Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

10-11-2016 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

---

1. Który z poniższych podzbiorów $\mathbb{R}$ jest grupą z działaniem mnożenia liczb i 1 jako elementem neutralnym?

☐ $\mathbb{Z}$; ☐ $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$; ☐ $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

---

2. Dane są liczby zespolone $z = 4\Big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5})\Big)$ i $w = 1 + i$. Wówczas

☐ $|z \cdot \overline{w}^4| = 1$; ☐ $|z \cdot (\overline{w})^{-4}| = 1$; ☐ $|\frac{1}{2}z + w^6| \leqslant 10$.

---

3. Dany jest wielomian $p(x) = x \cdot q(x)$, gdzie $q \in \mathbb{R}[x]$ jest wielomianem stopnia 5 takim, że $q(0) \neq 0$ i $q(i) = 0$. Wynika z tego, że

☐ istnieje liczba $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taka, że $p(a) = 0$;

☐ wielomian p ma co najmniej 4 różne pierwiastki zespolone;

☐ wielomian p może mieć 5 różnych pierwiastków rzeczywistych.

---

4. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}^3$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^3$, jeżeli

☐ $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$;

☐ $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$;

☐ $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$.

---

5. W przestrzeni liniowej X dane są wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i $n \geqslant 2$. Wynika z tego, że

☐ jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne, to $\dim X = n$;

☐ jeśli $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to $\dim X \geqslant n$;

☐ jeśli $\dim X < n$, to wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo zależne.

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

6. (1 pkt.) Podaj wszystkie zespolone pierwiastki stopnia 4 z liczby 4.

Odp:

---

7. (1 pkt.) Macierz $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ jest nieosobliwa i $X, Y \in \mathbb{R}^{8,5}$

(a) Uzasadnij, że macierz $A \cdot A$ też jest nieosobliwa.

Odp:

(b) Uzasadnij implikację $X \cdot A = Y \cdot A \implies X = Y$.

Odp:

---

8. (1 pkt.) Podaj definicję *bazy* przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ i wskaż dwie różne bazy w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ (nad ciałem $\mathbb{R}$).

Odp:

---

9. (2 pkt.) W przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ dane są wektory $x, y_1, \ldots, y_m$, $m \geqslant 1$, oraz $0 \neq x \in \operatorname{span}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Pokaż, że dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\operatorname{span}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \ldots, y_m).$$

Odp:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

10-11-2016 – 1. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 5 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie

$$z^3 = (iz + 1)^3.$$

2. Dla danej macierzy $D \in \mathbb{R}^{2,3}$ określamy zbiór

$$V_D = \left\{ M \in \mathbb{R}^{3,2} : DM = M^T D^T \right\}.$$

(a) Pokaż, że zbiór V_D jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{3,2}$.

(b) Znajdź macierz $D \in \mathbb{R}^{2,3}$ taką, że zbiór

$$\left\{ DM \in \mathbb{R}^{2,2} : M \in V_D \right\}$$

jest zbiorem wszystkich macierzy symetrycznych z $\mathbb{R}^{2,2}$.

3. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{2016}$ dane są liniowo niezależne wektory $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$. Pokaż, że wektory

$$a\vec{w} + \vec{x}, \quad b\vec{x} + \vec{y}, \quad c\vec{y} + \vec{w}$$

są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $abc \neq -1$.

4. Dane są zbiory $M \subset (0, +\infty)$, $A \subset [0, 2\pi)$. Niech

$$G = \{ me^{ia} : m \in M \text{ i } a \in A \} \subset \mathbb{C}.$$

Pokaż, że zbiór G jest grupą z działaniem mnożenia liczb zespolonych wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) zbiór M jest grupą z działaniem mnożenia liczb rzeczywistych

oraz

(ii) zbiór A jest grupą z działaniem $\oplus$ takim, że

$$\forall_{a,b,c \in A} \quad a \oplus b = c \iff \left(\exists_{k \in \mathbb{Z}} \ a + b = 2k\pi + c \right).$$

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-01-2017 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

---

1. W przestrzeni liniowej X wymiaru 7 dane są podprzestrzenie liniowe U, V obie wymiaru 4. Wówczas **jest możliwe**, że

☐ $U \cap V = \{0\}$; ☐ $X = U + V$; ☐ $X = U \oplus V$.

---

2. $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, układ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jest bazą $\mathbb{R}^n$ taką, że układ wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ jest bazą $\ker A$. Wówczas

☐ $\operatorname{rank}(A^T) = n - k$;

☐ układ wektorów $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \ldots, A\vec{v}_n$ rozpina przestrzeń $\mathbb{R}^m$;

☐ układ wektorów $A\vec{v}_{k+1}, \ldots, A\vec{v}_n$ rozpina przestrzeń $\operatorname{im} A$.

