GAL (Informatyka), grupy 3. i 4.

20-01-2012 – Zadania z 12. ćwiczeń.

Paweł Bechler

Zadania z ćwiczeń:

C1. Zbadaj, dla jakich wartości $\lambda \in \mathbb{C}$ forma hermitowska

$$\phi(\vec{x},\vec{y}) = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \overline{x}_4 y_3 + \lambda(\overline{x}_1 y_2 + \overline{x}_2 y_1 + \overline{x}_1 y_3 + \overline{x} + 3y_1 + \overline{x}_2 y_3 + \overline{x}_3 y_2)$$

zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{C}^3$.

C2. W $\mathbb{C}^3$ opisz wszystkie elementy prostopadłe do wektora $[1,1,-1]^T$

(a) w standardowym iloczynie skalarnym $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^H \vec{y}$,

(b) w iloczynie skalarnym z zadania **C1** dla $\lambda = -\frac{1}{3}$.

C3. (X,ϕ) jest przestrzenią euklidesową, $x_1,\ldots,x_k \in X$ to dowolne wektory i $Y = \{y \in Y : y \perp x_i \text{ dla } i = 1,\ldots,k\}$. Pokaż, że Y jest podprzestrzenią liniową. Jaki jest wymiar?

C4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \vec{y}$ znajdź rzut prostopadły wektora $\vec{x} = [1,-1,2,1]^T$ na podprzestrzeń

$$Y = \operatorname{span}([1,1,2,1]^T, [-1,1,0,-1]^T).$$

C5. Niech $Y \subset \mathbb{R}^3$, $Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Znajdź bazę ortogonalną w Y.

(b) Znajdź rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [1,5,-2]^T$ na Y.

(c) Bazę znalezioną w punkcie (a) dopełnij do bazy ortogonalnej całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

C6. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \vec{y}$ dana jest baza $\vec{x}_1 = [1,1,1,1]^T$, $\vec{x}_2 = [1,1,2,0]^T$, $\vec{x}_3 = [3,1,0,0]^T$, $\vec{x}_4 = [4,0,0,0]^T$. Przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta układu $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4$.

Zadania dodatkowe:

D1. W przestrzeni wielomianów $\mathcal{P}^3_{\mathbb{R}}$ dana jest forma hermitowska

$$\phi(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + 2p(1)q(1) - p(-1)q(1) - p(1)q(-1).$$

(a) Pokaż, że $(\mathcal{P}^3_{\mathbb{R}},\phi)$ jest przestrzenią euklidesową.

(b) Znajdź bazę ortogonalną.

(c) Znajdź rzut prostopadły wielomianu $1+t$ na $\operatorname{span}(1,t^2)$.

D2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa

$$\phi(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4 - (x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

(a) Sprawdź, że ϕ jest iloczynem skalarnym.

(b) Znajdź rzut prostopadły wektora $[1,1,-1,-2]^T$ na podprzestrzeń $Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(c) Niech $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \text{ i } x_1 = x_4\}$. Znajdź podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^4$ taką, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i dla dowolnych $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$ zachodzi $u \perp v$.

(d) Wyznacz bazy ortogonalne podprzestrzeni U i V.

D3. $(X_{\mathbb{K}},\phi)$ jest przestrzenią euklidesową, $U,V \subset X$ są podprzestrzeniami takimi, że $X = U + V$ i dla dowolnych $u \in U$, $v \in V$ zachodzi $\phi(u,v) = 0$. Pokaż, że $X = U \oplus V$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi $x_U = x - x_V$.