Rzut oka na współczesną matematykę spotkanie 6: Krzywizna powierzchni i historia zagadnienia Plateau

P. Strzelecki
pawelst@mimuw.edu.pl

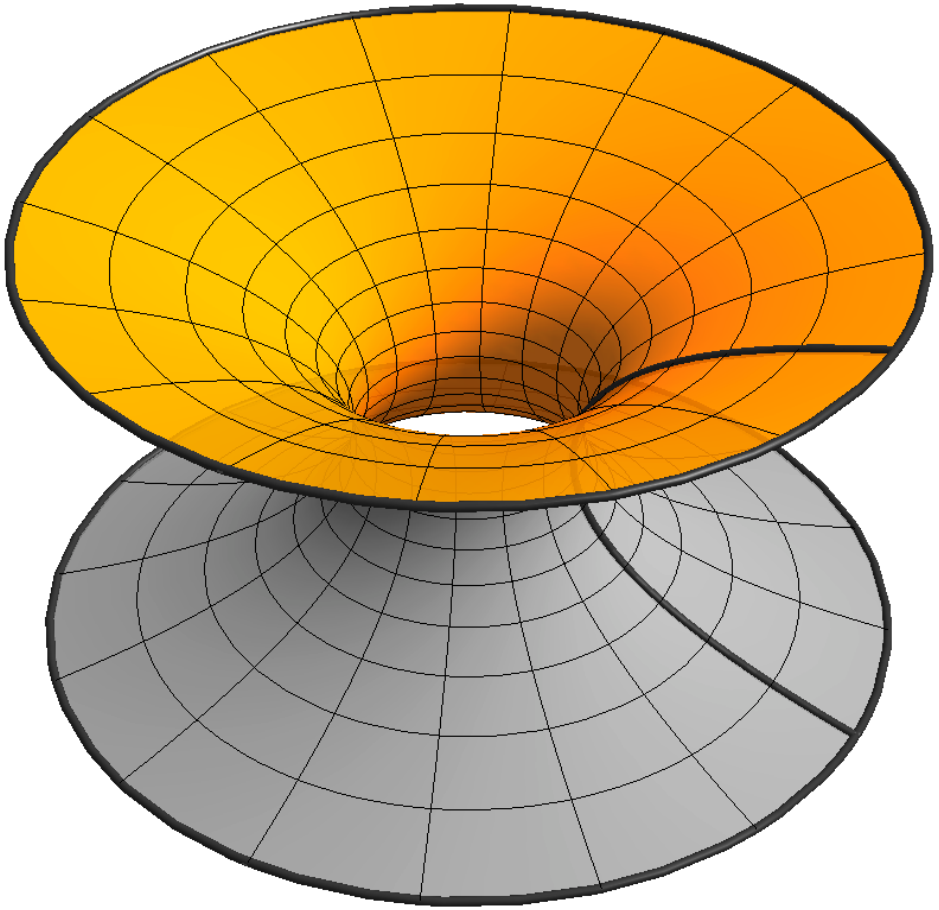
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

MISH UW, semestr zimowy 2011-12

O czym będzie?

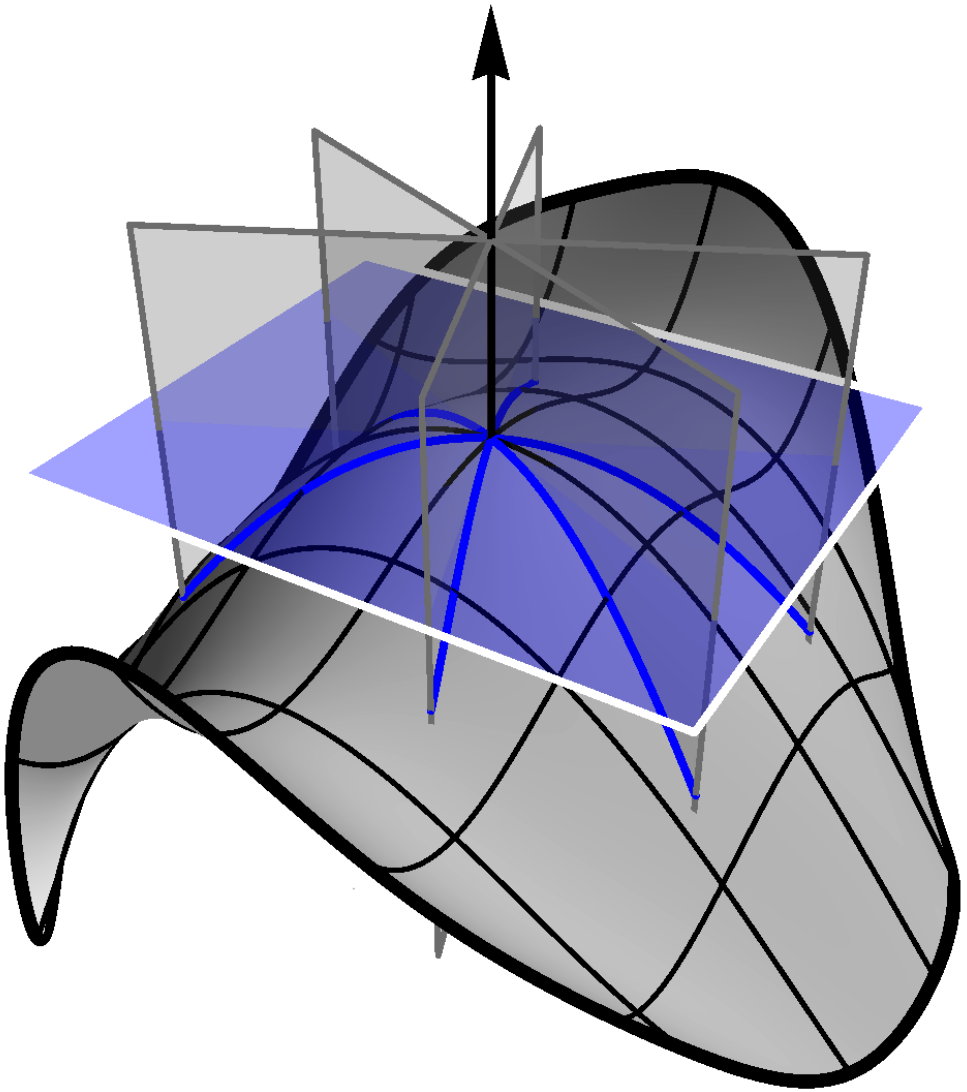
1. Prapoczątki pomiarów krzywizny: Euler, Lagrange, Meusnier
2. Powierzchnie minimalne w XIX wieku.
   - Powierzchnie Scherka
   - Enneper i Weierstrass, związki z analizą zespoloną
   - Powierzchnie okresowe Schwarza
   - Plateau: dawca nazwy
3. Wiek XX.
   - Nowoczesne sformułowanie problemu.
   - Garnier, Rado i Douglas
4. Co dalej?

Powierzchnie minimalne. Euler i Lagrange.



- L. Euler, 1744: jaka powierzchnia obrotowa, rozpięta na dwóch danych okręgach, ma najmniejsze pole? Katenoida.
- J.L. Lagrange, 1760: ogólne pytanie o takie powierzchnie. Praca *Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et minima des formules intégrales indéfinies.*

Jak mierzyć krzywiznę powierzchni?

