówczas dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$

$$(B^{s,p}(L_p), BV^r)_{\theta,q} = B^{t,q}(L_q)$$

dla $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \theta$, $t = (1 - \theta)s + \theta(r + 1)$.

Zachodzą także odpowiednie nierówności dla norm typu Gagliardo-Nirenberga. W szczególności dla $t > r + 1$ lub $t < r + \frac{1}{2}$

$$\|f\|_{W^t(L_2)}^2 \leq C \|f\|_{B^\infty, 2t-r(L_\infty)} \|f\|_{BV^r}.$$

Szkic dowodu: $f \in B^{s,p}(L_p)$ wtw. gdy $(c_{\lambda, BV^r}(f))_{\lambda \in \blacktriangle} \in \ell_p^\gamma(\blacktriangle)$ dla

$$\gamma = 1 + \frac{p}{p-1} \cdot \frac{s-r-1}{d}.$$

$\ell_1^\gamma \subset BV^r \subset w\ell_1^\gamma$ i $\ell_q^\gamma = (\ell_p^\gamma, \ell_1^\gamma)_{\theta,q} = (\ell_p^\gamma, w\ell_1^\gamma)_{\theta,q}$ dla $0 < \theta < 1$ i

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

Wniosek 10 Dla $d > r + 1$ i $d^* = d/(d - r - 1)$ zachodzą szacowania

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_{d^*}} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}} |f|_{\text{BV}^r}$$

jak również

$$\sigma_n(f, \Psi_0)_{L_{d^*}} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\text{BV}^r}.$$

Aproksymacja liniowa – wstęp

- Włózenie $BV^r \subset L_p$ musi być zwarte. Tak jest dla $\Omega \in \mathbb{R}^d$ i $1 \leq p < d^*$.
- **Inna sytuacja:** $d^* < q \leq +\infty$ i $1 \leq p < q$. Włózenie $BV^r \cap L_q \subset L_p$ jest zwarte jeżeli $\Omega \in \mathbb{R}^d$
- Ψ jest układem falkowym skonstruowanym dla dziedziny Ω . **Istotny warunek:** Falki mają znikające momenty rzędu $\leq r$.
- Układ Ψ musi być uporządkowany. Na j -tym poziomie diadycznym jest $\simeq 2^{dj}$ funkcji z Ψ . Układ porządkujemy z zachowaniem kolejności poziomów diadycznych.

Twierdzenie 11 Jeżeli $\Omega \in \mathbb{R}^d$ i Ψ jest układem falkowym nad Ω , $f \in \text{BV}^r(\Omega)$ i $1 \leq p < d^*$, to

$$E_n(f, \Psi)_{L_p} \leq C n^{-(1/p-1/d^*)} \|f\|_{\text{BV}^r}$$

i rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n .

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d^*} = \frac{r+1}{d} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Szkic dowodu: Dla $n = \#\square_0 + \sum_{j < k} (\#\Delta_j) \simeq 2^{dk}$

$$\begin{aligned} E_n(f, \Psi)_{L_p} &\lesssim \sum_{j \geq k} \sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda, L_p}(f)| \lesssim \sum_{j \geq k} 2^{-dj(1/p-1/d^*)} \sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda, L_{d^*}}(f)| \\ &\lesssim \|f\|_{\text{BV}^r} \sum_{j \geq k} 2^{-dj(1/p-1/d^*)} \lesssim 2^{-dk(1/p-1/d^*)} \|f\|_{\text{BV}^r}. \end{aligned}$$

$$n \leq \#\square_0: \sum_{\lambda \in \square_0} |c_{\lambda, L_p}(f)| \leq C \|f\|_{L_1}.$$

Optymalność: $\lambda \in \Delta_k$ i $f_k := \psi_{\lambda, L_{d^*}}$. Wówczas $\|f_k\|_{\text{BV}^r} \simeq 1$ i dla

$$n \leq \sum_{j < k} \#\Delta_j \simeq 2^{dk} \text{ zachodzi } E_n(f_k, \Psi)_{L_p} \gtrsim 2^{-dk(1/p-1/d^*)}.$$

Twierdzenie 12 Jeżeli $d^* < q \leq +\infty$, $1 \leq p < q$, $\Omega \in \mathbb{R}^d$ i Ψ jest układem falkowym nad Ω , $f \in BV^r(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, to

$$E_n(f, \Psi)_{L_p} \leq C n^{-(1-\theta)\frac{r+1}{d}} \|f\|_{BV^r}^{1-\theta} \|f\|_{L_q}^\theta,$$

gdzie $\theta = (1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})^{-1}$. Ponadto, rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n .

