

Teoria aproksymacji. Zadania #1

Poniżej znajdują się zadania z 1. ćwiczeń oraz zadania, które będziemy omawiać na 2. ćwiczeniach.

O ile nie jest napisane inaczej, X jest przestrzenią Banacha.

1. Zbiór $M \subset X$ jest domknięty i wypukły. Pokaż, że dla każdego $x \in X$ zbiór $P_M(x)$ też jest domknięty i wypukły.
2. Zbiór $A \subset X$ jest (lokalnie) zwarty. Pokaż, że A jest zbiorem proksyminalnym.
3. Rozważmy przestrzeń $C_0[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ z normą $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Niech $A = \{f \in C_0[0, 1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ i $x(t) = t$. Pokaż, że $\text{dist}(x, A) = \frac{1}{2}$ i $P_A(x) = \emptyset$.
4. Pokaż, że każda przestrzeń Hilberta jest jednostajnie wypukła i w definicji jednostajnej wypukłości można wziąć $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{8}\varepsilon^2$.
5. *Dowód tw. Clarksona:* Jeżeli $1 < p < \infty$ to przestrzeń $L_p(\Omega, \mu)$ jest jednostajnie wypukła

(a) Pokaż, że gdy $1 < p < \infty$, to

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in \mathbb{C}$$

$$|x - y| > \varepsilon \max(|x|, |y|) \Rightarrow \left| \frac{x + y}{2} \right|^p < (1 - \delta(\varepsilon)) \frac{|x|^p + |y|^p}{2}.$$

(b) Niech $f, g \in L_p(\Omega, \mu)$, $\|f\| = \|g\| = 1$ i $\|f - g\| \geq \varepsilon$ oraz

$$M = \{\omega \in \Omega : \varepsilon^p (|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p) < 4|f(\omega) - g(\omega)|^p\}.$$

Pokaż, że $\max(\int_M |f|^p d\mu, \int_M |g|^p d\mu) \geq \varepsilon^p 2^{-p-1}$.

(c) Korzystając z (a) i (b) pokaż jednostajną wypukłość przestrzeni $L_p(\Omega, \mu)$.

6. Mówimy, że przestrzeń unormowana X jest *ściśle wypukła*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $\|x\| = \|y\| = 1$, zachodzi $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.
 - (a) Pokaż, że przestrzenie c_0 , $C[0, 1]$, l^1 , $L^1[0, 1]$ nie są ściśle wypukłe.
 - (b) Jeżeli X jest ściśle wypukła i $M \subset X$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, to dla każdego $x \in X$ zbiór $P_M(x)$ jest jednoelementowy.
 - (c) Jeżeli X nie jest ściśle wypukła, to istnieje podprzestrzeń skończenie wymiarowa $M \subset X$ i $x \in X$ takie, że zbiór $P_M(x)$ ma więcej niż jeden element.
7. Pokaż, że każda przestrzeń jednostajnie wypukła jest ściśle wypukła
8. Pokaż, że przestrzeń ściśle wypukła skończonego wymiaru jest jednostajnie wypukła.
9. Podaj przykład przestrzeni X ściśle wypukłej, która nie jest jednostajnie wypukła.
10. Przestrzeń X jest *silnie unormowana*, jeżeli

$$\forall x, y \in X \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x \text{ i } y \text{ są liniowo zależne.}$$

Niech A będzie podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w silnie unormowanej przestrzeni X . Pokaż, że A jest zbiorem Czebyszewa.