Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

24-11-2017 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

1. Który z poniższych podzbiorów $\mathbb{C}$ jest grupą z działaniem dodawania liczb zespolonych i 0 jako elementem neutralnym

- [ ] $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{Z}\}$;
- [ ] $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$;
- [ ] $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) = 0\}$.

2. Niech $z \in \mathbb{C}$ będzie zespolonym pierwiastkiem z 1 pewnego stopnia. Wynika z tego, że

- [ ] $i\bar{z}$ jest pierwiastkiem z 1 pewnego stopnia;
- [ ] $-z^2$ jest pierwiastkiem z 1 pewnego stopnia;
- [ ] $z + 1$ jest pierwiastkiem z 1 pewnego stopnia.

3. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ taki, że $p(i) = 0$ i $p(0) \neq 0$. Wynika z tego, że

- [ ] stopień wielomianu p jest równy 2 lub wiecej;
- [ ] istnieje wielomian $q \in \mathbb{R}[x]$ taki, że $p(x) = (x - i)q(x)$;
- [ ] istnieje wielomian $q \in \mathbb{R}[x]$ taki, że $p(x) = (x^2 + 1)q(x)$.

4. W przestrzeni liniowej X dane są liniowo zależne wektory x, y, z. Wynika z tego, że

- [ ] jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową dwóch pozostałych;
- [ ] każdy z tych wektorów jest kombinacją liniową dwóch pozostałych;
- [ ] $\dim(\mathrm{span}(x, y, z)) = 2$.

5. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{5,7}$. Wówczas

- [ ] jeśli $\mathrm{rank}(A) = 4$, to $\mathrm{rank}(A^T) = 4$;
- [ ] jeśli $\dim(\ker A) = 3$, to $\dim(\ker A^T) = 3$;
- [ ] jest możliwe, że kolumny macierzy A są liniowo niezależne;

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

6. (1 pkt.) Liczba $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem stopnia 10 z liczby $-i2^{100}$. Ile wynosi $|z|$ i $\left|\frac{1}{z^2}\right|$?

Odp:

---

7. (1 pkt.) Sformułuj **zasadnicze twierdzenie algebry**.

Odp:

---

8. (1 pkt.) Przestrzeń liniowa X nad ciałem $\mathbb{K}$ ma bazę złożoną z n wektorów. Uzasadnij (nie odwołując się do pojęcia wymiaru przestrzeni liniowej), że każda inna baza przestrzeni X także składa się z n wektorów.

Odp:

---

9. (1 pkt.) Dane są podprzestrzenie liniowe $X, Y \subset \mathbb{C}^{3,4}$ takie, że $\dim(X \cap Y) = 2$, $\dim Y = 6$, oraz $\mathbb{C}^{3,4} = X + Y$. Podaj, jakie wartości może przyjmować $\dim X$?

Odp:

---

10. (1 pkt.) Czy istnieje nieosobliwa macierz $A \in \mathbb{R}^{12,12}$ taka, że $A^{12} = 0$? Uzasadnij odpowiedź.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

24-11-2017 – 1. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 8 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Dana jest liczba zespolona z taka, że $|z| = 1$. Udowodnij, że

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z^2+1}{2z} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

2. Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^{2017}$ są liniowo niezależne. Zbadaj, dla jakich wartości $a \in \mathbb{C}$ wektory

$$a\vec{u} + i\vec{v}, \quad a\vec{v} + i\vec{w}, \quad a\vec{w} + i\vec{u}$$

są liniowo niezależne.

3. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_4$ (nad ciałem $\mathbb{R}$) dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid p(2i) = p(1) = 0\},$$

$$V = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid \forall_{x\in\mathbb{R}}\ p(x) = p(-x)\}$$

(a) Znajdź bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$.

(b) Znajdź bazę podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}[x]_4$ takiej, że $\mathbb{R}[x]_4 = (U+V) \oplus W$.

