GEOMETRIA Z ALGEBRĄ LINIOWĄ

Zadania

Wersja 2022.1

06/10/2022

WMIM, UW

Spis treści

1 Grupy i ciała **3**

2 Liczby zespolone **6**

3 Wielomiany **11**

4 Macierze **13**

5 Układy równań liniowych (część 1) **17**

6 Przestrzenie liniowe **19**

6.1 Definicja, podprzestrzenie, kombinacje liniowe 19

6.2 Liniowa niezależność 21

6.3 Baza i wymiar 23

6.4 Przecięcie i suma podprzestrzeni 25

7 Obraz, jądro i rząd macierzy **29**

8 Wyznaczniki **33**

9 Przekształcenia liniowe **37**

10 Funkcjonały liniowe i przestrzenie dualne **45**

11 Przestrzenie z iloczynem skalarnym **50**

12 Endomorfizmy i zagadnienie własne **58**

13 Określoność macierzy **61**

Rozdział 1

Grupy i ciała

1.1. Który z poniższych zbiorów wraz ze wskazanym działaniem jest grupą? Jeżeli tak, to wskaż element neutralny

- liczby całkowite parzyste z działaniem dodawania,
- liczby całkowite nieparzyste z działaniem dodawania,
- zbiór wszystkich potęg naturalnych danej liczby rzeczywistej dodatniej a z działaniem mnożenia,
- zbiór wszystkich potęg całkowitych danej liczby rzeczywistej dodatniej a z działaniem mnożenia
- zbiór wektorów 2-wymiarowych o rzeczywistych współczynnikach z działaniem dodawania wektorów.

1.2. Podaj przykład grupy mającej dokładnie n elementów.

1.3. Jak określić strukturę grupy na okręgu?

1.4. Niech X to dowolny zbiór mający co najmniej 3 elementy, G to zbiór wszystkich bijekcji zbioru G w siebie, $\mathrm{id} : X \to X$ to przekształcenie tożsamościowe, $\circ$ to operacja składania funkcji. Wykaż, $(G, \circ, \mathrm{id})$ jest grupą nieabelową.

1.5. **Prawo skracania.** Załóżmy, że $(X, \diamond, e)$ jest grupą, $x, y, z \in X$ oraz $x \diamond z = y \diamond z$. Pokaż, że $x = y$.

1.6. (Stw. 1.1 ze skryptu) Załóżmy, że $(G, \diamond, e)$ jest grupą i $x \in G$. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden element $y \in G$ taki, że $x \diamond y = e$ i wówczas także $y \diamond x = e$.

1.7. $(G, \diamond, e)$ jest grupą i $a, b \in G$. Pokaż, że

$$(a \diamond b)^{-1} = b^{-1} \diamond a^{-1}.$$

(a^{-1} to jedyny element grupy odwrotny do a)

1.8. Na zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ określamy działanie „$\diamond$”:

$$a \diamond b = a - ab + b.$$

(a) Wyznacz elementy neutralny e tego działania.
(b) Czy działanie to jest łączne?
(c) Niech $X \subset \mathbb{Q}$ to podzbiór liczb wymiernych mających element odwrotny względem tego działania. Czy $(X, \diamond, e)$ jest grupą?

1.9. Na zbiorze $M = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ par liczb rzeczywistych (a, b) takich, że $a \neq 0$, definiujemy działanie „$*$”:

$$(a, b) * (c, d) = \left(ac, ad + \frac{b}{c}\right).$$

Wyznacz element neutralny $\mathbf{e}$ tego działania. Czy $(M, *, \mathbf{e})$ jest grupą?

1.10. Ile różnych działań „$\diamond$” można określić na zbiorze

- 2-elementowym $X = \{e, a\}$
- 3-elementowym $X = \{e, a, b\}$
- 4-elementowym $X = \{e, a, b, c\}$

tak, aby $(X, \diamond, e)$ było grupą?

1.11. Pokaż, że grupa permutacji zbioru 3-elementowego $A = \{0, 1, 2\}$ z działaniem „$\circ$” i elementem neutralnym id zawiera podzbiory dwuelementowy X i trzyelementowy Y takie, że $(X, \circ, \mathrm{id})$ i $(Y, \circ, \mathrm{id})$ są grupami.

1.12. $(G, \diamond, e)$ jest grupą mającą n elementów, $a \in G$. Niech

$$a^k = a \diamond a \diamond \ldots \diamond a$$

(działanie wykonujemy $k-1$ razy) oznacza k-tą potęgę elementu a. Pokaż, że istnieje liczba naturalna m taka, że $a^m = e$.

1.13. Niech n będzie liczbą pierwszą, $\mathbb{Z}_n^* = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Na zbiorze $\mathbb{Z}_n^*$ rozważamy działanie $\bullet$ jako mnożenie modulo n. Pokaż, że $(\mathbb{Z}_n^*, \bullet, 1)$ jest grupą. (Czy n musi być liczbą pierwszą?)

1.14. W zbiorze $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wszystkich par uporządkowanych liczb wymiernych określono działanie dwuargumentowe

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 1, 2bd), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

(a) Wyznacz element neutralny $(u, v) \in A$ tego działania.

(b) Znajdź najmniejszy (w sensie inkluzji) podzbiór $B \subset A$ taki, że $(A\backslash B, *, (u, v))$ jest grupą abelową. (Należy uzasadnić zarówno, że znaleziony zbiór B jest najmniejszy, jak i to, że $(A\backslash B, *, (u, v))$ jest grupą abelową.)

1.15. Niech p oznacza liczbę pierwszą, $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $\oplus$ i $\odot$ to działania dodawania i mnożenia modulo p. Udowodnij, że $(X, \oplus, \odot, 0, 1)$ jest ciałem.

1.16. Niech $X \subset \mathbb{R}$ to taki podzbiór, że $(X, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem. Wykaż, że $\mathbb{Q} \subset X$. Podaj przykład takiego podzbioru X, że $\mathbb{Q} \subsetneq X \subsetneq \mathbb{R}$.

1.17. Udowodnij, że istnieje ciało mające dokładnie cztery elementy $0, 1, a, b$.

1.18. Niech $X = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} : a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$, natomiast $+$ i $\cdot$ to zwykłe działania na liczbach rzeczywistych. Udowodnij, że $(X, 0, 1, +, \cdot)$ jest ciałem.

1.19. Na zbiorze $\mathbb{Q}$ określono działania $a \oplus b = a + b + 1$ i $a \odot b = a + b + ab$. Znajdź elementy $\mathbf{Z}, \mathbf{J} \in \mathbb{Q}$ takie, że dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ zachodzi $a \oplus \mathbf{Z} = a$ i $a \odot \mathbf{J} = a$. Czy $(\mathbb{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \oplus, \odot)$ jest ciałem?

Rozdział 2

Liczby zespolone

2.1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej $a + bi$:

(a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$,

(b) $(4+\sqrt{3}i)(5-2\sqrt{2}i)-(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)$,

(c) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,

(d) $(3+i)^3+(3-i)^3$,

(e) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,

(f) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$,

(g) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (dla $n = 2, 3, 4 \ldots$),

(h) $(1-i)^{4n}$ (dla $n \in \mathbb{N}$).

2.2. Niech $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 + u + u^2$, $1 + \overline{u} + \overline{u}^2$.

2.3. Udowodnij nierówności $\mathrm{Re}z \leqslant |\mathrm{Re}z| \leqslant |z|$ oraz $\mathrm{Im}z \leqslant |\mathrm{Im}z| \leqslant |z|$.

2.4. Dla $z, w, \in \mathbb{C}$ udowodnij nierówność $|z+w| \leqslant |z|+|w|$ i określ, kiedy nierówność staje się równością. Korzystając z pierwszej nierówności udowodnij nierówność $\big||z|-|w|\big| \leqslant |z-w|$.

2.5. Niech $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Udowodnij równoważność warunków:

(a) $|z| = 1$ (b) $\mathrm{Re}z = \dfrac{z^2+1}{2z}$ (c) $\mathrm{Im}z = \dfrac{z^2-1}{2iz}$.

2.6. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z| - z = 1 + 2i$,

(b) $z^2 = i$,

(c) $z^2 = 3 - 4i$,

(d) $z^2 = \overline{z}$,

(e) $z^3 = \overline{z}$,

(f) $z^2 + 2|z|^2 = 2$,

(g) $z^3 + |z|^2 + z = 0$,

(h) $(z+i)(\overline{z}-i)^2(iz-1)^3 = 64$.

2.7. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leqslant 1\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 2\}$;

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = a\}$ dla $a = 1, 2, 3$;

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |\mathrm{Re}z| < 2\}$;

(f) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$;

(g) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \mathrm{Im}z + 1\}$;

(h) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$.

2.8. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamość

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big).$$

Podaj interpretację geometryczną tej równości.

2.9. Niech $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = |w| = 1$ i $zw \neq -1$. Udowodnij, że liczba $\dfrac{z + w}{1 + zw}$ jest rzeczywista.

2.10. Dane są liczy zespolone u, v, w takie, że $u + v + w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

2.11. Niech $z \in \mathbb{C}$ i załóżmy, że liczba $\dfrac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ jest rzeczywista. Udowodnij, że $z \in \mathbb{R}$ lub $|z| = 1$.

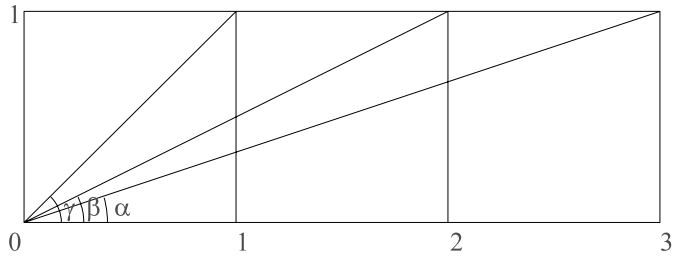
2.12. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

(a) $|x + y|^2 + |y + z|^2 + |z + x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x + y + z|^2$;

(b) $|x + y| + |y + z| + |z + x| \leqslant |x| + |y| + |z| + |x + y + z|$.

2.13. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i, (b) $2 + 2i$, (c) $-1 + \sqrt{3}i$, (d) $\dfrac{3 + 2i}{-2 + 3i}$, (e) $(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$, (f) $2 + \sqrt{3} + i$.

2.14. Oblicz sumę kątów $\alpha + \beta + \gamma$ na rysunku poniżej.



2.15. Zapisz liczby

$$(1 - i)^{99}, \quad \left(\frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}\right)^{25}, \quad (2 - \sqrt{2} + 1)^{12}, \quad \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{12}$$

w postaci $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2.16. Niech $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$. Wyznacz postać trygonometryczną liczb:

(a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$,

(b) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$,

(c) $1 + i\operatorname{tg}\alpha$,

(d) $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$.

2.17. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$|z| = 1 = \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right|.$$

2.18. Wyraź $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $\operatorname{tg}(5x)$ przez $\operatorname{tg} x$.

2.19. Znajdź zwarte wzory dla sum:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx)$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

2.20. Wyznacz pierwiastki zespolone

- stopnia 4 z 1,
- stopnia 2 z i,
- stopnia 3 z -1.

2.21. Wykaż, że liczba $\zeta = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia mimo, że $|\zeta| = 1$.

2.22. Niech $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ to wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Oblicz $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}$ oraz $z_0 z_1 \ldots z_{n-1}$.

2.23. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$ i $n > 2$. Dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ niech $u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-1}u_0.$$

2.24. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Re}(u_k\overline{z})\cdot u_k.$$

2.25. Środkiem ciężkości pewnego trójkąta równobocznego na płaszczyźnie zespolonej jest liczba $1+i$, jeden z wierzchołków tego trójkąta znajduje się w punkcie 0. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające pozostałym wierzchołkom tego trójkąta.

