

## Równania różniczkowe zwyczajne (potok 1), grupa 3

Pisemne zadania domowe z 20.02.2009

Termin oddawania rozwiązań: 27.02.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Wyznacz krzywe całkowe równania

$$y'(t) = 1 + |y(t)|.$$

2. Wyznacz asymptoty krzywych całkowych równania

$$y'(t) = -y^2(t) - 2ty(t) - t^2.$$

3. Dane jest równanie różniczkowe

$$y' = f(t, y),$$

przy czym dla dowolnych  $u, v$  funkcja  $f$  spełnia

$$f(u, v) = f(-u, -v).$$

Udowodnij, że jeśli funkcja  $\phi(t)$  jest rozwiązaniem tego równania, to funkcja  $\psi(t) = -\phi(-t)$  też jest jego rozwiązaniem.

4. Szybkość chłodzenia ciała w powietrzu jest proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otaczającego powietrza. Temperatura powietrza wynosi  $20^\circ\text{C}$  (i nie zmienia się), a ciało w ciągu 20 minut ochłodziło się od  $100^\circ\text{C}$  do  $60^\circ\text{C}$ . Po jakim czasie temperatura ciała osiągnie  $30^\circ\text{C}$ ?

## Równania różniczkowe zwyczajne (potok 1), grupa 3

Pisemne zadania domowe z 06.03.2009

Termin oddwania rozwiązań: 13.03.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Naszkicuj krzywe całkowe dla równania

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

2. Znajdź całkę pierwszą równania

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

Wyznacz równanie krzywej całkowej przechodzącej przez punkt  $(1, \frac{\pi}{2})$ .

3. Wyznacz całkę pierwszą równania

$$xy^2 dx + (x^2 y - x)dy$$

stosując czynnik całkujący postaci  $\mu = \mu(xy)$

## Równania różniczkowe zwyczajne (potok 1), grupa 3

Pisemne zadania domowe z 20.03.2009

Termin oddwania rozwiązań: 27.03.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Znajdź krzywe  $\Gamma$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  o tej własności, że dla dowolnego punktu  $P \in \Gamma$  odległości od początku układu do punktu  $P$  i do punktu przecięcia stycznej do  $\Gamma$  w punkcie  $P$  z osią  $Ox$  są równe.
2. Zbadaj, dla jakich warunków początkowych z twierdzenia Picarda-Lindelöfa wynika lokalna jednoznaczność rozwiązania równania

$$x''(t) - x(t)x^{(3)}(t) = \sqrt[5]{x'(t) - t}.$$

3. Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest malejąca i spełnia warunek Lipschitza. Załóżmy, że  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  są rozwiązaniami równania

$$y'(t) = f(y(t))$$

z warunkami początkowymi  $y_1(t_0) = a_1$ ,  $y_2(t_0) = a_2$ . Pokaż, że dla  $t \geq t_0$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |a_1 - a_2|.$$

## Równania różniczkowe zwyczajne (potok 1), grupa 3

Pisemne zadania domowe z 17.04.2009

Termin oddawania rozwiązań: 24.04.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Dla  $t > 0$  znajdź rozwiązania ogólne równań

(a)  $t^2 y'' + 5ty' - 5y = 0$ ,

(b)  $t^2 y'' + ty' + y = 0$ .

*Wskazówka:* Poszukaj rozwiązań postaci  $y(t) = t^r$ .

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = x + y - t^2 + t - 2 \\ y' = -2x + 4y + 2t^2 - 4t - 7 \\ x(0) = 0, y(0) = 2. \end{cases}$$

3. Funkcje  $x_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  są rozwiązaniami równania  $x' = f(x)$ , gdzie funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i ograniczona. Załóżmy, że ciąg  $(x_n(0))_n$  jest zbieżny. Pokaż, że z ciągu funkcji  $(x_n)_n$  można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie do rozwiązania równania.

## Równania różniczkowe zwyczajne (potok 1), grupa 3

Pisemne zadania domowe z 07.05.2009.

Termin oddawania rozwiązań: 15.05.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(5)} + 4x^{(3)} = e^t + 3 \sin 2t + 1.$$

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 3x - y - 2z \\ z' = -x + y + 2z \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0. \end{cases}$$

3. Udowodnij, że rozwiązanie równania

$$x' = a(t)x,$$

gdzie  $a(t)$  jest funkcją ciągłą, jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a(s) ds < +\infty.$$