Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-11-2015 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

---

1. Dana jest liczba zespolona $z = 3e^{(3\pi/17)i}$. Wówczas

- [ ] $\left|\frac{1}{\overline{z}^2}\right| = \frac{1}{9}$.
- [ ] dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ zachodzi $\mathrm{Re}\,(z^n) = 0$;
- [ ] dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ zachodzi $\mathrm{Im}\,(z^n) = 0$;

---

2. Wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ zapisano jako iloczyn $p(x) = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)(x - z_5)$, przy czym $z_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Wówczas

- [ ] wśród liczb z_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, jest liczba rzeczywista;
- [ ] jest możliwe, że dokładnie dwie spośród liczb z_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, są rzeczywiste;
- [ ] iloczyn $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ jest liczbą rzeczywistą.

---

3. Dane są macierze $A \in \mathbb{C}^{4,5}$, $B \in \mathbb{C}^{4,3}$, $C \in \mathbb{C}^{5,3}$. Wówczas

- [ ] $AA^T \in \mathbb{C}^{5,5}$;
- [ ] $A^T B C^H \in \mathbb{C}^{5,5}$;
- [ ] $(C^T)^H + C \in \mathbb{R}^{5,3}$.

---

4. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}^3$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^3$, jeżeli

- [ ] $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| = 0\}$;
- [ ] $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$;
- [ ] $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

---

5. W przestrzeni liniowej X dane są wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i $X = \mathrm{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim X = n$;
- [ ] z układu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można wybrać bazę przestrzeni X;
- [ ] $X = \mathrm{span}(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

6. (1 pkt.) Podaj definicję *grupy*

Odp:

---

7. (1 pkt.) Sformułuj *twierdzenie Steinitza o wymianie*

Odp:

---

8. (1 pkt.) Podaj definicję *bazy* przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

---

9. (2 pkt.) Podaj dwa różne warunki równoważne ze stwierdzeniem

układ wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ jest bazą przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

12-11-2015 – 1. kolokwium

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. $(G, \diamond, e)$ jest grupą mającą skończenie wiele elementów, $a \in G$. Niech $a^k = a \diamond a \diamond \ldots \diamond a$ (działanie wykonujemy $k-1$ razy) oznacza k-tą potęgę elementu a. Pokaż, że istnieje liczba naturalna n taka, że $a^n = e$.

2. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równość

$$(z+i)(\bar{z}-i)^2(iz-1)^3 = 64.$$

3. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Pokaż, że zbiór

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = A^T\vec{x} = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^4$. Znajdź bazę i określ wymiar podprzestrzeni U. Następnie znajdź układ wektorów uzupełniający znalezioną bazę podprzestrzeni U do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}[z]_3$ rozważamy podzbiór

$$U = \{a + bz + cz^2 + dz^3 \in \mathbb{C}[z]_3 : \operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b = \operatorname{Re} c = \operatorname{Re} d = 0\}.$$

(a) Pokaż, że zbiór U wraz z działaniami zdefiniowanymi tak samo jak w przestrzeni $\mathbb{C}[z]_3$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, ale nie jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$.

(b) W U jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ wyznacz bazę podprzestrzeni liniowej $V \subset U$:

$$V = \{p \in U : p(1-i) = 0\}.$$

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

08-01-2016 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach **1 - 5** należy udzielać odpowiedz **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **0,2 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **0,5 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **1 pkt.** za całe zadanie.

---

1. W przestrzeni liniowej X wymiaru 10 dane są dwie podprzestrzenie liniowe U i V takie, że $U \cap V = \{0\}$. Wynika z tego, że

- [ ] $U + V = U \oplus V$;
- [ ] $X = U \oplus V$;
- [ ] $\min(\dim U, \dim V) < 5$.

---

2. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{rank} A = n$ i $\ker A = \{0\}$;
- [ ] dla każdej macierzy $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ zachodzi $\ker B = \ker(AB)$;
- [ ] dla każdej macierzy $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ zachodzi $\ker B = \ker(BA)$.