Szkic dowodu: $\|Q_j(f)\|_{L_p} \lesssim \left(\sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda, L_p}(f)| \right)^{1-\theta} \left(\sum_{\lambda \in \Delta_j} |c_{\lambda, L_p}(f)|^q \right)^{\theta/q}$

$$\lesssim 2^{-dj(\frac{1}{p} - \frac{1}{d^*})(1-\theta)} |Q_j(f)|_{BV^r}^{1-\theta} \cdot 2^{-dj(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\theta} \|Q_j(f)\|_{L_q}^\theta$$

$$\lesssim 2^{-dj \cdot \frac{r+1}{d}(1-\theta)} \|f\|_{BV^r}^{1-\theta} \|f\|_{L_q}^\theta,$$

skąd dla $n \geq \#\square_0$ jest $E_n(f, \Psi)_{L_p} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}(1-\theta)} \|f\|_{BV^r}^{1-\theta} \|f\|_{L_q}^\theta$.

Optymalność: $n_k \leq \#\Delta_k$ takie, że $n_k \simeq 2^{dj(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{q})\frac{q}{q-1}}$, $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$ takie, że $\#\tilde{\Delta}_k = n_k$ i $f_k = n_k^{-1} \sum_{\lambda \in \tilde{\Delta}_k} \psi_{\lambda, L_{d^*}}$. Wtedy $\|f_k\|_{L_q} \simeq \|f_k\|_{BV^r} \simeq 1$ oraz

$E_n(f_k, \Psi)_{L_p} \geq C 2^{-dk \cdot \frac{r+1}{d}(1-\theta)}$ dla $n \leq \sum_{j=0}^{k-1} \#\Delta_k \simeq 2^{dk}$.

Aproksymacja liniowa - uwagi

- Dla $p = 1$ oba twierdzenie dają taki sam rząd aproksymacji

$$\simeq n^{-\frac{r+1}{d}}.$$

- Jednak jeżeli $1 < p < d^* < q$, to

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d^*} = \frac{r+1}{d} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) < (1 - \theta) \frac{r+1}{d},$$

więc dodatkowe założenie $f \in L_q$ poprawia rząd aproksymacji liniowej.

Aproksymacja n -członowa w L_p , $p < d^*$

Twierdzenie 13 Jeżeli $\Omega \in \mathbb{R}^d$, i Ψ jest układem falkowym nad Ω , $d < r + 1$ lub $d = 1$ i $r = 0$, $f \in \text{BV}^r(\Omega)$, $1 \leq p < d^*$, to

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\text{BV}^r}$$

i rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n .

Szkic dowodu: Jedyne interesujący przypadek to $d = 1$ i $r = 0$.

Niech $c_n(f)$ oznaczają współczynniki uporządkowane z zachowaniem kolejności poziomów diadycznych. Wówczas

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n(f)| \leq C N^{-1/p} \|f\|_{\text{BV}^r},$$

skąd wynika, że $(c_{\lambda, L_p}(f))_{\lambda} \in w\ell_{\tau}$ dla $1/\tau = 1 + 1/p$.

Optymalność: Niech $n_k = \lfloor \frac{1}{2} \# \Delta_k \rfloor \simeq 2^{dk}$, $D_k \subset \Delta_k$ takie, że $\# D_k = n_k$, i

$f_k := n_k^{-1} \sum_{\lambda \in \Delta_k} \psi_{\lambda, L_{d^*}}$. Wtedy $\|f_k\|_{\text{BV}^r} \simeq 1$ i $\sigma_{n_k}(f_k, \Psi)_{L_p} \gtrsim n_k^{-\frac{r+1}{d}}$.

Aproksymacja n -członowa w L_p , $p \geq d^*$

Twierdzenie 14 Jeżeli $\Omega = \mathbb{R}^d$ lub $\Omega \in \mathbb{R}^d$ i Ψ jest układem falkowym nad Ω , $d^* \leq p < q \leq \infty$ oraz $f \in \text{BV}^r(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, to

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \leq C n^{-(1-\kappa)\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\text{BV}^r}^{1-\kappa} \|f\|_{L_q}^{\kappa},$$

gdzie

$$\kappa = \left(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{q} \right)^{-1}.$$

Rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n .