2.26. Załóżmy, że $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$. Pokaż, że liczby z_1, z_2, z_3 są wierzchołkami trójkąta równobocznego wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

2.27. Załóżmy, że $|z_k| = 1$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Pokaż, że liczby zespolone z_k są wierzchołkami prostokąta wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

2.28. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że liczba $z^5 \cdot (\overline{z})^{-3}$ jest rzeczywista.

2.29. Znajdź zespolone pierwiastki wielomianu

$$p(z) = z^2 - 5z + 4 + 10i.$$

2.30. Wyznacz wszystkie zespolone rozwiązania z równania

$$(z+i)^4 = \frac{|z|^8}{81}.$$

2.31. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie

$$z^3 = (iz+1)^3.$$

2.32. Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$z^3 + |z|^2 + z = 0.$$

2.33. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$\left|\frac{1+z}{1-i\overline{z}}\right| = 1.$$

2.34. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równość

$$(z+i)(\overline{z}-i)^2(iz-1)^3 = 64.$$

2.35. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n równanie

$$|z - (1+i)^n| = z$$

ma rozwiązanie w dziedzinie zespolonej.

2.36. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right).$$

2.37. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $u_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Rozstrzygnij, dla jakich wartości n liczba $\dfrac{u_n - 1}{|u_n - 1|}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedności stopnia n.

2.38. Dana jest liczba zespolona $w = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną iloczynu

$$(1 + w) \cdot (1 + w^2) \cdot (1 + w^3) \cdot \ldots \cdot (1 + w^{100}).$$

Rozdział 3

Wielomiany

3.1. Wyznacz zespolone pierwiastki trójmianów

(a) $z^2 - 2z + 5$,

(b) $z^2 + 4iz - 3$,

(c) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i$.

3.2. Rozłóż wielomiany $p(z) = z^3 + z^2 + z - 3$ i $q(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ na czynniki (a) rzeczywiste, (b) zespolone jak najniższego stopnia.

3.3. Rozłóż na czynniki rzeczywiste i zespolone możliwie niskiego stopnia wielomiany $z^4 + z^2 + 1$ i $z^3 + 8$.

3.4. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wielomian $p(z) = z^3 + (3 + i)z^2 - 3z - (a + i)$ ma pierwiastek rzeczywisty?

3.5. Załóżmy, że p jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i liczba z jest jego pierwiastkiem zespolonym (czyli $p(z) = 0$). Pokaż, że $p(\overline{z}) = 0$.

3.6. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[z]_n$. Pokaż, że suma kwadratów wszystkich (zespolonych) pierwiastków wielomianu p jest liczbą rzeczywistą.

3.7. Oblicz $\cos \frac{2\pi}{5}$ i $\sin \frac{2\pi}{5}$.

3.8. Niech $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$. Korzystając ze schematu Hornera oblicz $p(-2)$ i wyznacz resztę z dzielenia p przez dwumian $x + 2$.

3.9. Niech $p(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$. Korzystając ze schematu Hornera oblicz $p(2)$ i wyznacz resztę z dzielenia p przez dwumian $x - 2$.

3.10. Zapisz wielomian $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ jako sumę potęg dwumianu $x - 2$. Wykorzystaj schemat Hornera.

3.11. Niech $p, q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$ i załóżmy, że pierwiastki trójmianu kwadratowego $z^2 + pz + q^2$ mają równe moduły. Udowodnij, że $p/q \in \mathbb{R}$.

3.12. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ i $|a| = |b| = |c| \neq 0$ i załóżmy, że trójmian $az^2 + bz + c$ ma pierwiastek o module 1. Pokaż, że $b^2 = ac$.

3.13. Dla $a \in \mathbb{R}$ rozważamy wielomian $p(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$. Wyznacz krotność pierwiastka $x_0 = -1$ wielomianu p w zależności od a.

3.14. Czy wielomian $x^{2020} + x^{2019} + \ldots + x + 1$ może być kwadratem innego wielomianu o współczynnikach zespolonych?

3.15. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, wielomian $ax^{n+1} + bx^n + 1$ jest podzielny przez $(x-1)^2$?

3.16. Dla jakich $m \in \mathbb{N}$ wielomian $(x+1)^m - x^m - 1$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$?

3.17. Niech $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ to wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Znajdź wartość iloczynu

$$(i + u_0)(i + u_1) \ldots (i + u_{n-1}).$$

3.18. Jeden pierwiastek wielomianu $x^3 + px^2 + qx + r$, gdzie $p, q, r \in \mathbb{C}$, jest sumą dwóch pozostałych. Znajdź związek pomiędzy liczbami p, q i r.

3.19. Rozwiąż w liczbach zespolonych układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 4; x^2 + y^2 + z^2 = 14; x^3 + y^3 + z^3 = 34. \end{cases}$$

3.20. Dany jest wielomian $P \in \mathbb{C}[z]$:

$$P(z) = (z^{200} + 1)(z^{80} - 1).$$

(a) Wyznacz liczbę **różnych** pierwiastków zespolonych wielomianu P.

(b) Oblicz iloczyn wszystkich **różnych** pierwiastków zespolonych wielomianu P.

3.21. Różne liczby zespolone z_1, z_2, z_3, z_4 są pierwiastkami wielomianu $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, przy czym

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}(z_1 - z_2) = \mathrm{Im}(z_3 - z_4) = 0.$$

Udowodnij, że $a = c = 0$, $d = 1$ oraz $-2 < b < 2$.

3.22. Dana jest liczba zespolona $w = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną iloczynu

$$(1 + w) \cdot (1 + w^2) \cdot (1 + w^3) \cdot \ldots \cdot (1 + w^{100}).$$

Rozdział 4

Macierze

4.1. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.2. Udowodnij równości:

(a) dla $A \in \mathbb{K}^{m,r}$, $B, C \in \mathbb{K}^{r,n}$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

(b) dla $A \in \mathbb{K}^{m,r}$, $B \in \mathbb{K}^{r,n}$

$$(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H.$$

4.3. *Śladem* macierzy kwadratowej $A = [a_{j,k}]_{j,k} \in \mathbb{K}^{n,n}$, nazywamy sumę jej elementów na głównej przekątnej, tzn. skalar zdefiniowany wzorem

$$\operatorname{trace}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}.$$

Udowodnij, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ macierze AB^T i $A^T B$ są kwadratowe oraz $\operatorname{trace}(AB^T) = \operatorname{trace}(A^T B)$.

4.4. Podaj przykład niezerowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n > 1$, takiej, że $A^2 = 0$.

4.5. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$. Wyznacz macierze

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ldots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{bmatrix}^k.$$

4.6. Wyznacz macierze ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}^k, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & & & 0 \end{bmatrix}^k.$$

4.7. Niech $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ to ciąg Fibonacciego, czyli

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Dla $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oblicz F^k dla $k = 0, 1, 2, 3$. Jaki jest związek między elementami macierzy F^n i wyrazami ciągu Fibonacciego dla dowolnego n. Sformułuj hipotezę i udowodnij ją.

4.8. Pokaż, że macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, mająca zerowy wiersz (zerową kolumnę) jest osobliwa.

4.9. Pokaż, że macierz kwadratowa A, mająca dwa identyczne wiersze (kolumny), jest osobliwa.

4.10. Danse są dwie macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = BA$. Pokaż, że

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Czy powyższy wzór jest prawdziwy bez założenia $AB = BA$?

4.11. Niech $\lambda \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \ldots$. Oblicz A^k dla

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

4.12. Pokaż, że macierz odwrotna do macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest macierzą trójkątną górną (dolną).

4.13. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy trójkątnej górnej $[a_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ takiej, że $a_{i,j} = 1$ dla wszystkich $j \leqslant j$.

4.14. Macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazywamy prawą (lewą) macierzą stochastyczną, gdy wszystkie jej elementy są nieujemne i suma elementów w każdym wierszu (w każdej kolumnie) jest równa 1. Udowodnij, że iloczyn macierzy prawych (lewych) stochastycznych też jest macierzą prawą (lewą) stochastyczną.

4.15. Pokaż, że macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$ i wówczas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

4.16. Rozwiąż równania, w których niewiadoma X to macierz kwadratowa 2×2:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zastanów się nad taką metodą rozwiązania tych równań, która nie sprowadza się do rozwiązania układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi.

4.17. Wyznacz macierze operacji elementarnych na wierszach i kolumnach.

4.18. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.19. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.20. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4.21. Dana jest macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ taka, że $A^k = 0$ dla pewnej liczby naturalnej k. Udowodnij, że macierz $I - A$ jest nieosobliwa.

4.22. Niech $n = 1, 2, 3 \ldots$. Wyznacz macierze $F^H F$ i F^{-1} dla

$$F = \left[e^{i \frac{2\pi k \cdot l}{n}} \right]_{k,l=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^{n,n}.$$

4.23. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ i $G(\alpha) \subset \mathbb{C}^{n,n}$ jest to podzbiór składający się z macierzy, dla których suma elementów w każdym wierszu jest równa α. Zbadaj, dla jakich α zachodzi implikacja

$$A, B \in G(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad AB \in G(\alpha).$$

4.24. Pokaż, że macierz trójkątna górna (dolna) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej elementy na przekątnej są różne od zera.

4.25. Znajdź macierze z $\mathbb{R}^{2,2}$ odpowiadające

- symetrii względem osi $0y$,
- symetrii względem prostej $x = y$,
- symetrii względem początku układu,
- jednokładności o skali λ

4.26. Czy istnieje macierz $T \in \mathbb{R}^2$ taka, że odwzorowanie

$$\vec{x} \mapsto T\vec{x}$$

jest przesunięciem o zadany wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$?

4.27. Dla $n \geqslant 2$ dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, przy czym

- $a_{i,i} = a_{i,n+1-i} = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
- $a_{i,j} = 0$ w pozostałych przypadkach,

tzn.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

(a) (5 pkt.) Wyznacz macierz A^k dla $k \in \mathbb{N}$.

(b) (5 pkt.) Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ rozstrzygnij, czy macierz A^k jest nieosobliwa.

4.28. Wyznacz wszystkie macierze $X \in \mathbb{R}^{2,3}$ takie, że

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rozdział 5

Układy równań liniowych (część 1)

5.1. Znajdź wszystkie rozwiązania układów równań

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$

5.2. Dla jakich wartości a, b układ równań jest (i) sprzeczny, (ii) oznaczony ?

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x + y + bz = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \\ x - y + az = 1 \\ -x + y + az = -1. \end{cases}$

5.3. Wyznacz wielomian $p \in \mathbb{R}[x]_2$ taki, że $p(1) = 8$, $p(-2) = 14$ i $p(2) = 14$. Znajdź wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{R}[x]_3$ spełniające powyższe warunki.

5.4. Wyznacz wielomian $p \in \mathbb{R}[x]_3$ takie, że $p(-2) = 1$, $p(-1) = 3$, $p(1) = 13$, $p(2) = 33$.

5.5. Rozwiąż układy n równań liniowych

$$\text{(a)} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_n = 1 \\ x_{n-1} = 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Rozdział 6

Przestrzenie liniowe

6.1 Definicja, podprzestrzenie, kombinacje liniowe

6.1. Udowodnij, że ciało liczb zespolonych jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

6.2. Udowodnij, że ciało liczb rzeczywistych jest przestrzenią liniową na ciałem liczb wymiernych.

6.3. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

(a) Wykaż, że jeśli $\alpha \in \mathbb{K}$ i $x \in X$ oraz $\alpha \cdot x = 0$, to $\alpha = 0$ lub $x = 0$.

(b) Niech $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$. Wykaż, że $x = y$ lub $\alpha = \beta$.

