Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

13-11-2014 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko:

Numer albumu: Numer grupy:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane.

Każdą dodatkową kartkę z odpowiedziami należy podpisać imieniem, nazwiskiem, numerem albumu i numerem grupy ćwiczeniowej. Proszę także dokładnie zaznaczyć, których poleceń dotyczą odpowiedzi na dodatkowych kartkach.

---

1. (1 pkt.)

(a) Podaj definicję **ciała**.
Odpowiedź:

(b) Czy istnieje ciało mające dokładnie 17 elementów? Jeżeli tak, to podaj przykład.
Odpowiedź:

---

2. (0,5 pkt.) Wypisz wszystkie zespolone pierwiastki stopnia 4 z liczby -1.
Odpowiedź:

---

3. (0,5 pkt.) Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{3,3}$?

(a) zbiór macierzy nieosobliwych, *odpowiedź:*

(b) zbiór macierzy symetrycznych, *odpowiedź:*

(c) zbiór macierzy hermitowskich, *odpowiedź:*

4. (1 pkt.) Podaj definicje

(a) **liniowo zależnego** układu wektorów
Odpowiedź:

(b) **liniowo niezależnego** układu wektorów
Odpowiedź:

(c) Podaj przykład przestrzeni liniowej, w której istnieją układy liniowo niezależne dowolnej skończonej długości i wskaż takie układy.
Odpowiedź:

---

5. (1 pkt.)

(a) Podaj definicje **bazy i wymiaru** przestrzeni liniowej.
Odpowiedź:

Wskaż przykład bazy i podaj wymiar

(b) przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$
Odpowiedź:

(c) ciała $\mathbb{C}$ jako przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$
Odpowiedź:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

13-11-2014 - 1. kolokwium

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 3. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$(z+2i)^4 = \frac{|z|^8}{64}.$$

2. Wyznacz wszystkie nieosobliwe macierze $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ takie, że

$$[1,0] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = i$$

oraz macierze A i A^{-1} są liniowo zależne.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dany jest podzbiór

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(1+i) = 0\},$$

gdzie i to jednostka urojona ($i^2 = -1$). Pokaż, że U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$. Znajdź bazę U i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Uzasadnij odpowiedzi.

4. Niech $a \in \mathbb{R}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozważamy podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = x_3\right\},$$
$$Y = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ a+2 \\ 2a-6 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Określ wymiary przestrzeni X i Y w zależności od a.

(b) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $X \cap Y = \{0\}$?

(c) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\mathbb{R}^3 = X + Y$?

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

Przykładowe rozwiązania zadań z 1. kolokwium

25/11/2014

---

1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$(z+2i)^4 = \frac{|z|^8}{64}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $z = 0$ nie jest rozwiązaniem. Zatem równanie możemy przekształcić do postaci równoważnej

$$\left(\frac{2\sqrt{2}(z+2i)}{|z|^2}\right)^4 = 1.$$

Oznaczmy lewą stronę przez u. Wówczas u jest jednym z pierwiastków z jedności stopnia 4, czyli $u \in \{1, -1, i, -i\}$. Należy więc rozpatrzyć cztery przypadki.

Jeżeli $u = 1$, to dostajemy równanie $2\sqrt{2}(z+2i) = |z|^2$. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Ponieważ część urojona lewej strony jest równa 0, więc $y = -2$ i $z = x - 2i$ oraz $|z|^2 = x^2 + 4$. Otrzymaliśmy równanie kwadartowe $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$, które nie ma rozwiązań rzeczywistych. Podobnie pokazujemy, że w przypadku $u = -1$ też nie otrzymamy rozwiązań.

Jeżeli $u = i$, to otrzymujemy równanie $2\sqrt{2}(z+2i) = i|z|^2$, wobec czego $z = yi$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$, przy czym y jest rozwiązaniem równania $y^2 - 2\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 0$. Równanie to ma 2 rozwiązania:

$$y_1 = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right), \qquad y_2 = \sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right).$$

Mamy więc dwa rozwiązania zespolone wyjściowego równania:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right)i, \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right)i.$$

W przypadku $u = -i$ postępujemy podobnie: musi być $z = yi$, gdzie y jest rozwiązaniem rzeczywistym równania $y^2 + 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}$, które jednak nie ma takich rozwiązań.

Ostatecznie, jedyne rozwiązania to liczby z_1 i z_2.

2. Wyznacz wszystkie nieosobliwe macierze $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ takie, że

$$[1, 0] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = i$$

oraz macierze A i A^{-1} są liniowo zależne.

Rozwiązanie: Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą o zadanych własnościach. Pierwszy warunek oznacza, że $a = i$. Drugi warunek oznacza, że istnieją skalary $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takie, że $\alpha \neq 0$ lub $\beta \neq 0$ oraz

$$\alpha A + \beta A^{-1} = 0. \tag{1}$$

Zarówno $\alpha \neq 0$ jak i $\beta \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku jedna z macierzy A, A^{-1} byłaby zerowa, co jest sprzeczne z założeniem, że A jest nieosobliwa. Niech $\gamma = -\beta/\alpha$. Warunek (1) jest równoważny następującemu:

$$A = \gamma A^{-1}, \qquad \gamma \in C \setminus \{0\}.$$

Ponieważ macierz A jest nieosobliwa, więc (1) jest także równoważne warunkowi (mnożymy obie strony przez macierz A)

$$A^2 = \gamma I_2, \quad \gamma \in C \setminus \{0\}.$$

Skoro $A = \begin{bmatrix} i & b \\ c & d \end{bmatrix}$, to $A^2 = \begin{bmatrix} bc-1 & ib+bd \\ ic+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$. Liczby b,c,d i γ spełniają więc równości

$$bc - 1 = \gamma, \qquad b(i+d) = 0, \qquad c(i+d) = 0, \qquad bc + d^2 = \gamma.$$

Jeżeli $d = -i$ to równości 2. i 3. są spełnione, a z 1. lub 4. dostajemy $bc = 1 + \gamma$. Jedyny warunek na γ to $\gamma \neq 0$, co oznacza, że $bc \neq 1$. Wówczas zawsze istnieje takie $\gamma \neq 0$, że spełnione są równości 1. i 4.

Jeżeli $d \neq -i$, to z równości 2. i 3. dostajemy $b = c = 0$. Wtedy z 1. i 4. równości $d^2 = -1$, czyli $d = i$.