---

3. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wówczas

☐ $\det_n(-A) = -\det_n(A)$;

☐ jeżeli $\det_n(A) = \det_n(-A)$, to n jest liczbą parzystą;

☐ $\det_n(A^2) > 0$.

---

4. W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest układ ortonormalny u_1, u_2, u_3, oraz wektory $x = u_1 - 3u_2 + 2u_3$, $y = 5u_1 + u_2 - u_3$, $z = 2u_1 + u_2 + 3u_3$. Wówczas

☐ $x \perp y$; ☐ $y \perp z$; ☐ $\|x\| = \|z\|$.

---

5. X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X = 5$, $\dim Y = 8$. Wówczas

☐ istnieje monomorfizm $f \in L(X, Y)$

☐ istnieje epimorfizm $g \in L(X, Y)$;

☐ istnieje epimorfizm $h \in L(Y, X)$.

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

6. (1 pkt.) W przestrzeni $\mathbb{C}^7$ dane są podprzestrzenie X, Y wymiaru 5. Ile może wynosić wymiar przestrzeni $X \cap Y$? (Podaj wszystkie możliwości.)

Odp:

---

7. (1 pkt.) $A \in \mathbb{R}^{4,4}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ i układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony. Uzasadnij, że macierz A jest nieosobliwa.

Odp:

---

8. (1 pkt.) X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X = 4$, $\dim Y = 5$. Ile wynosi wymiar przestrzeni $L(L(X^*, Y), \mathbb{K}^3)$?

Odp:

---

9. (1 pkt.) X, Y są przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$, $f \in L(X, Y)$ jest epimorfizmem. Uzasadnij, że $\dim Y \leqslant \dim X$.

Odp:

---

10. (1 pkt.) Układ (f_1^*, f_2^*, f_3^*) funkcjonałów z przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_2)^*$ jest bazą dualną do bazy $(1, x, x^2)$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Wówczas

$f_1^*(1 - 3x + x^2) =$

$f_2^*(1 + 10x^2) =$

$f_3^*(-2 + 3x - 4x^2) =$

$(f_1^* + f_2^* + f_3^*)(1 + x + x^2) =$

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-01-2017 – 2. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 10 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Niech $s \in \mathbb{R}$ i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & s & 1 \\ 2 & 4s & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

(a) Wyznacz rząd macierzy A w zależności od s.

(b) Dla $s \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $A\vec{x} = \vec{b}$, gdzie $\vec{b} = [s, 1, 2]^T$, lub udowodnij, że układ jest sprzeczny.

2. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\}, \qquad \text{gdzie } \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T.$$

Znajdź bazę ortogonalną dopełnienia ortogonalnego przestrzeni V i oblicz rzut ortogonalny wektora $\vec{a} = [5, 2, -1, 3, 3]^T$ na przestrzeń V.

3. Pokaż, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ dane wzorem

$$f(p)(x) = \Big((2x+1) \cdot p(x) - (x^2+1) \cdot p'(x)\Big)'$$

jest przekształceniem liniowym. Wyznacz macierz przekształcenia f w bazie $(1, x, x^2)$ i znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im}(f)$ oraz $\ker(f)$.

4. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X < +\infty$, $Y \subset X$ jest podprzestrzenią liniową i dla pewnego przekształcenia liniowego $F \in L(Y, X)$ zachodzi

$$X = Y + \operatorname{im}(F).$$

Pokaż, że $\dim X \leqslant 2 \cdot \dim Y$ i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy F jest monomorfizmem i $Y \cap \operatorname{im}(F) = \{0\}$.

08-02-2017

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Część teoretyczna

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Niech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

- [ ] $a^2 > 0$;
- [ ] $a = \overline{a} \iff a \in \mathbb{R}$;
- [ ] zbiór $\{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$ jest grupą z działaniem mnożenia liczb zespolonych.

2. Niech $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $p(x) = x^k - a$. Wówczas

- [ ] wielomian p ma k różnych pierwiastków zespolonych;
- [ ] wielomian p ma pierwiastek rzeczywisty;
- [ ] wielomian p ma parzystą liczbę pierwiastków w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

3. Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n,n}$?

- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A + 2A^T = 0\}$;
- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$;
- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \det_n(A) = 0\}$.

4. Które z poniższych warunków są równoważne stwierdzeniu „macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest nieosobliwa”?

- [ ] $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{im}\, A) = n$;
- [ ] istnieje wektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony;
- [ ] endomorfizm $f \in L(\mathbb{C}^n)$ dany wzorem $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ jest izomorfizmem.