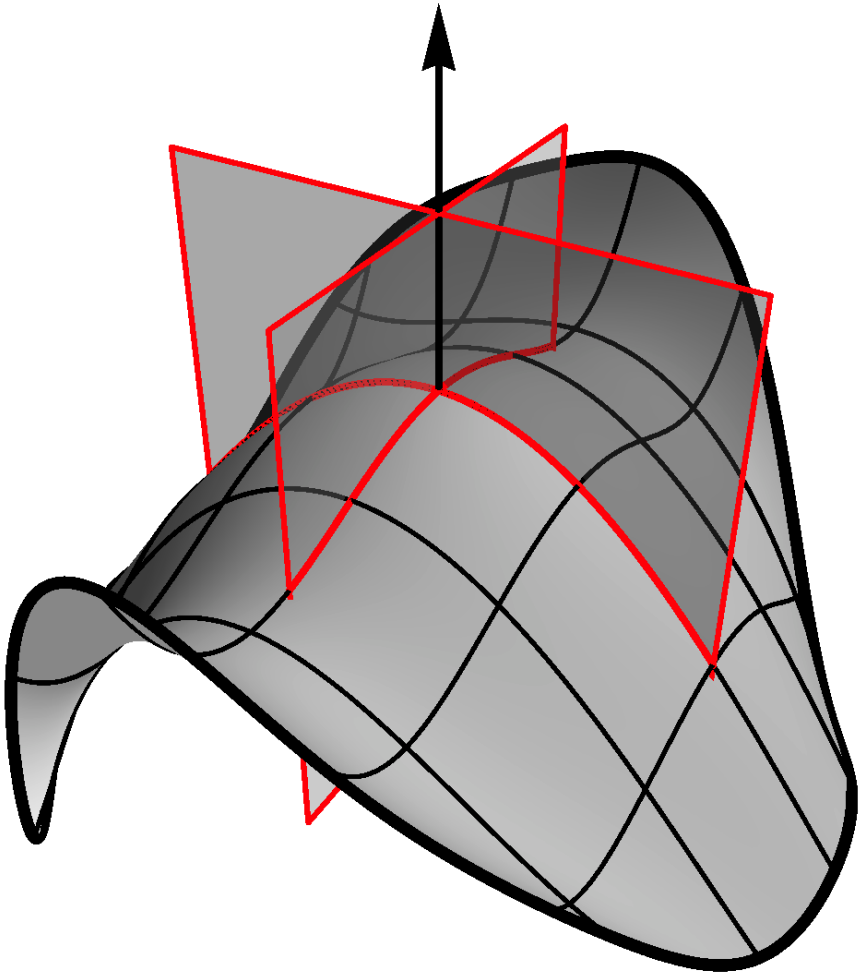


Instrukcja dla inteligentnej mrówki na powierzchni:

- Ustalić punkt. Wbić tam pręt $\perp$ do powierzchni Σ.
- Ciąć powierzchnię płaszczyznami $P \perp \Sigma$.
- Mierzyć krzywiznę krzywych w $P \cap \Sigma$.

Meusnier i średnia krzywizna

Mrówka: “dobrze, ale co mam z tymi wynikami zrobić?”



J.-B. Meusnier: *Wśród krzywych otrzymanych na powierzchni w taki sposób są dwie, z których jedna ma największą krzywiznę, a druga najmniejszą; te dwie krzywe są prostopadłe.*

Kierunki tych krzywych to **kierunki główne**, a ich krzywizny to **krzywizny główne**, κ_1 i κ_2.

Krzywizna średnia i krzywizna Gaussa

Krzywizna średnia H: suma krzywizn głównych,

$$H = \kappa_1 + \kappa_2 \,.$$

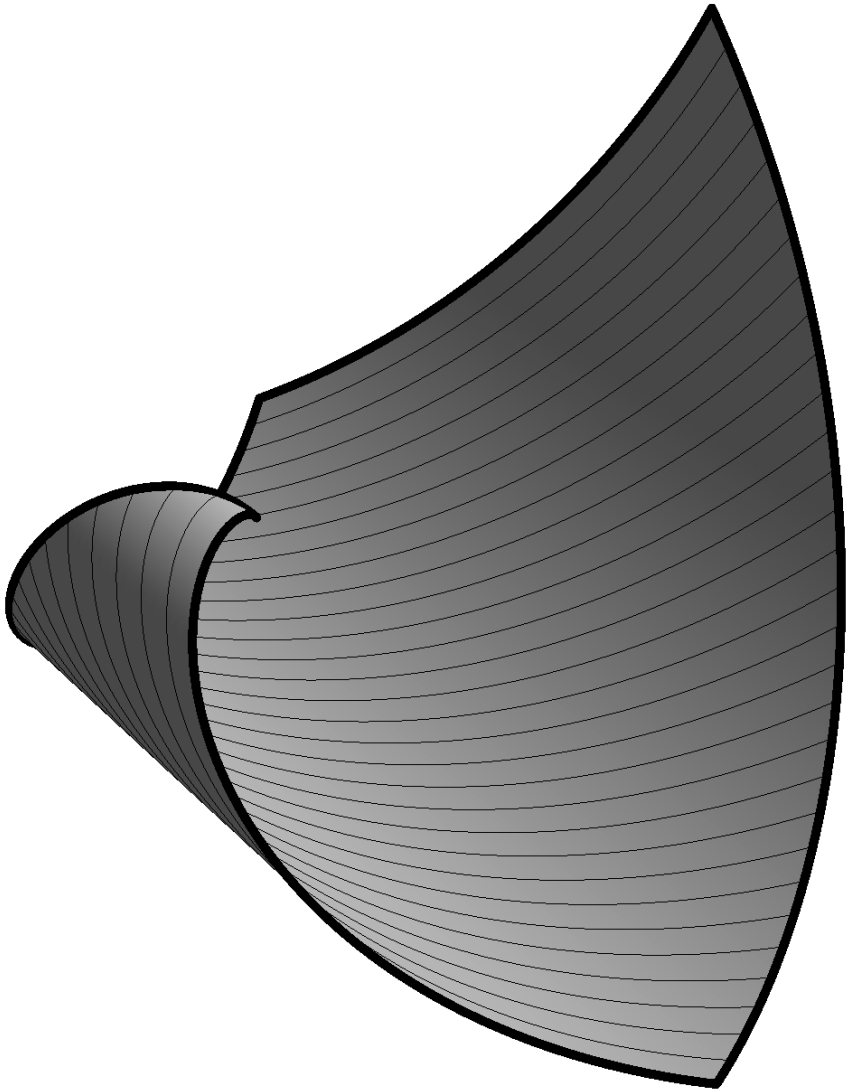
Krzywizna Gaussa K: iloczyn krzywizn głównych,

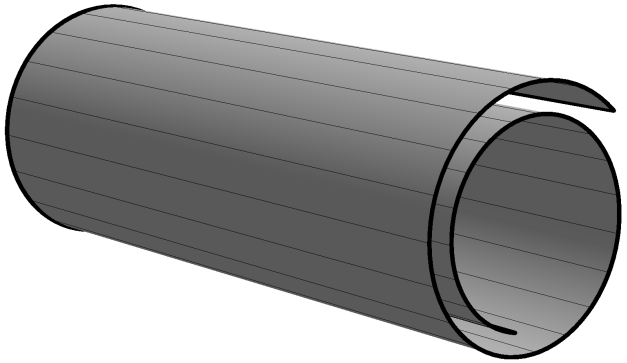
$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \,.$$

Theorema Egregium (Gauss). Krzywizna Gaussa jest niezmiennikiem izometrii (jeśli deformujemy powierzchnię, bez rozciągania i ściskania, zachowując długość wszystkich krzywych na tej powierzchni, to krzywizna Gaussa się nie zmienia).

(I dlatego krawcy muszą robić zaszewki, a kulistych lampionów nie można zrobić z jednego kawałka papierux).

