Aproksymacja nieliniowa za pomocą układów falkowych w przestrzeniach typu BV

Paweł Bechler

W skrócie

- **Podstawowe definicje i fakty:** przestrzenie BV^r, układy falkowe wielu zmiennych, aproksymacja liniowa i n-członowa.
- **Oszacowania słabego typu** na współczynniki falkowe funkcji z przestrzeni BV^r i **nierówność typu Jacksona** dla aproksymacji $f \in \mathrm{BV}^r$ w przestrzeni L_{d^*}, gdzie $d^* = \frac{d}{d-r-1}$
- **Aproksymacja n-członowa i liniowa** funkcji z BV^r w przestrzeniach L_p.
- **Nierówność typu Bernsteina** dla pary BV^r, L_{d^*}.
- Problem nieco „osobny": **(Nie)równoważność układów falkowych** w przestrzeniach L_1 i BV.

Przestrzenie BV: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in \mathrm{BV}(\Omega)$ wtw. gdy $f \in L_1(\Omega)$ i pochodne dystrybucyjne $D_{x_i} f$ są miarami o skończonej wariacji

$$\|f\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|f\|_{L_1(\Omega)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Var}_\Omega(D_{x_i} f)}_{=|f|_{\mathrm{BV}}}.$$

Przestrzenie BV^r: Dla $r = 0, 1, 2, \ldots$ przestrzeń $\mathrm{BV}^r(\Omega)$ składa się z dystrybucji $f \in L_1(\Omega)$, których pochodne $D^\alpha f$, $|\alpha| = r$ istnieją i należą do BV.

$$\|f\|_{\mathrm{BV}^r(\Omega)} = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha f|_{\mathrm{BV}(\Omega)}}_{=|f|_{\mathrm{BV}^r}}.$$

ψ^1 - falka jednej zmiennej o nośniku zwartym – $\{\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ jest układem ortogonalnym zupełnym w $L_2(\mathbb{R})$.
ψ^0 - odpowiadająca ψ^1 funkcja skalująca

Dla $e = (e_1, \ldots, e_d)$, $e_i = 0, 1$ niech $\psi^e(x_1, \ldots, x_d) := \prod_{i=1}^{d} \psi^{e_i}(x_i)$.
$E' = \{e = (e_, \ldots, e_d), e_i = 0, 1\}$, $E = E' \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Dla $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ i $\lambda = (e, j, k)$ określamy

$$\psi_\lambda(x) := \psi^e(2^j x - k).$$

$$\triangle = \{(e, j, k) : e \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$$

$$\blacktriangle = \{(e, 0, k) : e \in E'; k \in \mathbb{Z}^d\} \cup \{(e, j, k) : j > 0, e \in E, k \in \mathbb{Z}^d\}.$$

$\Psi = \{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\triangle}$ – układ falkowy jednorodny,
$\Psi_0 = \{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\blacktriangle}$ – układ falkowy niejednorodny

$\psi_{\lambda,X}$ – falki unormowane w normie przestrzeni X,
$c_{\lambda,X}$ – odpowiadające $\psi_{\lambda,X}$ funkcjonały biortogonalne.

Aproksymacja i słaby typ współczynników

$(X, \| \ \|)$ – przestrzeń unormowana, $\Psi = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$.

Aproksymacja liniowa:

$$X_n = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}, \qquad E_n(f)_X = \mathrm{dist}(f, X_n)$$

Aproksymacja n-członowa:

$$\Sigma_n = \left\{\sum_{k\in\Lambda} a_k e_k : \#\Lambda = n\right\}, \qquad \sigma_n(f)_X = \mathrm{dist}(f, \Sigma_n)$$

Przestrzenie ciągowe $w\ell_p$: Powiemy, że $(a_\lambda)_\lambda \in w\ell_p$, $1 < p < \infty$, gdy

$$\|(a_\lambda)_\lambda\|_{w\ell_p} = \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon(\#\{\lambda : |a_\lambda| > \varepsilon\})^{1/p} < \infty.$$

Stwierdzenie 1 *Niech Ψ będzie bazą falkową w L_p. Jeżeli $(c_{\lambda,L_p}(f))_\lambda \in w\ell_\tau$ i $\alpha = \dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{p}$, to*

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \le C n^{-\alpha} \left\|(c_{\lambda,L_p}(f))_\lambda\right\|_{w\ell_\tau}.$$

Twierdzenie 2 *Istnieje stała $C = C(\Psi, d)$ taka, że dla $f \in \mathrm{BV}^r(\mathbb{R}^d)$*

$$\|(c_{\lambda,\mathrm{BV}^r}(f))_{\lambda\in\Delta}\|_{w\ell_1} \leq C\,|f|_{\mathrm{BV}^r(\mathbb{R}^d)}$$

oraz

$$\|(c_{\lambda,\mathrm{BV}^r}(f))_{\lambda\in\blacktriangle}\|_{w\ell_1} \leq C\,\|f\|_{\mathrm{BV}^r(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Jest to uogólnienie wyniku z [3] A. Cohena, W. Dahmena, R. DeVore'a i I. Daubechies dla BV.