---

3. W przestrzeni unitarnej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest wektor $x \neq 0$, natomiast $y = P_V(x)$ jest rzutem ortogonalnym x na pewną podprzestrzeń $V \subset X$. Wówczas

- [ ] zawsze $y \neq 0$;
- [ ] $\|x\| \geqslant \|y\|$;
- [ ] $\|x\| = \|y\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

---

4. W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wymiaru 3 dana jest baza ortonormalna u_1, u_2, u_3, oraz $x = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3$, $y = -2u_2 + 5u_3$. Wówczas

- [ ] $\langle x, y \rangle < 0$;
- [ ] $\|x\| = \|y\|$;
- [ ] wektory u_1 i y są ortogonalne.

---

5. Niech $f \in L(\mathbb{R}^7, \mathbb{R}[x]_7)$. Wówczas

- [ ] f może być monomorfizmem;
- [ ] f może być epimorfizmem;
- [ ] $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = 7$.

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

6. (1 pkt.) Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Podaj 4 **różne** warunki, które są równoważne stwierdzeniu *macierz A jest osobliwa.*

Odp:

---

7. (1 pkt.) Sformułuj *twierdzenie Kroneckera-Capelliego.*

Odp:

---

8. (1 pkt.) Co to jest *macierz dopełnień algebraicznych* dla danej macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$?

Odp:

---

9. (1 pkt.) Z jest podzbiorem w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Uzasadnij, że zbiór $Z^{\perp} = \{x \in X : x \perp z \text{ dla każdego } z \in Z\}$ jest podprzestrzenią liniową w X.

Odp:

---

10. (1 pkt.) X i Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Podaj definicję *przekształcenia liniowego* z przestrzeni X w przestrzeń Y.

Odp:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

08-01-2016 – 2. kolokwium

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 5. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Oblicz wyznacznik Vandermonde'a

$$V_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \det_n \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A = \vec{x}^T A \vec{y}$ dla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Pokaż, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$.

(b) W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ znajdź rzut prostopadły wektora $[2, 2, -2]^T$ na dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\operatorname{span}([1, 0, 1]^T, [-1, 1, 1]^T)$.

3. Dane są przekształcenia liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$

$$f(\vec{x})(t) = (x_1 + x_3)t^2 + x_2 \qquad \text{dla } \vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

oraz $g \in L(\mathbb{R}[t]_2, \mathbb{R}^3)$

$$g(p) = [p(-1), p'(0), p(1)]^T \qquad \text{dla } p \in \mathbb{R}[t]_2.$$

(a) Wskaż bazy podprzestrzeni

$$\operatorname{im} f \cap \ker(f \circ g) \subset \mathbb{R}[t]_2, \quad \text{oraz} \quad \operatorname{im}(g \circ f) + \ker f \subset \mathbb{R}^3.$$

(b) Wyznacz macierz przekształcenia $f \circ g$ w bazie $1, t, t^2$ przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$.

4. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ spełnia warunek

$$\operatorname{im} A + \ker A = \mathbb{R}^n.$$

Udowodnij, że $\ker A = \ker(A^2)$ oraz $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(A^2)$.

08-02-2016

Geometria z algebrą liniową - Egzamin

Część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 należy udzielać odpowiedz TAK lub NIE, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

---

1. Który z poniższych podzbiorów ciała $\mathbb{C}$ jest grupą z działaniem mnożenia liczb zespolonych?

- [ ] zbiór liczb rzeczywistych;
- [ ] zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;
- [ ] zbiór liczb naturalnych dodatnich.

---

2. Niech $z = 1 + i$, $u = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Wówczas

- [ ] $u^6 = 1$;
- [ ] $|z^4 \cdot u^{17}| = 4$;
- [ ] z^{12} jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

---

3. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie liniowe U, V i $X = U \oplus V$. Wówczas

- [ ] $X = U \cup V$;
- [ ] $U \cap V = \emptyset$;
- [ ] $\forall x \in X \ \ (x \notin U \implies x \in V)$.