Wniosek: kartka papieru ma $K = 0$





Kartka papieru, wygięta lub zwinięta, ma na mocy Theorema Egregium krzywiznę Gaussa równą 0. Zmienia się tylko krzywizna średnia.

Średnia krzywiza a pole powierzchni

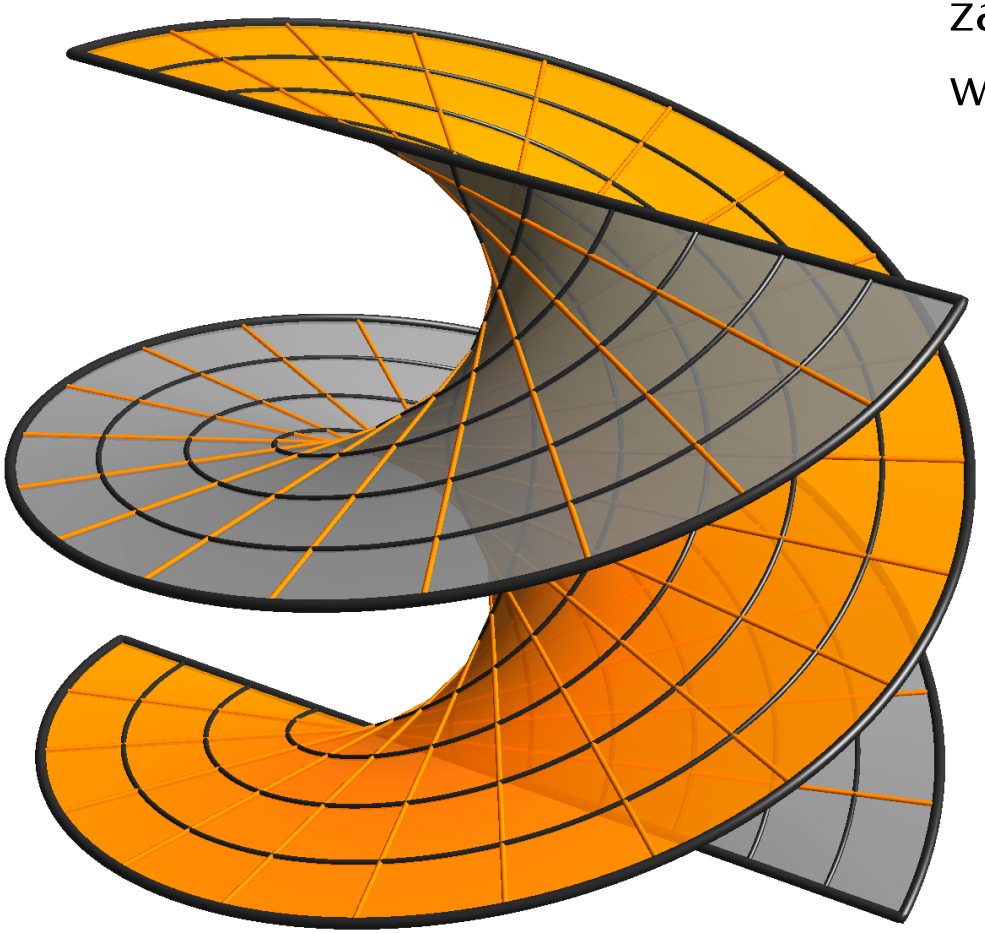
Następujące warunki są równoważne:

1. Każdy odpowiednio mały fragment Σ realizuje minimum pola powierzchni;
2. Σ ma średnią krzywiznę $H = 0$.

Definicja: każdą powierzchnię o średniej krzywiźnie równej zero nazywa się powierzchnią minimalną.

Intuicyjna interpretacja: powierzchnia minimalna jest w pobliżu każdego swojego punktu idealnym siodłem, jednakowo wygiętym w obie strony.

Odkrycie Meusniera: helikoida ma $H = 0$



Helikoida to powierzchnia, zamiatana przez prostą, która wykonuje dwa ruchy jednocześnie:

- obraca się w płaszczyźnie poziomej,
- płaszczyzna porusza się i wektor jej prędkości jest pionowy.

Naturalne pytania:

- Czy powierzchni minimalnych jest dużo?
- Czy na każdej zamkniętej pętli można rozpiąć taką powierzchnię? Chyba tak (eksperyment).
- Na ile skomplikowane mogą być takie powierzchnie?
- Czy np. mogą mieć "dziury na wylot", jak torus czy precel?

Jedyne znane przykłady powierzchni minimalnych na przełomie XVIII i XIX wieku: płaszczyzna, katenoida i helikoida.

Charakteryzacja helikoidy i katenoidy.

Twierdzenie (Euler). Jedyną obrotową powierzchnią minimalną jest katenoida.

Definicja. Powierzchnia jest prostokreślna, jeśli przez każdy jej punkt przechodzi prosta, zawarta w tej powierzchni.

Twierdzenie (Catalan, 1842). Jedyną prostokreślną powierzchnią minimalną, nie licząc płaszczyzny, jest helikoida.

Równanie powierzchni minimalnych i pomysł Scherka

- Jeśli wykres $u\colon \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ jest powierzchnią minimalną, to

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0\,.$$

(Indeksy oznaczają pochodne względem zmiennych x, y.)

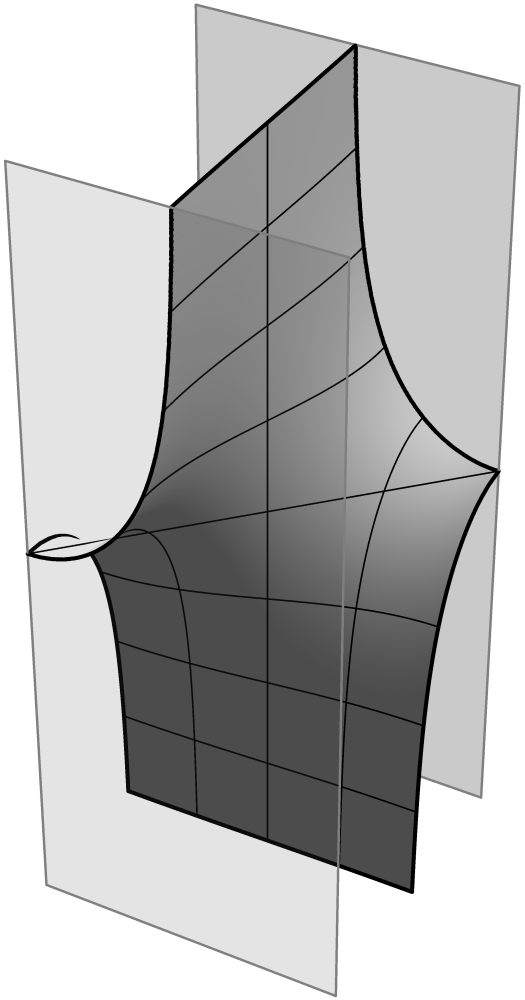
- Scherk (lata 1830-te): szukać rozwiązań postaci

$$u(x,y) = f(x) + g(y).$$

- **Efekt**: znaczące uproszczenie równań, które trzeba rozwiązać (jedna zmienna zamiast dwóch).
- Odkrycie dwóch powierzchni Scherka. Jedną z nich opisuje równanie równanie $e^z \cos y = \cos x$.

Powierzchnia $e^z \cos y = \cos x$ jest okresowa.

Można wyznaczyć $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x$ i $\cos y$ mają ten sam znak.