Wniosek 3 ***(Nierówność typu Jacksona)*** *Dla $d > r + 1$ i $d^* = d/(d - r - 1)$ zachodzą szacowania*

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_{d^*}} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}}\,|f|_{\mathrm{BV}^r}$$

jak również

$$\sigma_n(f, \Psi_0)_{L_{d^*}} \leq C n^{-\frac{r+1}{d}}\,\|f\|_{\mathrm{BV}^r}\,.$$

Twierdzenie 4 *Jeżeli* $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$, *i* Ψ *jest układem falkowym nad* Ω, $d > r + 1$ *lub* $d = 1$ *i* $r = 0$, $f \in \mathrm{BV}^r(\Omega)$, $1 \le p < d^*$, *to*

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \le C n^{-\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\mathrm{BV}^r}$$

i rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n.

Twierdzenie 5 *Jeżeli* $\Omega = \mathbb{R}^d$ *lub* $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$ *i* Ψ *jest układem falkowym nad* Ω, $d^* \le p < q \le \infty$ *oraz* $f \in \mathrm{BV}^r(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, *to*

$$\sigma_n(f, \Psi)_{L_p} \le C n^{-(1-\kappa)\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\mathrm{BV}^r}^{1-\kappa} \|f\|_{L_q}^{\kappa},$$

gdzie

$$\kappa = \left(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{d^*} - \frac{1}{q}\right)^{-1}.$$

Rząd szacowania jest optymalny jako funkcja n.

- Włożenie $\mathrm{BV}^r \subset L_p$ musi być zwarte: $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$ i $1 \le p < d^* < +\infty$.
- **Inna sytuacja:** $d^* < q \le +\infty$ i $1 \le p < q$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$. Wtedy $\mathrm{BV}^r \cap L_q \subset L_p$.
- Ψ jest układem falkowym skonstruowanym dla dziedziny Ω.
- Układ Ψ jest uporządkowany z zachowaniem kolejności poziomów diadycznych.

Twierdzenie 6 *Jeżeli* $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$ *i* Ψ *jest układem falkowym nad* Ω*,* $f \in \mathrm{BV}^r(\Omega)$ *i* $1 \le p < d^* < +\infty$*, to*

$$E_n(f,\Psi)_{L_p} \le C n^{-(1/p-1/d^*)} \|f\|_{\mathrm{BV}^r}$$

i rząd szacowania jest optymalny.

Twierdzenie 7 *Jeżeli* $d^* < q \le +\infty$*,* $1 \le p < q$*,* $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$ *i* Ψ *jest układem falkowym nad* Ω*,* $f \in \mathrm{BV}^r(\Omega) \cap L_q(\Omega)$*, to*

$$E_n(f,\Psi)_{L_p} \le C n^{-(1-\theta)\frac{r+1}{d}} \|f\|_{\mathrm{BV}^r}^{1-\theta} \|f\|_{L_q}^{\theta},$$

gdzie $\theta = (1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})^{-1}$*. Rząd szacowania jest optymalny.*

- Dla $p = 1$ rząd aproksymacji liniowej i n-członowej jest taki sam: $\simeq n^{-\frac{r+1}{d}}$.
- Jeżeli $1 < p < d^* < q$, to

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d^*} = \frac{r+1}{d} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) < (1-\theta)\frac{r+1}{d}.$$

  Zatem założenie $f \in L_q$ poprawia rząd aproksymacji liniowej.
- Dodatkowe założenie $f \in L_q$ nie poprawia rzędu aproksymacji n-członowej w L_{d^*}. Np., jeżeli $d = 2$, $r = 0$, $q = \infty$, to $d^* = 2$ i:
  – dla $f \in \mathrm{BV}$ mamy $\sigma_n(f)_{L_2} \simeq n^{-1/2}$
  – gdy $p \geq 2$ i $f \in \mathrm{BV} \cap L_\infty$ mamy $\sigma_n(f)_{L_p} \simeq n^{-1/p}$.
- Twierdzenie 5 nie odpowiada na pytanie o rząd aproksymacji n-członowej funkcji z $\mathrm{BV}^r \cap L_q$ w L_p dla $1 \leq p < d^*$, a w szczególności, czy dodatkowe założenie $f \in L_q$ poprawia rząd aproksymacji n-członowej dla $p < d^*$.

