

## Teoria aproksymacji. Zadania #4.

1. Niech  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $V \subset C(D)$  jest podprzestrzenią funkcji aficznych  $(x, y) \mapsto ax + by + c$ ,  $f \in C(D)$  jest różniczkowalna we wnętrzu  $D$ . Pokaż, że zbiór  $P_V(f)$  jest jednoelementowy.
2. Niech  $f \in C[0, 1]$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $V = \text{lin}(1, x, \dots, x^n)$  i  $p \in P_V(f)$  jest postaci  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ . Pokaż, że  $a_i a_{i+1} < 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .
3. Udowodnij **tw. de La Vallée Poussina**: Układ funkcji ciągłych  $\{g_1, \dots, g_n\}$  na odcinku  $[a, b]$  spełnia warunek Haara,  $f \in C[a, b]$  i  $V = \text{lin}(g_1, \dots, g_n)$ . Jeżeli istnieje  $v_0 \in V$  i punkty  $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$  takie, że

$$\text{sgn}(f - v_0)(t_i) = -\text{sgn}(f - v_0)(t_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

to

$$\text{dist}(f, V) \geq \min_{i=0, \dots, n} |f(t_i) - v_0(t_i)|.$$

4. Udowodnij **tw. Freuda**:  $K$  jest zwartą przestrzenią Hausdorffa,  $V \subset C(K)$  jest przestrzenią Haara i  $\mathfrak{J}(f)$  oznacza jedyny element zbioru  $P_V(f)$ . Pokaż, że dla każdej funkcji  $f_0 \in C(K)$  istnieje stała  $\lambda > 0$  taka, że dla każdego  $f \in C(K)$  zachodzi

$$\|\mathfrak{J}(f_0) - \mathfrak{J}(f)\|_\infty \leq \lambda \|f_0 - f\|_\infty.$$

5.  $K$  jest zwartą przestrzenią Hausdorffa,  $V \subset C(K)$  jest przestrzenią Haara,  $f \in C(K)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Pokaż, że istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeżeli  $v \in V$  i

$$\|v - f\| < (1 + \delta) \text{dist}(f, V)$$

to  $\|v - \mathfrak{J}f\| < \varepsilon$ .

6. Czy twierdzenie o silnej aproksymacji zachodzi w dowolnej przestrzeni Hilberta  $H$ ? Dokładniej, niech dana będzie przestrzeń skończenie wymiarowa  $V \subset H$ . Czy dla każdego  $x \in H$  istnieje  $\gamma > 0$  takie, że dla dowolnego  $v \in V$

$$\|x - v\| \geq \|x - v_0\| + \gamma \|v_0 - v\|,$$

gdzie  $v_0 \in P_V(x)$ ?