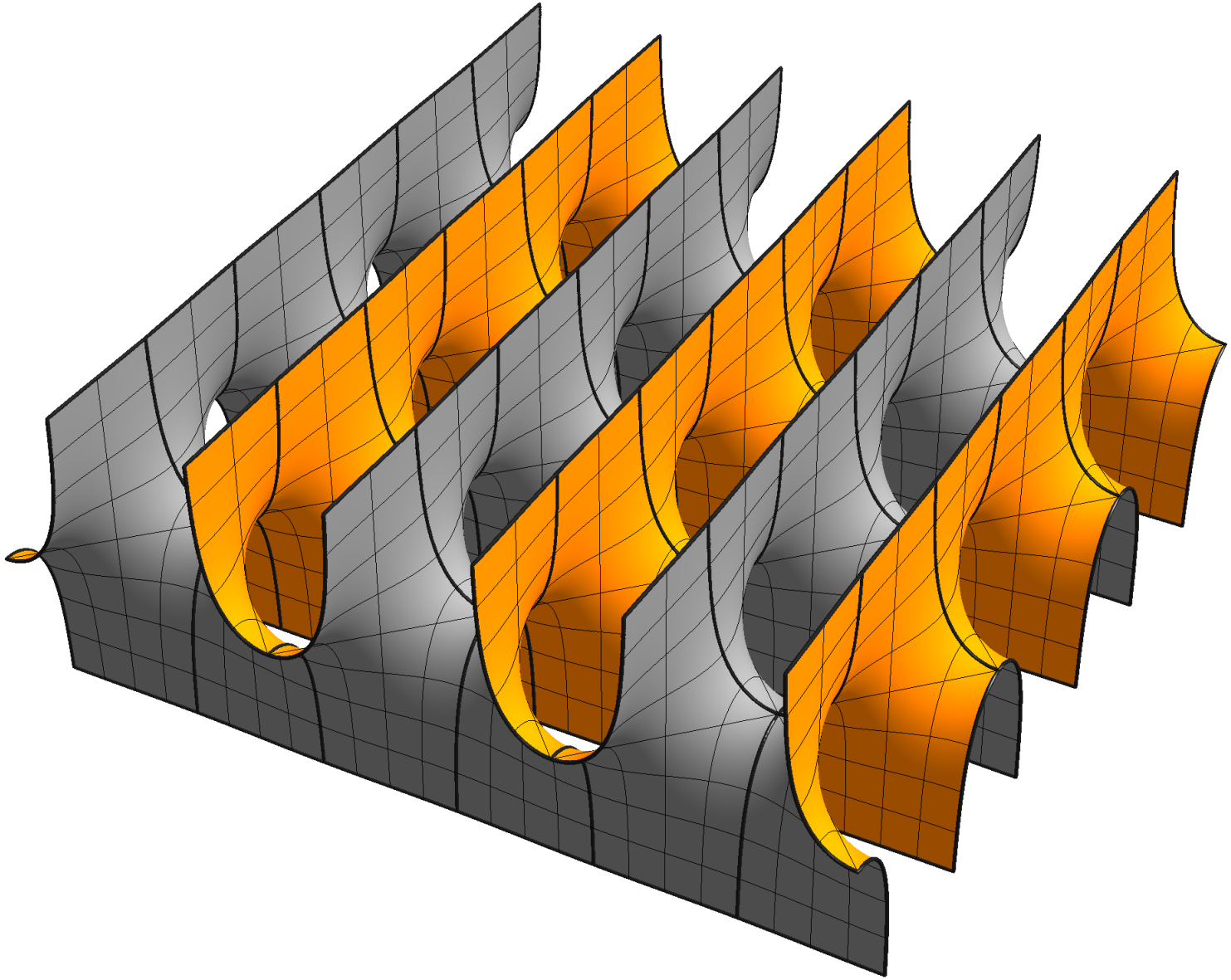


Fragment S powierzchni Scherka.

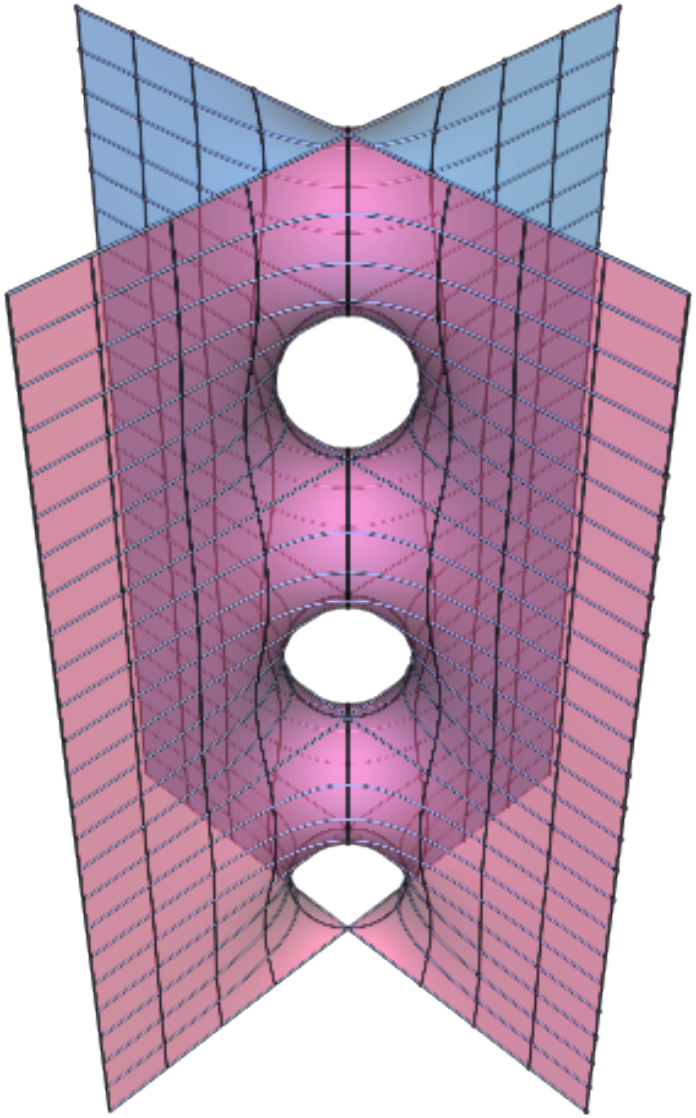
Resztę powierzchni można zeń wygenerować przez odbicia lustrzane względem płaszczyzn, do których S przylega pod kątem $\perp$.

Cała powierzchnia wygląda, jak jednakowe wieże, rozstawione na czarnych polach nieskończnonej szachownicy.

Powierzchnia $e^z \cos y = \cos x$, widok "całości"



Druga powierzchnia Scherka



Obie powierzchnie Scherka mają osie obrotu i płaszczyzny symetrii.

Wydaje się jednak, że Scherk nie wiedział, iż każdą powierzchnię minimalną M można:

1. obracać o 180 stopni względem każdej prostej zawartej w M,
2. odbijać względem każdej płaszczyzny $\perp M$.

