

## Matematyka obliczeniowa (potok 2), grupy 11 i 12

Pisemne zadania domowe z 20.02.2009

Termin oddwania rozwiązań: 27.02.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Rozważmy równanie

$$x = M + a \sin x,$$

gdzie  $M \in \mathbb{R}$ ,  $a \in (0, 1)$ . Zbadaj, którą z metod (bisekcji, Newtona) można zastosować do znalezienia przybliżonego rozwiązania tego równania. Podaj ograniczenia na wybór punktów startowych.

2. Funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^3$  i  $f(r) = f'(r) = 0$ ,  $f''(r) \neq 0$ . Rozważamy następującą modyfikację metody Newtona przybliżonego wyznaczania pierwiastka  $r$ :

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Pokaż, że istnieje  $\epsilon > 0$  takie, że dla  $x_0 \in (r - \epsilon, r + \epsilon)$  ciąg  $x_n$  jest zbieżny do  $r$  i zbieżność jest kwadratowa.

## Matematyka obliczeniowa (potok 2), grupy 11 i 12

Pisemne zadania domowe z 06.03.2009

Termin oddawania rozwiązań: 13.03.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Rozpatrujemy równanie  $x + \ln x = 0$ . Jego jedyny pierwiastek  $r$  należy do odcinka  $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$ . Niech  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Liczbę  $r$  chcemy przybliżyć wyrazami ciągu określonego rekurencyjnie

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + e^{-x_n}}{1 + a}.$$

Zbadaj, dla jakich  $a$  ciąg  $x_n$  zbiega do  $r$ . Pokaż, że dla pewnego  $a$  zbieżność jest kwadratowa.

2. Zbadaj uwarunkowanie zadania

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

dla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

3. Dana jest funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i różne punkty  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ . Niech

$$q(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)^2,$$

gdzie  $l_i$  to wielomiany Lagrange'a dla punktów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Pokaż, że  $q$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $2n$  interpolującym  $f$  w  $x_0, x_1, \dots, x_n$  oraz  $q \geq 0$  jeżeli  $f \geq 0$ .

## Matematyka obliczeniowa (potok 2), grupy 11 i 12

Pisemne zadania domowe z 20.03.2009

Termin oddwania rozwiązań: 27.03.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Dla funkcji  $f(t) = t^4$  znajdź wielomian  $p$  stopnia nie większego niż 3 taki, że odległość od  $p$  do  $f$  w normie supremum na odcinku  $[-1, 1]$ , czyli wielkość

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |f(t) - p(t)|,$$

jest minimalna.

2. Dla funkcji  $g(x) = x^2$  znajdź splajn  $S$  stopnia 1 o węzłach  $0, \frac{1}{2}, 1$  taki, że odległość od  $g$  do  $S$  w normie  $L_2$  na odcinku  $[0, 1]$ , czyli wielkość

$$\left( \int_0^1 |g(t) - S(t)|^2 \right)^{1/2},$$

jest minimalna.

3. Funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^2$ . Niech  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  i  $S$  jest splajnem stopnia 2 o węzłach w punktach  $t_i$  takim, że

$$S'(t_i) = f'(t_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad S(t_0) = f(t_0).$$

Pokaż, że

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - S(t)| \leq (b - a) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \cdot \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

## Matematyka obliczeniowa (potok 2), grupy 11 i 12

Pisemne zadania domowe z 03.04.2009

Termin oddawania rozwiązań: 17.04.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Znajdź liczby  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  i  $0 < b \leq 1$  takie, by kwadratura

$$Q(f) = A_0 f(-b) + A_1 f(0) + A_2 f(b)$$

dla całki  $\int_{-1}^1 f(t) dt$  miała rząd co najmniej 3 i była dokładna dla funkcji  $f(t) = |t|$ .

2. Niech  $S_{n,f}$  to splajn stopnia 1 na odcinku  $[0, 1]$  interpolujący funkcję  $f$  w punktach  $k/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Niech

$$T_n(f) = \int_0^1 S_{n,f}(t) dt.$$

Dla całki  $\int_0^1 f(t) dt$  rozważamy kwadraturę

$$Q_n(f) = \frac{4}{3} T_{2n}(f) - \frac{1}{3} T_n(f).$$

Znajdź rząd kwadratury  $Q_n$ .

3. **Wielomiany Legendre'a.** Niech  $L_n$  to  $n$ -ty wielomian ortogonalny na odcinku  $[-1, 1]$  z wagą  $\rho(t) \equiv 1$ . Załóżmy, że  $L_0(t) = 1$ ,  $L_1(t) = t$ . Pokaż, że

$$L_n(t) = tL_{n-1}(t) - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} L_{n-2}(t) \quad \text{dla } n \geq 2.$$

## Matematyka obliczeniowa (potok 2), grupy 11 i 12

Pisemne zadania domowe z 25.05.2009

Termin oddawania rozwiązań: 01.06.2009.

Za każde zadanie można dostać 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

*Paweł Bechler*

---

1. Znajdź rozkład  $QR$  metodą Householdera macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Dla nieosobliwej macierzy zespolonej  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  znaleziono dwa różne rozkłady

$$Q_1 R_1 = A = Q_2 R_2,$$

gdzie  $Q_i, R_i \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $Q_i^H Q_i = I_n$ ,  $R_i$  jest macierzą trójkątną górną dla  $i = 1, 2$ . Wykaż, że istnieje macierz diagonalna  $D = [d_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  taka, że  $|d_{ii}| = 1$  dla  $1 \leq i \leq n$  oraz

$$Q_2 = Q_1 D, \quad R_1 = D R_2.$$

3. Zbadaj zbieżność metody Gaussa-Seidela iteracyjnego wyznaczania przybliżonego rozwiązania układu równań  $Ax = b$ , jeżeli  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  jest nieosobliwą macierzą trójkątną górną.