Dowód opiera się na następującej fakcie:

Lemat 15 Dane są ciągi $(a_n)_n \in w\ell_\mu$ i $(b_n)_n \in w\ell_\nu$. Wówczas ciąg $(a_n b_n)_n \in w\ell_\tau$, gdzie $\tau^{-1} = \mu^{-1} + \nu^{-1}$, oraz

$$\|(a_n b_n)_n\|_{w\ell_\tau} \leq C \|(a_n)_n\|_{w\ell_\mu} \cdot \|(b_n)_n\|_{w\ell_\nu}, \quad (6)$$

Optymalność: Niech $n_k \leq \#\Delta_k$ takie, że $n_k \simeq 2^{dk(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{q})\frac{q}{q-1}}$, $D_k \subset \Delta_k$ takie, że $\#D_k = n_k$ i $f_k = n_k^{-1} \sum_{\lambda \in D_k} \psi_{\lambda, \text{BV}^r}$. Wtedy

$\|f_k\|_{L_q} \simeq \|f_k\|_{\text{BV}^r} \simeq 1$ i dla $m_k = \lfloor \frac{1}{2} n_k \rfloor$ jest $\sigma_{m_k}(f_k, \Psi)_{L_p} \gtrsim m_k^{-(1-\kappa)\frac{r+1}{d}}$.

Aproksymacja n -członowa - uwagi

- Dodatkowe założenie $f \in L_q$ nie poprawia rzędu aproksymacji w L_{d^*} .
Np., jeżeli $d = 2$, $r = 0$, $q = \infty$, to $d^* = 2$ i:
Dla $f \in BV$ mamy $\sigma_n(f)_{L_2} \simeq n^{-1/2}$
Gdy $p \geq 2$ i $f \in BV \cap L_\infty$ mamy $\sigma_n(f)_{L_p} \simeq n^{-1/p}$.
- Twierdzenie 14 nie odpowiada na pytanie o rząd aproksymacji n -członowej funkcji z $BV^r \cap L_q$ w L_p dla $1 \leq p < d^*$, a w szczególności, czy dodatkowe założenie $f \in L_q$ pozwala uzyskać wynik lepszy niż w Twierdzeniu 13.
- Dla $r = 0$ Twierdzenie 14 jest silniejszym wynikiem niż oszacowania, które można uzyskać z innych rezultatów:
Y. Meyer [5]: $BV \cap L_q \subset W^s(L_{d^*})$ dla $s = 1/d^* - 1/q$, co daje

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \lesssim n^{-\frac{s}{d}} \|f\|_{W_{d^*}^s}, \quad \frac{1}{p} = \left(1 - \frac{1}{d}\right)^2 + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{d}.$$

Wynik uzyskany tutaj jest lepszy.

Twierdzenie 16 Niech $\Lambda \subset \Delta$ lub $\Lambda \subset \blacktriangle$, $\#\Lambda = n$. Wówczas dowolna funkcja f postaci $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \psi_\lambda$ spełnia nierówność

$$|f|_{\text{BV}^r(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi, d, r) n^{\frac{r+1}{d}} \|f\|_{L_{d^*}(\mathbb{R}^d)}.$$

Jest to uogólnienie wyniku dla BV z [2] uzyskanego przez P.B, R. DeVore'a, A. Kamont, G. Petrovą i P. Wojtaszczyka. Dowód sprowadza się do dowodu tamtego wyniku za pomocą następującego faktu:

$S_k = \text{span}\{\phi_I : I \in \square_k\}$, gdzie \square_k to zbiór wszystkich kostek diadycznych o boku długości 2^{-k} .

Dla kostki diadycznej I niech $I' = I \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{2^d} I_i\right)$, gdzie $I_i \subset J_i$, J_i są to kostki-córki kostki I .

Lemat 17 Dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$, $f \in S_k$, multi-indeksu α , $|\alpha| = r$, każdej kostki $I \in \square_k$ i zbioru I' zachodzi

$$|D^\alpha f \mathbb{1}_{I'}|_{\text{BV}(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi, d, r) \|f \mathbb{1}_{I'}\|_{L_{d^*}(\mathbb{R}^d)}. \quad (7)$$

Niech $\Psi = \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ i $\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ będą układami wektorów w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|_X)$. Ψ i $\bar{\Psi}$ są **równoważne**, jeżeli odwzorowanie liniowe A określone przez

$$A : \bar{\psi}_\lambda \mapsto \psi_\lambda \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in \Delta$$

rozszerza się do izomorfizmu liniowego domknięcia $\text{span } \bar{\Psi}$ na domknięcie $\text{span } \Psi$.