1863: reprezentacja Ennepera–Weierstrassa

1. Wziąć dwie różniczkowalne funkcje f, g zmiennej zespolonej;
2. Wyznaczyć

$$\varphi_1 = f(1-g^2), \quad \varphi_2 = \mathbf{i} \cdot f(1+g^2), \quad \varphi_3 = 2fg$$

3. Znaleźć takie funkcje F_k, żeby pochodna $F_k' = \varphi_k$ dla $k = 1, 2, 3$.
4. Wyznaczyć $\operatorname{Re} F_k$. Przekształcenie

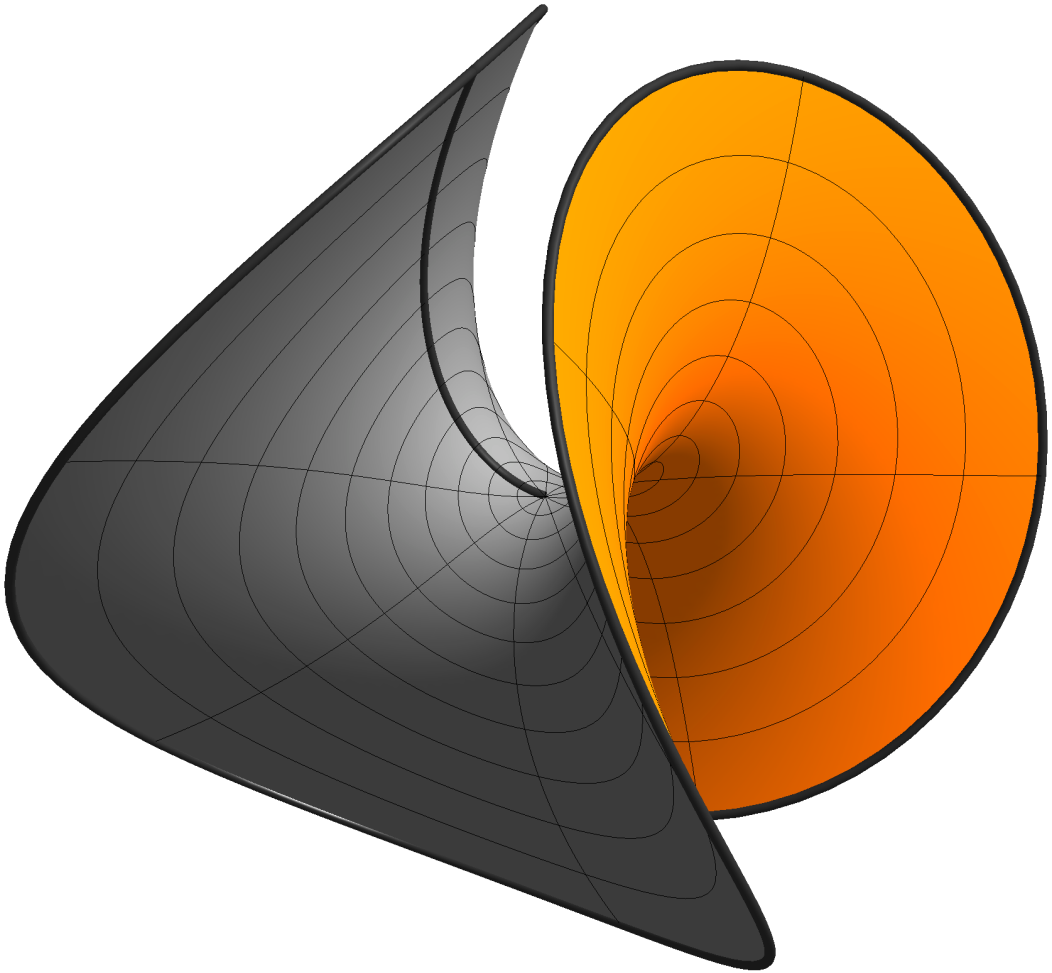
$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \ni z \longmapsto \big(\operatorname{Re} F_1(z), \operatorname{Re} F_2(z), \operatorname{Re} F_3(z)\big) \in \mathbb{R}^3$$

wyznacza paramteryzację pewnej powierzchni minimalnej.

Co więcej, każda powierzchnia minimalna w $\mathbb{R}^3$ powstaje z pewnych f, g **w taki właśnie sposób**.

Skutek: możliwość konstrukcji nieskończenie wielu przykładów.

Przykład – powierzchnia Ennepera

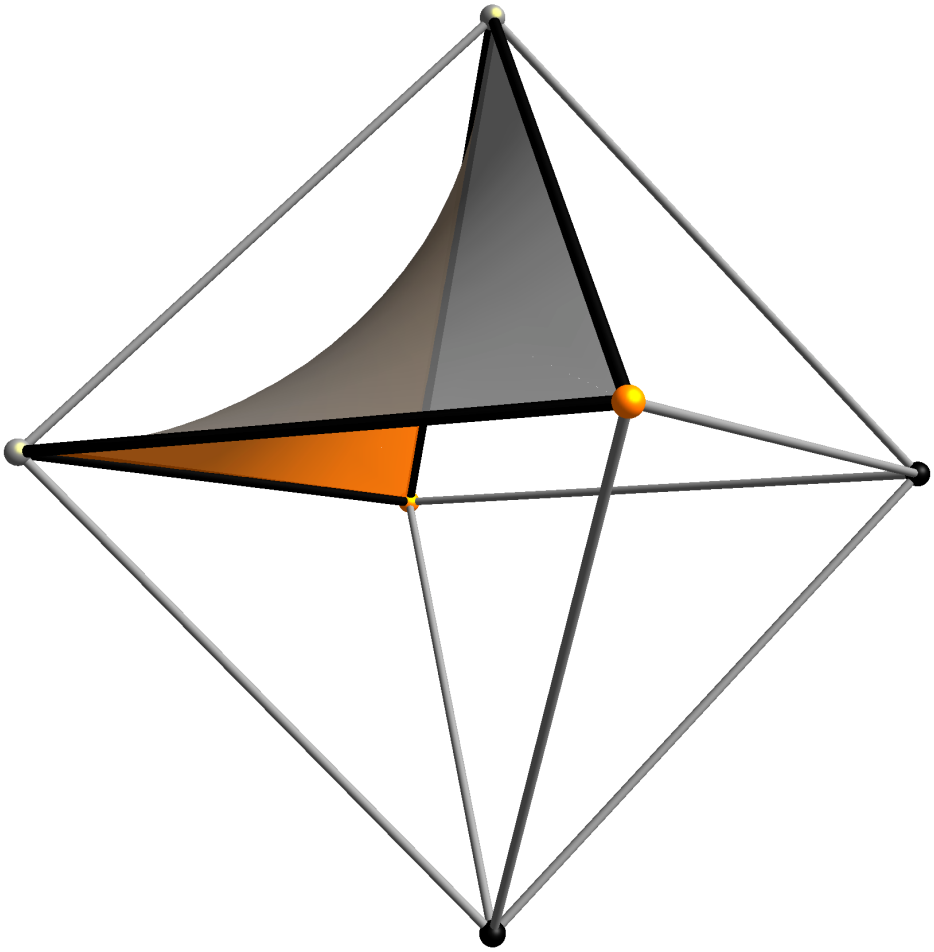


- Otrzymujemy ją, biorąc $f \equiv 1$, $g(z) = z$;
- Gdy zwiększamy promień dysku D, zaczynają się pojawiać samoprzecięcia.

Hermann Amandus Schwarz

- Zasada symetrii Schwarza w analizie zespolonej. Dwie reguły:
  1. Jeśli powierzchnia minimalna M zawiera prostą p, to p jest osią obrotu M (o 180 stopni).
  2. Jeśli płaszczyzna P przecina powierzchnię minimalną M pod kątem $\perp$, to P jest płaszczyzną symetrii M.
- Rozwiązanie zagadnienia Plateau (= problemu konstrukcji powierzchni minimalnej o zadanym brzegu) dla dowolnego konturu z 4 odcinków.