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n,n}$ dany jest podzbiór

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \vec{e}_1 \in \ker(A - A^T)\}$$

(gdzie $\vec{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$). Pokaż, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{n,n}$, znajdź jej wymiar i wskaż bazę.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-01-2018 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

1. Wszystkie współczynniki macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ są liczbami całkowitymi. Wówczas

- [ ] jest możliwe, że $\det_n A = \frac{1}{2}$;
- [ ] jest możliwe, że $\det_n(A^3) = 16$;
- [ ] jeżeli $\det_n A \neq 0$, to wszystkie współczynniki macierzy A^{-1} są liczbami wymiernymi.

2. Wektory x, y w przestrzeni unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ są liniowo zależne. Wynika z tego, że

- [ ] $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$;
- [ ] $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$;
- [ ] $\langle x, y\rangle \neq 0$.

3. W przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wektory y_1, y_2, y_3, y_4 uzyskano za pomocą ortogonalizacj Grama - Schmidta z liniowo niezależnego układu x_1, x_2, x_3, x_4. Wówczas

- [ ] układ y_1, y_2, y_3, y_4 jest liniowo niezależny;
- [ ] $\mathrm{span}(y_1, y_2) = \mathrm{span}(x_1, x_2)$;
- [ ] $\mathrm{span}(y_3, y_4) \subset \mathrm{span}(x_1, x_2)^{\perp}$.

4. Niech $f \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}^3)$. Wówczas

- [ ] f nie może być epimorfizmem;
- [ ] f nie może być monomorfizmem;
- [ ] f nie może być izomorfizmem.

5. Załóżmy, że f jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X wymiaru n. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim(\mathrm{im} f) \leqslant 1$;
- [ ] $\dim(\ker f) \geqslant n - 1$;
- [ ] jeśli $n = 1$, to f jest izomorfizmem.

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

6. Niech $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ i załóżmy, że układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony. Uzasadnij, że $m \geqslant n$.

Odp:

---

7. Sformułuj podaną na wykładzie (i w skrypcie) definicję wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Odp:

---

8. Podaj wymiar przestrzeni liniowej $L(\mathbb{R}^{2,2}, L(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}[x]_2)^*))$.

Odp:

---

9. W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dane są ortonormalne wektory u, v, w. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wektory $u + v + w$ i $u + av + w$ są prostopadłe? Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

---

10. Funkcjonały liniowe $\phi_1(\vec{x}) = x_1 - x_2$, $\phi_2(\vec{x}) = x_2 - x_3$, $\phi_3(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ są bazą dualną do bazy $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $\vec{e}_1 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$.

Odp:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-01-2018 – 2. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 10 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Dla danej liczby $a \in \mathbb{R}$ rozważamy układ równań

$$\begin{cases} ax + y + z = -a \\ x + ay + z = -a \\ x + y + az = 2a \end{cases}$$

Zbadaj, dla jakich wartości a układ ten jest (i) niesprzeczny, (ii) oznaczony, (iii) sprzeczny.

2. Dane są liczby $x, y \in \mathbb{R}$ oraz macierze

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x & 0 \\ x & x & \dots & x & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y & \dots & 0 & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Oblicz wyznacznik $\det_{2n} \begin{bmatrix} xI_n & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}$.

3. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\}.$$

(gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$). Niech $\vec{a} = [1, -2, 1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^5$. Oblicz normy rzutów ortogonalnych wektora $\vec{a}$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

4. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}^n)$ jest dane wzorem

$$f(p) = [p'(0), p'(1), \dots, p'(n-1)]^T.$$

Udowodnij, że istnieje podprzestrzeń liniowa $V \subset \mathbb{R}[x]_n$ o następujących własnościach:

(i) $\dim V = \dim(\mathrm{im} f|_V) = \operatorname{rank} f$,

(ii) można wybrać bazy podprzestrzeni V i $W = \mathrm{im} f|_V$, w których przekształcenie liniowe $f|_V \in L(V, W)$ ma macierz I_r, gdzie $r = \operatorname{rank} f$.

Uwaga: $f|_V$ oznacza obcięcie przekształcenia f do podprzestrzeni V, czyli dla $p \in V$ $f|_V(p) = f(p)$.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Który z poniższych zbiorów z podanym działaniem jest grupą nieabelową?

☐ zbiór permutacji zbioru 2-elementowego z działaniem składania permutacji;

☐ zbiór liczb zespolonych o module 1 z działaniem mnożenia liczb zespolonych;

☐ zbiór macierzy nieosobliwych z $\mathbb{R}^{2,2}$ z działaniem mnożenia macierzy.

2. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

☐ $|z\overline{w} + i| = |\overline{z}w - i|$;

☐ $|z + w| \leqslant |z| + |w|$;

☐ $|z - w| \geqslant |z| - |w|$.

3. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i układ wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rozpina przestrzeń X. Wynika z tego, że

☐ $\dim X \leqslant k$

☐ $\dim X \geqslant k$;

☐ z układu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ można wybrać bazę przestrzeni X.

4. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie liniowe U, V takie, że $X = U \oplus V$. Wynika z tego, że

☐ $U \cap V = \emptyset$; ☐ $U \cup V = X$; ☐ $U + V = X$.

5. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_9$ dane są podprzestrzenie liniowe U, V takie, że $\mathbb{R}[x]_9 = U + V$. Wówczas

☐ $\min(\dim U, \dim V) < 5$;

☐ $\max(\dim U, \dim V) \geqslant 5$;

☐ $\dim U + \dim V = 10$.

Odpowiedzi: 1 - NNT, 2 - TTT, 3 - TNT, 4 - NNT, 5 - NTN

6. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

- [ ] $\ker(A^T) = \{0\}$;
- [ ] $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$;
- [ ] $\det_n(A^{2018}) > 0$.

---

7. Dana jest macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i baza $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ taka, że $\ker(A) = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. (gdzie $1 \leqslant k < n$) Wówczas

- [ ] układ wektorów $Ax_{k+1}, Ax_{k+2}, \ldots, Ax_n$ jest liniowo niezależny;
- [ ] układ wektorów $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ jest liniowo niezależny;
- [ ] $\operatorname{rank}(A) = n - k$.

---

8. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową wymiaru 10 i wektory $x, y \in X$ są liniowo niezależne. Wówczas

- [ ] $\dim(\operatorname{span}(x, y)^{\perp}) = 8$;
- [ ] $y \in \operatorname{span}(x)^{\perp}$;
- [ ] $|\langle x, y \rangle| < \|x\| \, \|y\|$.

---

9. Dane są przekształcenia liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ i $g \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. Wynika z tego, że

- [ ] $f \circ g$ nie jest monomorfizmem;
- [ ] $f \circ g$ nie jest epimorfizmem;
- [ ] $\operatorname{rank}(f \circ g) < 4$.

---

10. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wynika z tego, że

- [ ] macierz A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej i nieosobliwej;
- [ ] macierz A jest podobna do pewnej macierzy trójkątnej górnej i nieosobliwej;
- [ ] liczba 0 nie jest wartością własną macierzy A.

---

11. Które pary poniżej składają się z macierzy podobnych?

- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

---

12. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna i dodatnio określona. Wynika z tego, że

- [ ] A jest odwracalna;
- [ ] $\mathrm{trA} > 0$;
- [ ] wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego macierzy A są liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

Odpowiedzi: 6 - TNT, 7 - TNT, 8 - TNT, 9 - TTT, 10 - NTT, 11 - NTT, 12 - TTT

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Część teoretyczna II

1. (1 pkt.) Podaj definicję ogólnej grupy liniowej

Odp:

2. (1 pkt.) Wyznacz moduł i argument główny liczby zespolonej $-2 + 2i$.

Odp:

3. (2 pkt.) Podaj definicje bazy i wymiaru przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

4. (2 pkt.) Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ i liczba zespolona z, będąca pierwiastkiem wielomianu p. Udowodnij, że liczba $\overline{z}$ też jest pierwiastkiem wielomianu p.

Odp:

5. (1 pkt.) Sformułuj podaną w skrypcie i na wykładzie definicję wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Odp:

---

6. (2 pkt.) X jest przestrzenią liniową, $\dim X < \infty$ i endomorfizm $f \in L(X)$ jest epimorfizmem. Uzasadnij, że f jest monomorfizmem.

Odp:

---

7. (1 pkt.) X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Podaj definicję przestrzeni dualnej do X.

Odp:

---

8. (2 pkt.) Rozstrzygnij, czy macierz $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ jest dodatnio określona i czy jest ujemnie określona. Uzasadnij odpowiedzi.