Ostatecznie więc, szukane macierze są postaci

$$A = \begin{bmatrix} i & b \\ c & -i \end{bmatrix}, \qquad b, c \in \mathbb{C}, \quad bc \neq 1, \qquad \text{lub} \qquad A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dany jest podzbiór

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(1+i) = 0\},$$

gdzie i to jednostka urojona ($i^2 = -1$). Pokaż, że U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$. Znajdź bazę U i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Uzasadnij odpowiedzi.

Rozwiązanie: Załóżmy, że $p \in U$. Wówczas liczba zespolona $1 + i$ jest zespolonym pierwiastkiem wielomianu p. Ponieważ p ma rzeczywiste współczynniki, więc także liczba $\overline{1+i} = 1 - i$ jest jego pierwiastkiem, czyli

$$p(x) = (x - (1+i))(x - (1-i))q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x), \tag{2}$$

gdzie $q(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia nie większego niż 1.

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i wielomiany p_1, p_2 są postaci (2), to wielomian $p_3 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ też jest takiej postaci. Zatem U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$.

Ponieważ $\deg q \leqslant 1$, więc $q(x) = ax + b$ i

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(ax + b) = ax(x^2 - 2x + 2) + b(x^2 - 2x + 2).$$

Wobec tego $U = \operatorname{span}(x(x^2 - 2x + 2), x^2 - 2x + 2)$. Są to wielomiany różnych stopni (3 i 2), więc są one liniowo niezależne, tworzą więc bazę podprzestrzeni U.

Ponieważ $\dim \mathbb{R}[x] = 4$, więc, aby powyższą bazę uzupełnić do bazy całej przestrzeni, wystarczy znaleźć jeszcze dwa wielomiany tak, aby uzyskać układ liniowo niezależny. Mogą to być na przykład wielomiany 1 (stały) i x. Układ

$$1, x, x^2 - 2x + 2, x(x^2 - 2x + 2)$$

składa się z 4 wielomianów różnych stopni, jest więc liniowo niezależny i tym samym jest on bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$.

4. Niech $a \in \mathbb{R}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozważamy podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = x_3 \right\},$$
$$Y = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ a+2 \\ 2a-6 \end{bmatrix} \right).$$

(a) Określ wymiary przestrzeni X i Y w zależności od a.

(b) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $X \cap Y = \{0\}$?

(c) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\mathbb{R}^3 = X + Y$?

Rozwiązanie:

(a): Zauważamy, że $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_3 = 2x_1$, czyli gdy

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wektory $[1, 0, 2]^T$ i $[0, 1, 0]^T$ sa liniowo niezależne, więc są one bazą podprzestrzeni X. Zatem $\dim X = 2$.

Niezależnie od wartości a żaden z wektorów rozpinających Y nie jest zerowy, więc $1 \leqslant \dim Y \leqslant 2$ i $\dim Y = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy oba wektory są liniowo niezależne. Zbadamy więc, dla jakich wartości a wektory $[1, a, -a + 3]^T$ i $[-2, a + 2, 2a - 6]^T$ są liniowo niezależne. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a+3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ a+2 \\ 2a-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\alpha = 2\beta$ oraz $3a + 2 = 0$, czyli $a = -\frac{2}{3}$. Oba wektory są więc liniowo zależne tylko wtedy, gdy $a = -\frac{2}{3}$. Zatem $\dim Y = 1$ dla $a = -\frac{2}{3}$, a dla pozostałych wartości a będzie $\dim Y = 2$.

(b): $X \cap Y = \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(X \cap Y) = 0$. Mamy

$$\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X + Y).$$

Zawsze $\dim(X + Y) \leqslant \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Jeżeli $\dim X = \dim Y = 2$ (czyli, gdy $a \neq -\frac{2}{3}$), to

$$\dim(X \cap Y) \geqslant 4 - 3 = 1.$$

Zatem dla $a = -\frac{3}{2}$ zawsze $X \cap Y \neq \{0\}$.

Jeżeli $a = -\frac{3}{2}$, to $Y = \operatorname{span}([1, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}]^T)$ i $[1, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}]^T \notin X$. Zatem $\dim(X + Y) = 3$ i $\dim(X \cap Y) = 2 + 1 - 3 = 0$, czyli $X \cap Y = \{0\}$.

(c): Zauważmy, że $X + Y = \mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(X + Y) = 3$. Ponadto,

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Jeżeli $a = -\frac{2}{3}$, to $\dim X = 2$, $\dim Y = 1$, $\dim(X \cap Y) = 0$, więc $\dim(X + Y) = 3$.

Jeżeli $a \neq -\frac{2}{3}$, to $\dim X = \dim Y = 2$ i $\dim(X + Y) = 4 - \dim(X \cap Y)$. Z punktu (b) wiemy już, że $\dim(X \cap Y) \geqslant 1$. Należy sprawdzić, dla jakich A wymiar tej podprzestrzeni jest równy 2 – wtedy $\dim(X + Y) < 3$.

Jest to równoważne temu, że $X = Y$, czyli

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ a+2 \\ 2a-6 \end{bmatrix} \in X$$

lub równoważnie $2 = -a + 3$ i $-4 = 2a - 6$. Obie równości są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$.

Ostatecznie, $X + Y = \mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 1$.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

08-01-2015 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Imię i nazwisko:

Numer albumu: Numer grupy:

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

Jeżeli zajdzie taka potrzeba, każdą dodatkową kartkę z odpowiedziami należy podpisać imieniem i nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej. Proszę także dokładnie zaznaczyć, których pytań dotyczą odpowiedzi na dodatkowych kartkach.

---

1. (0,5 pkt.) Wpisz odpowiedzi TAK lub NIE. Wszystkie odpowiedzi muszą być poprawne.

Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Które z poniższych warunków są równoważne stwierdzeniu *Macierz A jest osobliwa*?

- [ ] $\dim \ker A \geqslant 0$.
- [ ] Istnieje wektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest sprzeczny.
- [ ] $\operatorname{rank} A^T < n$.

---

2. (1 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną wymiaru $n < \infty$.

(a) (0,5 pkt.) Podaj definicję **bazy ortonormalnej** przestrzeni X.
Odp:

(b) (0,5 pkt.) Sformułuj **tożsamość Parsevala**.
Odp:

3. (0,5 pkt.) Wpisz odpowiedzi TAK lub NIE. Wszystkie odpowiedzi muszą być poprawne.