Twierdzenie 8 *Niech* $\Lambda \subset \triangle$ *lub* $\Lambda \subset \blacktriangle$, $\#\Lambda = n$. *Wówczas dowolna funkcja* f *postaci* $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \psi_\lambda$ *spełnia nierówność*

$$|f|_{\mathrm{BV}^r(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi, d, r) n^{\frac{r+1}{d}} \|f\|_{L_{d^*}(\mathbb{R}^d)} .$$

Jest to uogólnienie wyniku dla BV z [2] uzyskanego przez P.B, R. DeVore'a, A. Kamont, G. Petrovą i P. Wojtaszczyka.

Niech $\Psi = \{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ i $\overline{\Psi} = \{\overline{\psi}_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ będą układami wektorów w przestrzeni unormowanej $(X, \| \ \|_X)$. Ψ i $\overline{\Psi}$ są ***równoważne***, jeżeli odwzorowanie liniowe A określone przez

$$A : \overline{\psi}_\lambda \mapsto \psi_\lambda \quad \text{dla wszyskich } \lambda \in \Delta$$

rozszerza się do izomorfizmu liniowego domknięcia $\operatorname{span} \overline{\Psi}$ na domknięcie $\operatorname{span} \Psi$.
Dalej $X = L_1(\mathbb{R}^d)$ lub $X = \mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$, $\overline{\Psi} = \mathrm{H} = (h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ jest ***układem Haara*** a Ψ jest innym układem falkowym.

- W $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ układy falkowe są równoważne.
- Sjölin, 1977, [6]: Układy Haara i Franklina nie są równoważne w $L_1([0, 1])$.
- (Nie)równoważność w BV: kwestia uogólnienia wyników dla układu Haara (Cohen et al, 1999 ([4]); Wojtaszczyk, 2003 ([7]) na inne falki.

Wyniki przedstawione dalej ukazały się drukiem w [1]

Twierdzenie 9 *Jeżeli* $\psi^1 \in L_1(\mathbb{R})$ *spełnia*

$$\int_0^\infty \psi^1(t)dt \neq 0, \tag{1}$$

to H *i* Ψ *nie są równoważne w* $L_1(\mathbb{R}^d)$*.*

Twierdzenie 10 *Jeżeli* $\psi^1 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ *spełnia*

$$\int_{[\frac{1}{3},\infty)} D\psi^1(dt) + \int_{[\frac{2}{3},\infty)} D\psi^1(dt) \neq 0, \tag{2}$$

to H *i* Ψ *nie są równoważne w* $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$*. Dokładniej, istnieje ciąg funkcji* $f_n \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$ *taki, że* $\|f_n\|_{\mathrm{BV}} \leq C < \infty$ *i jednocześnie* $|Af_n|_{\mathrm{BV}} \geq c_2 n$ *dla pewnej stałej* $c_2 > 0$*.*

Wniosek 11 *Układy Haara i Strömberga na $\mathbb{R}^d$ nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Niech ψ oznacza ciągłą falkę o nośniku $[0,3]$, skonstruowaną przez Pollena w [5]. Wówczas niestety $\int_0^\infty \psi(t)dt = 0$. Można jednak pokazać:

Wniosek 12 *Niech Ψ będzie układem falkowym na $\mathbb{R}^d$ generowanym przez $\psi^0 = \phi$ i $\psi^1 = \psi(\cdot + l)$, przy czym $l = 1$ lub $l = 2$. Wówczas Ψ i H nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

A co z innymi falkami o nośnikach zwartych?

Wniosek 13 *Załóżmy, że ψ^1 jest ciągła i ma nośnik zwarty. Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $\psi_k = \psi^1(\cdot - k)$ i niech Ψ_k będzie układem falkowym na $\mathbb{R}^d$ generowanym przez ψ_k (zamiast przez $\psi^1 = \psi_0$. Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że Ψ_k i H nie są równoważne w $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Wniosek 14 *Układy Haara i Strömberga nie są równoważne w* $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$.

Układ Haara i falki o nośnikach zwartych:

Stwierdzenie 15 *Falka Pollen'a* ψ *należy do przestrzeni* $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$.

Dowód: Korzystając z konstrukcji Pollena można pokazać, że funkcja skalująca ϕ jest granicą w normie L_1 ciągu funkcji z przestrzeni Sobolewa $W^1(L_1)$.