---

4. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie liniowe U, V i $\dim U = \dim V = 5$. Wówczas

- [ ] jeżeli $\dim X = 8$, to $\dim(U \cap V) \geqslant 2$;
- [ ] jeżeli $\dim(U \cap V) = 0$, to $\dim X = 10$;
- [ ] jeżeli $\dim(U + V) = \dim X$, to $\dim X \leqslant 10$.

---

5. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wynika z tego, że

- [ ] wektory $A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$;
- [ ] macierze $\vec{e}_1^T A, \ldots, \vec{e}_n^T A$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{C}^{1,n}$;
- [ ] endomorfizm $f \in L(\mathbb{C}^n)$ zadany jako $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ jest izomorfizmem.

6. X, Y są przestrzeniami liniowymi, $f \in L(X, Y)$ i układ $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X. Wówczas

- [ ] układ $f(x_1), \ldots, f(x_n) \in Y$ jest liniowo niezależny;
- [ ] układ $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ rozpina przestrzeń Y;
- [ ] jeżeli f jest epimorfizmem, to $\dim Y \leqslant n$.

---

7. $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest macierzą Gramma pewnego liniowo niezależnego układu wektorów $x_1, \ldots, x_n$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas

- [ ] jeżeli $M = I_n$ to układ $x_1, \ldots, x_n$ jest ortonormalny;
- [ ] jeżeli układ $x_1, \ldots, x_n$ jest ortogonalny, to macierz M jest diagonalna;
- [ ] macierz M jest nieosobliwa.

---

8. W przestrzeni unitarnej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dane są podprzestrzenie liniowe $U, V \subset X$ takie, że $U \perp V$. Wynika z tego, że

- [ ] $U \cap V = \{0\}$;
- [ ] $X = U \oplus V$;
- [ ] jeżeli $x = u + v$ dla $u \in U$ i $v \in V$, to $\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

---

9. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest podobna to pewnej macierzy diagonalnej $D \in \mathbb{R}^{n,n}$, p_M oznacza wielomian charakterystyczny macierzy M. Wówczas

- [ ] p_A jest wielomianem o rzeczywistych współczynnikach stopnia n;
- [ ] p_A jest iloczynem czynników stopnia 1;
- [ ] $p_A = p_D$.

---

10. X jest przestrzenią liniową, $\dim X = n < \infty$, $f \in L(X)$ jest izomorfizmem. Wówczas

- [ ] f jest monomorfizmem;
- [ ] macierz f w dowolnej bazie przestrzeni X jest nieosobliwa
- [ ] macierz f w pewnej bazie przestrzeni X to I_n.

---

11. Macierz symetryczna $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest dodatnio określona. Wówczas

- [ ] $a_{i,j} > 0$ dla $i, j = 1, \ldots, n$;
- [ ] $a_{i,i} > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$;
- [ ] macierz A jest nieosobliwa.

---

12. Macierz hermitowska $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ przystaje do macierzy I_n. Wówczas

- [ ] $\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \;\; \vec{x}^H A \vec{x} > 0$;
- [ ] wszystkie wartości własne macierzy A są liczbami rzeczywistymi dodatnimi;
- [ ] $A = I_n$.

13. (2 pkt.) Czy istnieje układ równań postaci $A\vec{x} = \vec{b}$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{3,4}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, mający **dokładnie dwa** rozwiązania? **Uzasadnij odpowiedź.**

Odp:

---

14. (2 pkt.) Podaj definicję **przestrzeni** X^* **dualnej** do danej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

---

15. (2 pkt.) Układ wektorów $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Podaj definicję **bazy dualnej** do $x_1, \ldots, x_n$ w przestrzeni X^*

16. (2 pkt.) X jest przestrzenią liniową, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ to dwie bazy tej przestrzeni. Podaj definicję **macierzy zmiany bazy** z $\mathbf{a}$ na $\mathbf{b}$.