W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dana jest podprzestrzeń liniowa V. $P_V \in L(X, V)$ jest rzutem ortogonalnym na V. Wówczas:

- [ ] Dla każdej podprzestrzeni V rzut P_V jest monomorfizmem z X w V.
- [ ] Dla każdej podprzestrzeni V rzut P_V jest epimorfizmem z X na V.
- [ ] Dla pewnej podprzestrzeni V rzut P_V jest izomorfizmem X i V.

---

4. (1 pkt.) X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i $f \in L(X, Y)$ jest przekształceniem liniowym z X w Y.

(a) (0,3 pkt.) Podaj definicję **obrazu** przekształcenia f.
Odp:

(b) (0,3 pkt.) Podaj definicję **jądra** przekształcenia f.
Odp:

(c) (0,4 pkt.) Załóżmy, że $\dim X = 4$, $\dim Y = 2$ i f jest epimorfizmem z X na Y. Ile może wynosić wymiar jądra f? (Podaj wszystkie możliwe wartości.)
Odp:

---

5. (1 pkt.) X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i $\dim X = n$.

(a) (0,3 pkt.) Podaj definicję **przestrzeni dualnej** do X.
Odp:

(b) (0,3 pkt.) Podaj definicję **bazy dualnej** do bazy $x_1, x_2, \ldots x_n$ przestrzeni X.
Odp:

(c) (0,4 pkt.) Załóżmy, że $x = \sum_{k=1}^{n} k x_k \in X$ i $x_1^*, \ldots, x_n^*$ jest bazą dualną do bazy $x_1, \ldots, x_n$. Wyznacz $x_1^*(x)$ oraz $x_n^*(x)$.
Odp:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

08-01-2015 - 2. kolokwium

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 3. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Rozważamy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 5, \\ 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

(a) (1,5 pkt.) Zapisz powyższy układ równań w postaci macierzowej $A\vec{x} = \vec{b}$ i wyznacz wszystkie jego rozwiązania, stosując eliminację Gaussa.

(b) (0,75 pkt.) Czy istnieje wektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{c}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie? Uzasadnij odpowiedź.

(c) (0,75 pkt.) Czy istnieje wektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{d}$ nie ma rozwiązań? Uzasadnij odpowiedź.

2. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$, dana jest podprzestrzeń liniowa $V = \mathrm{span}([2,2,0,2,2]^T, [0,0,-1,2,2]^T, [-3,1,2,-7,-3]^T)$.

(a) (1,5 pkt.) Wyznacz bazę ortogonalną podprzestrzeni V.

(b) (1,5 pkt.) Znajdź wektory $\vec{x} \in V$ i $\vec{y} \in V^\perp$ takie, że $\vec{x} + \vec{y} = [1,0,0,0,0]^T$.

3. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_3)$ ma własności:

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 1 - 2t^3, \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = 3t - 5t^2, \quad \ker f = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

(a) (1,5 pkt.) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w $\mathbb{R}^3$ i $1, t, t^2, t^3$ w $\mathbb{R}[t]_3$.

(b) (1,5 pkt.) Niech $U = \mathrm{span}([3,1,-1]^T, [-1,1,3]^T)$. Pokaż, że zbiór $f(U)$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$ i określ jej wymiar.

4. Dla $n+1$ parami różnych liczb $x_0, x_1, \ldots, x_n$ określamy funkcjonały liniowe $f_k^* \in (\mathbb{R}[x]_n)^*$:

$$f_k^*(p) = p'(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Niech $n = 2$ i $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Pokaż, że funkcjonały f_0^*, f_1^*, f_2^* są liniowo zależne.

(b) Pokaż, że funkcjonały f_k^*, $k = 0, 1, \ldots, n$ są liniowo zależne w ogólnym przypadku (dla dowolnych n i parami różnych x_k).

Uwagi: Jeżeli $p(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j$ jest wielomianem, to p' jest jego pochodną, $p'(t) = \sum_{j=1}^m j a_j t^{j-1}$.

Rozwiązanie podpunktu (b) jest równoważne rozwiązaniu całego zadania. Za podpunkt (a) można dostać maksymalnie 1 punkt.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

Przykładowe rozwiązania zadań z 2. kolokwium

30/01/2015

---

1. Rozważamy układ równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 5, \\ 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

(a) (1,5 pkt.) Zapisz powyższy układ równań w postaci macierzowej $A\vec{x} = \vec{b}$ i wyznacz wszystkie jego rozwiązania, stosując eliminację Gaussa.

(b) (0,75 pkt.) Czy istnieje wektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{c}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie? Uzasadnij odpowiedź.

(c) (0,75 pkt.) Czy istnieje wektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ równań $A\vec{x} = \vec{d}$ nie ma rozwiązań? Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie: (a): Układ można zapisać w postaci macierzowej $A\vec{x} = \vec{b}$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 25 & -4 & -2 & \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzamy eliminację Gaussa, wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|\vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \quad w_2 \mapsto w_2 + w_1 : \quad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \quad w_1 \leftrightarrow w_3 :$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \quad w_4 \mapsto w_4 - w_2 : \quad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad w_4 \mapsto w_4 + 2w_2 :$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Z powyższej postaci wyjściowego układu odczytujemy, że $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|b] = 3$, czyli układ nie jest sprzeczny, oraz $\dim \ker A = 2$, więc rozwiązania układu zależą od dwóch parametrów.

Wyznaczamy rozwiązanie szczególne $\vec{x}$, przyjmując, że $x_4 = x_5 = 0$ i rozwiązując układ oznaczony z macierzą trójkątną:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{skąd } \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne będzie postaci $\vec{x} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, gdzie $\vec{u}, \vec{v}$ jest bazą $\ker A$. Wektor $\vec{u}$ możemy wyznaczyć, przyjmując $u_4 = 1$, $u_5 = 0$ i rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{skąd } \vec{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie, wektor $\vec{v}$ wyznaczamy przyjmując $v_4 = 0$, $v_5 = 1$ i rozwiązując układ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{skąd } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b): Układ $A\vec{x} = \vec{b}$ ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker A = \{0\}$. W tym przypadu $\dim \ker A = 2$, więc odpowiedź brzmi „nie”.

(c): Z tw. Kroneckera - Capellego wynika, że wystarczy aby $\vec{d} \notin \mathrm{im}A$. W tym przypadku jest to możliwe, gdyż $\dim \mathrm{im}A = 3$.

2. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$, dana jest podprzestrzeń liniowa $V = \mathrm{span}([2,2,0,2,2]^T, [0,0,-1,2,2]^T, [-3,1,2,-7,-3]^T)$.