6.4. V jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Określamy mnożenie $\circ$ wektorów z V przez liczby zespolone w następujący sposób:

$$\alpha \circ v = \overline{\alpha} v, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, v \in V.$$

Wykaż, że V z działaniami $+$ (dodawanie wektorów w V) i $\circ$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$.

6.5. Czy jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^2$

(a) zbiór wszystkich wektorów $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ takich, że $x + y = 1$

(b) zbiór wszystkich wektorów $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ takich, że $x + y = 0$

(c) zbiór wszystkich wektorów $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ takich, że $x \geqslant 0, y \geqslant 0$

(d) zbiór wszystkich wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$, gdzie $y \in \mathbb{R}$,

(e) zbiór wszystkich wektorów $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, gdzie $y \in \mathbb{R}$?

6.6. Który z poniższych zbiorów wielomianów jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]$?

(a) $\{p : p(0) \geqslant 0\}$,

(b) $\{p : p(1) = 0\}$,

(c) $\{p : p(1) \cdot p(-1) = 0\}$

(d) $\{p : p(-1) + p(1) = 0\}$

(e) $\{p : p(1 + i) = 0\}$, gdzie i to jednostka urojona.

6.7. Które z podzbiorów macierzy w $\mathbb{C}^{n,n}$ są podprzestrzeniami liniowymi?

(a) $\{A = [a_{i,j}] : \sum_{i,j} a_{i,j} = 0\}$,

(b) $\{A : A = A^T\}$,

(c) $\{A : A = A^H\}$

(d) wszystkie macierze A takie, że $A\vec{x} = 0$ dla pewnego ustalonego wektora $x \in \mathbb{C}^n$,

(e) zbiór wszystkich macierzy nieosobliwych.

6.8. Które podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}^\infty$?

(a) zbiór wszystkich ciągów stałych,

(b) zbiór wszystkich ciągów rosnących,

(c) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych,

(d) zbiór wszystkich ciągów geometrycznych,

(e) zbiór wszystkich ciągów arytmetycznych,

(f) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że $|x_n| \leqslant 2015$ dla każdego n,

(g) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $|x_n| \leqslant C2^{-n}$,

(h) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla każdego n.

6.9. Dla danej macierzy $D \in \mathbb{R}^{2,3}$ określamy zbiór

$$V_D = \left\{M \in \mathbb{R}^{3,2} : DM = M^T D^T\right\}.$$

(a) Pokaż, że zbiór V_D jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{3,2}$.

(b) Znajdź macierz $D \in \mathbb{R}^{2,3}$ taką, że zbiór

$$\left\{DM \in \mathbb{R}^{2,2} : M \in V_D\right\}$$

jest zbiorem wszystkich macierzy symetrycznych z $\mathbb{R}^{2,2}$.

6.10. Czy wielomian $x^4 + 1$ jest kombinacją liniową wielomianów

$$x^4 - 1, \quad x^4 - x^2, \quad x^2 - 1, \quad x^2 + x - 2.$$

6.11. Zbadaj, dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ wektor

$$\begin{bmatrix} 1+a \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $[1, -1, 0]^T$ i $[-2, 1, 1]^T$.

6.12. Pokaż, że

$$\mathbb{K}[x] = \operatorname{span}(1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+\ldots+x^n, \ldots).$$

6.2 Liniowa niezależność

6.13. Czy wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

są liniowo niezależne?

6.14. Zbadaj, dla jakich liczb zespolonych z wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2+z^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+z^4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

są liniowo niezależne.

6.15. Sprawdź, dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2+a \\ 3a \\ a+b \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne.

6.16. Pokaż, że dla każdego n układ funkcji $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{C}[x]$ (lub $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$).

6.17. Pokaż, że funkcje $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6.18. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{2020}$ dane są liniowo niezależne wektory $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$. Pokaż, że wektory

$$a\vec{w} + \vec{x}, \quad b\vec{x} + \vec{y}, \quad c\vec{y} + \vec{w}$$

są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $abc \neq -1$.

6.19. W przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ dane są liniowo niezależne wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{C}$ układ wektorów

$$a\vec{x} - b\vec{y}, \quad c\vec{y} - a\vec{z}, \quad b\vec{z} - c\vec{x}$$

jest liniowo niezależny?

6.20. Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^{2017}$ są liniowo niezależne. Zbadaj, dla jakich wartości $a \in \mathbb{C}$ wektory

$$a\vec{u} + i\vec{v}, \quad a\vec{v} + i\vec{w}, \quad a\vec{w} + i\vec{u}$$

są liniowo niezależne.

6.21. Pokaż, że ciało $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, wektory 1 oraz i są liniowo niezależne, natomiast dowolny układ 3 wektorów z $\mathbb{C}$ musi być liniowo zależny.

6.22. W przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ dane są wektory $x_1, \ldots, x_k$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, i $\alpha \in \mathbb{K}$. Pokaż, że układ $x_1, \ldots, x_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \alpha x_j, x_{i+1}, \ldots x_k$$

jest liniowo niezależny.

6.23. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wektory

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

są liniowo niezależne?

6.24. Zbadaj, dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ a+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ -a^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo niezależne.

6.25. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, Pokaż, że macierze A i A^T są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^T$ lub $A = -A^T$.

6.26. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$, $w, x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, oraz wektory

$$w, \quad u = w + \alpha x, \quad v = w + \beta x + \alpha y$$

są liniowo niezależne. Zbadaj, czy wektory w, x, y też są liniowo niezależne.

6.3 Baza i wymiar

6.27. Pokaż, że układ wektorów

$$\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}^n$ (nad $\mathbb{C}$)

6.28. Skonstruuj bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

6.29. Pokaż, że układ wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

6.30. Wyznacz bazy podprzestrzeni liniowych

(a) $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, gdzie $a^2 + b^2 \neq 0$,

(b) $Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

6.31. W $\mathbb{R}^5$ dany jest podzbiór

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Pokaż, że V jest podprzestrzenią liniową i wyznacz bazę V

6.32. Pokaż, że zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(0) = p(1) \text{ i } p(-1) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znajdź bazę tej podprzestrzeni.

6.33. Pokaż, że zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : 2p(0) = p(1) = p(-1)\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znajdź bazę przestrzeni Y.

6.34. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ są różne. Pokaż, że układ wielomianów

$$(z-a)(z-b), \quad (z-b)(z-c), \quad (z-c)(z-a)$$

jest bazą w $\mathbb{C}[x]_2$.

6.35. W $\mathbb{R}^5$ dany jest podzbiór

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0\}.$$

Pokaż, że W jest przestrzenią liniową. Wskaż bazę i określ wymiar W.

6.36. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$ rozważamy podzbiór

$$U = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2,2} : [2, -1] M \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Pokaż, że U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{2,2}$. Wyznacz $\dim U$ i wskaż bazę tej przestrzeni.

6.37. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ jest dana podprzestrzeń liniowa

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right).$$

(a) (7 pkt.) Wyznacz bazę podprzestrzeni V i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) (3 pkt.) Zbadaj, dla jakich $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix} \in V.$$

6.38. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ nad ciałem $\mathbb{R}$ dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right),$$

$$W = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

(a) Wyznacz bazy podprzestrzeni U i W.

(b) Ile jest różnych podprzestrzeni liniowych $V \subset \mathbb{R}^4$ takich, że $U \subseteq V \subseteq W$? Uzasadnij odpowiedź.

6.39. Wykaż, że zbiór $Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(0) = p(1) \text{ i } p(i) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Określ wymiar i wskaż bazę tej przestrzeni.

6.40. Wskaż bazy i określ wymiar następujących podprzestrzeni liniowych

(a) $U = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^T\}$ w $\mathbb{R}^{n,n}$ nad ciałem $\mathbb{R}$;

(b) $V = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : A = A^H\}$ w $\mathbb{C}^{n,n}$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

6.41. Niech X oznacza zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniających zależność rekurencyjną

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Pokaż, że X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, znajdź jej wymiar i wskaż bazę.

(b) Pokaż, że X posiada bazę złożoną z ciągów geometrycznych.

(c) Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ z przestrzeni X, takiego, że $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

6.42. Wektory $x_1, x_2, \ldots x_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Czy wektory $x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_{n-1} + x_n$ też są bazą przestrzeni X?

6.43. W przestrzeni $\mathbb{R}[t]_3$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3, dany jest podzbiór

$$Z = \{p \in \mathbb{R}[t]_3 : p(-1) + p(1) = 2p(0)\}.$$

Pokaż, że Z jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[t]_3$, określ jej wymiar i znajdź jej bazę.

6.44. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{2,3}$ rozważamy podzbiór

$$\mathcal{Z} = \left\{M \in \mathbb{R}^{2,3} : A \cdot M \cdot B^T = B \cdot M^T\right\}.$$

Pokaż, że $\mathcal{Z}$ jest podprzestrzenią liniową, określ jej wymiar i znajdź bazę.

6.45. Wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Czy wektory $x_1 + x_2, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$ też są bazą przestrzeni X? Uzasadnij odpowiedź. Może się okazać, że odpowiedź zależy od n.

6.46. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{3,3}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ dana jest podprzestrzeń

$$X = \left\{A \in \mathbb{C}^{3,3} : A = A^T\right\}.$$

(a) (7 pkt.) Uzupełnij układ macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

do bazy podprzestrzeni X.

(b) (8 pkt.) Niech $Y = \left\{B \in \mathbb{R}^{3,3} : \forall_{A \in X}\, BA \in X\right\}$. Udowodnij, że $Y = \operatorname{span}(I_3)$.

6.4 Przecięcie i suma podprzestrzeni

6.47. W $\mathbb{R}^3$ wyznacz bazy podprzestrzni $U \cap V$ i $U + V$ dla

$$U = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\},$$
$$V = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

6.48. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$V = \operatorname{span}([1, -2, 0, 1]^T, [2, 1, 1, 0]^T, [1, 8, 2, -3]^T),$$
$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$.

6.49. Pokaż, że następujące podzbiory w $\mathbb{R}^{n,n}$ są podprzestrzeniami liniowymi:

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^T\}, \qquad T = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = -A^T\}$$

Pokaż, że $\mathbb{R}^{n,n} = S + T$. Czy $\mathbb{R}^{n,n} = S \oplus T$?

6.50. W przestrzeni liniowej X dane są podprzestrzenie U, V. Pokaż, że $U + V = U \cup V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

6.51. Przestrzeń liniowa X ma wymiar 10, $U, V \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi i $\dim U = 4$, $\dim V = 6$. Jakie są możliwe wymiary podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$?

6.52. W n-wymiarowej przestrzeni liniowej X dana jest podprzestrzeń V wymiaru $n - 1$ i wektor $w \in X$. Pokaż, że $X = V \oplus \operatorname{span}(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin V$.

6.53. W przestrzeni $\mathbb{C}^n$ dane są podprzestrzenie liniowe:

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{u} \in \mathbb{C}^n : u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0\}, \\ V &= \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n : v_1 = v_2 = \ldots = v_n\}. \end{aligned}$$

Pokaż, że $\mathbb{C}^n = U \oplus V$. Dla danego wektora $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ wyznacz wektory $\vec{u} \in U$ oraz $\vec{v} \in V$ takie, że $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.

6.54. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\} \\ V &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \end{aligned}$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. Znajdź bazę przestrzeni $U + V$ i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Czy suma $U + V$ jest prosta?