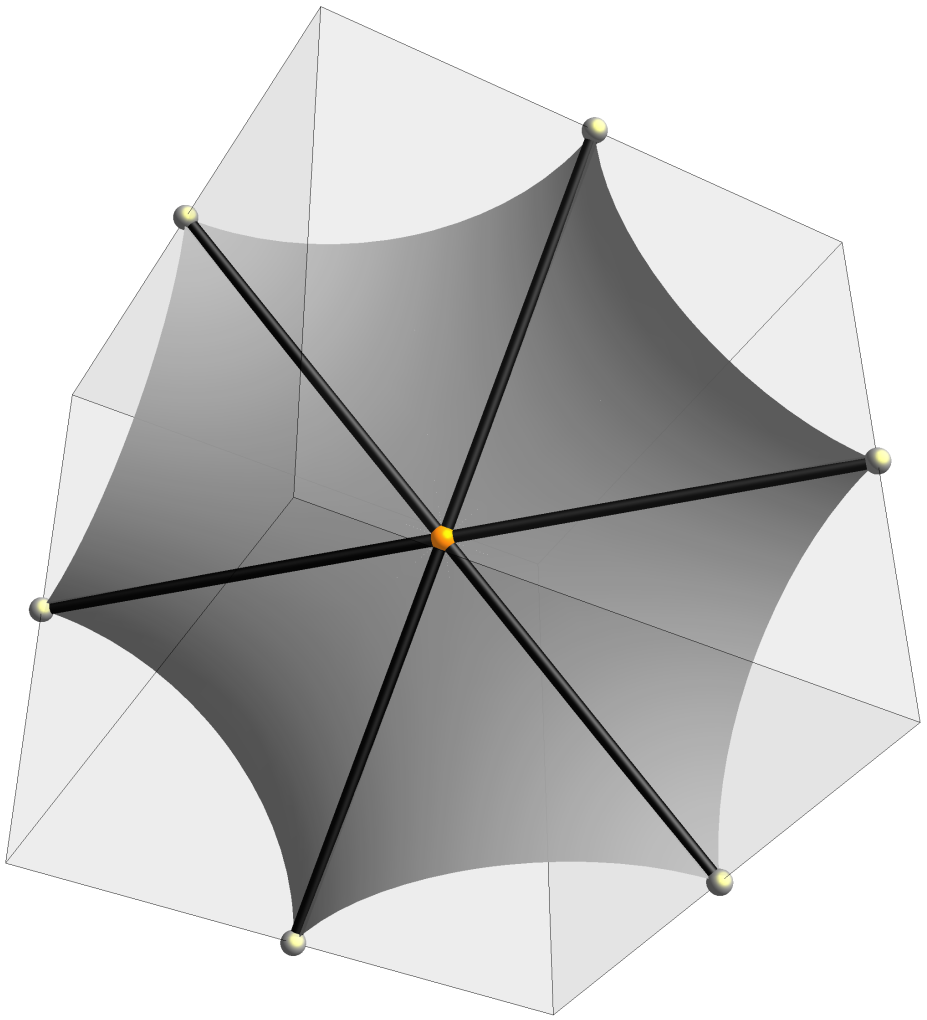
Powierzchnia P Schwarza: trójokresowa powierzchnia minimalna



- Fragment P: powierzchnia minimalna, rozpięta na 4 krawędziach ośmiościanu foremnego;
- Są 2 płaszczyzny symetrii;
- Każda z 4 symetrycznych części tego fragmentu nazywa się

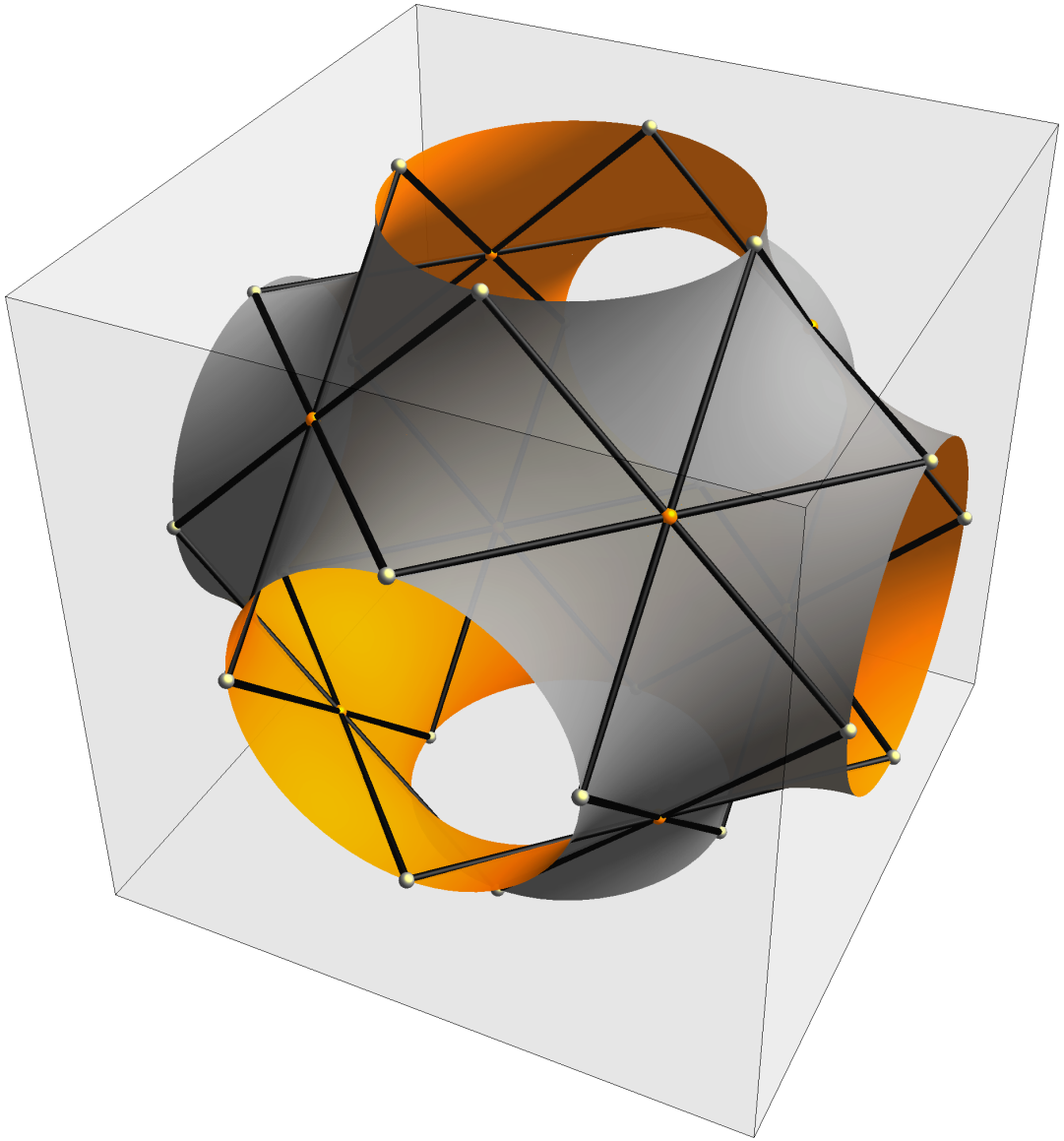
Flächenstück.

Powierzchnia P, cd.



