GAL – 80 zadań z liczb zespolonych

Postać algebraiczna liczby zespolonej

1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej:

(a) $(2+i)(3-i)+(2+31)(3+41)$,

(b) $(4+\sqrt{3}i)(5-2\sqrt{2}i)-(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)$,

(c) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,

(d) $(3+i)^3+(3-i)^3$,

(e) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,

(f) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$,

(g) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (dla $n=2,3,4\ldots$),

(h) $(1-i)^{4n}$ (dla $n\in\mathbb{N}$).

2. Niech $u=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n\in\mathbb{Z}$ oraz $1+u+u^2$, $1+\overline{u}+\overline{u}^2$.

3. Udowodnij nierówności $\mathrm{Re}z\leqslant|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$ oraz $\mathrm{Im}z\leqslant|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

4. Dla $z,w,\in\mathbb{C}$ udowodnij nierówność $|z+w|\leqslant|z|+|w|$ i określ, kiedy nierówność staje się równością. Korzystając z pierwszej nierówności udowodnij nierówność $\big||z|-|w|\big|\leqslant|z-w|$.

5. Niech $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Udowodnij, że $|z|=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Re}z=\frac{z^2+1}{2z}\qquad\text{i}\qquad\mathrm{Im}z=\frac{z^2-1}{2iz}.$$

6. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z|-z=1+2i$,

(b) $z^2=i$,

(c) $z^2=3-4i$,

(d) $z^2=\overline{z}$,

(e) $z^3=\overline{z}$,

(f) $z^2+2|z|^2=2$,

(g) $z^3+|z|^2+z=0$,

(h) $(z+i)(\overline{z}-i)^2(iz-1)^3=64$.

7. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

(a) $\{z\in\mathbb{C}\mid|z|=2\}$;

(b) $\{z\in\mathbb{C}\mid|z+i|\leqslant1\}$;

(c) $\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z=2\}$;

(d) $\{z\in\mathbb{C}\mid|z-i|+|z+i|=a\}$ dla $a=1,2,3$;

(e) $\{z\in\mathbb{C}\mid1\leqslant|\mathrm{Re}z|<2\}$;

(f) $\{z\in\mathbb{C}\mid0<\mathrm{Re}(iz)<1\}$;

(g) $\{z\in\mathbb{C}\mid|z|=\mathrm{Im}z+1\}$;

(h) $\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}(z^2)=1\}$.

8. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

(a) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\Big(|z|^2 + |w|^2\Big)$,

(b) $|1+z\overline{w}|^2 + |z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$,

(c) $|1-z\overline{w}|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$.

Podaj interpretację geometryczną pierwszej tożsamości.

9. Niech $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = |w| = 1$ i $zw \neq -1$. Udowodnij, że liczba $\dfrac{z+w}{1+zw}$ jest rzeczywista.

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakie wartości może przyjmować suma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k$?

11. Niech $z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \leqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

12. Niech $z \in \mathbb{C}$ Udowodnij, że $|1+z| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lub $|1+z^2| \geqslant 1$.

13. Dane są liczy zespolone u, v, w takie, że $u+v+w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

14. Niech $z \in \mathbb{C}$ i załóżmy, że liczba $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ jest rzeczywista. Udowodnij, że $z \in \mathbb{R}$ lub $|z| = 1$.

15. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x+y+z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left|\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right| = a.$$

16. Niech $a > 0$ i $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + z^{-1}| = a\}$. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(z) = |z|$.

17*. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

(i) $|x+y|^2 + |y+z|^2 + |z+x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x+y+z|^2$;

(ii) $|x+y| + |y+z| + |z+x| \leqslant |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$.

18*. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania

(a) $|z| + |z-1| + |z-2| + |z-3| = 4$,

(b) $\Big|z - |z+1|\Big| = \Big|z + |z-1|\Big|$.

19*. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \ldots |1+z^{2n}| + |1+z^{2n+1}| \geqslant 2n.$$

20*. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} |x_j \overline{y_k} - x_k \overline{y_j}|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Schwarza:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\right|^2.$$

21*. Dane są liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| > 0$. Udowodnij, że

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

1. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i, (b) $2+2i$, (c) $-1+\sqrt{3}i$, (d) $\dfrac{3+2i}{-2+3i}$, (e) $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$, (f) $2+\sqrt{3}+i$.