Dalej $X = L_1(\mathbb{R}^d)$ lub $X = \text{BV}(\mathbb{R}^d)$, $\bar{\Psi} = H = (h_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ jest **układem Haara** a Ψ jest innym układem falkowym.

- W $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, H_1 układy falkowe są równoważne.
- Sjölin, 1977, [8]: Układy Haara i Franklina nie są równoważne w $L_1([0, 1])$.
- (Nie)równoważność w BV: kwestia uogólnienia wyników dla układu Haara (Cohen et al, 1999 ([4]); Wojtaszczyk, 2003 ([9]) na inne faleki.

Wyniki przedstawione dalej ukazały się drukiem w [1]

Twierdzenie 18 Jeżeli $\psi^1 \in L_1(\mathbb{R})$ spełnia

$$\int_0^\infty \psi^1(t) dt \neq 0, \quad (8)$$

to H i Ψ nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Idea dowodu:

$$f_n = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j(d-1)} \sum_{k \in K_j} h_{(e_0, j, k), L_1},$$

gdzie $K_j = \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_1 = 0, 0 \leq k_2, \dots, k_d \leq 2^j - 1\}$ i $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Jest $\|f_n\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \leq 2$.

$$F(f) := \int_{\Gamma} f(x) dx \quad \Gamma = [0, \infty) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

$$F(Af_n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j(d-1)} \sum_{k \in K_j} \int_{[0, \infty)} \psi^1(t) dt \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \psi^0(t) dt \right)^{d-1} = nc.$$

Wniosek 19 *Układy Haara i Strömberga na \mathbb{R}^d nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Porównanie z wynikiem Sjölina:

- Niech $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ oznaczają układy Haara i Franklina na $[0, 1]$.
- Sjölin, 1977 pokazał, że odwzorowanie liniowe takie, że $f_{n-1} \mapsto h_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ nie jest ciągłe w $L_1([0, 1])$.
- Odwzorowanie $h_\lambda \mapsto \psi_\lambda$ zachowuje lokalizację falek (lokalizacja ψ_λ , $\lambda = (e, j, k)$, to kostka diadyczna $2^{-j}([0, 1]^d + k)$).
- Odwzorowanie $f_{n-1} \mapsto h_n$ przesuwa lokalizację o jeden przedział diadyczny lub nawet zmienia poziom diadyczny funkcji.

Falki o nośnikach zwartych w $L_1(\mathbb{R}^d)$

Niech ψ oznacza ciągłą falkę o nośniku $[0, 3]$, skonstruowaną przez Pollena w [7]. Wówczas niestety $\int_0^\infty \psi(t)dt = 0$. Można jednak pokazać:

Wniosek 20 *Niech Ψ będzie układem falkowym na \mathbb{R}^d generowanym przez $\psi^0 = \phi$ i $\psi^1 = \psi(\cdot + l)$, przy czym $l = 1$ lub $l = 2$. Wówczas Ψ i H nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

A co z innymi falkami o nośnikach zwartych?

Wniosek 21 *Założmy, że ψ^1 jest ciągła i ma nośnik zwarty. Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $\psi_k = \psi^1(\cdot - k)$ i niech Ψ_k będzie układem falkowym na \mathbb{R}^d generowanym przez ψ_k (zamiast przez $\psi^1 = \psi_0$). Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że Ψ_k i H nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Dowód: Na mocy Tw. 18 wystarczy pokazać, że dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi $\int_0^\infty \psi_k^1(t)dt \neq 0$.

Istotnie, gdyby tak nie było, to rozwinięcie falkowe funkcji $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ względem układu generowanego przez ψ^1 byłoby skończone, co by oznaczało, że f jest ciągła.

Twierdzenie 22 Jeżeli $\psi^1 \in BV(\mathbb{R})$ spełnia

$$\int_{[\frac{1}{3}, \infty)} D\psi^1(dt) + \int_{[\frac{2}{3}, \infty)} D\psi^1(dt) \neq 0, \quad (9)$$

to H i Ψ nie są równoważne w $BV(\mathbb{R}^d)$. Dokładniej, istnieje ciąg funkcji $f_n \in BV(\mathbb{R}^d)$ taki, że $\|f_n\|_{BV} \leq C < \infty$ i jednocześnie $|Af_n|_{BV} \geq c_2 n$ dla pewnej stałej $c_2 > 0$.