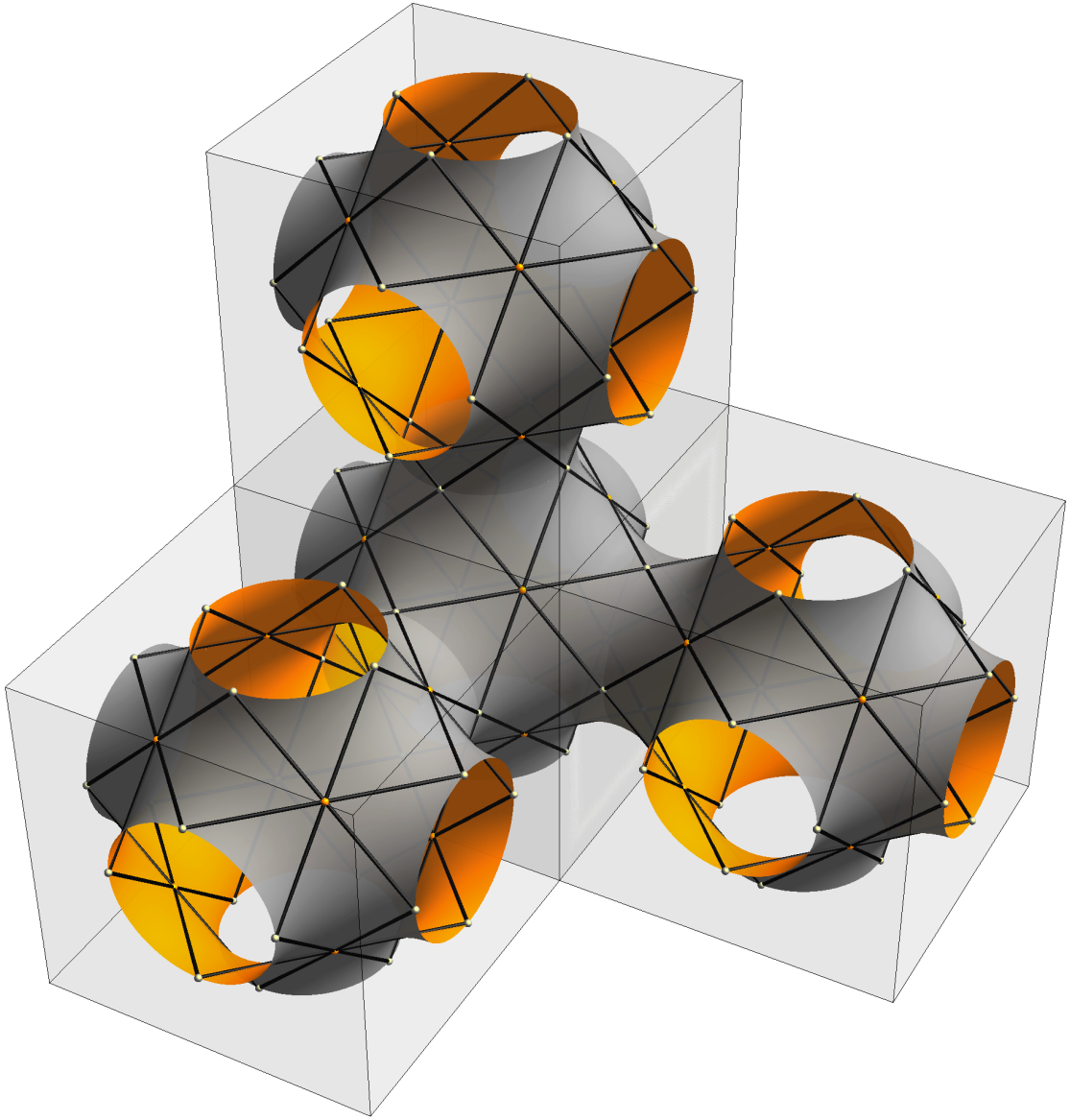
- Większy fragment P;
- Przez punkt w środku przechodzą 3 proste;
- Małpie siodło w kształcie parasola zbudowanego z 12 *Flächenstück*;
- Brzeg parasola dotyka ścian kostki pod kątem prostym.

Powierzchnia P: komórka z 8 parasoli



- Brzeg z sześciu okręgów;
- Płaszczyzny każdego okręgu powierzchnia dotyka pod kątem prostym;
- Sześć takich płaszczyzn ogranicza sześcian.

Powierzchnia P



- Przesuwając komórki w kierunkach x_1, x_2, x_3, można tworzyć nieograniczoną powierzchnię minimalną;
- Dzieli ona przestrzeń na 2 przystające labirynty.

Zespolone obroty powierzchni minimalnych

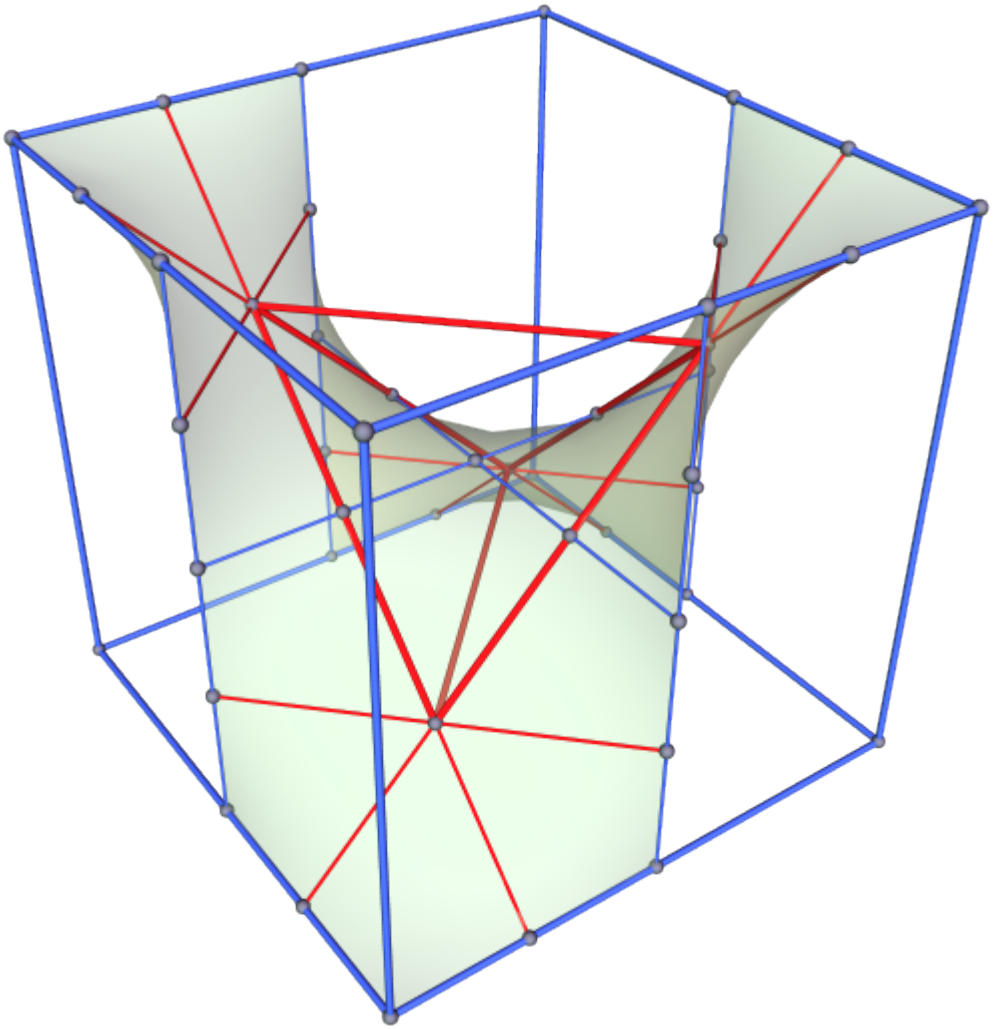
Uwaga. W 'przepisie' Ennepera–Weierstrassa można wprowadzić dodatkowy naturalny parametr θ, biorąc funkcje

$$\varphi_1 = e^{i\theta} f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = i \cdot e^{i\theta} f(1 + g^2), \quad \varphi_3 = 2e^{i\theta} fg.$$

Zamiast funkcji różniczkowalnej f zmiennej zespolonej z bierzemy wtedy po prostu $e^{i\theta} f$, gdzie $\theta \in [0, 2\pi]$.