Odp:

05/02/2018

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

1. Dana jest liczba zespolona $w = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną iloczynu

$$(1+w)\cdot(1+w^2)\cdot(1+w^3)\cdot\ldots\cdot(1+w^{100}).$$

2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ zdefiniowano podprzestrzenie liniowe

$$V_a = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\1+a\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\-2-a\end{bmatrix}\right), \qquad W_b = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}0\\3\\-1-b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2+b\\-2\end{bmatrix}\right).$$

Dla jakich wartości parametrów a, b zachodzi $\mathbb{R}^3 = V_a \oplus W_b$?

3. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ takie, że macierz $I_n - AB$ jest nieosobliwa. Udowodnij, że macierz $I_n - BA$ też jest nieosobliwa.

4. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ zdefiniowano podprzestrzenie liniowe

$$X = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right), \qquad Y = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + mx_2 + mx_3 = 0\right\},$$

gdzie $m \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m miara kąta pomiędzy pewnym wektorem prostopadłym do przestrzeni X i pewnym wektorem prostopadłym do przestrzeni Y jest równa $\frac{\pi}{3}$?

5. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{2,2}$ dane są macierze

$$A_1 = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

(a) Wykaż, że układ (A_1, A_2, A_3, A_4) jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$.
(b) Układ funkcjonałów $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^* \in (\mathbb{R}^{2,2,})^*$ jest bazą dualną do bazy (A_1, A_2, A_3, A_4). Funkcjonał $f^* \in (\mathbb{R}^{2,2,})^*$ jest dany wzorem

$$f^*\left(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}.$$

Wyznacz liczby $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}$ takie, że $f^* = \beta_1 g_1^* + \beta_2 g_2^* + \beta_3 g_3^* + \beta_4 g_4^*$.

6. Zbadaj ile jest endomorfizmów $f \in L(\mathbb{R}[x]_3)$ spełniających warunki:

(i) $\ker f = \operatorname{span}(1, x)$,
(ii) $f \circ f = f$,
(iii) $f(x^2) = 1 - x + x^2$,
(iv) jeżeli $f(x^3) = p$, to $p(1) = p'(1) = 0$.

Wyznacz macierz i bazę Jordana każdego takiego endomorfizmu.

7. Macierz $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest trójkątna górna i wszystkie elementy na przekątnej tej macierzy są różne. Udowodnij, że macierze M i M^T są podobne.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 2. termin

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Który z poniższych podzbiorów zbioru liczb całkowitych jest grupą z działaniem dodawania?

- [ ] zbiór liczb całkowitych nieujemnych;
- [ ] zbiór liczb całkowitych parzystych;
- [ ] zbiór liczb całkowitych nieparzystych.

2. Dana jest liczba zespolona $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. Wówczas

- [ ] dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $z^n = z$;
- [ ] dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $z^n = \overline{z}^n$;
- [ ] dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $|z|^n = \frac{1}{2}$.

3. Które z poniższych podzbiorów są podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}[x]$?

- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$;
- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p'(0) = 1\}$;
- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0)^2 + p'(0)^2 = 0\}$.

4. Układ wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ jest bazą przestrzeni liniowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

- [ ] $\dim X = n$;
- [ ] $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- [ ] $\dim X = n$ i $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5. Niech $A \in \mathbb{R}^{4,7}$. Wówczas

- [ ] $\operatorname{rank}(A^T) + \dim(\ker A) = 4$;
- [ ] $\operatorname{rank}(A^T) + \dim(\ker A) = 7$;
- [ ] $\operatorname{rank}(A^T) + \dim(\ker A^T) = 4$.

6. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ i macierz B jest nieosobliwa. Wówczas

- [ ] $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AB)$;
- [ ] $\ker A = \ker(AB)$;
- [ ] $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(AB)$.

---

7. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową, $x \in X$ i $v \in X$ jest rzutem ortogonalnym x na V. Wynika z tego, że

- [ ] $\|v\| < \|x\|$;
- [ ] $\|v\| \leq \|x\|$;
- [ ] $\|v\| = \|x\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v = x$.