5. $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Wówczas

- [ ] $\mathrm{im}\,(A) \subset \mathrm{im}\,(A \cdot B)$;
- [ ] $\ker(A) \subset \ker(A \cdot B)$;
- [ ] $\mathrm{rank}(A) \leqslant \mathrm{rank}(A \cdot B)$.

6. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową i $x, y \in X$. Wówczas

- [ ] $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$;
- [ ] jeżeli $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, to $x \perp y$;
- [ ] jeżeli $\langle x, y\rangle = 0$, to x i y są liniowo niezależne.

---

7. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną wymiaru $n < \infty$, wektory $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ są liniowo niezależne i $Z = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim(Z^\perp) = n - k$;
- [ ] $\dim(Z^\perp) = k$;
- [ ] $(Z^\perp)^\perp = Z$.

---

8. W przestrzeni liniowej X wymiaru $n < \infty$ dane są wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ oraz $f \in L(X)$. Wówczas

- [ ] jeżeli układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jest liniowo niezależny, to f jest epimorfizmem;
- [ ] jeżeli układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jest liniowo niezależny, to układ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X;
- [ ] jeżeli układ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X, to układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jest bazą przestrzeni X.

---

9. X jest przestrzenią liniową wymiaru k, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^* \in X^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, oraz dla $i, j = 1, \ldots, k$ zachodzi $x_i^*(x_j) = 0$ gdy $i \neq j$ i $x_i^*(x_i) = 1$. Wynika z tego, że

- [ ] układ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jest bazą przestrzeni X;
- [ ] jeżeli $f^* \in X^*$ i $f^*(x_1) = f^*(x_2) = \ldots = f^*(x_k) = 0$, to $f^* = 0$;
- [ ] jeżeli $y \in X$ i $x_1^*(y) = x_2^*(y) = \ldots = x_k^*(y) = 0$, to $y = 0$.

---

10. Macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ są podobne. Wówczas

- [ ] jeśli $A = I_n$, to $B = I_n$;
- [ ] macierz A i B mają te same wartości własne;
- [ ] macierz A i B mają te same podprzestrzenie własne.

---

11. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest diagonalizowalna. Wówczas

- [ ] macierz A jest nieosobliwa;
- [ ] wielomian charakterystyczny macierzy A jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]_1$;
- [ ] macierz A^2 jest diagonalizowalna.

---

12. Macierz symetryczna $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest ujemnie określona. Wynika z tego, że

- [ ] wszystkie wartości własne macierzy A są ujemne;
- [ ] macierz A jest nieosobliwa;
- [ ] $\det_n(A) < 0$.

---

13. (1 pkt.) Podaj definicje grupy i grupy abelowej

Odp:

---

14. (1 pkt.) Podaj przykład grupy nieabelowej.

Odp:

---

15. (1 pkt.) Podaj wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 2 z liczby $-2i$.

Odp:

---

16. (1 pkt.) Sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry.

Odp:

---

17. (2 pkt.) Sformułuj i udowodnij twierdzenie Kroneckera - Capelliego.

Odp:

18. (2 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym i $Z \subset X$ jest dowolnym podzbiorem. Udowodnij, że zbiór $Z^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową w X.

Odp:

---

19. (2 pkt.) Udowodnij, że dwie podobne macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ mają równe wielomiany charakterystyczne.

Odp:

---

20. (2 pkt.) Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ taka, że $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3(-1-\lambda)$ oraz $\dim(\ker(A - 2I_4)) = 2$. Wyznacz postać Jordana macierzy A. Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

08-02-2017

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 1. termin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

1. Dane są liczby zespolone a, b, u takie, że $u^2 = ab$. Udowodnij, że

$$|a| + |b| = \left|\frac{a+b}{2} - u\right| + \left|\frac{a+b}{2} + u\right|.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \geqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n.$$

3. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$V = \operatorname{span}([1,-1,-1,1]^T, [1,1,0,3]^T, [3,1,-1,7]^T, [0,2,1,2]^T),$$
$$W = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazy podprzestrzeni V, W, $V + W$ i $V \cap W$.

4. Dane są liczby $x, y \in \mathbb{R}$. Oblicz wyznacznik macierzy $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{2n} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$, jeżeli

$$a_{i,j} = \begin{cases} x & \text{gdy } i = j; \\ y & \text{gdy } i = 2n+1-j; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

5. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ i $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ są przestrzeniami euklidesowymi. Przekształcenie liniowe $f \in L(X, Y)$ ma własność

$$\forall v \in X \quad \langle v, v\rangle_X = \langle f(v), f(v)\rangle_Y.$$

(a) Pokaż, że f jest monomorfizmem.