(a) (1,5 pkt.) Wyznacz bazę ortogonalną podprzestrzeni V.

(b) (1,5 pkt.) Znajdź wektory $\vec{x} \in V$ i $\vec{y} \in V^\perp$ takie, że $\vec{x} + \vec{y} = [1,0,0,0,0]^T$.

Rozwiązanie: (a): Bazę ortogonalną możemy wyznaczyć, stosując ortogonalizację Grama - Schmidta. Niech $\vec{x}_1 = [2,2,0,2,2]^T$, $\vec{x}_2 = [0,0,-1,2,2]^T$, $\vec{x}_3 = [-3,1,2,-7,-3]^T$. Obliczamy

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= \vec{x}_1 = [2,2,0,2,2]^T, \\
\vec{y}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\langle\vec{y}_1,\vec{x}_2\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1 = [0,0,-1,2,2]^T - \tfrac{8}{16}[2,2,0,2,2]^T \\
&= [-1,-1,-1,1,1]^T, \\
\vec{y}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{\langle\vec{y}_1,\vec{x}_3\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle\vec{y}_2,\vec{x}_3\rangle}{\langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle}\vec{y}_2 \\
&= [-3,1,2,-7,-3]^T - \tfrac{-24}{16}[2,2,0,2,2]^T - \tfrac{-10}{5}[-1,-1,-1,1,1]^T \\
&= [-2,2,0,-2,2]^T.
\end{aligned}$$

(b): Szukany wektor $\vec{x}$ to rzut ortogonalny P_V wektora $\vec{u} = [1,0,0,0,0]^T$, na podprzestrzeń V, natomiast $\vec{y} = P_{V^\perp}(\vec{u}) = \vec{u} - P_V(\vec{u})$. Znając bazę ortogonalną podprzestrzeni V, rzut $P_V(\vec{u})$ obliczamy ze wzoru

$$\vec{x} = P_V(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{y}_1, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1 + \frac{\langle \vec{y}_2, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2\rangle}\vec{y}_2 + \frac{\langle \vec{y}_3, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_3\rangle}\vec{y}_3 = \tfrac{1}{10}[7,2,2,3,-2]^T,$$

i mamy również

$$\vec{y} = \vec{u} - \vec{x} = \tfrac{1}{10}[3,-2,-2,-3,2]^T.$$

3. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_3)$ ma własności:

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 1 - 2t^3, \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = 3t - 5t^2, \quad \ker f = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

(a) (1,5 pkt.) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w $\mathbb{R}^3$ i $1, t, t^2, t^3$ w $\mathbb{R}[t]_3$.

(b) (1,5 pkt.) Niech $U = \operatorname{span}([3,1,-1]^T, [-1,1,3]^T)$. Pokaż, że zbiór $f(U)$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$ i określ jej wymiar.

Rozwiązanie: (a): Zauważmy, że $f([1,1,1]^T) = 0$. Wektory $\vec{u}_1 = [1,1,0]^T$, $\vec{u}_2 = [1,-1,0]^T$, $\vec{u}_3 = [1,1,1]^T$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i

$$\begin{aligned}
f(\vec{e}_1) &= f(\tfrac{1}{2}\vec{u}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{u}_2) = \tfrac{1}{2}f(\vec{u}_1) + \tfrac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \tfrac{1}{2}(1-2t^3) + \tfrac{1}{2}(3t-5t^2)\\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{5}{2}t^2 - t^3\\
f(\vec{e}_2) &= f(\tfrac{1}{2}\vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_2) = \tfrac{1}{2}f(\vec{u}_1) - \tfrac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \tfrac{1}{2}(1-2t^3) - \tfrac{1}{2}(3t-5t^2)\\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}t + \tfrac{5}{2}t^2 - t^3\\
f(\vec{e}_3) &= f(\vec{u}_3 - \vec{u}_1) = f(\vec{u}_3) - f(\vec{u}_1)\\
&= -1 + 2t^3
\end{aligned}$$

Macierz przekształcenia f w zadanych bazach to

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0\\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b): Niech $g \in L(U, \mathbb{R}[x]_3)$ będzie przekształceniem liniowym zdefiniowanym jako $g(x) = f(x)$ dla $x \in U$. Wówczas $f(U) = \operatorname{im} g$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$. Ponadto, $\ker f \subset U$, więc $\ker g = \ker f$ i $\dim \ker g = 1$, wobec czego

$$\dim f(U) = \dim \operatorname{im} g = \dim U - \dim \ker g = 2 - 1 = 1.$$

4. Dla $n+1$ parami różnych liczb $x_0, x_1, \ldots, x_n$ określamy funkcjonały liniowe $f_k^* \in (\mathbb{R}[x]_n)^*$:

$$f_k^*(p) = p'(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Niech $n = 2$ i $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Pokaż, że funkcjonały f_0^*, f_1^*, f_2^* są liniowo zależne.

(b) Pokaż, że funkcjonały f_k^*, $k = 0, 1, \ldots, n$ są liniowo zależne w ogólnym przypadku (dla dowolnych n i parami różnych x_k).

Rozwiązanie: (a): Wielomian $p \in \mathbb{R}[x]_2$ zapisujemy jako $p(x) = ax^2 + bx + c$. Wówczas $p'(x) = 2ax + b$ i

$$f_0^*(p) = p'(0) = b, \quad f_1^*(p) = p'(1) = 2a + b, \quad f_2^*(p) = p'(-1) = -2a + b.$$

Funkcjonały f_0^*, f_1^*, f_2^* są liniowo zależne, gdyż dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_2$ zachodzi

$$2f_0^*(p) - f_1^*(p) - f_2^*(p) = 0,$$

czyli $2f_0^* - f_1^* - f_2^* = 0$.

(b): Rozważmy funkcjonał $g^* \in (\mathbb{R}[x]_n)^*$, $g^*(p) = p(0)$. Pokażemy, że g^* nie jest kombinacją liniową funkcjonałów f_j^*. Przypuśćmy, że dla pewnych $\alpha_j \in \mathbb{R}$ zachodzi $g^* = \sum_{j=0}^n \alpha_j f_j^*$, czyli dla każdego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_n$

$$g^*(p) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j^*(p). \tag{1}$$

Niech $p_0 = 1$ (wielomian stały). Wówczas $g^*(p_0) = 1$, natomiast dla każdego j mamy $f_j^*(p) = 0$. Równość (1) nie zachodzi więc dla $p = p_0$, więc funkcjonał g^* nie jest kombinacją liniową funkjonałów f_j^*, czyli funkcjonały te nie tworzą bazy przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_n)^*$.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

07-02-2015 – Egzamin – część teoretyczna

Imię i nazwisko:

Numer albumu: Numer grupy:

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**. Jeżeli zajdzie taka potrzeba, każdą dodatkową kartkę z odpowiedziami należy podpisać imieniem i nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej. Proszę także dokładnie zaznaczyć, których pytań dotyczą odpowiedzi na dodatkowych kartkach.