Odp:

---

17. (2 pkt.) Macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są podobne. Udowodnij, że $\det_n A = \det_n B$.

Odp:

---

18. (2 pkt.) Sformułuj **twierdzenie Sylwestera - Jacobiego o bezwładności** dla form hermitowskich.

08-02-2016

Geometria z algebrą liniową - Egzamin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}(u_k \overline{z}) \cdot u_k.$$

2. Dla parametru $u \in \mathbb{R}$ rozważamy macierz

$$A_u = \begin{bmatrix} 1 & u & u \\ u & 1 & -u \\ u & u & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (5 pkt.) Dla jakich wartości parametru u układ równań $A_u \vec{x} = \vec{b}$ ma rozwiązanie dla każdego wektora $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$?

(b) (5 pkt.) Czy zbiór

$$Z = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \forall\, u \in \mathbb{R} \ \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ \ A_u \vec{x} = \vec{b} \right\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^3$? Jeżeli tak, to wskaż bazę i określ wymiar tej podprzestrzeni.

3. W przestrzeni $\mathbb{C}^n$ dane są podprzestrzenie liniowe:

$$U = \{\vec{u} \in \mathbb{C}^n : u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0\},$$
$$V = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n : v_1 = v_2 = \ldots = v_n\}.$$

(a) (5 pkt.) Pokaż, że $\mathbb{C}^n = U \oplus V$.

(b) (5 pkt.) Dla danego wektora $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ wyznacz wektory $\vec{u} \in U$ oraz $\vec{v} \in V$ takie, że $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

4. (a) (5 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ dane są podprzestrzenie

$$U = \operatorname{span}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3), \qquad V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \langle\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{x}\rangle = \langle\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{x}\rangle = 0\}.$$

Wyznacz wszystkie wektory z V, które są prostopadłe do podprzestrzeni U.

(b) (5 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ takiej, że $\dim X < \infty$, dane są dwie podprzestrzenie $U, V \subset X$ takie, że $\dim U < \dim V$. Pokaż, że istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $v \perp U$.

5. Niech $a \in \mathbb{C}$. W przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_2)^*$ dane są trzy funkcjonały

$$f_1^*(p) = p(0) + ap(1), \quad f_2^*(p) = p(1) - ap(0), \qquad f_3^*(p) = p'(1) - p'(0).$$

(a) (5 pkt.) Dla jakich wartości parametru a układ ten jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_2)^*$?

(b) (5 pkt.) Czy dla $a = 0$ istnieją takie wielomiany $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x]_2$, że

$$f_k^*(f_j) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = j, \\ 0 & \text{gdy } k \neq j? \end{cases}$$

Jeżeli tak jest, to wyznacz współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ takie, że dla wielomianu $q(x) = x^2 - 3$

$$q = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

6. Na przestrzeni unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ takiej, że $\dim X = n < \infty$, określony jest endomorfizm $f \in L(X)$ o własności

$$\forall x, y \in X \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

(a) (5 pkt.) Niech $x_1, \ldots, x_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni X. Pokaż, że macierz f w tej bazie jest hermitowska.

(b) (5 pkt.) Udowodnij, że w X istnieje baza ortonormalna, w której endomorfizm f ma macierz diagonalną o rzeczywistych współczynnikach.

7. Wyznacz (a) (5 pkt.) macierz Jordana i (b) (5 pkt.) bazę Jordana dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4},$$

wiedząc, że $p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^4$.

23-02-2016

Geometria z algebrą liniową - Egzamin

Część teoretyczna

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-12 należy udzielać odpowiedz TAK lub NIE, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,5 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 1 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1,5 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi nie jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

---

1. Który z poniższych podzbiorów ciała $\mathbb{C}$ jest grupą z działaniem dodawania liczb zespolonych?

- [ ] zbiór liczb rzeczywistych;
- [ ] zbiór $\{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$;
- [ ] zbiór liczb naturalnych.