6.55. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{span}([2, 1, 3, 4]^T, [3, 9, 3, 9]^T, [-1, 7, -3, 1]^T) \\ Y &= \operatorname{span}([1, -3, 3, 0]^T, [2, 5, 3, 5]^T, [1, 8, 0, 5]^T) \end{aligned}$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $X \cap Y$ i $X + Y$

6.56. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:

$$\begin{aligned} X &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0\} \\ Y &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $X \cap Y$ i $X + Y$

6.57. Zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(0) = p(1)\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znajdź podprzestrzeń $Z \subset \mathbb{R}[x]^4$ taką, że $\mathbb{R}[x]_4 = X \oplus Y$. Wskaż bazy i określ wymiary podprzestrzeni Y oraz Z.

6.58. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. W $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \\ V &= \operatorname{span}([2, a-1, 0]^t, [1, 1, b]^T). \end{aligned}$$

Zbadaj, dla jakich wartości a, b (a) $\mathbb{R}^3 = U + V$ (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

6.59. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Znajdź bazę V i znajdź bazę podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}^5$ takiej, że $V \oplus W = \mathbb{R}^5$.

6.60. Pokaż, że przestrzeń funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jest sumą prostą podprzestrzeni funkcji parzystych i funkcji nieparzystych.

6.61. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{span}([3, 2, 1, 0]^T, [1, 2, 2, -3]^T, [0, -4, -5, 9]^T), \\ W &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Wyznacz bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$.

6.62. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ dane są podprzestrzenie

$$\begin{aligned} X &= \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(-1) = p(0) = p(1)\}, \\ Y &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : p(-1) + p(0) + p(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Czy $\mathbb{R}[x]_2 = X \oplus Y$?

6.63. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\} \\ V &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \end{aligned}$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. Znajdź bazę przestrzeni $U + V$ i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Czy suma $U + V$ jest prosta?

6.64. Niech $a \in \mathbb{R}$. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozważamy podprzestrzenie liniowe

$$\begin{aligned} X &= \left\{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = x_3\right\}, \\ Y &= \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ a+2 \\ 2a-6 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

(a) Określ wymiary przestrzeni X i Y w zależności od a.

(b) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $X \cap Y = \{0\}$?

(c) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\mathbb{R}^3 = X + Y$?

6.65. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$U = \operatorname{span}([1,3,-1,-1]^T, [2,4,-2,0]^T), \qquad W = \operatorname{span}([-1,1,4,-1]^T, [0,4,3,-4]^T).$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $U \cap W$ i $U + W$. Czy $U + W = U \oplus W$? Uzasadnij odpowiedź.

6.66. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$V = \operatorname{span}([1,-1,-1,1]^T, [1,1,0,3]^T, [3,1,-1,7]^T, [0,2,1,2]^T),$$
$$W = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazy podprzestrzeni V, W, $V + W$ i $V \cap W$.

6.67. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$ dane są podzbiory

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid p(1-3i) = 0\}, \qquad W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid \forall_{x\in\mathbb{R}}\ p'(x) = p'(-x)\}$$

(a) Udowodnij, że U i W są podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}[x]_3$

(b) Wyznacz bazy przestrzeni $U \cap W$ i $U + W$. Czy $\mathbb{R}[x]_3 = U \oplus W$?

6.68. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_4$ (nad ciałem $\mathbb{R}$) dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid p(2i) = p(1) = 0\},$$
$$V = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid \forall_{x\in\mathbb{R}}\ p(x) = p(-x)\}$$

(a) Znajdź bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$.

(b) Znajdź bazę podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}[x]_4$ takiej, że $\mathbb{R}[x]_4 = (U + V) \oplus W$.

Rozdział 7

Obraz, jądro i rząd macierzy

7.1. Udowodnij, że

- Operacje elementarne na wierszach macierzy nie zmieniają jej jądra.
- Operacje elementarne na kolumnach macierzy nie zmieniają jej obrazu.

7.2. Wyznacz bazy obrazu oraz jądra macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 16 & -5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

7.3. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Wyznacz bazy przestrzeni $\operatorname{im}(A)$ oraz $\ker(A)$.

(b) Rozstrzygnij, czy $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im}(A) \oplus \operatorname{im}(A^T)$.

7.4. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im} A + \operatorname{im} B, \operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B \subset \mathbb{R}^3$ oraz podprzestrzeni $\ker A + \ker B, \ker A \cap \ker B \subset \mathbb{R}^3$.

7.5. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im} A + \operatorname{im} B, \operatorname{im} A \cap \operatorname{im} B \subset \mathbb{R}^5$ oraz podprzestrzeni $\ker A + \ker B, \ker A \cap \ker B \subset \mathbb{R}^4$.

7.6. Wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^{2020}$ są liniowo niezależne. Wyznacz bazy obrazu i jądra macierzy

$$A = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{z}, \vec{x} - \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}] \in \mathbb{R}^{2020,5}.$$

7.7. Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

(a) Wykaż, że $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im} A + \ker B$,

(b) Wyznacz wszystkie wartości parametru x takie, że $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im} A \oplus \ker B$.

7.8. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń linowa V wymiaru 3. W $\mathbb{R}^{6,5}$ rozważamy podzbiór

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{6,5} : V \subset \ker A\}.$$

Pokaż, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{6,5}$ i znajdź jej wymiar.

7.9. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń liniowa X wymiaru 3. W $\mathbb{R}^{5,4}$ rozważamy podzbiór

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{5,4} : \operatorname{im} A \subset X\}.$$

Pokaż, że V jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{5,4}$ i znajdź jej wymiar.

7.10. Wyznacz, w zależności od $a \in \mathbb{R}$, rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & -1 \\ -1 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -3 \end{bmatrix}.$$

7.11. Wyznacz w zależności od $a, b \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

7.12. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -7 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz bazy przestrzeni $\operatorname{im} A$ oraz $\ker A$. Czy macierz A jest nieosobliwa?

7.13. Dana jest macierz $A = [a_{k,l}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ taka, że

$$a_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } |k-l| = 1, \\ 0 & \text{gdy } |k-l| \neq 1. \end{cases}$$

Zbadaj, dla jakich liczb naturalnych n macierz A jest nieosobliwa. Wyznacz w zależności od n bazy obrazu i jądra macierzy A.

7.14. Pokaż, że rząd macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ takiej, że $A + A^T = 0$, jest liczbą parzystą.

7.15. Niech $s \in \mathbb{R}$ i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & s & 1 \\ 2 & 4s & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

(a) Wyznacz rząd macierzy A w zależności od s.

(b) Dla $s \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $A\vec{x} = \vec{b}$, gdzie $\vec{b} = [s, 1, 2]^T$, lub udowodnij, że układ jest sprzeczny.

7.16. Załóżmy, że $A \in \mathbb{R}^{10,10}$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_7 \in \mathbb{R}^{10}$, wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_7$ są liniowo niezależne oraz

$$A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = \ldots = A\vec{x}_7.$$

(a) Pokaż, że $\operatorname{rank} A \leqslant 4$.

(b) Pokaż, że macierz $A + A^T$ jest osobliwa.

7.17. Niech $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$. Pokaż, że

$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

7.18. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = 0$. Pokaż, że

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n.$$

7.19. Niech $A \in \mathbb{K}^{k,l}$, $B \in \mathbb{K}^{l,m}$. Pokaż, że

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B).$$

7.20. Udowodnij, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \geqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n.$$

7.21. Dana jest macierz $A \in \mathbb{C}^{2015,2015}$ taka, że

$$\operatorname{rank} A < 1000.$$

Pokaż, że

$$\dim(\ker(A + A^T)) > 15.$$

7.22. Załóżmy, że $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Pokaż, że

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &= \ker A \oplus \operatorname{im} A^H \\ \mathbb{K}^m &= \ker A^H \oplus \operatorname{im} A. \end{aligned}$$

7.23. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n,n}$ dany jest podzbiór

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \vec{e}_1 \in \ker(A - A^T)\}$$

(gdzie $\vec{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$). Pokaż, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{n,n}$, znajdź jej wymiar i wskaż bazę.

7.24. Dane są macierze $A \in \mathbb{C}^{m,m}$ i $B \in \mathbb{C}^{m,n}$ takie, że $\operatorname{rank}[A \mid B] = \operatorname{rank} A$. Udowodnij, że istnieje macierz $X \in \mathbb{C}^{m,n}$ taka, że $B = AX$.

7.25. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Niech $B = AA^T$ oraz $C = A^T A$.

(a) Pokaż, że $\operatorname{im} B \subset \operatorname{im} A$ oraz $\ker A \subset \ker C$.

(b) Załóżmy, że macierze B i C są nieosobliwe. Pokaż, że wówczas $m = n$ i macierz A też jest nieosobliwa.

7.26. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ takie, że macierz $I_n - AB$ jest nieosobliwa. Udowodnij, że macierz $I_n - BA$ też jest nieosobliwa.

7.27. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz

$$\max\left\{\operatorname{rank}\big((A+B)^2\big) : A, B \in \mathbb{R}^{2n,2n} \text{ i } \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n\right\}.$$

Rozdział 8

Wyznaczniki

8.1. Oblicz wyznaczniki

$$\text{(a) } \det_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \det_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

8.2. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3. Wektory $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne. Wykaż, że $\left|\det_2 \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$ jest polem równoległoboku o bokach $\vec{a}$, $\vec{b}$.

8.4. Wektory $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne. Wykaż, że $\left|\det_3 \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ jest objętością równoległościanu o bokach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

8.5. Dla $a \in \mathbb{R}$ oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} a-2 & a-3 & a-4 \\ a+1 & a-1 & a-3 \\ a-4 & a-7 & a-10 \end{bmatrix}.$$

8.6. Niech $z \in \mathbb{C}$ i

$$A = \begin{bmatrix} z & z+1 & 1 \\ 1 & z & z+1 \\ z+1 & 1 & z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Rozstrzygnij, ile jest **różnych** liczb zespolonych z takich, że $\det_3\left(A^4\right) = 16$.

8.7. Oblicz wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n-1 & n \\ & & & \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -(n-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

8.8. Oblicz wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ & & & \dots\dots\dots\dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

8.9. Dla $a = 1, 2, 4$ oblicz wyznacznik

$$d(a)_n = \det_n \begin{bmatrix} a & 1 & & & & & \\ 1 & a & 1 & & & & \\ & 1 & a & 1 & & & \\ & & \dots\dots\dots\dots & & & & \\ & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{bmatrix}$$

8.10. Dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ taka, że

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{gdy } i = j, \\ 1 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Oblicz $\det_n(A)$.

8.11. Dane są liczby $x, y \in \mathbb{R}$. Oblicz wyznacznik macierzy $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{2n} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$, jeżeli

$$a_{i,j} = \begin{cases} x & \text{gdy } i = j; \\ y & \text{gdy } i = 2n+1-j; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

8.12. Każdy element macierzy $a \in \mathbb{K}^{n,n}$, gdzie $n \geqslant 2$, jest liczbą całkowitą nieparzystą. Udowodnij, że $\det_n A$ jest liczbą całkowitą parzystą.

8.13. Dla danych liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,n}.$$

Pokaż, że $\operatorname{rank} A = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ znajdują się co najmniej 3 różne.

8.14. Dana jest liczba rzeczywista x. Oblicz wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

8.15. Oblicz wyznacznik Vandermonde'a

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \det_n \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

8.16. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n, b$. Oblicz wyznaczniki macierzy

$$\begin{bmatrix} a_1 + b & b & \dots & b \\ b & a_2 + b & \dots & b \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ b & b & \dots & a_n + b \end{bmatrix}$$

8.17. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n, b$. Oblicz wyznaczniki macierzy

$$\begin{bmatrix} a_1 + b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \dots & a_n \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + b \end{bmatrix}.$$

8.18. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ spełnia warunek $AA^H = I_n$. Jakie wartości może przyjmować $\det_n A$?

8.19. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ spełnia warunek $A^k = I_n$. Jakie wartości może przyjmować $\det_n A$?

