Teoria aproksymacji. Zadania #2

1. Niech $X = \mathbb{R}^n$ z metryka euklidesową, zbiór $M \subset X$ jest domkniety i wypukły. Pokaż, że M jest zbiorem Czebyszewa i odwzorowanie $x \mapsto P_M(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

2. X jest przestrzenią liniową unormowaną i $G \subset X$ jest podprzestrzenią. Będziemy pisać $f \perp\!\!\!\perp G$ wtw. gdy $\|f\| \leqslant \|f + g\|$ dla każdego $g \in G$. Udowodnij, że jeżeli X jest przestrzenią Hilberta, to $f \perp\!\!\!\perp G \iff f \perp G$. W ogólnym przypadku pokaż, że $g^* \in P_G(f) \iff (f - g^*) \perp\!\!\!\perp G$.

3. Pokaż, że w każdej przestrzeni liniowej unormowanej nieskończenie wymiarowej X istnieje zbiór domknięty $M \subset X$ taki, że $P_M(0) = \emptyset$.

4. ZADANIE STEINHAUSA. Wyznacz ciąg kanoniczny dla podprzestrzeni

$$V = \{\alpha t + \beta\} \subset L_1[a, b].$$

5. Oblicz odległość (w metryce L_1) funkcji $f(t) = t^2$ od podprzestrzeni V w poprzednim zadaniu.

6. Funkcje $f_1, f_2 \in L^1[-1, 1]$ określone są wzorami $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = \max(0, t)$, $V = \mathrm{lin}(f_1, f_2) \subset L^1[-1, 1]$. Wyznacz ciąg kanoniczny dla podprzestrzeni V i znajdź element najlepszej aproksymacji $g \in V$ dla funkcji $f(t) = |t|$, $t \in [-1, 1]$.

7. Pokaż, że odwzorowanie $T_j : S^n \to \mathbb{R}$

$$T_j(x) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sgn} x_k \int_{a_k(x)}^{a_{k+1}(x)} g_j(s)ds,$$

które pojawiło się w dowodzie TW. 3 na 2. wykładzie, jest ciągłe.

8. Podprzestrzeń $Y \subset L_1[a, b]$ ma skończony wymiar i $Y \neq \{0\}$. Pokaż, że istnieje $f \in L_1[a, b]$ takie, że zbiór $P_Y(f)$ ma więcej niż 1 element.

9. $Y \subset L_1[0, 1]$ jest podprzestrzenia liniową, $f \in L_1[0, 1]$, $g_0 \in Y$. Pokaż, że $g_0 \in P_Y(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $g \in Y$ zachodzi

$$\int_0^1 g \operatorname{sgn}(f - g_0) \leqslant \int_A |g|,$$

gdzie $A = \{x \in [0, 1] : f(x) = g_0(x)\}$.