---

2. Niech $z = -3 + 4i$, $u = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$. Wówczas

- [ ] $u^5 = -1$;
- [ ] $|z^4 \cdot u^{19}| = 25$;
- [ ] $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

---

3. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie liniowe U, V i $X = U \oplus V$. Wówczas

- [ ] $X = U \cup V$;
- [ ] $U \cap V = \{0\}$;
- [ ] $\forall x \in X \ \ (x \in U \implies x \notin V)$.

---

4. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie liniowe U, V i $\dim U = 4$, $\dim V = 6$ i $\dim X = 10$. Wówczas

- [ ] $X = U \oplus V$;
- [ ] $\dim(U \cap V) \geqslant 2$;
- [ ] jeżeli $\dim(U + V) = \dim X$, to $U \cap V = \{0\}$.

---

5. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wynika z tego, że

- [ ] $p_A(0) \neq 0$, gdzie p_A to wielomian charakterystyczny macierzy A;
- [ ] $\ker(AA^T) = \{0\}$;
- [ ] macierz $I_n - A$ też jest nieosobliwa.

6. X, Y są przestrzeniami liniowymi, $f \in L(X, Y)$ i układ $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X. Wówczas

- [ ] układ $f(x_1), \ldots, f(x_n) \in Y$ jest bazą przestrzeni Y;
- [ ] $\dim(\operatorname{span}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \leqslant n$
- [ ] jeżeli f jest monomorfizmem, to $\dim Y \leqslant n$.

---

7. $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest macierzą Gramma pewnego układu wektorów $x_1, \ldots, x_n$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wówczas

- [ ] macierz M jest symetryczna;
- [ ] macierz M jest nieosobliwa;
- [ ] $\det_n M \geqslant 0$.

---

8. W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dane są podprzestrzenie liniowe $U, V \subset X$ takie, że $U \perp V$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim X \geqslant \dim U + \dim V$;
- [ ] istnieją wektory $u \in U$ i $v \in V$ takie, że $\|u\| = \|v\| = 1$ i $\langle u, v \rangle = 0$;
- [ ] istnieją wektory $u \in U$ i $v \in V$ takie, że $\|u\| = \|v\| = 1$ i $\langle u, v \rangle = 1$.

---

9. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest podobna do pewnej macierzy trójkątnej górnej $T \in \mathbb{R}^{n,n}$, p_A oznacza wielomian charakterystyczny macierzy A. Wówczas

- [ ] p_A jest iloczynem wielomianów stopnia 1 o zespolonych współczynnikach;
- [ ] p_A jest iloczynem wielomianów stopnia 1 o rzeczywistych współczynnikach;
- [ ] macierze A^2 i T^2 też są podobne.

---

10. X jest przestrzenią liniową, $\dim X = n < \infty$, $f \in L(X)$ jest epimorfizmem. Wynika z tego, że

- [ ] f jest monomorfizmem;
- [ ] istnieje baza, w której f ma macierz diagonalną;
- [ ] istnieje baza, w której f ma macierz symetryczną.

---

11. Macierz symetryczna $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest ujemnie określona. Wynika z tego, że

- [ ] $\det_n(A) < 0$;
- [ ] $a_{i,i} < 0$ dla $i = 1, \ldots, n$;
- [ ] macierz A^2 jest dodatnio określona.

---

12. $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest macierzą hermitowską. Wówczas

- [ ] macierz A przystaje do pewnej macierzy diagonalnej $D \in \mathbb{R}^{n,n}$;
- [ ] jeżeli macierz A jest dodatnio określona, to wszystkie wartości własne macierzy A są równe 1;
- [ ] jeżeli macierz A jest dodatnio określona, to A przystaje do macierzy I_n.

13. (2 pkt.) Podaj definicję **przestrzeni liniowej** nad ciałem $\mathbb{K}$.

