

AF1* – Zadania z 12/11/2011

Uwaga: Zakładamy, że wszystkie przestrzenie liniowe są rzeczywiste lub zespolone, chyba że jest napisane inaczej.

Zadania omówione na zajęciach:

- Z1.** Niech $0 < p < 1$. Pokaż, że topologia przestrzeni $\ell^p(\mathbb{N})$ wyznaczona przez metrykę $d_p(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - y(k)|^p$ nie jest normowalna.
- Z2.** Dana jest przestrzeń mierzalna (X, μ) i $\mu(X) < \infty$, $1 \leq p < q < \infty$. Pokaż, że $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ i istnieje stała $C = C(p, q, \mu(X))$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in L^q(X)$ zachodzi

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q.$$

- Z3.** Dana jest podprzestrzeń $V \subset C([0, 1]^2)$,

$$V = \{F(x, y) = f(x) + g(y) : f, g \in C[0, 1]\}.$$

Pokaż, że V jest domknięta.

- Z4.** $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, $V \subset X$ jest podprzestrzenią i $\dim V < \infty$. Pokaż, że $(V, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.
- Z5.** Pokaż, że przestrzeń $BV[0, 1]$ nie jest órodkowa.
- Z6.** Pokaż, że przestrzeń $\ell^\infty(\mathbb{N})$ nie jest órodkowa.
- Z7.** Pokaż, że przestrzeń $L^p[0, 1]$ jest órodkowa.

Zadania domowe:

- D1.** Czy przestrzeń $L^q[0, 1]$ jest zupełna z normą przestrzeni $L^p[0, 1]$ dla $1 \leq p < q < \infty$?
- D2.** Pokaż ciągłość i wyznacz normy następujących funkcjonałów liniowych na $C[0, 1]$:

- (a) $\phi(f) = f(0)$,
- (b) $\phi(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, gdzie $g \in L^1[0, 1]$,
- (c) $\phi(f) = \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx + 2f(1)$,
- (d) $\phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(\frac{1}{n})$, gdzie $a = (a(n))_n \in \ell^1(\mathbb{N})$.

- D3.** Na przestrzeni \mathcal{P} wszystkich wielomianów rzeczywistych dana jest norma

$$\|p\| = \int_0^1 |p(t)|dt.$$

Niech $x_0 \in [0, 1]$. Rozważamy funkcjonał $\phi(p) = p(x_0)$. Czy ϕ jest ciągły?

- D4.** Pokaż, że na każdej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru istnieje nieciągły funkcjonał liniowy.
- D5.** Niech $0 < p < 1$. Przestrzeń $L^p[0, 1]$ definiujemy tak samo jak w przypadku $p > 1$. Topologia na $L^p[0, 1]$ jest zadana przez metrykę

$$d_p(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx.$$

Pokaż, że na $L^p[0, 1]$ nie istnieją niezerowe funkcjonały liniowe ciągłe.

D6. Przestrzenie Bergmana. $1 \leq p < \infty$, $D \subset \mathbb{C}$ oznacza otwarty dysk jednostkowy. Niech $A^p(D)$ oznacza zespoloną przestrzeń liniową funkcji holomorficzych na D takich, że

$$\|f\|_{A^p(D)} = \left(\int_D |f(z)|^p dz \right)^{1/p} < \infty.$$

(a) Pokaż, że $(A^p(D), \|\cdot\|_{A^p(D)})$ jest przestrzenią Banacha.

(b) Pokaż, że dla każdego $z_0 \in D$ funkcjonal liniowy $\phi(f) = f(z_0)$ jest ciągły na $(A^p(D), \|\cdot\|_{A^p(D)})$.

Wskazówka: Pokaż, że zbieżność w normie przestrzeni $A^p(D)$ implikuje zbieżność jednostajną na zwartych podzbiórach D .

D7. Pokaż, że dla dowolnych $1 \leq p < q < \infty$ nie zachodzi żadna z inkluzji

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R}), \quad L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}).$$

D8. Niech $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$. Pokaż, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że gdy $|t| < \delta$, to

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx < \epsilon.$$

D9. Niech $CB(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji ciągłych i ograniczonych na \mathbb{R} z normą supremum. Jest to nieośrodkowa przestrzeń Banacha. Następnie niech:

$$\begin{aligned} C_{00}(\mathbb{R}) &= \{f \in CB(\mathbb{R}) : \text{supp } f \text{ jest zbiorem zwartym}\}, \\ C_0(\mathbb{R}) &= \{f \in CB(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Czy $C_{00}(\mathbb{R})$ i $C_0(\mathbb{R})$ są domkniętymi podprzestrzeniami $CB(\mathbb{R})$?

D10. Pokaż, że $C_0(\mathbb{R})$ i $C_{00}(\mathbb{R})$ są gęstymi podprzestrzeniami w $L^p(\mathbb{R})$ dla $1 \leq p < \infty$.