8.20. Macierz $A \in \mathbb{R}^{2n+1,2n+1}$ jest antysymetryczna. Pokaż, że A jest osobliwa.

8.21. W macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ na przecięciach pewnych k wierszy z pewnymi l kolumnami znajdują się elementy równe 0, przy czym $k + l > n$. Pokaż, że macierz A jest osobliwa.

8.22. Niech $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pokaż, że istnieje $x \in \mathbb{C}$ takich, że macierz $A - xI_n$ jest osobliwa. Jak dużo takich liczb x może być?

8.23. Dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ taka, że $\operatorname{rank} A = 1$. Wykaż, że

$$\det_n(A + I_n) = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} + 1.$$

8.24. Oblicz wyznacznik

$$\det_{n+1}\begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix},$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ dla $i = 0, 1 \dots, n$.

8.25. (a) Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, czy układ równań

$$\begin{cases} a^2x + ay + 2z = a+4 \\ a^2y + az = 2a \\ ax + a^2z = 4a \end{cases}$$

z niewiadomymi x, y, z jest sprzeczny / niesprzeczny / oznaczony.

(b) Znajdź zbiór rozwiązań tego układu dla $a = 0$ i $a = -1$.

8.26. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) takie, że układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = b, \\ -x_1 + x_2 + bx_3 = 5. \end{cases}$$

jest oznaczony. Dla każdej znalezionej pary (a, b) wyznacz rozwiązanie tego układu.

8.27. Niech $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$. Udowodnij, że układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_n A = 0$ i dla pewnego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\det_n[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n] \neq 0$$

Rozdział 9

Przekształcenia liniowe

9.1. Które z poniższych odwzorowań $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ są przekształceniami liniowymi?

(a) $f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 - 3x_2 - 2, 4x_1 + 2x_2 - 7]^T$

(b) $f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 - x_2 + 3x_3, 5x_1 - 4x_2 + 2x_3]^T$

(c) $f([x_1, x_2, x_3]^T) = [0, |x_1| - 2|x_2| - |x_3|]^T$

(d) $f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_2, x_2 - x_1, x_3x_2]^T$

9.2. Które z poniższych odwzorowań $F : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$ są przekształceniami liniowymi?

(a) $F(p)(t) = p(at + b)$, $a, b \in \mathbb{K}$ to ustalone skalary.

(b) $F(p)(t) = p(t + 1) - p(t)$,

(c) $F(p)(t) = q_0(t) \cdot f(t)$, gdzie $q_0 \in \mathbb{K}[t]$ jest ustalonym wielomianem.

(d) $F(p)(t) = f(f(t))$.

9.3. Znajdź macierze w $\mathbb{R}^{2,2}$ zadające następujące przekształcenia liniowe:

(a) symetrię względem prostej $x = y$,

(b) symetrię względem punktu $(0, 0)$,

(c) jednokładność o środku w $(0, 0)$ i skali λ,

(d) rzut prostopadły na prostą $y = 0$.

(e) symetria względem prostej przechodzącej przez 0, tworzącej z osią $0x$ kąt θ

9.4. Czy istnieje macierz $T \in \mathbb{R}^{2,2}$ taka, że odwzorowanie

$$f(\vec{x}) = T\vec{x}$$

jest przesunięciem o zadany wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$?

Czy istnieje macierz $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ taka, że odwzorowanie

$$f(\vec{x}) = M\vec{x}$$

ograniczone do podprzestrzeni $V = \mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ jest przesunięciem o zadany wektor $\vec{v} \in V$?

9.5. Dane jest przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ takie, że

$$f([3,1]^T) = [4,5,-1]^T, \quad f([7,2]^T) = [-3,0,5]^T.$$

Znajdź macierz $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ taką, że dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

9.6. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ spełnia

$$f([1,2,1]^T) = [7,2]^T, \quad f([3,2,4]^T) = [20,17]^T, \quad f([5,1,2]^T) = [17,12]^T.$$

Znajdź macierz $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ taką, że $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

9.7. Przekształcenie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki

$$f(1+t) = [1,7]^T, \quad f(2-t) = [-5,2]^T, \quad f(1-3t+t^2) = [2,4]^T.$$

Wyznacz $f(t^2)$.

9.8. Niech $f \in L(X,Y)$ i $U \subset X$ jest podprzestrzenią liniową. Pokaż, że zbiór

$$f(U) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in U\}$$

jest podprzestrzenią liniową w Y.

9.9. Załóżmy, że $f \in L(X,Y)$ i układ wektorów $x_1, \ldots, x_k \in X$ jest liniowo zależny. Pokaż, że układ wektorów $f(x_1), \ldots, f(x_k) \in Y$ też jest liniowo zależny. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

9.10. Załóżmy, że $f \in L(X,Y)$ i układ wektorów $f(x_1), \ldots, f(x_k) \in Y$ jest liniowo niezależny. Pokaż, że układ wektorów $x_1, \ldots, x_k \in X$ też jest liniowo niezależny. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

9.11. Pokaż, że $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

jest monomorfizmem. Wyznacz obraz tego przekształcenia.

9.12. Czy przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^{n,n})$

$$f(A) = A + 2A^T$$

jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^{n,n}$?

9.13. Rozważamy przekształcenie $F : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

- Pokaż, że F jest przekształceniem liniowym

- Znajdź wielomian $p \in \mathbb{R}[x]_3$ taki, że $F(p) = 0$,
- Znajdź wielomian $p \in \mathbb{R}[x]_3$ taki, że $F(p) = [16, 11, 2012]^T$.
- Znajdź obraz i jądro F. Rozstrzygnij, czy f jest mono/epi/izomorfizmem.

9.14. Zbadaj, które z poniższych przekształceń są monomorifzmami / epimorfizmami. Wyznacz ich jądra oraz obrazy.

(a) $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_3)$, $F(p)(t) = p(t+1) - p(t)$,

(b) $D \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}[x]_n$, $D(p) = p + p'$,

9.15. Zbadaj, które z poniższych przekształceń są monomorifzmami / epimorfizmami. Wyznacz ich jądra oraz obrazy.

(a) $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_3)$, $F(p)(t) = p'(t+1) - p'(t) + p(t)$,

(b) $D \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}[x]_{n-1}$, $D(p) = p'$

(c) $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}[x]_3)$, $f(p) = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3)t + (x_3 + x_4)t^2 + (x_4 + x_1)t^3$

9.16. Zbadaj, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$ takie, że

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 1 + t + at^2, \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = 1 + at - at^2, \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = a + at^2$$

jest (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem, (c) izomorfizmem.

9.17. Przekształcenie liniowe $f \in L(X, X)$ ma własność $f \circ f = 0$. Pokaż, że przekształcenia $f + \mathrm{id}_X$ oraz $f - \mathrm{id}_X$ są izomorfizmami przestrzeni X ze sobą.

9.18. Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_2$ o własności: dla każdego wektora $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ zachodzi implikacja

$$\text{Jeżeli } p = f(\vec{x}), \qquad \text{to} \quad p(-1) = x_1, \quad p(0) = x_2, \quad p(1) = x_3.$$

Znajdź wielomiany $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}[x]_2$ takie, że

$$f([1,0,0]^T) = p_1, \quad f([0,1,0]^T) = p_2, \quad f([0,0,1]^T) = p_3.$$

Pokaż, że $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[x]_2)$. Czy f jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}[x]_2$?

9.19. Niech X będzie przestrzenią liniową, w której dane są podprzestrzenie $U, V \subset X$ takie, że $X = U \oplus V$. Wówczas, dla każdego $x \in X$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory $x_U \in U$, $x_V \in V$ takie, że $x = x_U + x_V$.

Przekształcenie $f \in L(X)$ nazwiemy *rzutem na U wzdłuż V*, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = f(x_U + x_V) = x_U$.

(a) W $\mathbb{R}^3$ wyznacz macierz rzutu na płaszczyznę $\mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ wzdłuż prostej $\mathrm{span}([1,1,1]^T)$

(b) Załóżmy, że $f \in L(X)$ jest rzutem na U wzdłuż V. Udowodnij, że $\mathrm{im} f = U$, $\ker f = V$ oraz $f \circ f = f$.

(c) Załóżmy, że $f \in L(X)$ spełnia warunek $f \circ f = f$. Pokaż, że istnieją podprzestrzenie $U, V \subset X$ takie, że $X = U \oplus V$ oraz f jest rzutem na U wzdłuż V.

9.20. Niech X będzie przestrzenią liniową, w której dane są podprzestrzenie $U, V \subset X$ takie, że $X = U \oplus V$. Wówczas, dla każdego $x \in X$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory $x_U \in U$, $x_V \in V$ takie, że $x = x_U + x_V$.

Przekształcenie $f \in L(X)$ nazwiemy *symetrią względem U wzdłuż V*, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = f(x_U + x_V) = x_U - x_V$.

(a) W $\mathbb{R}^3$ wyznacz macierz symetrii względem płaszczyzny $\mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ wzdłuż prostej $\mathrm{span}([1, 0, 1]^T)$

(b) Załóżmy, że $f \in L(X)$ jest symetrią względem U wzdłuż V. Udowodnij, że f jest izomorfizmem oraz $f \circ f = \mathrm{id}_X$.

(c) Załóżmy, że $f \in L(X)$ spełnia warunek $f \circ f = \mathrm{id}_X$. Pokaż, że istnieją podprzestrzenie $U, V \subset X$ takie, że $X = U \oplus V$ oraz f jest symetrią względem U wzdłuż V.

9.21. Niech $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem

$$f(p) = [p(0), p'(0), p''(0), p'''(0)]^T.$$

Pokaż, że f jest izomorfizmem.

9.22. Załóżmy, że $f \in L(X, Y)$. Pokaż, że f jest izomorfizmem przestrzeni X i $\mathrm{im} f \subset Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest monomorfizmem.

9.23. Niech $t \in \mathbb{C}$. Rozważamy przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}^3)$ takie, że:

$$F(1+z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad F(1-z) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -t \end{bmatrix}, \quad F(z^2) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Zbadaj, dla jakich wartości parametru zespolonego t przekształcenie F jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{C}[z]_2$ i $\mathbb{C}^3$.

9.24. Dla jakich $m \in \mathbb{C}$ przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{C}[x]_2)$ zadane wzorem

$$f(p) = p'(t-m) - p(1)(t+m)^2 + p(0)t^2$$

jest izomorfizmem?

9.25. Dla danego $\gamma \in \mathbb{R}$ rozważamy przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_2)$ zadane wzorem

$$F(p)(x) = p'(x+1) - \gamma \cdot x p''(x), \qquad p \in \mathbb{R}[x]_3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zbadaj, dla jakich wartości γ przekształcenie F jest epimorfizmem.

(b) Dla $\gamma = 0$ wyznacz bazę podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}[x]_3$ takiej, że $f|_V \in L(V, \mathbb{R}[x]_2)$ jest izomorfizmem lub udowodnij, że taka podprzestrzeń V nie istnieje.

9.26. Dla danej macierzy $B \in \mathbb{R}^{2,4}$ rozważamy przekształcenie liniowe $F_B \in L(\mathbb{R}^{2,2}, \mathbb{R}^{2,2})$ dane wzorem

$$F_B(A) = B \cdot \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Udowodnij, że przekształcenie F_B jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{R}^4 = \ker B \oplus \operatorname{span}([1,0,1,0]^T, [0,1,0,1]^T).$$

9.27. Wyznacz macierz przekształcenia liniowego $F \in \mathbb{R}[x]_2$,

$$F(p)(t) = p(t+1) - p(t)$$

w bazie $1, t, t^2$ (w dziedzinie i przeciwdziedzinie).