(b) Udowodnij, że $\forall v, w \in X \;\; \langle v, w\rangle_X = \langle f(v), f(w)\rangle_Y$.

6. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}[x]_3$ dana jest baza

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x(x-i), \quad p_3(x) = x(x-i)(x-1).$$

Układ funkcjonałów $(p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_3)^*$ dualną do bazy (p_0, p_1, p_2, p_3). Funkcjonał $f^* \in (\mathbb{C}[x]_3)^*$ jest dany wzorem $f^*(p) = p(-i)$. Wyznacz liczby $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ takie, że $f^* = a_0 p_0^* + a_1 p_1^* + a_2 p_2^* + a_3 p_3^*$.

7. Rozważamy endomorfizm $f \in L(\mathbb{R}^4)$ dany wzorem $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & 24 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Wiedząc, że $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, wyznacz macierz i bazę Jordana endomorfizmu f.

(b) Czy istnieją $a \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, takie że $(A + aI_4)^k = 0$? Uzasadnij odpowiedź.

20-02-2017

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 2. termin

Część teoretyczna

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Dana jest liczba zespolona $a = 1 + i$. Wówczas

- [ ] dla pewnego $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a^k jest liczbą rzeczywistą dodatnią;
- [ ] dla pewnego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $|(\overline{a})^k| = 1$;
- [ ] liczby $\overline{a}$ oraz a^{-1} mają równe argumenty główne.

2. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$, przy czym $p(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$. Wówczas

- [ ] każda z liczb a, b, c jest rzeczywista;
- [ ] co najmniej jedna z liczb a, b, c jest rzeczywista;
- [ ] jest możliwe, że $a, b \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

3. Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}[x]_n$?

- [ ] $\{p \in \mathbb{C}[x]_n : p(-1) = ip(1)\}$;
- [ ] $\{p \in \mathbb{C}[x]_n : \forall\, x \in \mathbb{C} \;\; p(x) = p(ix)\}$;
- [ ] $\{p \in \mathbb{C}[x]_n : \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \;\; p(x_0) = 0\}$.

4. Które z poniższych warunków są równoważne stwierdzeniu „macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa”?

- [ ] macierz $(A^T)^{2017}$ jest nieosobliwa;
- [ ] jeżeli $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ i $A\vec{x} = 0$, to $\vec{x} = 0$;
- [ ] $p_A(0) = 0$, gdzie p_A jest wielomianem charakterystycznym macierzy A.

5. $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Wówczas

- [ ] $\mathrm{im}\,(A \cdot B) \subset \mathrm{im}\,(A)$;
- [ ] $\ker(A \cdot B) \subset \ker(A)$;
- [ ] $\ker(A \cdot B) \supset \ker(A)$;

6. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną i $x, y \in X \setminus \{0\}$. Wówczas

- [ ] jeżeli x i y są liniowo niezależne, to $\langle x, y\rangle = 0$;
- [ ] jeżeli $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$, to $x = y$;
- [ ] jeżeli $\langle x, y\rangle = 0$, to $\dim X \geqslant 2$.

---

7. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową wymiaru $n < \infty$ i wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ są liniowo niezależne. Wówczas

- [ ] istnieje układ ortonormalny $u_1, u_2, \ldots, u_n$ taki, że $\operatorname{span}(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ dla $r = 1, 2 \ldots, n$.
- [ ] jeżeli $v \in X$ i $\langle v, x_k\rangle = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to $v = 0$;
- [ ] macierz $G = [\langle x_i, x_j\rangle]_{i,j=1}^n$ jest nieosobliwa.

---

8. W przestrzeni liniowej X wymiaru $n < \infty$ dane są wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i $f \in L(X)$. Wówczas

- [ ] jeżeli układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ rozpina przestrzeń X, to f jest monomorfizmem;
- [ ] jeżeli układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jest liniowo zależny, to układ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest liniowo zależny;
- [ ] jeżeli układ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ jest bazą przestrzeni X, to układ $(f \circ f)(x_1), (f \circ f)(x_2), \ldots, (f \circ f)(x_n)$ jest bazą przestrzeni X.