2. Niech $z = r\cdot\operatorname{cis}\alpha$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Wyznacz postać trygonometryczną liczby $z^m \cdot \overline{z}^n$.

3. Niech $\alpha \in [0, 2\pi)$. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$, (b) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, (c) $1+i\operatorname{tg}\alpha$, (d) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$|z| = 1 = \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right|.$$

5. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1+i)^{2018}$, (b) $(1+i\sqrt{3})^n$, (c) $\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^n$, (d) $\left(\dfrac{9+5i}{7-2i}\right)^8$, (e) $\dfrac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$.

6. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $\dfrac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\psi - i\sin\psi}$, (b) $(1-\cos\phi+i\sin\phi)^n$ (c) $(\operatorname{tg}\phi+i)^n$.

7. Pokaż, że każdą liczbę zespoloną $z \neq -1$ taką, że $|z| = 1$ można przedstawić w postaci $\dfrac{1+ti}{1-ti}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.

8. Niech $z = \operatorname{cis}\theta$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$ oraz $\sin(n\theta) = \dfrac{1}{2i}\left(z^n - \dfrac{1}{z^n}\right)$.

9*. Ile jest liczb naturalnych n mniejszych od 2018 i takich, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n = \sin(n\alpha) + i\cos(n\alpha)$?

10. Ciągi liczb rzeczywistych x_n i y_n spełniają dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równości $(1-i\sqrt{3})^n = x_n + y_n i$. Oblicz $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n$ oraz $x_n x_{n-1} + y_n y_{n-1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$

11. Wyraź $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $\operatorname{tg}(5x)$ przez $\operatorname{tg} x$

12. Pokaż, że $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \dfrac{1+i\operatorname{tg}(n\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(n\alpha)}$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzór na sumę $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n}{2k}$.

14. Udowodnij tożsamości:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

15. Znajdź zwarte wzory dla sum:

(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx)$, (b) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx)$, (c) $\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$, (d) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

16*. Oblicz wartości wyrażeń:

(a) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$, (b) $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$,

(c) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$, (d) $\cos^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{18}+\cos^2\frac{7\pi}{18}$.

17*. Załóżmy, że $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$. Udowodnij, że

(a) $\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=0$,

(b) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(3\alpha)+\cos(3\beta)+\cos(3\gamma)$,

(c) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(3\alpha)+\sin(3\beta)+\sin(3\gamma)$.

18*. Niech $\theta=\frac{\pi}{6}$. Oblicz sumy (a) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(k\theta)}{\cos^k\theta}$, (b) $\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)\cdot\cos^k\theta$.

19*. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian $P\in\mathbb{R}[x]$ stopnia n taki, że $\cos(2n\alpha)=P(\sin^2\alpha)$ dla każdego $\alpha\in\mathbb{R}$.

20*. Niech $n\in\mathbb{N}$ i $x,y\in\mathbb{R}$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-k)x+ky)=\left(2\cos\frac{x-y}{2}\right)^n\cdot\cos\frac{n(x+y)}{2}.$$

Pierwiastki zespolone i wielomiany

1. Znajdź postać algebraiczną pierwiastków stopnia 3 z jedności (a) korzystając z ich postaci trygonometrycznej, (b) wyznaczając x,y z równości $(x+yi)^3=1$.

2. Naszkicuj na płaszczyźnie Gaussa: (a) pierwiastki z jedności stopnia $3,4,6,8$; (b) pierwiastki stopnia 3 i 4 z liczby -1, (c) pierwiastki stopnia 3 z liczby $8i$.

3. Wyznacz liczbę pierwiastków ε_k z jedynki stopnia 600 takich, że $\varepsilon_k^6=1$.

4. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n.

5. Wyznacz zespolone pierwiastki trójmianów

(a) z^2-2z+5,

(b) $z^2+4iz-3$,

(c) $z^2+(2i-7)z+13-i$.