9.28. Wyznacz macierz przekształcenia $F \in L(\mathbb{K}[x]_2, \mathbb{K}[x]_2)$, $F(p)(t) = p(at+b)$, $a, b \in \mathbb{K}$ to ustalone skalary, w bazie $1, t, t^2$.

9.29. Przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{R}[t]_3, \mathbb{R}[t]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p)(t) = p(-1) \cdot t + p(0) \cdot t^2 + p(1) \cdot t^3 - p'(t).$$

(a) Wyznacz macierz F w bazie $1, t, t^2, t^3$.

(b) Rozstrzygnij, czy F jest izomorfizmem.

9.30. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^4$ jest zadane przez warunki

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(t^2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz f w bazach $(1+t^2, 1-t^2, t)$ w $\mathbb{R}[x]_2$ i $[1,1,1,1]^T$, $[1,1,-1,-1]^T$, $[1,-1,1,-1]^T$, $[1,-1,-1,1]^T$ w $\mathbb{R}^4$. Czy f jest monomorfizmem lub epimorfizmem?

9.31. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^4$:

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(-1) - p(1) \\ p(0) \\ p(-1) + p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznacz bazy jądra i obrazu F.

(b) Znajdź macierz F w bazach $(1, t, t^2)$ i $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

(c) Znajdź macierz F w bazach

$$(1, 1+t, 1+t^2) \quad \text{i} \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4).$$

9.32. Znajdź macierz przekształcenia $D \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}[x]_n)$, $D(p) = p' + p''$, w bazie $1, t, t^2, \ldots, t^n$. Wyznacz $\ker D$ oraz $\operatorname{im} D$.

9.33. Dana jest macierz $B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^{m,n}$ zadana wzorem

$$f(A) = BA$$

jest przekształceniem liniowym. Jaki będzie rozmiar macierzy przekształcenia f w dowolnych bazach?

Dla $m = 2$, $n = 3$ i

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierz f w bazie jednostek macierzowych $E_{i,j} = \vec{e}_i \vec{e}_j^T$.

9.34. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem

$$f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz f w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.

9.35. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^3$ spełnia warunki:

$$F(1 + x) = [1, 1, -2]^T, \qquad F(x + 2x^2 - x^3) = [3, 1, 0]^T,$$
$$F(1 - x) = [1, 0, 1]^T, \qquad F(x + 2x^2 + x^3) = [2, 3, -7]^T.$$

(a) Znajdź macierz F w bazach $(1, x, x^2, x^3)$ w $\mathbb{R}[x]_3$ i $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ w $\mathbb{R}^3$.

(b) Czy istnieje podprzestrzeń liniowa $V \subset \mathbb{R}[x]_3$ taka, że $f|_V \in L(V, \mathbb{R}^3)$ jest izomorfizmem V i przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

9.36. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_3)$ ma własności:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 - 2t^3, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 3t - 5t^2, \quad \ker f = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w $\mathbb{R}^3$ i $1, t, t^2, t^3$ w $\mathbb{R}[t]_3$.

(b) Niech $U = \operatorname{span}([3, 1, -1]^T, [-1, 1, 3]^T)$. Pokaż, że zbiór $f(U)$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_3$ i określ jej wymiar.

9.37. Niech $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_3)$,

$$f(\vec{x}) = (x_1 - x_2)t + (x_2 + 3x_3)(1 + t^3) + (x_1 + x_3)(1 - t^2),$$

dla $x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ oraz $g \in L(\mathbb{R}[t]_3, \mathbb{R}^3)$

$$g(p) = \begin{bmatrix} p'(1) + p(0) \\ p'(-1) - p(0) \\ p(1) + p(-1) \end{bmatrix}.$$

(a) Które z przekształceń $f, g, f \circ g, g \circ f$ jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem?

(b) Znajdź jądra i obrazy przekształceń $f, g, f \circ g, g \circ f$.

(c) Wyznacz macierz przekształcenia $f \circ g$ w bazie $1, t, t^2, t^3$ przestrzeni $\mathbb{R}[t]_3$.

(d) Wyznacz macierz przekształcenia $g \circ f$ w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

9.38. Dane są przekształcenia liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$

$$f(\vec{x})(t) = (x_1 + x_3)t^2 + x_2 \qquad \text{dla } \vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

oraz $g \in L(\mathbb{R}[t]_2, \mathbb{R}^3)$

$$g(p) = [p(-1), p'(0), p(1)]^T \qquad \text{dla } p \in \mathbb{R}[t]_2.$$

(a) Wskaż bazy podprzestrzeni

$$\operatorname{im} f \cap \ker(f \circ g) \subset \mathbb{R}[t]_2, \quad \text{oraz} \quad \operatorname{im}(g \circ f) + \ker f \subset \mathbb{R}^3.$$

(b) Wyznacz macierz przekształcenia $f \circ g$ w bazie $1, t, t^2$ przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$.

9.39. Pokaż, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ dane wzorem

$$f(p)(x) = \big((2x+1) \cdot p(x) - (x^2+1) \cdot p'(x)\big)'$$

jest przekształceniem liniowym. Wyznacz macierz przekształcenia f w bazie $(1, x, x^2)$ i znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im}(f)$ oraz $\ker(f)$.

9.40. Niech $a \in \mathbb{R}$. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$ jest dane wzorem

$$f([x_1, x_2, x_3]^T)(t) = 2x_2 - x_1 - x_2 \cdot t + (x_1 + ax_3) \cdot t^2.$$

(a) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i $(1, t, t^2)$ w $\mathbb{R}[t]_2$.

(b) Znajdź bazy podprzestrzeni $\operatorname{im}(f)$ i $\ker(f)$ w zależności od a.

(c) Dla jakich wartości a przekształcenie f jest izomorfizmem?

9.41. Niech $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ i odwzorowanie $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ jest dane wzorem

$$f(A) = M \cdot \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(a) Wykaż, że $f \in L(\mathbb{R}^{2,2}, \mathbb{R}^{2,2})$.

(b) Zapisz macierz przekształcenia f w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$.

(c) Wyznacz bazy przestrzeni $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$.

9.42. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}^n)$ jest dane wzorem

$$f(p) = [p'(0), p'(1), \ldots, p'(n-1)]^T.$$

Udowodnij, że istnieje podprzestrzeń liniowa $V \subset \mathbb{R}[x]_n$ o następujących własnościach:

(i) $\dim V = \dim(\mathrm{im} f|_V) = \operatorname{rank} f$,

(ii) można wybrać bazy podprzestrzeni V i $W = \mathrm{im} f|_V$, w których przekształcenie liniowe $f|_V \in L(V, W)$ ma macierz I_r, gdzie $r = \operatorname{rank} f$.

9.43. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Przekształcenia $f, g \in L(V, V^*)$ spełniają równanie

$$f(v)(w) + g(w)(v) = 0 \quad \text{dla} \quad v, w \in V.$$

Niech B_1, B_2 będą bazami przestrzeni V a B_1^*, B_2^* bazami dualnymi. Ponadto niech A będzie macierzą zmiany bazy z B_1 do B_2 a M macierzą przekształcenia f w bazach B_1, B_2^*. W zależności od A i M wyznacz macierz przekształcenia g w bazach B_1, B_2^*. Starannie uzasadnij odpowiedź.

Rozdział 10

Funkcjonały liniowe i przestrzenie dualne

10.1. W przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_2)^*$ dane są funkcjonały liniowe

$$\begin{aligned} f_1^*(p) &= p(1) - p(-1), \\ f_2^*(p) &= p'(1), \\ f_3^*(p) &= p''(0). \end{aligned}$$

Rozstrzygnij, czy są one liniowo niezależne.

10.2. Dane są następujące funkcjonały liniowe na przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$$v_1^*(\vec{x}) = x_1 + x_2, \quad v_2^*(\vec{x}) = x_2 + x_3, \quad v_3^*(\vec{x}) = x_1 + x_3.$$

Pokaż, że są one bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$. Zapisz funkcjonał $w^*(\vec{x}) = x_1 - x_3$ jako ich kombinację liniową.

10.3. Pokaż, że każdy funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{K}^{m,n})^*$ jest postaci

$$f^*(A) = \operatorname{tr}(A \cdot B),$$

gdzie $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ i przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{K}^{m,n}, (\mathbb{K}^{m,n})^*)$ dane wzorem

$$F(B)(A) = \operatorname{tr}(A \cdot B)$$

jest izomorfizmem.

10.4. Na przestrzeni $\mathbb{C}^2$ dane są funkcjonały liniowe

$$u^*([x_1, x_2]^T) = x_1 + ix_2, \qquad v^*([x_1, x_2]^T) = x_1 - iz_2.$$

Wykaż, że u^*, v^* jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}^2)^*$ i znajdź bazę dualną w $\mathbb{C}^2$.

10.5. Załóżmy, że $\dim X < \infty$. Pokaż, że dwa niezerowe funkcjonały liniowe $a^*, b^* \in X^*$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy mają różne jądra.

10.6. Dla $n+1$ parami różnych liczb $x_0, x_1, \ldots, x_n$ określamy funkcjonały liniowe $f_k^* \in (\mathbb{R}[x]_n)^*$:

$$f_k^*(p) = p'(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pokaż, że funkcjonały f_k^*, $k = 0, 1, \ldots, n$ są liniowo zależne.

10.7. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}[x]_3$ dana jest baza

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x(x-i), \quad p_3(x) = x(x-i)(x-1).$$

Układ funkcjonałów $(p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_3)^*$ dualną do bazy (p_0, p_1, p_2, p_3). Funkcjonał $f^* \in (\mathbb{C}[x]_3)^*$ jest dany wzorem $f^*(p) = p(-i)$. Wyznacz liczby $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ takie, że $f^* = a_0 p_0^* + a_1 p_1^* + a_2 p_2^* + a_3 p_3^*$.

10.8. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_2$ dane są wielomiany

$$p_1(x) = 1 - x + x^2, \quad p_2(x) = 1 + x - x^2, \quad p_3(x) = 1 + x + x^2.$$

(a) Sprawdź, że układ (p_1, p_2, p_3) jest bazą.

(b) Niech (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) będzie bazą w $(\mathbb{R}[x]_2)^*$ sprzężoną do bazy (p_1, p_2, p_3). Zapisz funkcjonał $\phi(p) = p(-1) + p(1)$ jako kombinację liniową funkcjonałów ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

(c) Wyznacz funkcjonały ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

(d) Zapisz wielomian $p(x) = 3 - 4x + 7x^2$ jako kombinację liniową wielomianów p_1, p_2, p_3.

10.9. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \operatorname{span}(1 + x, x^2).$$

(a) Wyznacz bazę (f_1^*, f_2^*) przestrzeni V^* dualną do bazy $(1 + x, x^2)$ przestrzeni V.

(b) Funkcjonał $g \in V^*$ jest dany wzorem $g(p) = p(0) + 3p(1)$. Przedstaw g jako kombinację liniową funkcjonałów f_1^*, f_2^*.

10.10. Dla ustalonego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_2$ odwzorowanie $f_p^* : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem

$$f_p^*(q) = p(-1)q(1) + p(0)q(0) + p(1)q(-1), \qquad q \in \mathbb{R}[x]_2.$$

(a) Wykaż, że f_p^* jest funkcjonałem liniowym (czyli $f_p^* \in (\mathbb{R}[x]_2)^*$).

(b) Przekształcenie $F : \mathbb{R}[x]_2 \to (\mathbb{R}[x]_2)^*$ jest dane wzorem

$$F(p) = f_p^*, \qquad p \in \mathbb{R}[x]_2.$$

Wykaż, że $F \in L(\mathbb{R}[x]_2, (\mathbb{R}[x]_2)^*)$. Rozstrzygnij, czy F jest monomorfizmem i czy jest epimorfizmem.