W zadaniach 1-10 należy udzielać odpowiedz TAK lub NIE, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,2 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 0,5 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1 punkt za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

---

1. Dane są dwie liczby zespolone $x = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ oraz $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Wówczas

- [ ] $2^{2015} \cdot |x^{-2015} \cdot \overline{y}| = 1$;
- [ ] dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Re}((xy)^k) = 0$;
- [ ] dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Re}(x^k) = 0$.

---

2. Załóżmy, że p jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia 17. Wówczas

- [ ] jeżeli $p(x_0) = 0$, to $x_0 \in \mathbb{R}$;
- [ ] jeżeli $z_0 \in \mathbb{C}$ i $p(z_0) = 0$, to $p(\overline{z}_0) = 0$;
- [ ] wielomian p ma 17 **różnych** pierwiastków zespolonych.

---

3. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wówczas

- [ ] dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $A\vec{x} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{x} = 0$;
- [ ] jest możliwe, że $\dim(\mathrm{im}\, A^2) < n$;
- [ ] $\det_n A \neq 0$.

---

4. W przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ dane są dwa podzbiory $U, V \subset X$, przy czym podzbiór $U \cap V$ jest podprzestrzenią liniową w X. Wówczas

- [ ] każdy z podzbiorów U, V zawiera wektor zerowy;
- [ ] jeden z podzbiorów U, V jest podprzestrzenią liniową w X;
- [ ] podzbiór $\{u + v \in X : u \in U, v \in V\}$ jest podprzestrzenią liniową w X.

5. X jest przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ i wektory $x_1, \ldots, x_k \in X$ są liniowo niezależne. Wówczas

- [ ] $k \leqslant n$;
- [ ] istnieje baza przestrzeni X, zawierająca każdy z wektorów x_j;
- [ ] gdy $k > 2$, to $\operatorname{span}(x_1, x_2) \cap \operatorname{span}(x_3, \ldots, x_k) = \{0\}$.

---

6. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową i $P_V(x)$ oznacza rzut ortogonalny danego wektora $x \in X$ na podprzestrzeń V. Wynika stąd, że

- [ ] $\|P_V(x)\| < \|x\|$;
- [ ] $\langle P_V(x), x - P_V(x) \rangle = 0$;
- [ ] dla każdego $v \in V$ zachodzi $\|x - P_V(x)\| \leqslant \|x - v\|$.

---

7. X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X = 8$, $\dim Y = 7$ i $f \in L(X, Y)$. Wówczas

- [ ] f może być izomorfizmem;
- [ ] f może być monomorfizmem;
- [ ] f może być epimorfizmem.

---

8. Które z poniższych macierzy z $\mathbb{R}^{2,2}$ są ortogonalne?

- [ ] macierz I_2;
- [ ] macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;
- [ ] macierz $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

9. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$. Wynika stąd, że

- [ ] wielomian charakterystyczny macierzy A jest iloczynem wielomianów stopnia 1 o rzeczywistych współczynnikach;
- [ ] macierz A^2 też jest diagonalizowalna;
- [ ] $A = A^T$.

---

10. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna i dodatnio określona. Wynika z tego, że

- [ ] A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej $D \in \mathbb{R}^{n,n}$;
- [ ] A jest podobna do macierzy I_n;
- [ ] A przystaje do macierzy I_n;

11. (1 pkt.) X jest przestrzenią liniową wymiaru 6, $U, V \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi, $\dim U = 3$, $\dim V = 5$. Ile może wynosić wymiar podprzestrzeni $U \cap V$? (Podaj wszystkie możliwości.)

Odp:

---

12. (1 pkt.) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, wektory $v_1, v_2, v_3 \in X$ tworzą układ ortonormalny i

$$x = v_1 + v_2 + v_3, \qquad y = v_1 - 2v_2 + 2v_3.$$

Podaj wartości wyrażeń $\langle x, y \rangle$ oraz $\|y\|$.

Odp:

---

13. (1 pkt.) Podaj definicję **bazy dualnej** do bazy $x_1, x_2, \ldots x_n$ przestrzeni liniowej X.

Odp:

---

14. (1 pkt.) X jest przestrzenią liniową z bazą $x_1, \ldots, x_n$, $x = \sum_{k=1}^{n} k x_k \in X$, układ $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ jest bazą dualną do bazy $x_1, \ldots, x_n$. Wyznacz $x_1^*(x)$ oraz $x_n^*(x)$.

Odp:

---

15. (1 pkt.) Wymień 3 różne niezmienniki relacji podobieństwa macierzy.

Odp:

---

16. (1 pkt.) Sformułuj twierdzenie Jordana (w wersji dla endomorfizmów przestrzeni liniowej X).

Geometria z algebrą liniową - Egzamin 07-02-2015

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 6. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $u_0, u_1, \ldots, u_n$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia $n+1$. Dla $k \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $u_0^k + u_1^k + \ldots + u_n^k$.

2. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Niech $B = AA^T$ oraz $C = A^T A$.

(a) (3 pkt.) Pokaż, że $\mathrm{im} B \subset \mathrm{im} A$ oraz $\ker A \subset \ker C$.

(b) (3 pkt.) Załóżmy, że macierze B i C są nieosobliwe. Pokaż, że wówczas $m = n$ i macierz A też jest nieosobliwa.

3. Dla parametru zespolonego a rozważamy układ równań liniowych

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ ay + z = 1, \\ x + az = -2. \end{cases} \tag{1}$$

(a) (3 pkt.) Dla jakich zespolonych wartości a układ (1) ma jednoznaczne rozwiązanie?

(b) (3 pkt.) Do układu (1) dołączono jeszcze jedno równanie

$$x + y + z = a - 1 \ .$$

Dla jakich zespolonych wartości a otrzymany w ten sposób układ **czterech** równań ma jednoznaczne rozwiązanie?