---

9. X jest przestrzenią liniową wymiaru k, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^* \in X^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, oraz dla $i, j = 1, \ldots, k$ zachodzi $x_i^*(x_j) = 0$ gdy $i \neq j$ i $x_i^*(x_i) = 1$. Wynika z tego, że

- [ ] układ $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$ jest bazą przestrzeni X^*;
- [ ] jeżeli $x \in X$, to $(x \in \bigcap_{i=1}^k \ker(x_i^*) \iff x = 0)$;
- [ ] jeżeli $f^* \in X$ i $f^*(x_1) = f^*(x_2) = \ldots = f^*(x_k) = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

---

10. Macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ są podobne. Wówczas

- [ ] jeśli $\operatorname{rank} A = 1$, to $\operatorname{rank} B = 1$;
- [ ] jeśli macierz A jest diagonalna, to macierz B jest diagonalna;
- [ ] macierze $A + 3I_n$ i $B + 3I_n$ są podobne.

---

11. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wówczas

- [ ] macierz $A^T A$ jest symetryczna i dodatnio określona;
- [ ] macierz $A^T A$ jest diagonalizowalna;
- [ ] macierz $A^T A - 3I_n$ jest diagonalizowalna.

---

12. X jest przestrzenią liniową wymiaru 3 i endomorfizm $f \in L(X)$ ma 3 różne wartości własne. Wynika z tego, że

- [ ] f jest epimorfizmem;
- [ ] w pewnej bazie przestrzeni X endomorfizm f ma macierz diagonalną;
- [ ] $\dim(\ker f) \leqslant 1$.

---

13. (1 pkt.) Podaj wszystkie zespolone pierwiastki wielomianu $p(x) = x^3 + 2i \cdot x$.

Odp:

---

14. (2 pkt.) Podaj definicję przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

---

15. (1 pkt.) Podaj przykład przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ takiej, że $\dim X = +\infty$.

Odp:

---

16. (2 pkt.) Sformułuj i udowodnij twierdzenie Kroneckera - Capelliego.

Odp:

17. (2 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \setminus \{0\}$ i $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że układ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest liniowo niezależny.

Odp:

---

18. (2 pkt.) X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X < +\infty$ i $f \in L(X)$ jest monomorfizmem. Udowodnij, że f jest epimorfizmem.

Odp:

---

19. (2 pkt.) Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ taka, że $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$, $\operatorname{rank}(A-2I_4) = 2$ oraz $(A-2I_4)^2 = 0$. Wyznacz postać Jordana macierzy A. Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

20-02-2017

Geometria z algebrą liniową - Egzamin - 2. termin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Wyznacz wszystkie pary liczb zespolonych (w, z) takie, że

$$\left|\frac{w+z}{2}\right|^2 = \frac{|w|^2 + |z|^2}{2}.$$

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$U = \operatorname{span}([1,3,-1,-1]^T, [2,4,-2,0]^T), \qquad W = \operatorname{span}([-1,1,4,-1]^T, [0,4,3,-4]^T).$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $U \cap W$ i $U + W$. Czy $U + W = U \oplus W$? Uzasadnij odpowiedź.

3. Dla danych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^3 & x_2^3 & \ldots & x_n^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,n}.$$

Pokaż, że $\operatorname{rank} A = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ znajdują się co najmniej 3 różne.

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Wyznacz wszystkie macierze $M \in \mathbb{R}^{3,2}$ takie, że dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $\langle Ax, Mx \rangle = 0$. Pokaż, że zbiór wszystkich takich macierzy jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{3,2}$ i wyznacz jej wymiar.

5. Niech $a \in \mathbb{R}$. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$ jest dane wzorem

$$f([x_1, x_2, x_3]^T)(t) = 2x_2 - x_1 - x_2 \cdot t + (x_1 + ax_3) \cdot t^2.$$

(a) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i $(1, t, t^2)$ w $\mathbb{R}[t]_2$.

(b) Znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im}(f)$ i $\ker(f)$ w zależności od a.

(c) Dla jakich wartości a przekształcenie f jest izomorfizmem?

6. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \operatorname{span}(1 + x, x^2).$$

(a) Wyznacz bazę (f_1^*, f_2^*) przestrzeni V^* dualną do bazy $(1 + x, x^2)$ przestrzeni V.

(b) Funkcjonał $g \in V^*$ jest dany wzorem $g(p) = p(0) + 3p(1)$. Przedstaw g jako kombinację liniową funkcjonałów f_1^*, f_2^*.

7. Dla danego wektora $\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ niech

$$X(\vec{v}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{3,3} : \exists\, \lambda \in \mathbb{C} \;\; \vec{v} \in \ker(A - \lambda I_3) \right\}.$$

(a) Pokaż, że dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ zbiór $X(\vec{v})$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{C}^{3,3}$.

(b) Załóżmy, że wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^3$ są liniowo niezależne i $A \in X(\vec{u}) \cap X(\vec{v}) \cap X(\vec{w})$. Udowodnij, że macierz A jest diagonalizowalna.