(c) Niech $(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*)$ to baza przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_2)^*$ dualna do bazy $(1,\ 1+x,\ 1+x+x^2)$ i $p(x) = 1 + x^2$. Wyznacz skalary $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $f_p^* = \alpha_1 \phi_1^* + \alpha_2 \phi_2^* + \alpha_3 \phi_3^*$.

10.11. Dane są macierze

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Pokaż, że układ A_1, A_2, A_3 jest bazą przestrzeni liniowej $V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : A = A^T\}$.

(b) Wyznacz bazę (g_1^*, g_2^*, g_3^*) przestrzeni V^* dualną do bazy (E_1, E_2, E_3).

(c) Funkcjonał liniowy $f^* \in V^*$ jest dany wzorem

$$f^*\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = 5a + 6b + 7c.$$

Znajdź liczby $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $f^* = \beta_1 g_1^* + \beta_2 g_2^* + \beta_3 g_3^*$.

10.12. W przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$ znajdź bazę u_1^*, u_2^*, u_3^* dualną do bazy

$$\vec{u}_1 = [1, 0, 0]^T, \quad \vec{u}_2 = [1, 1, 0]^T, \quad \vec{u}_3 = [1, 1, 1]^T.$$

Następnie

(a) znajdź współrzędne wektora $\vec{x} = [0, 0, 1]^T$ w bazie $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

(b) zapisz funkcjonał $x^*(\vec{x}) = x_2 - 6x_3$ w bazie u_1^*, u_2^*, u_3^*.

10.13. Endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}[t]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p) = 2 \cdot p'(t) + (1 + t + t^2 + t^3) \cdot p(0).$$

(a) Pokaż, że F jest izomorfizmem.

(b) Rozstrzygnij, czy układ funkcjonałów liniowych $f_j^* \in (\mathbb{R}[t]_3)^*$

$$f_j^*(p) = F(p)(j), \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}[t]_3)^*$.

10.14. Funkcjonał $a^* \in (\mathbb{R}[x]_3)^*$ jest zadany wzorem

$$a^*(p) = p'(0) + 3p^{(3)}(0).$$

Znajdź współrzędne funkcjonału a^* w bazie dualnej do bazy

$$1, 1 + t, 1 - t^2, t^3.$$

10.15. W przestrzeni $(\mathbb{R}[t]_2)^*$ dane są funkcjonały

$$f^*(p) = p(1), \qquad g^*(p) = p'(1), \qquad h^*(p) = p'(0).$$

(a) Znajdź współczynniki tych funkcjonałów w bazie dualnej do bazy $1, t, t^2$ przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$.

(b) Czy układ f^*, g^*, h^* jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}[t]_2)^*$?

10.16. Dla parami różnych liczby zespolonych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ określamy wielomiany

$$l_k(z) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{z - x_j}{x_k - x_j}.$$

(a) Pokaż, że układ $l_0, \ldots, l_n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}[z]_n$.

(b) Opisz bazę przestrzeni $(\mathbb{C}[z]_n)^*$ dualną do bazy $(l_0, l_1, \ldots, l_n)$

(c) Dla $k = 0, 1, \ldots, n$ znajdź współczynniki $a_{0,k}, \ldots, a_{n,k} \in \mathbb{C}$ takie, że

$$z^k = \sum_{j=0}^{n} a_{j,k} l_j(z).$$

10.17. Niech $a \in \mathbb{C}$. W przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_2)^*$ dane są trzy funkcjonały

$$f_1^*(p) = p(0) + ap(1), \quad f_2^*(p) = p(1) - ap(0), \qquad f_3^*(p) = p'(1) - p'(0).$$

(a) Dla jakich wartości parametru a układ ten jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}[x]_2)^*$?

(b) Czy dla $a = 0$ istnieją takie wielomiany $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x]_2$, że

$$f_k^*(f_j) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = j, \\ 0 & \text{gdy } k \neq j? \end{cases}$$

Jeżeli tak jest, to wyznacz współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ takie, że dla wielomianu $q(x) = x^2 - 3$

$$q = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

10.18. (a) Wykaż, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ funkcja $f^* : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{C}$ dana wzorem

$$f^*(A) = \vec{u}^T A \vec{v}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{C}^{n,n}$$

jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $\mathbb{C}^{n,n}$ nad ciałem $\mathbb{C}$.

(b) Wykaż, że jeśli $A \in \ker f^*$, to

$$\vec{v} \in \ker A \qquad \text{lub} \qquad \operatorname{im} A \cap \ker(\vec{u}^T) \neq \{0\}.$$

(c) Załóżmy, że wektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$ nad ciałem $\mathbb{C}$. Udowodnij, że układ funkcjonałów

$$f_{i,j}^*(A) = \vec{u}_i^T A \vec{u}_j, \qquad \text{gdzie} \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}^{n,n})^*$.

Wskazówka: Funkcjonały z bazy dualnej do $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ można przedstawić jako macierze z $\mathbb{C}^{1,n}$.

10.19. Dane są wektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\vec{u}_i^T \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

(a) Udowodnij, że układ $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$, natomiast układ funkcjonałów

$$f_i^*(\vec{x}) = \vec{u}_i^T \cdot \vec{x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^n)^*$ dualną do bazy $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$

(b) Udowodnij, że układ macierzy

$$M_{i,j} = \vec{v}_i \cdot \vec{u}_i^T, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^{n,n}$, natomiast układ funkcjonałów $\Phi_{k,l} \in (\mathbb{R}^{n,n})^*$

$$\Phi_{k,l}(A) = \vec{u}_k^T \cdot A \cdot \vec{v}_l, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^{n,n})^*$ dualną do bazy $(M_{i,j})_{i,j=1}^n$.

10.20. Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}[t]_2, (\mathbb{R}^2)^*)$ jest zadane wzorem

$$f(p)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = p(0) \cdot x_1 + p(1) \cdot x_2, \qquad \text{dla } p \in \mathbb{R}[t]_3, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Znajdź bazę podprzestrzeni $\ker f$.

(b) Wyznacz macierz przekształcenia f w bazie $1, t, t^2$ w przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$ i bazie dualnej do bazy $[1, 0]^T, [0, 1]^T$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^*$.

Rozdział 11

Przestrzenie z iloczynem skalarnym

11.1. Która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$?

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$,

(b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$,

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$,

(d) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$

11.2. Która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{C}^3$?

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \bar{x}_1y_2 + \bar{x}_2y_1 + \bar{x}_2y_3 + \bar{x}_3y_2$

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \bar{x}_1y_1 + 2\bar{x}_2y_2 + 2\bar{x}_3y_3 - i(\bar{x}_2y_3 - \bar{x}_3y_2)$

11.3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ wyznacz wszystkie wektory ortogonalne jednocześnie do wektorów

$$\vec{v} = [1, -2, 1]^T \quad \text{i} \quad \vec{w} = [2, -3, -1].$$

11.4. W przestrzeni unitarnej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest układ ortonormalny u_1, u_2, u_3, u_4. Niech $x = u_1 - 2u_2 + 4u_4$, $y = -u_1 + u_2 + u_3$. Oblicz $\langle x, y \rangle$ oraz $\|x\|$, $\|y\|$.

11.5. W przestrzeni unitarnej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest układ ortogonalny u_1, u_2, u_3, przy czym $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = 1$ i $\|u_3\| = 2$. Niech $x = u_1 - 2u_2$, $y = -u_1 + u_2 + 4u_3$. Oblicz $\langle x, y \rangle$ oraz $\|x\|$.

11.6. Pokaż, że

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.

(a) Oblicz „długość” wielomianu $p(t) = t^3$ w normie pochodzącej od tego iloczynu skalarnego.

(b) Wyznacz wszystkie wielomiany $q \in \mathbb{R}[x]_2$ ortogonalne do wielomianu $p(x) = x^2 - x - 1$.

(c) Podaj przykład bazy ortogonalnej w przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ z podanym iloczynem skalarnym.

11.7. Załóżmy, że $x_0, x_1, \ldots, x_n$ to $n+1$ różnych liczb z ciała $\mathbb{K}$. Niech $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$. Pokaż, że

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \overline{p(x_k)} q_(x_k)$$

jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{K}[x]_n$.

11.8. **Warunek równoległoboku.** Pokaż, że dla dowolnych wektorów x, y w przestrzeni euklidesowej lub unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ zachodzi równość

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

11.9. Pokaż, że w przestrzeni euklidesowej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dla dowolnych dwóch wektorów x, y

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4}.$$

11.10. Pokaż, że dla dowolnych wektorów x, y z przestrzeni unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}.$$

11.11. Pokaż, że w przestrzeni euklidesowej X, dwa wektory $\vec{x}, \vec{y}$ spełniają $\|x\| = \|y\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $x+y$ i $x-y$ są ortogonalne.

11.12. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i załóżmy, że kolumny macierzy A tworzą układ ortonormalny. Uzasadnij, że macierz A jest nieosobliwa. Jak wygląda macierz A^{-1}?

11.13. W $\mathbb{R}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pokaż, że $A^TA = I_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ortonormalnego układu wektorów $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ układ $A\vec{u}_1, \ldots, A\vec{u}_n$ też jest ortonormalny.

11.14. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$ i układ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest jej bazą, z bazą dualną $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Udowodnij, że funkcja

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k^*(u)} \cdot x_k^*(v), \qquad u, v \in X$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni X, w którym baza $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest ortonormalna.

11.15. W skończenie wymiarowej przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dane są podprzestrzenie U, V. Pokaż, że

(a) $(U^\perp)^\perp = U$,

(b) jeżeli $U \subset V$, to $V^\perp \subset U^\perp$,

(c) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$,

(d) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

11.16. Sprawdź, że układ wektorów

$$\vec{v}_1 = [1,1,1,0]^T, \quad \vec{v}_2 = [-1,3,-2,1], \quad \vec{v}_3 = [-1,0,1,1]^T$$

jest ortogonalny w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym i uzupełnij go do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Zapisz wektor $\vec{x} = [1,1,-1,-1]$ jako kombinację liniową wektorów z tej bazy.

11.17. Załóżmy, że w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ istnieje baza ortogonalna złożona z wektorów, których współrzędne są równe 1 lub -1. Pokaż, że $n \leqslant 2$ lub n jest wielokrotnością liczby 4.

11.18. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów

$$\vec{x}_1 = [1,2,-2]^T, \quad \vec{x}_2 = [-2,-1,7]^T, \quad \vec{x}_3 = [5,0,-2]^T.$$

Czy otrzymany układ jest bazą ortogonalną? Jeżeli tak, to zapisz wektor $\vec{e}_1$ za pomocą wektorów z tej bazy.

11.19. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ przeprowadź ortogonalizację Grama - Schmidta układu wektorów

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 0| \end{bmatrix}.$$

Uzyskany układ wektorów uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i wyznacz współrzędne wektora $\vec{e}_1$ w tej bazie.

11.20. **Tw. Pitagorasa.** W przestrzeni euklidesowej lub unitarnej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest ortogonalny układ wektorów $x_1, \ldots, x_k$. Pokaż, że

$$\sum_{j=1}^{k} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{k} x_k \right\|^2.$$

11.21. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [-2,1,4]^T$ na płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

11.22. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$V = \operatorname{span}([1,1,1,1]^T, [0,-3,1,0]^T).$$

Znajdź rzuty ortogonalne wektora $\vec{x} = [1,0,-1,0]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

11.23. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$$

dana jest podprzestrzeń liniowa:

$$X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_4 = x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Wyznacz rzuty ortogonalne wektora $[3, 3, 3, 3]^T$ na podprzestrzenie X i $X^\perp$.