6. Oblicz $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$.

7. Niech $n\in\mathbb{N}$, $n>2$ i $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}(\varepsilon_k\overline{z})\cdot\varepsilon_k.$$

8. Niech $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. Udowodnij równoważność warunków:

(i) współczynniki $a_0, \ldots, a_{n-1}$ są liczbami rzeczywistymi,

(ii) jeżeli $z \in \mathbb{C}$ i $p(z) = 0$, to także $p(\overline{z}) = 0$.

9. Udowodnij, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów nierozkładalnych o współczynnikach rzeczywistych stopnia 1 lub 2 i rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do mnożenia jego czynników przez wielomiany odwracalne (czyli liczby rzeczywiste różne od 0).

10. Udowodnij twierdzenie o równości wielomianów dla wielomianów o współczynnikach zespolonych.

11. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wielomian $p(z) = z^3 + (3+i)z^2 - 3z - (a+i)$ ma pierwiastek rzeczywisty?

12. Wyznacz wszystkie zespolone rozwiązania z równania

(a) $81(z+i)^4 = |z|^8$,

(b) $(z+2)^6 = (z-2)^6$.

13. Czy wielomian $x^{2018} + x^{2017} + \ldots + x + 1$ może być kwadratem innego wielomianu o współczynnikach zespolonych?

14. Niech $p, q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$ i załóżmy, że pierwiastki trójmianu kwadratowego $z^2 + pz + q^2$ mają równe moduły. Udowodnij, że $p/q \in \mathbb{R}$.

15. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ i $|a| = |b| = |c| \neq 0$ i załóżmy, że trójmian $az^2 + bz + c$ ma pierwiastek o module 1. Pokaż, że $b^2 = ac$.

16. Niech $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie pierwiastki stopnia n z jedności. Oblicz wartości wyrażeń

(a) $\varepsilon_0^k + \varepsilon_1^k + \ldots + \varepsilon_{n-1}^k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

(b) $(i + \varepsilon_0)(i + \varepsilon_1) \ldots (i + \varepsilon_{n-1})$,

(c) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \varepsilon_j \varepsilon_k$.

17*. Rozwiąż w liczbach zespolonych układy równań

$$\text{(a)} \begin{cases} u + v + w = 0 \\ u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ u^3 + v^3 + w^3 = 24 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 6 \\ u^3 + v^3 + w^3 = uvw - 4 \\ uv + vw + wu = -3 \end{cases}$$

18. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian $x^2 + x + 1$ jest dzielnikiem wielomianu

(a) $x^{2n} + x^n + 1$,

(b) $(x+1)^n + x^n + 1$?

19*. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n równanie $|z - (1+i)^n| = z$ ma rozwiązanie zespolone.

20. Niech $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, przy czym $a_0 \geqslant a_1 \ldots \geqslant a_n > 0$. Udowodnij, że wielomian p nie ma pierwiastków zespolonych o module mniejszym od 1.

21*. Powiemy, że pierwiastek stopnia n z jedności ε_m jest *pierwiastkiem pierwotnym*, jeżeli ε_m nie jest pierwiastkiem z jedności stopnia niższego niż n. Przez $\mu(n)$ oznaczamy sumę pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia n (jest to tzw. funkcja Möbiusa).

(a) Udowodnij, że ε_m jest pierwiastkiem pierwotnym wtedy i tylko wtedy, gdy liczby n i m są względnie pierwsze.

(b) Udowodnij, że $\varepsilon_m, \varepsilon_m^2, \ldots, \varepsilon_m^n$ to wszystkie pierwiastki z jedności stopnia n.

(c) Udowodnij, że $\overline{\varepsilon_m}$ też jest pierwiastkiem pierwotnym z jedności stopnia n.

(d) Wyznacz liczby pierwiastków pierwotnych z jedności stopni 15, 24 i 32.

(e) Oblicz $\mu(3)$, $\mu(6)$, $\mu(12)$.

(f) Udowodnij, że jeżeli liczby r i s są względnie pierwsze, to ε jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia rs wtedy i tylko wtedy, gdy ε jest iloczynem pierwiastka pierwotnego stopnia r i pierwiastka pierwotnego stopnia s.