4. Dla $n \geqslant 2$ rozważamy macierz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

(a) (3 pkt.) Wyznacz $\det_n A_n$ w zależności od $n \geqslant 2$.

(b) (3 pkt.) Oblicz $\det_4 A_4$.

5. Endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}[t]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p) = 2 \cdot p'(t) + (1 + t + t^2 + t^3) \cdot p(0).$$

(a) (3 pkt.) Pokaż, że F jest izomorfizmem.

(b) (3 pkt.) Rozstrzygnij, czy układ funkcjonałów liniowych $f_j^* \in (\mathbb{R}[t]_3)^*$

$$f_j^*(p) = F(p)(j), \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}[t]_3)^*$.

6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (3 pkt.) Znajdź macierz Jordana $J \in \mathbb{R}^{4,4}$ podobną do macierzy A lub udowodnij, że taka macierz Jordana nie istnieje.

(b) (3 pkt.) Czy macierz $(A - 3I)^{2015}$ jest diagonalizowalna? Uzasadnij odpowiedź.

Geometria z algebrą liniową - Egzamin 07-02-2015

Przykładowe rozwiązania zadań

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $u_0, u_1, \ldots, u_n$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia $n+1$. Dla $k \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $u_0^k + u_1^k + \ldots + u_n^k$.

Rozwiązanie: Można przyjąć, że $u_1 = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$ i $u_j = u_1^j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$. Dla danego k oznaczmy wartość wyznaczanej sumy przez S_k. Wtedy

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} u_j^k = \sum_{j=0}^{n} u_1^{kj}.$$

Jeżeli k jest wielokrotnością $n+1$, to $u_1^{kj} = 1$ dla każdego j i wtedy $S_k = n+1$. W przeciwnym wypadku $u_1^k \neq 1$ i możemy skorzystać ze wzoru na sumę postępu geometrycznego:

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} (u_1^k)^j = \frac{u_1^{k(n+1)} - 1}{u_1^k - 1} = \frac{(u_1^{n+1})^k - 1}{u_1^k - 1} = \frac{1-1}{u_1^k - 1} = 0.$$

2. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Niech $B = AA^T$ oraz $C = A^T A$.

(a) (3 pkt.) Pokaż, że $\mathrm{im} B \subset \mathrm{im} A$ oraz $\ker A \subset \ker C$.

(b) (3 pkt.) Załóżmy, że macierze B i C są nieosobliwe. Pokaż, że wówczas $m = n$ i macierz A też jest nieosobliwa.

Rozwiązanie:

(a): Zauważmy, że $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ i $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Jeżeli $\vec{y} \in \mathrm{im}\, B$, to $\vec{y} = B\vec{x}$ dla pewnego $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, więc $y = AA^T\vec{x} = A\vec{z}$, dla $\vec{z} = A^T\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Zatem $\vec{y} \in \mathrm{im}\, A$. Pokazaliśmy, że $\mathrm{im}\, B \subset \mathrm{im}\, A$.
Jeżeli $\vec{x} \in \ker A$, to $A\vec{x} = 0$. Wtedy $C\vec{x} = A^T A\vec{x} = A^T 0 = 0$, czyli $\vec{x} \in \ker C$. Pokazaliśmy, że $\ker A \subset \ker C$.

(b): Skoro macierz B jest nieosobliwa, to $\mathrm{im}\, B = \mathbb{R}^m$ i z podpunktu (a) $\mathrm{im}\, A = \mathbb{R}^m$, co oznacza, że $\mathrm{rank}\, A = m$. Jednocześnie $\mathrm{rank}\, A \leqslant \min(m, n)$, więc $m \leqslant n$.
Tak samo jak w podpunkcie (a) możemy pokazać, że $\mathrm{im}\, C \subset \mathrm{im}\, A^T$, a skoro macierz C jest nieosobliwa, to $\mathrm{im}\, C = \mathbb{R}^n = \mathrm{im}\, A^T$, a więc $\mathrm{rank}\, A^T = \mathrm{rank}\, A = n$. Podobnie jak wcześniej, $n \leqslant m$, więc ostatecznie $m = n$ i $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Skoro $\mathrm{rank}\, A = n$, to macierz A jest nieosobliwa.

3. Dla parametru zespolonego a rozważamy układ równań liniowych

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ ay + z = 1, \\ x + az = -2. \end{cases} \tag{1}$$

(a) (3 pkt.) Dla jakich zespolonych wartości a układ (1) ma jednoznaczne rozwiązanie?

(b) (3 pkt.) Do układu (1) dołączono jeszcze jedno równanie

$$x + y + z = a - 1\ .$$

Dla jakich zespolonych wartości a otrzymany w ten sposób układ **czterech** równań ma jednoznaczne rozwiązanie?

Rozwiązanie:

(a): Układ 3 równań z 3 niewiadomymi ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz lewej strony układu (oznaczmy ją prez A) jest nieosobliwa, co jest równoważne temu, że $\det_3 A \neq 0$. Mamy:

$$\det_3 \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} = a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1) = (a+1)\left(a - \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(a - \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Zatem układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla

$$a \in \mathbb{C} \setminus \left\{-1, \tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

(b): Rozpatrywany teraz układ równań ma postać

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ ay + z = 1, \\ x + az = -2, \\ x + y + z = a - 1. \end{cases} \tag{2}$$

Dodając pierwsze trzy równania stronami, otrzymujemy warunek

$$(a+1)(x+y+z) = 0.$$

Zatem $a = -1$ lub $x + y + z = 0$.

Jeżeli $a \neq -1$, to $x+y+z = 0$ i z ostatniego równania układu wynika, że $a = 1$. Wówczas z podpunktu (a) wynika, że istnieją jednoznacznie wyznaczone x, y, z, spełniające pierwsze 3 równania. Natomiast ostatnie równanie ma postać $x + y + z = 0$ i otrzymujemy je jako sumę pierwszych trzech równań układu podzieloną przez 2, czyli jeżeli spełnione są pierwsze trzy równania, to ostatnie też jest spełnione. Zatem układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla $a = 1$.

Rozpatrujemy teraz przypadek $a = -1$. Zapiszmy macierz rozszerzoną układu (2) i zastosujmy eliminację Gaussa do wyznaczenia jego rozwiązań. Otrzymujemy kolejno macierze

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

czyli wyjściowy układ jest równoważny następującemu

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Macierz lewej strony jest nieosobliwa, jako macierz trójkątna bez zer na przekątnej, więc badany układ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Ostatecznie, układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla $a \in \{-1, 1\}$.

