Teoria aproksymacji. Zadania #3.

1. Funkcja f jest wypukła na przedziale $[a, b]$. Pokaż, że najlepsze przybliżenie funkcji f funkcjami liniowymi w $C[a, b]$ jest postaci $g(t) = l(t) - c/2$, gdzie $l(t) = pt + q$ jest takie, że $l(a) = f(a)$, $l(b) = f(b)$, natomiast $c = \|f - l\|_\infty$.

2. Niech $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, $f(z) = z^n$, $V = \mathrm{lin}(1, z, \ldots, z^{n-1})$. Pokaż, że $0 \in P_V(f)$.

3. Niech $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Określmy $S(t_0, \ldots, t_n) \subset C[0, 1]$ jako podprzestrzeń funkcji liniowych na każdym odcinku $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n - 1$.

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji funkcji wklęsłej ϕ w przestrzeni $S(t_0, \ldots, t_n)$ jest postaci $l(t) + c/2$, gdzie $l \in S(t_0, \ldots, t_n)$ takie, że $l(t_i) = \phi(t_1)$ dla $i = 0, \ldots n$ i

$$c = \max_{i=0,\ldots,n-1} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |l(t) - \phi(t)|.$$

(b) Dla $\phi(t) = \sqrt{t}$ wyznacz odległość ϕ od $S(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$.

(c) Niech $\mathcal{A} = \{f \in C[0, 1]\colon f \in S(0, a, 1)$ dla pewnego $a \in (0, 1)\}$. Wyznacz element najlepszej aproksymacji funkcji $\phi(t) = \sqrt{t}$ elementami zbioru $\mathcal{A}$.

4. Które z poniższych układów funkcji rozpinają przestrzeń Haara na danym odcinku?
(a) $\{1, x^2, x^4\}$ na $[0, 1]$,
(b) $\{1, x^2, x^4\}$ na $[-1, 1]$,
(c) $\{1, x^2, x^3\}$ na $[-1, 1]$,
(d) $\{1/(x + 1), 1/(x + 2), 1/(x + 3)\}$ na $[0, 1]$.

5. Dla jakich n przestrzenie $S(t_0, \ldots, t_n)$ z zadania 3. są przestrzeniami Haara?

6. Niech f będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w sposób ciągły na odcinku $[a, b]$ taką, że $f^{(n)}(t) > 0$ dla $t \in [a, b]$. Pokaż, że układ funkcji $\{1, t, \ldots, t^{n-1}, f\}$ spełnia warunek Haara.