

## AF1\* – Zadania z dnia 11/01/2012

Ćwiczenia:

C1. Pokaż, że w przestrzeni  $c_0$  ciągi słabo Cauchy'ego nie muszą być słabo zbieżne.

Zadania domowe:

Poniższe zadania wymagają materiału z wykładu w dniu 13/01/2012.

- H1. (a)  $X$  jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Pokaż, że topologia  $\sigma(X, X^*)$  nie jest metryzowalna.  
(b)  $X$  jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Pokaż, że topologia  $\sigma(X^*, X)$  na domkniętej kuli jednostkowej  $B_{X^*} \subset X^*$  jest metryzowalna.  
(c)  $X$  jest przestrzenią Banacha i  $X^*$  jest przestrzenią ośrodkową. Pokaż, że topologia  $\sigma(X, X^*)$  na domkniętej kuli jednostkowej  $B_X \subset X$  jest metryzowalna.
- H2. Pokaż, że  $C[0, 1]$  jest gęstym podzbiorem  $L^\infty[0, 1]$  z topologią  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .
- H3.  $X$  jest przestrzenią unormowaną i  $K \subset X$  jest zwarty w topologii  $\sigma(X, X^*)$ . Pokaż, że  $K$  jest domknięty w normie i ograniczony.
- H4. Pokaż, że domknięta kula jednostkowa w  $c_0$  nie jest zwarta w topologii  $\sigma(c_0, \ell^1)$ .
- H5. Niech  $f_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N^2} e^{int}$ . Udowodnij, że  $f_N \xrightarrow{w} 0$  w  $L^2[-\pi, \pi]$ . Znajdź ciąg kombinacji wypukłych funkcji  $f_N$  zbieżny do 0 w normie  $L^2$ .
- H6.  $X$  i  $Y$  to przestrzenie unormowane. Pokaż, że operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$  jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w słabych topologiach ( $\sigma(X, X^*)$  na  $X$  i  $\sigma(Y, Y^*)$  na  $Y$ ).
- H7. Dany jest podzbiór  $A \subset \ell^2$ ,  $A = \{e_m + me_n : 1 \leq m < n < \infty\}$ . Pokaż, że 0 należy do domknięcia  $A$  w topologii  $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ , ale nie istnieje ciąg  $x_n \in A$  taki, że  $x_n \xrightarrow{w} 0$ .
- H8.  $X$  jest przestrzenią unormowaną,  $\text{id} : X \rightarrow X^{**}$  jest kanonicznym włożeniem. Pokaż, że  $\text{id}$  jest homeomorfizmem przestrzeni topologicznych  $(X, \sigma(X, X^*))$  i  $(\text{id}(X), \sigma(X^{**}, X^*))$ .
- H9. Poniższe zadania to kolejne kroki w dowodzie **tw. Schura**: w  $\ell^1$  każdy ciąg słabo zbieżny jest zbieżny w normie.

- (a) Domknięta kula jednostkowa  $B_{\ell^\infty} \subset \ell^\infty$  jest metryzowalna w topologii  $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ .  
(b) Niech  $x, x_n \in \ell^1$  i  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Dla  $\epsilon > 0$  i  $m \geq 1$  definiujemy zbiory

$$B_m = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ x^* \in B_{\ell^\infty} : |x^*(x_n) - x^*(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \right\}.$$

Pokaż, że  $B_m$  są  $w^*$ -domknięte (czyli domknięte w topologii  $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ ),  $B_{\ell^\infty} = \bigcup_m B_m$ , oraz istnieje  $m_0$  takie, że  $\text{int}_{w^*} B_{m_0} \neq \emptyset$ . ( $\text{int}_{w^*}$  to wnętrze w topologii  $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ )

- (c) Pokaż że istnieją  $x_0^* \in B_{\ell^\infty}$ ,  $y_1, \dots, y_k \in \ell^1$ ,  $\tau > 0$  takie, że

$$U(x_0^*; \tau; y_1, \dots, y_k) \cap B_{\ell^\infty} \subset B_{m_0}$$

- (d) Pokaż, że istnieją dodatkowo  $p \in \mathbb{N}$  oraz  $\delta > 0$  takie, że

$$B_{\ell^\infty} \cap U(x_0^*; \delta; e_1, \dots, e_p) \subset U(x_0^*; \tau; y_1, \dots, y_k) \cap B_{\ell^\infty}.$$

- (e) Pokaż, że  $\|x_n - x\|_{\ell^1} \rightarrow 0$ .