4. Dla $n \geqslant 2$ rozważamy macierz

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

(a) (3 pkt.) Wyznacz $\det_n A_n$ w zależności od $n \geqslant 2$.

(b) (3 pkt.) Oblicz $\det_4 A_4$.

Rozwiązanie:

(a): W macierzy A_n możemy odjąć od k-tej kolumny kolumnę $(k-1)$-szą dla $k = n, n-1, \dots, 2$, nie zmieniając wartości wyznacznika. Zatem

$$\det_n A_n = \det_n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli liczba n jest nieparzysta, to możemy wyzerować 1. kolumnę, dodając do niej kolumny $n, n-2, \dots, 3$ i wyznacznik nie ulegnie zmianie. Zatem dla n nieparzystych $\det_n A_n = 0$.

Dla n parzystych, dodając do kolumny 1. kolumny $n, n-2, \ldots, 2$ także nie zmienimy wyznacznika, więc wówczas

$$\det_n A_n = \det_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy macierz trójkątną górną z jedynkami na przekątnej. Zatem dla n parzystych $\det_n A_n = 1$.

(b): Zgodnie z rezultatem z podpunktu (a), $\det_4 A_4 = 1$.

5. Endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}[t]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p) = 2 \cdot p'(t) + (1 + t + t^2 + t^3) \cdot p(0).$$

(a) (3 pkt.) Pokaż, że F jest izomorfizmem.

(b) (3 pkt.) Rozstrzygnij, czy układ funkcjonałów liniowych $f_j^* \in (\mathbb{R}[t]_3)^*$

$$f_j^*(p) = F(p)(j), \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}[t]_3)^*$.

Rozwiązanie:

(a): Endomorfizm F przestrzeni skończonego wymiaru jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem, co jest równoważne temu, że $\ker F = \{0\}$. Załóżmy, że $p \in \ker F$. Ponieważ $\deg p' \leqslant 2$ i $F(p) = 2 \cdot p'(t) + (1 + t + t^2 + t^3) \cdot p(0) = 0$, więc współczynnik przy t^3 wielomianu $F(p)$ jest równy 0, czyli $p(0) = 0$ i $F(p) = 2p'(t) = 0$. Zatem p' jest wielomianem zerowym, czyli $p = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Skoro $p(0) = 0$, to $a = 0$, czyli $p = 0$. Pokazaliśmy, że $\ker F = \{0\}$, więc F jest izomorfizmem.

(b): Niech $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}[x]_3$ oznaczają wielomiany z bazy Lagrange'a dla punktów $x_0 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. W szczególności

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}.$$

Skoro f jest izomorfizmem, to istnieją wielomiany $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}[x]_3$, takiej, że $F(p_j) = l_j$ dla $j = 0, 1, 2, 3$. Wówczas

$$f_j^*(p_i) = l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}.$$

Zatem układ wielomianów p_0, p_1, p_2, p_3 jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$, a układ funkcjonałów $f_0^*, f_1^*, f_2^*, f_3^*$ jest odpowiadającej jej bazą dualną w przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_3)^*$.

6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (3 pkt.) Znajdź macierz Jordana $J \in \mathbb{R}^{4,4}$ podobną do macierzy A lub udowodnij, że taka macierz Jordana nie istnieje.

(b) (3 pkt.) Czy macierz $(A - 3I)^{2015}$ jest diagonalizowalna? Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie:

(a): Wyznaczamy zera wielomianu charakterystycznego macierzy A, czyli jej wartości własne:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= [(4-x)(2-x)+1] \cdot \left[(4-x)^2 - 1\right] \\ &= (x^2 - 6x + 9)(4 - x - 1)(4 - x + 1) \\ &= (x-3)^3(x-5). \end{aligned}$$

Zatem macierz A ma dwie wartości własne 3 oraz 5, przy czym 3 ma krotność algebraiczną 3. Zatem na przekątnej szukanej macierzy J znajdują się liczby $3, 3, 3, 5$ i J składa się z jednej klatki 1×1 dla wartości własnej 5 oraz 1, 2 lub 3 klatek dla wartości własnej 3. Liczba tych klatek jest równa wymiarowi podprzestrzeni własnej $V_3 = \ker(A - 3I)$, a suma ich rozmiarów jest równa 3. Mamy

$$\begin{aligned}\ker(A-3I) &= \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \ker \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ostatnia macierz ma rząd 2, więc jej jądro ma wymiar 2, czyli $\dim V_3 = 2$. W macierzy J są 2 klatki Jordana dla wartości własnej 3 i

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b): Macierz $A-3I$ jest podobna do macierzy $J-3I$, a macierz $(A-3I)^{2015}$ jest podobna do macierzy $(J-3I)^{2015}$. Wystarczy więc zbadać, czy ta ostatnia macierz jest diagonalizowalna. Macierz $J-3I$ ma trzy klatki Jordana: dwie z 0 na przekątnej i jedną z 2 na przekątnej:

$$J - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podnosząc macierz $J - 3I$ do potęgi, podnosimy do danej potęgi każdą z jej klatek. Mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{2015} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [0]^{2015} = [0], \quad [2]^{2015} = [2^{2015}].$$

Zatem macierz $(A - 3I)^{2015}$ jest podobna do macierzy diagonalnej

$$(J - 3I)^{2015} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2015} \end{bmatrix},$$

czyli jest ona diagonalizowalna.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

23-02-2015 – Egzamin (2. termin) – część teoretyczna

Imię i nazwisko:

Numer albumu: Numer grupy:

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**. Jeżeli zajdzie taka potrzeba, każdą dodatkową kartkę z odpowiedziami należy podpisać imieniem i nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej. Proszę także dokładnie zaznaczyć, których pytań dotyczą odpowiedzi na dodatkowych kartkach.

W zadaniach 1-10 należy udzielać odpowiedz TAK lub NIE, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 0,2 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 0,5 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 1 punkt za całe zadanie,
- brak odpowiedzi **nie** jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

---

1. Zbiór G jest grupą z działaniem $\diamond$ i elementem neutralnym e. Wynika z tego, że

- [ ] dla każdego $a \in G$ zachodzi $a \diamond e = a$;
- [ ] dla dowolnych $a, b \in G$ zachodzi $a \diamond b = b \diamond a$;
- [ ] zbiór G nie może mieć dokładnie 2015 elementów.