(g) * Niech $k > 1$ oznacza liczbę naturalną. Udowodnij, że $\sum_{n|k} \mu(n) = 0$.

22*. Wykaż, że liczba $\zeta = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia mimo, że $|\zeta| = 1$.

23*. Liczby zespolone a, b są pierwiastkami wielomianu $z^4 + z^3 - 1$. Udowodnij, że liczba ab jest pierwiastkiem wielomianu $z^6 + z^4 + z^3 - z^2 - 1$.

24*. Udowodnij równości

(a) $\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

(b) $\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Zadania różne

1. Oblicz (i zapisz wynik w postaci algebraicznej):

(a) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{18}}{(1+i\sqrt{3})^{12}}$,

(b) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$,

(c) $\left(\frac{2-i\sqrt{6}}{1-i}\right)^{2018}$.

2. Liczby z_1 i z_2 są różnymi zespolonymi rozwiązaniami równania

$$z^2 - (1+2i)z - 1 + 3i = 0.$$

Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2017}.$$

3. Niech $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pokaż, że

(a) $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2) = a^3 + b^3$,

(b) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

4. Niech $a, b \in \mathbb{C}$ i x to jeden z piarwiastków stopnia 2 z liczby $a^2 - b^2$. Udowodnij, że $|a+x| + |a-x| = |a+b| + |a-b|$.

5. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z| + z = 8 + 4i$,

(b) $(z+i)^4 - (z-i)^4 = 0$,

(c) $z^2 + 3a|z| + a^2 = 0$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

6. Oblicz pierwiastki zespolone wielomianów:

(a) $z^2 - 3z + 3 + i$,

(b) $z^2 + (1+4i)z - (5+i)$,

(c) $z^4 - 2x^4 + 4$,

(d) $z^4 + (15+7i)z^2 + 8 - 5i$,

(e) $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1$.

7. Niech $z \in \mathbb{C}$. Udowodnij implikacje

(a) $|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z^2 - z + i| < 3$,

(b) $|z| \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$.

(c) $\mathrm{Re}(z) > 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots$

9. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\overline{z})^n$ jest rzeczywista?

10. Wyznacz wszystkie pary liczb zespolonych x, y, które są rozwiązaniami układów równań:

(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ 12(x+y) + 7xy = 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$.

Odp: (a) $x = \frac{-16+8\sqrt{2}i}{7}, y = \frac{-16-8\sqrt{2}i}{7}$ lub na odwrót (podstawienie $u = x+y, v = xy$), (b) $(x,y) \in \{(2,1),(1,2),(0,-3),(-3,0),(1,-2),(-2,1),(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2})(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2})\}$, (c) $(x,y) \in \{(1,3),(3,1),(-\frac{5}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2}, -\frac{5}{2}-\frac{i\sqrt{23}}{2}),(-\frac{5}{2}-\frac{i\sqrt{23}}{2}, -\frac{5}{2}+\frac{i\sqrt{23}}{2})\}$.

11. Czy istnieje wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$ taki, że $\deg p \geqslant 1$ i $p(z) = \overline{z}$ dla każdej liczby zespolonej z?

12. Dane są liczby zespolone a, b, c takie, że $|a| = |b| = |c| > 0$, natomiast liczba zespolona w jest pierwiastkiem trójmianu $p(z) = az^2 + bz + c$. Udowodnij, że

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant |w| \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

13*. Liczby zespolone z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 mają równe moduły i spełniają równości

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0.$$

Udowodnij, że liczby te są pierwiastkami stopnia 5 z pewnej liczby zespolonej.

14*. Niech $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnij, że wielomian $p(z) = az^3 + bz^2 + \overline{b}z + \overline{a}$ ma pierwiastek o module 1.

Wskazówka $p(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(1/\overline{z}) = 0$.

15*. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 3$ oraz $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Udowodnij, że każdy pierwiastek w wielomianu $p(z) = z^n + az + 1$ taki, że $\mathrm{Im}(w) \neq 0$, spełnia oszacowanie

$$|w|^n \geqslant \frac{1}{n-1}.$$