---

8. Przestrzenie liniowe X, Y nad ciałem $\mathbb{K}$ mają skończone wymiary i $f \in L(X, Y)$. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli f jest monomorfizmem, to $\dim X \leq \dim Y$;
- [ ] jeżeli f jest epimorfizmem, to $\dim X \leq \dim Y$;
- [ ] jeżeli f jest izomorfizmem, to $\dim X \leq \dim Y$.

---

9. X jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru, $f \in L(X)$ oraz $\operatorname{rank} f = 5$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim X \geq 5$;
- [ ] $\operatorname{rank}(f \circ f) \leq 5$;
- [ ] $\dim(\ker f) \leq 5$.

---

10. Która z poniższych przestrzeni jest izomorficzna z przestrzenią liniową $\mathbb{R}^6$?

- [ ] $\mathbb{C}^6$;
- [ ] $\mathbb{R}^{2,3}$;
- [ ] $(\mathbb{R}^6)^*$.

---

11. Które pary poniżej składają się z macierzy podobnych?

- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

---

12. Wielomian charakterystyczny macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest równy $x^n - 1$. Wynika z tego, że

- [ ] A jest odwracalna;
- [ ] macierz A jest podobna do pewnej macierzy trójkątnej górnej $T \in \mathbb{R}^{n,n}$;
- [ ] wielomian charakterystyczny macierzy A^T jest równy $x^n - 1$.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Część teoretyczna II

1. (1 pkt.) Podaj przykład grupy mającej dokładnie 24 elementy.

Odp:

2. (1 pkt.) Podaj wzory na **wszystkie** zespolone pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej a.

Odp:

3. (2 pkt.) Podaj definicję przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

4. (1 pkt.) Sformułuj twierdzenie Kroneckera - Capellego.

Odp:

5. (1 pkt.) Oblicz wyznacznik $\det_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

---

6. (1 pkt.) Podaj definicję iloczynu skalarnego na przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$.

Odp:

---

7. (2 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową i $x, y \in X$. Udowodnij, że $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Odp:

---

8. (2 pkt.) Wymień cztery różne niezmienniki relacji podobieństwa macierzy zdefiniowanej na $\mathbb{C}^{n,n}$.

Odp:

---

9. (1 pkt.) Podaj definicję macierzy symetrycznej dodatnio określonej.

Odp:

20/02/2018

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 2. termin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

---

1. Niech $n \geqslant 1$ i $u_1, u_2, \ldots, u_n$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia $n+1$ różne od 1.

(a) Znajdź wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ stopnia n taki, że $f(u_k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Oblicz część rzeczywistą i urojoną iloczynu $(2 - u_1) \cdot (2 - u_2) \cdot \ldots \cdot (2 - u_n)$.

2. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dane są podzbiory

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid p(1-3i) = 0\}, \qquad W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid \forall_{x \in \mathbb{R}} \ p'(x) = p'(-x)\}$$

(a) Udowodnij, że U i W są podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}[x]_3$

(b) Wyznacz bazy przestrzeni $U \cap W$ i $U + W$. Czy $\mathbb{R}[x]_3 = U \oplus W$?

3. Dane są macierze $A \in \mathbb{C}^{m,m}$ i $B \in \mathbb{C}^{m,n}$ takie, że $\operatorname{rank}[A \mid B] = \operatorname{rank} A$. Udowodnij, że istnieje macierz $X \in \mathbb{C}^{m,n}$ taka, że $B = AX$.

4. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ zdefiniowano podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\}, \quad Y = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $X + Y$ i oblicz rzut ortogonalny wektora $[1, 1, 1, 1]^T$ na podprzestrzeń $X \cap Y$.

5. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}[t]_2, (\mathbb{R}^2)^*)$ jest zadane wzorem

$$f(p)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = p(0) \cdot x_1 + p(1) \cdot x_2, \qquad \text{dla } p \in \mathbb{R}[t]_3, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Znajdź bazę podprzestrzeni $\ker f$.

(b) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazie $1, t, t^2$ w przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$ i bazie dualnej do bazy $[1, 0]^T, [0, 1]^T$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^*$.

6. Wyznacz postać Jordana i znajdź bazę Jordana dla macierzy

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

7. Wyznacz wszystkie wartości $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz symetryczna

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

jest ujemnie określona.