---

2. Załóżmy, że p jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia 8, który ma 8 **parami róznych** pierwiastków zespolonych. Wówczas

- [ ] jest możliwe, że p ma dokładnie 3 parami różne pierwiastki rzeczywiste;
- [ ] jest możliwe, że p ma dokładnie 4 parami różne pierwiastki rzeczywiste;
- [ ] jest możliwe, że p nie ma pierwiastków rzeczywistych i dokładnie jeden pierwiastek wielomianu p ma zerową część rzeczywistą.

---

3. W przestrzeni liniowej X wymiaru n dane są dwie podprzestrzenie liniowe $U, V \subset X$. Wówczas

- [ ] $\dim U + \dim V \leqslant n$;
- [ ] podzbiór $U \cap V$ jest podprzestrzenią liniową w X;
- [ ] podzbiór $\{u + v \in X : u \in U, v \in V\}$ jest podprzestrzenią liniową w X.

---

4. Które z poniższych warunków są równoważne stwierdzeniu, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa?

- [ ] Kolumny macierzy A są liniowo niezależne;
- [ ] $\ker A = \{0\}$;
- [ ] $\dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A) = n$.

5. X jest przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ i $x_1, \ldots, x_k \in X$. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli $k \leqslant n$, to wektory $x_1, \ldots, x_k$ są liniowo niezależne;
- [ ] jeżeli wektory $x_1, \ldots, x_k$ są liniowo niezależne, to $k \leqslant n$;
- [ ] istnieje baza przestrzeni X, zawierająca każdy z wektorów x_j, dla $j = 1, \ldots, k$.

---

6. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową i $P_V(x)$ oznacza rzut ortogonalny danego wektora $x \in X$ na podprzestrzeń V. Wynika stąd, że

- [ ] $x - P_V(x)$ jest rzutem ortogonalnym wektora x na podprzestrzeń $V^\perp$;
- [ ] jeżeli $P_V(P_V(x)) = x$, to $x \in V$;
- [ ] jeżeli $v \in V$ i $\|v - x\| \leqslant \|P_V(x) - x\|$, to $v = P_V(x)$.

---

7. X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$, $\dim X = 7$, $\dim Y = 8$ i $f \in L(X, Y)$. Wówczas

- [ ] f może być monomorfizmem;
- [ ] f może być epimorfizmem;
- [ ] f może być izomorfizmem.

---

8. Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową i $f \in L(X)$. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{im} f \subset \operatorname{im}(f \circ f)$;
- [ ] $\ker f \subset \ker(f \circ f)$;
- [ ] $(\operatorname{im} f) \cap (\ker f) = \{0\}$.

---

9. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ takie, że $A\vec{a} = \vec{a}$, $A\vec{b} = \vec{b}$, $A\vec{c} = -\vec{c}$. Wynika z tego, że

- [ ] liczby 1 oraz -1 są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy A;
- [ ] wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne;
- [ ] wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne

---

10. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna i dodatnio określona. Wówczas

- [ ] $\det_n A > 0$;
- [ ] macierz A jest diagonalizowalna;
- [ ] jest możliwe, że na przekątnej macierzy A znajduje się liczba 0;

11. (1 pkt.) Sformułuj *zasadnicze twierdzenie algebry.*

Odp:

---

12. (1 pkt.) X jest przestrzenią liniową wymiaru 6, $U, V \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi, $\dim U = 3$, $\dim V = 4$. Ile może wynosić wymiar podprzestrzeni $U + V$? (Podaj wszystkie możliwości.)

Odp:

---

13. (1 pkt.) X, Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i $\dim X = 3$, $\dim Y = 2$. Podaj wymiary podprzestrzeni $L(X)$, $L(X, Y)$ i $L(\mathbb{K}, Y)$.

Odp:

---

14. (1 pkt.) Dane są macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $\det_n A = 2$, $\det_n B = 3$. Podaj wartości wyznaczników macierzy A^{-1}, A^3BA^2 oraz B^T.

Odp:

---

15. (1 pkt.) X jest podprzestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Podaj definicje *wartości własnej* i *wektora własnego* endomorfizmu $f \in L(X)$

Odp:

---

16. (1 pkt.) Podaj definicję *formy hermitowskiej* określonej na przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$.

Geometria z algebrą liniową - Egzamin (2. termin) 23-02-2015

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, numerem albumu oraz numerem grupy ćwiczeniowej.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 6. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez.

---

1. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$ i $n > 2$. Dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ niech $u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-1}u_0.$$

2. Załóżmy, że $A \in \mathbb{R}^{10,10}$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_7 \in \mathbb{R}^{10}$, wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_7$ są liniowo niezależne oraz

$$A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = \ldots = A\vec{x}_7.$$

(a) (3 pkt.) Pokaż, że $\operatorname{rank} A \leqslant 4$.

(b) (3 pkt.) Pokaż, że macierz $A + A^T$ jest osobliwa.

3. Dla liczby rzeczywistej a rozważamy macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

(a) (3 pkt.) Dla jakich liczb $a \in \mathbb{R}$ układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ ma dla każdego wektora $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ jednoznaczne rozwiązanie $\vec{x}$?

(b) (3 pkt.) Dla $a = -2$ pokaż, że zbiór

$$Z = \left\{\vec{b} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{b} \text{ dla pewnego } \vec{x} \in \mathbb{R}^4\right\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^4$ i wyznacz jej wymiar.

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_4$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(-1) + 2p(1) = 2p(-1) + p(1) = 0\}.$$

(a) (3 pkt.) Wyznacz bazę podprzestrzeni U.

(b) (3 pkt.) Dla danego parametru $k \in \mathbb{R}$ rozważamy podprzestrzeń

$$V_k = \operatorname{span}(kx^3 + 1, x^2 + x) \subset \mathbb{R}[x]_4.$$

Dla jakich wartości k prawdziwa jest równość $\mathbb{R}[x]_4 = U \oplus V_k$?

5. Endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}[t]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p)(t) = p(-1) \cdot t + p(0) \cdot t^2 + p(1) \cdot t^3 - p'(t).$$

(a) (3 pkt.) Wyznacz macierz F w bazie $1, t, t^2, t^3$.

(b) (3 pkt.) Rozstrzygnij, czy F jest izomorfizmem.

6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (3 pkt.) Znajdź macierz Jordana $J \in \mathbb{R}^{4,4}$ podobną do macierzy A lub udowodnij, że taka macierz Jordana nie istnieje.

(b) (3 pkt.) Wyznacz ślad macierzy $(A - 2I_4)^{10} + (A + I_4)^7$.