Odp:

---

14. (2 pkt.) Rząd macierzy $A \in \mathbb{R}^{3,4}$ wynosi 3. Czy jest możliwe, że $A\vec{x} = A\vec{y} = 0$ dla $\vec{x} = [1, 0, 0, 0]^T$ i $\vec{y} = [0, 0, 0, 1]^T$? **Uzasadnij odpowiedź.**

Odp:

---

15. (2 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym. Podaj **nierówność Schwarza** dla pary wektorów $x, y \in X$. Kiedy nierówność Schwarza staje się równością?

16. (2 pkt.) X i Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ jest bazą X, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ jest bazą Y oraz $f \in L(X, Y)$. Podaj definicję **macierzy przekształcenia** f w bazach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Odp:

---

17. (2 pkt.) Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ma dwie różne wartości własne $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\vec{v}_1 \neq 0, \vec{v}_2 \neq 0$ to odpowiadające im wektory własne (czyli $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ i $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$). Pokaż, że wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne.

Odp:

---

18. (2 pkt.) Sformułuj **kryterium Sylwestera** dodatniej i ujemnej określoności macierzy symetrycznych.

23-02-2016

Geometria z algebrą liniową - Egzamin

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **wyraźnie na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Pokaż, że istnieje liczba zespolona $z \neq 0$, spełniająca równanie

$$\left(\overline{z} + \frac{i}{z}\right)^{16} + \left(\overline{z} - \frac{i}{z}\right)^{16} = 0.$$

2. Dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ rozważamy zbiór

$$K_A = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} : AX = XA\}.$$

(a) (2 pkt.) Udowodnij, że K_A jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{n,n}$ dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(b) (4 pkt.) Oblicz wymiar i znajdź bazę przestrzeni K_A dla $n = 2$ i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) (4 pkt.) Udowodnij, że dla $n \geqslant 2$ i dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ zachodzi $\dim K_A \geqslant 2$.

3. Dla parami różnych liczby zespolonych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ określamy wielomiany

$$l_k(z) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{z - x_j}{x_k - x_j}.$$

(a) (5 pkt.) Pokaż, że układ $l_0, \ldots, l_n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}[z]_n$.

(b) (5 pkt.) Dla $k = 0, 1, \ldots, n$ znajdź współczynniki $a_{0,k}, \ldots, a_{n,k} \in \mathbb{C}$ takie, że

$$z^k = \sum_{j=0}^{n} a_{j,k} l_j(z).$$

CIĄG DALSZY NA DRUGIEJ STRONIE KARTKI

4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

(a) (5 pkt.) Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni U.

(b) (5 pkt.) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $\vec{v} = [6, 5, -2, -1]^T$ na podprzestrzeń $U^\perp$.

5. Dla danego $\gamma \in \mathbb{R}$ rozważamy przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_2)$ zadane wzorem

$$F(p)(x) = p'(x+1) - \gamma \cdot xp''(x), \qquad p \in \mathbb{R}[x]_3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) (5 pkt.) Zbadaj, dla jakich wartości γ przekształcenie F jest epimorfizmem.

(b) (5 pkt.) Dla $\gamma = 0$ wyznacz bazę podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}[x]_3$ takiej, że $f|_V \in L(V, \mathbb{R}[x]_2)$ jest izomorfizmem lub udowodnij, że taka podprzestrzeń V nie istnieje.

6. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną wymiaru $n < \infty$, natomiast endomorfizm $f \in L(X)$ spełnia

$$\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

(a) (5 pkt.) Niech $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ będzie macierzą f w bazie ortonormalnej $x_1, \ldots, x_n$. Pokaż, że $M^H \cdot M = I_n$.

(b) (5 pkt.) Pokaż, że wszystkie wartości własne endomorfizmu f są liczbami zespolonymi o module 1, a wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

7. Wyznacz (a) (5 pkt.) macierz Jordana i (b) (5 pkt.) bazę Jordana dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4},$$

wiedząc, że $p_A(\lambda) = (3 + \lambda)^4$.