Dowód jest podobny jak dla L_1 .

$$f_n = \sum_{j=0}^{2n-1} 2^{-(d-1)j} \sum_{k \in K_j} h_{(e_0, k, j), L_{d^*}},$$

gdzie $e_0 := (1, 0, \dots, 0)$ i

$$K_j := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \frac{k_1}{2^j} < \frac{1}{3} < \frac{k_1+1}{2^j}, \quad 0 \leq k_2, \dots, k_d \leq 2^j - 1\}.$$

$$F(f) := \int_{\Gamma} D_{x_1} f(dx), \quad \Gamma = [\frac{1}{3}, \infty) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

Falki Haara i Strömberga:

Wniosek 23 *Układy Haara i Strömberga nie są równoważne w $BV(\mathbb{R}^d)$.*

Układ Haara i falki o nośnikach zwartych:

Stwierdzenie 24 *Falka Pollen'a ψ należy do przestrzeni $BV(\mathbb{R})$.*

Dowód: Korzystając z konstrukcji Pollena można pokazać, że funkcja skalująca ϕ jest granicą w normie L_1 ciągu funkcji z przestrzeni Sobolewa $W^1(L_1)$.

Wniosek 25 *Niech Ψ będzie układem falkowym na \mathbb{R}^d generowanym przez $\psi^0 = \phi$ i $\psi^1 = \psi$. Wówczas Ψ i H nie są równoważne w $BV(\mathbb{R}^d)$.*

1. Niech M oznacza przestrzeń miar o skończonej wariacji. (Wówczas np. $BV^r = W^{r+1}(M)$) Dla $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ można rozważać przestrzenie

$$W^{\mathbf{r}}(M) = \{f \in L_1 : D_{x_i}^{\alpha_i} f \in M \text{ dla } \alpha_i \leq r_i, i = 1, \dots, d\},$$
$$SW^{\mathbf{r}}(M) = \{f \in L_1 : D^{\alpha} f \in M \text{ dla } \alpha \leq \mathbf{r}\}$$

gdzie $\alpha \leq \mathbf{r} \Leftrightarrow \alpha_i \leq r_i \text{ dla } i = 1, \dots, d.$

Znaleźć charakteryzacje (oszacowania na słaby typ) współczynników falkowych dystrybucji z takich przestrzeni.

2. Ograniczoność rzutów zachłannych dla baz falkowych w przestrzeniach $BV^r(\mathbb{R}^d)$, tzn. oszacowanie postaci

$$|\mathcal{G}_n(f, \Psi)_{BV^r}|_{BV^r} \leq C|f|_{BV^r}.$$

- [1] Paweł Bechler. Inequivalence of wavelet systems in $L_1(\mathbb{R}^d)$ and $BV(\mathbb{R}^d)$. *Bull. Polon. Acad. Sci. Math.*, 53:25–37, 2005.
- [2] Paweł Bechler, Ronald DeVore, Anna Kamont, Guergana Petrova, Przemysław Wojtaszczyk. Greedy wavelet projections are bounded in BV . Przyjęte do druku w *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [3] Albert Cohen, Wolfgang Dahmen, Ingrid Daubechies, Ronald DeVore. Harmonic analysis of the space BV . *Rev. Mat. Iberoamericana*, 19(1):235–263, 2003.
- [4] Albert Cohen, Ronald DeVore, Pencho Petrushev, Hong Xu. Nonlinear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$. *Amer. J. Math.*, 121(3):587–628, 1999.
- [5] Yves Meyer. *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations*, wolumen 22 serii *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. The fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures.
- [6] Donald Ornstein. A non-equality for differential operators in the L_1 norm. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11:40–49, 1962.
- [7] David Pollen. Daubechies' scaling function on $[0, 3]$. *Wavelets*, wolumen 2 serii *Wavelet Anal. Appl.*, strony 3–13. Academic Press, Boston, MA, 1992.
- [8] Per Sjölin. The Haar and Franklin systems are not equivalent bases in L^1 . *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(11):1099–1100, 1977.
- [9] P. Wojtaszczyk. Projections and non-linear approximation in the space $BV(\mathbb{R}^d)$. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(2):471–497, 2003.