Wniosek 16 *Niech* Ψ *będzie układem falkowym na* $\mathbb{R}^d$ *generowanym przez* $\psi^0 = \phi$ *i* $\psi^1 = \psi$. *Wówczas* Ψ *i* H *nie są równoważne w* $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$.

1. Niech M oznacza przestrzeń miar o skończonej wariacji. (Wówczas np. $\mathrm{BV}^r = W^{r+1}(M)$) Dla $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ można rozważać przestrzenie

$$W^{\mathbf{r}}(M) = \{f \in L_1 : D_{x_i}^{\alpha_i} f \in M \text{ dla } \alpha_i \leq r_i, i = 1, \ldots, d\},$$
$$SW^{\mathbf{r}}(M) = \{f \in L_1 : D^{\alpha} f \in M \text{ dla } \alpha \leq \mathbf{r}\}$$

gdzie $\alpha \leq \mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq r_i$ dla $i = 1, \ldots, d$.

Znaleźć charakteryzacje (oszacowania na słaby typ) współczynników falkowych dystrybucji z takich przestrzeni.

2. Ograniczoność rzutów zachłannych dla baz falkowych w przestrzeniach $\mathrm{BV}^r(\mathbb{R}^d)$, tzn. oszacowanie postaci

$$|\mathcal{G}_n(f, \Psi)_{\mathrm{BV}^r}|_{\mathrm{BV}^r} \leq C|f|_{\mathrm{BV}^r}.$$

Dowód dla $r = 0$ jest w [2].

[1] Paweł Bechler. Inequivalence of wavelet systems in $L_1(\mathbb{R}^d)$ and $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$. *Bull. Polon. Acad. Sci. Math.*, 53:25–37, 2005.

[2] Paweł Bechler, Ronald DeVore, Anna Kamont, Guergana Petrova, Przemysław Wojtaszczyk. Greedy wavelet projections are bounded in BV. Przyjęte do druku w *Trans. Amer. Math. Soc.*

[3] Albert Cohen, Wolfgang Dahmen, Ingrid Daubechies, Ronald DeVore. Harmonic analysis of the space BV. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 19(1):235–263, 2003.

[4] Albert Cohen, Ronald DeVore, Pencho Petrushev, Hong Xu. Nonlinear approximation and the space $\mathrm{BV}(\mathbf{R}^2)$. *Amer. J. Math.*, 121(3):587–628, 1999.

[5] David Pollen. Daubechies' scaling function on $[0,3]$. *Wavelets*, wolumen 2 serii *Wavelet Anal. Appl.*, strony 3–13. Academic Press, Boston, MA, 1992.

[6] Per Sjölin. The Haar and Franklin systems are not equivalent bases in L^1. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(11):1099–1100, 1977.

[7] P. Wojtaszczyk. Projections and non-linear approximation in the space $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(2):471–497, 2003.

Wniosek 17 *Załóżmy, że $\gamma > 1$ lub $\gamma < 1 - \frac{1}{d}$, s i p spełniają*

$$\frac{s-r-1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \gamma - 1.$$

Wówczas dla dowolnego $\theta \in (0,1)$

$$(B^{s,p}(L_p), \mathrm{BV}^r)_{\theta,q} = B^{t,q}(L_q)$$

dla $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \theta, \quad t = (1-\theta)s + \theta(r+1)$.

Zachodzą także odpowiednie nierówności dla norm typu Gagliardo-Nirenberga. W szczególności dla $t > r+1$ lub $t < r + \frac{1}{2}$

$$\|f\|^2_{W^t(L_2)} \le C \|f\|_{B^{\infty,2t-r}(L_\infty)} \|f\|_{\mathrm{BV}^r}.$$

Wniosek 18 *Układy Haara i Strömberga na* $\mathbb{R}^d$ *nie są równoważne w* $L_1(\mathbb{R}^d)$*.*

Porównanie z wynikiem Sjölina:

- Niech $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ oznaczają układy Haara i Franklina na $[0,1]$.
- Sjölin, 1977 pokazał, że odwzorowanie liniowe takie, że $f_{n-1} \mapsto h_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ nie jest ciągłe w $L_1([0,1])$.
- Odwzorowanie $h_\lambda \mapsto \psi_\lambda$ zachowuje lokalizację falek (lokalizacja ψ_λ, $\lambda = (e, j, k)$, to kostka diadyczna $2^{-j}([0,1]^d + k)$).
- Odwzorowanie $f_{n-1} \mapsto h_n$ przesuwa lokalizację o jeden przedział diadyczny lub nawet zmienia poziom diadyczny funkcji.