11.24. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$V = \operatorname{span}([1, 1, 1, 1]^T, [0, -3, 1, 0]^T).$$

Znajdź rzuty ortogonalne wektora $\vec{x} = [1, 0, -1, 0]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

11.25. Na przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}[x]_4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=-2}^{2} p(k)q(k),$$

określone jest przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{R}[x]_4)$

$$F(p)(x) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)).$$

Pokaż, że jest to rzut ortogonalny. Wyznacz jądro i obraz tego rzutu.

11.26. Układ $x_1, \ldots, x_k$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest ortonormalny. Udowodnij *nierówność Bessela:* dla dowolnego wektora $y \in X$

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, y \rangle|^2 \leqslant \|y\|^2 .$$

11.27. Udowodnij, że w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ rzut ortogonalny $P_Z(x)$ wektora $x \in X$ na podprzestrzeń liniową Z spełnia nierówność

$$\|x - P_Z(x)\| \leqslant \|x - z\|$$

dla każdego wektora $z \in Z$. Pokaż, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = P_Z(x)$.

11.28. Na przestrzeni $\mathbb{R}[x]_4$ rozważamy iloczyn skalarny

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=-2}^{2} p(k)q(k).$$

Pokaż, że $\mathbb{R}[x]_4$ jest sumą prostą podprzestrzeni wielomianów parzystych i nieparzystych oraz te podprzestrzenie są ortogonalne.

11.29. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza iloczyn skalarny określony na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ taki, że wielomiany

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 + x, \quad p_3(x) = 1 + x + x^2, \quad p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

tworzą układ ortonormalny.

(a) Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^k, x^l\rangle$ dla $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Znajdź rzut ortogonalny wielomianu $q(x) = x^3$ na podprzestrzeń $\operatorname{span}(x, x^2)$.

11.30. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Dla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ niech $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle_A = \vec{x}^T A\vec{y}$. Udowodnij, że $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ (nad ciałem $\mathbb{R}$).

(b) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}, \qquad \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_3]^T.$$

Wyznacz rzuty ortogonalne wektora $\vec{y} = [1, 1, 1, 1]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

UWAGA: Iloczyn skalarny w podpunkcie (b) jest zdefiniowany w podpunkcie (a).

11.31. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ dla $\vec{x}, vecy = \mathbb{R}^4$, dane są podprzestrzenie liniowe

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \quad W = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_3 + x_4 = x_1 = 0\right\}$$

(a) Czy suma $V^\perp + W^\perp$ jest prosta?

(b) Czy $\mathbb{R}^4 = V + W^\perp$?

11.32. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym ($\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$) dane są podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0\right\}, \quad Y = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Rozstrzygnij, czy sumy podprzestrzeni $X + Y$ i $X^\perp + Y$ są proste i czy są równe całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(b) Znajdź bazy ortogonalne przestrzeni X i $X^\perp$.

(c) Oblicz rzuty ortogonalne wektora $[1, -1, 1, -1]^T$ na podprzestrzenie X, $X^\perp$ i $Y^\perp$.

11.33. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym ($\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$) dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 = 0\},$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$.

(a) Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $V^\perp$.

(b) Oblicz rzuty ortogonalne wektora $\vec{w} = [3, -1, 1, 5, 3]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

11.34. Niech $n > 1$. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$$

rozważamy podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

(a) Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $V^\perp$.

(b) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [n, 0, \ldots, 0]^T$ na podprzestrzeń V.

11.35. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

(a) (5 pkt.) Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni U.

(b) (5 pkt.) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $\vec{v} = [6, 5, -2, -1]^T$ na podprzestrzeń $U^\perp$.

11.36. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\}, \qquad \text{gdzie } \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T.$$

Znajdź bazę ortogonalną dopełnienia ortogonalnego przestrzeni V i oblicz rzut ortogonalny wektora $\vec{a} = [5, 2, -1, 3, 3]^T$ na przestrzeń V.

11.37. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\}.$$

(gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$). Niech $\vec{a} = [1, -2, 1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^5$. Oblicz normy rzutów ortogonalnych wektora $\vec{a}$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

11.38. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ zdefiniowano podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\}, \quad Y = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $X + Y$ i oblicz rzut ortogonalny wektora $[1,1,1,1]^T$ na podprzestrzeń $X \cap Y$.

11.39. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń V. Układ wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni V. Niech

$$A = \vec{v}_1\vec{v}_1^H + \ldots + \vec{v}_k\vec{v}_k^H.$$

(a) Pokaż, że dla każdego wektora $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ $P_V(\vec{x}) = A\vec{x}$.

(b) Jaki jest rząd macierzy A? Wyznacz podprzestrzenie $\operatorname{im} A$ oraz $\ker A$.

11.40. Pokaż, że nierówność Schwarza

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależne.

11.41. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz odwzorowanie $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_A = \vec{x}^T A\vec{y}$ dla $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Pokaż, że $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$.

(b) W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ znajdź rzut prostopadły wektora $[2,2,-2]^T$ na dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\operatorname{span}([1,0,1]^T, [-1,1,1]^T)$.

11.42. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Wyznacz wszystkie macierze $M \in \mathbb{R}^{3,2}$ takie, że dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $\langle Ax, Mx\rangle = 0$. Pokaż, że zbiór wszystkich takich macierzy jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{3,2}$ i wyznacz jej wymiar.

11.43. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ i $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ są przestrzeniami euklidesowymi. Przekształcenie liniowe $f \in L(X,Y)$ ma własność

$$\forall v \in X \quad \langle v, v\rangle_X = \langle f(v), f(v)\rangle_Y.$$

(a) Pokaż, że f jest monomorfizmem.

(b) Udowodnij, że $\forall\, v, w \in X \;\; \langle v, w\rangle_X = \langle f(v), f(w)\rangle_Y$.

11.44. W $\mathbb{R}^n$ wyznacz kosinus kąta między wektorem $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, i podprzestrzeniami

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}.$$

11.45. Oblicz kosinus kąta między przekątną n-wymiarowej kostki regularnej, a jej ścianą k - wymiarową.

11.46. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ zdefiniowano podprzestrzenie liniowe

$$X = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right), \qquad Y = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + mx_2 + mx_3 = 0\right\},$$

gdzie $m \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości parametru m miara kąta pomiędzy pewnym wektorem prostopadłym do przestrzeni X i pewnym wektorem prostopadłym do przestrzeni Y jest równa $\frac{\pi}{3}$?

Rozdział 12

Endomorfizmy i zagadnienie własne

12.1. Zbadaj podobieństwo macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12.2. Udowodnij, że podobieństwo macierzy jest relacją równoważności.

12.3. Rozstrzygnij, czy macierze dwóch różnych obrotów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ są podobne.

12.4. Macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są podobne, $q \in \mathbb{K}[x]$ jest wielomianem. Pokaż, że macierze $q(A)$ i $q(B)$ też są podobne.

Uwaga: jeżeli $q(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ i $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, to $q(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$.

12.5. W $\mathbb{R}^2$ wyznacz macierze zmiany bazy $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ na bazę $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz macierz zmiany bazy $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ na bazę $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

12.6. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ wyznacz macierz zmiany bazy $1, x, x^2$ na bazę $\frac{1}{2}x(1-x), 1-x^2, \frac{1}{2}(1+x)x$. Wyznacz macierze A, B, endomorfizmu $f \in L(\mathbb{R}[x]_2)$ danego wzorem

$$f(p) = xp'(x) + p(0)$$

w obu bazach i znajdź macierz C taką, że $B = CAC^{-1}$. Oblicz wyznacznik i wielomian charakterystyczny endomorfizmu f.

12.7. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $n \geqslant 2$. Pokaż, że

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}A)x^{n-1} + q(x),$$

gdzie $q \in \mathbb{K}[x]_{n-2}$ i $q(0) = \det_n A$.

12.8. Macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ są podobne. Wykaż, że $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

12.9. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wektory i wartości własne endomorifzmu $D \in L(\mathbb{R}[x]_n)$, $D(p) = p'$.

12.10. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierze nieosobliwą C i diagonalną D, $C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$, takie, że $D = C^{-1}AC$. Oblicz macierz A^{2021}.

12.11. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznacz jej wartości własne i podprzestrzenie własne. Czy macierz A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ lub $D \in \mathbb{C}^{2,2}$?

12.12. Wyznacz wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej wartości własnej λ wyznacz bazę podprzestrzeni własnej V_λ. Pokaż, że macierz A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej i wyznacz macierz C taką, że macierz CAC^{-1} jest diagonalna.

12.13. Pokaż, że macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ nie jest podobna do żadnej macierzy diagonalnej.

12.14. Dwie macierze diagonalne $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ są podobne. Co można powiedzieć o elementach tych macierzy?

12.15. Rozstrzygnij, czy macierz jest diagonalizowalna i jeśli jest, wskaż bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ lub $\mathbb{R}^4$ złożoną z jej wektorów własnych.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

12.16. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną i $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową Wyznacz wartości i podprzestrzenie własne rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń V. Czy w pewnej bazie przestrzeni X ten rzut ma macierz diagonalną?

12.17. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ma jedną wartość własną $\lambda \in \mathbb{K}$, a odpowiadająca jej podprzestrzeń własna V_λ ma wymiar równy n. Pokaż, że $A = \lambda I_n$.

12.18. Niech $a \in \mathbb{K}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & & \\ & & a & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{bmatrix}.$$

Wyznacz wielomian charakterystyczny macierzy A. Pokaż, że A ma dokładnie jedną wartość własną równą a. Jaki jest wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej wartości własnej a?

12.19. Endomorfizm $f \in L(\mathbb{R}^{n,n})$ jest dany wzorem

$$f(A) = A^T, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Wyznacz wartości i podprzestrzenie własne endomorfizmu f. Czy f jest diagonalizowalny?

12.20. Macierz $A \in \mathbb{R}^n$ jest antysymetryczna. Pokaż, że wszystkie wartości własne macierzy A są postaci ai, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

12.21. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną wymiaru $n < \infty$, natomiast endomorfizm $f \in L(X)$ spełnia

$$\forall\, x, y \in X \quad \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle.$$

(a) Niech $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ będzie macierzą f w bazie ortonormalnej $x_1, \ldots, x_n$. Pokaż, że $M^H \cdot M = I_n$.

(b) Pokaż, że wszystkie wartości własne endomorfizmu f są liczbami zespolonymi o module 1, a wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

12.22. Dla danego wektora $\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ niech

$$X(\vec{v}) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{3,3} : \exists\, \lambda \in \mathbb{C} \;\; \vec{v} \in \ker(A - \lambda I_3) \right\}.$$

(a) Pokaż, że dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$ zbiór $X(\vec{v})$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{C}^{3,3}$.

(b) Załóżmy, że wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^3$ są liniowo niezależne i $A \in X(\vec{u}) \cap X(\vec{v}) \cap X(\vec{w})$. Udowodnij, że macierz A jest diagonalizowalna.

Rozdział 13

Określoność macierzy

13.1. Zbadaj określoność macierzy

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

w zależności od parametru a.

13.2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

Zbadaj określoność macierzy A w zależności w zależności od parametru a.

13.3. Niech dla $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Znajdź macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ taką, że $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ i zbadaj określoność macierzy A.

13.4. Macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest dodatnio (ujemnie) określona. Udowodnij, że $a_{ii} > 0$ ($a_{ii} < 0$) dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

13.5. Niech $A \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że macierz $B = A^T \cdot A$ jest symetryczna i nieujemnie określona oraz jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa.

13.6. Macierz symetryczna A jest dodatnio określona. Udowodnij, że istnieje macierz symetryczna B taka, że $A = B^2$.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. 11.22 w skrypcie.

13.7. Macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna i

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pokaż, że macierz A jest dodatnio określona.