Powierzchnie F_θ dla różnych θ są **izometryczne** ($\Rightarrow$ można wykonywać ciągłe, izometryczne deformacje powierzchni minimalnych).

Rodzina powierzchni Schwarza



Fragment powierzchni D: błona mydlana na 4 krawędziach czworościanu.

- Wzory E–W dla $g(z) = z$,

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}.$$

- $\theta = \frac{\pi}{2} \to$ powierzchnia P.
- $\theta = 0 \to$ powierzchnia D:
  - też trójokresowa;
  - zbudowana z wielu części, rozpiętych na 6 krawędziach sześcianu.

Przykłady

- Izometryczna podróż od katenoidy do helikoidy
- Deformacje drugiej powierzchni Scherka
- Powierzchnie typu D : różne proporcje “kostki”
- Powierzchnie typu P : różne proporcje wyjściowego 8-ścianu

Plateau: dawca nazwy

J.A.F. Plateau, 1801–1883
(dagerotyp z 1843 r., Wikipedia)

- 1873: *Statique expérimentale et théorétique des liquides soumis aux seules forces moleculaires*;
- Przypuszczenie: $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ krzywa zamknięta o skończonej długości $\overset{?}{\Longrightarrow}$ wśrod powierzchni rozpiętych na γ istnieje taka, która ma najmniejsze pole.
- Stąd nazwa:

zagadnienie Plateau

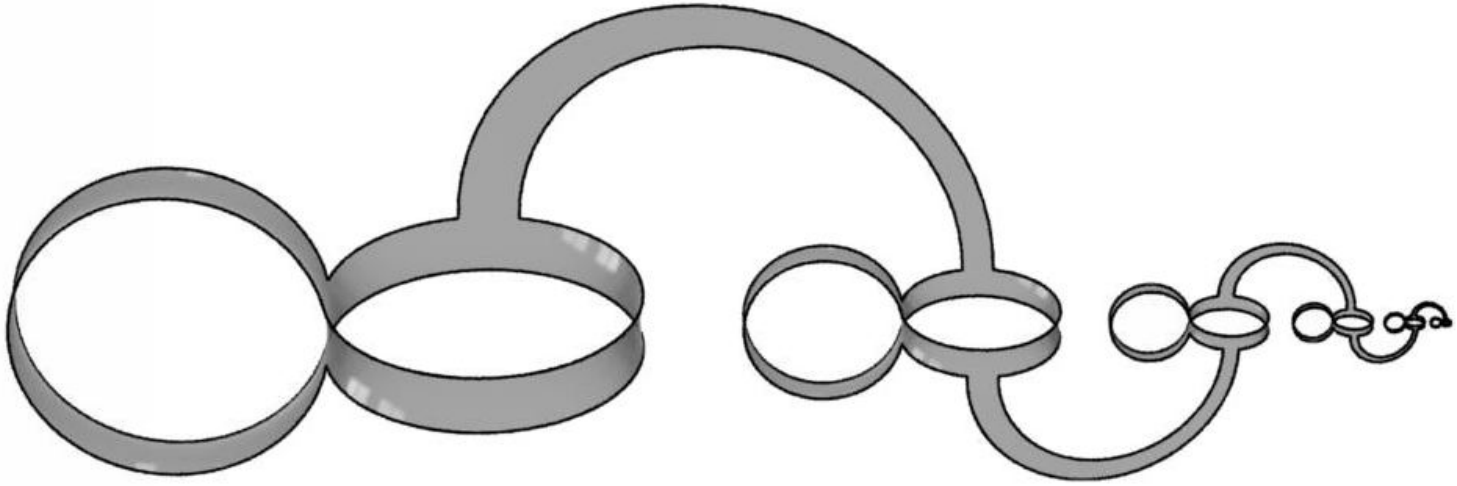
Stan rzeczy na przełomie XIX i XX w.

- Mnóstwo przykładów konkretnych powierzchni minimalnych;
- Rozwiązanie zagadnienia Plateau dla wielu γ (głównie łamanych w $\mathbb{R}^3$);
- Problemy:
  - Wzory E–W nie pozwalają łatwo "trafić w konkretny brzeg" i nie ma gwarancji, że dają minimum pola;
  - Pole nie zmienia się przy reparametryzacji;
  - Pole zmienia się mało przy dodawaniu włosów.

Nowoczesne doprecyzowanie problemu

- **Wątpliwości:**
  - Co to znaczy "powierzchnia rozpięta na krzywej γ"?
  - Czy dopuszczamy samoprzecięcia? i co z jednoznacznością?
- **Definicja.** *Rozwiązanie zagadnienia Plateau* to ciągły obraz dysku, taki, że
  - brzeg dysku $\xrightarrow{1\text{–}1,\ \text{na}}$ dana krzywa γ;
  - każdy inny ciągły obraz dysku o brzegu przechodzącym na γ ma nie mniejsze pole.

Krzywa monstrum i brak jednoznaczności powierzchni minimalnych

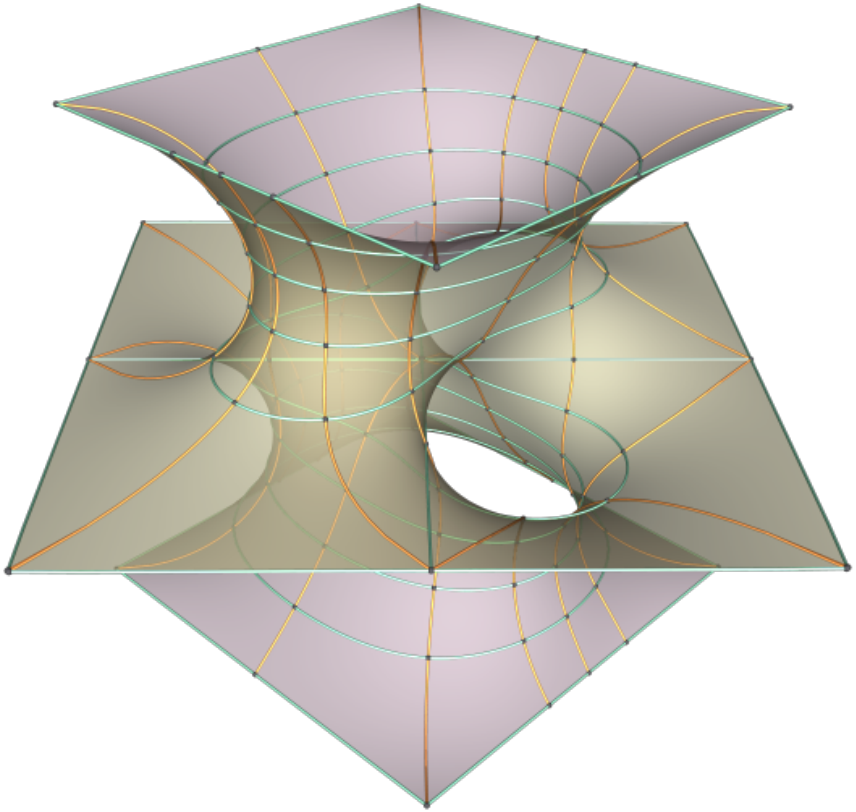


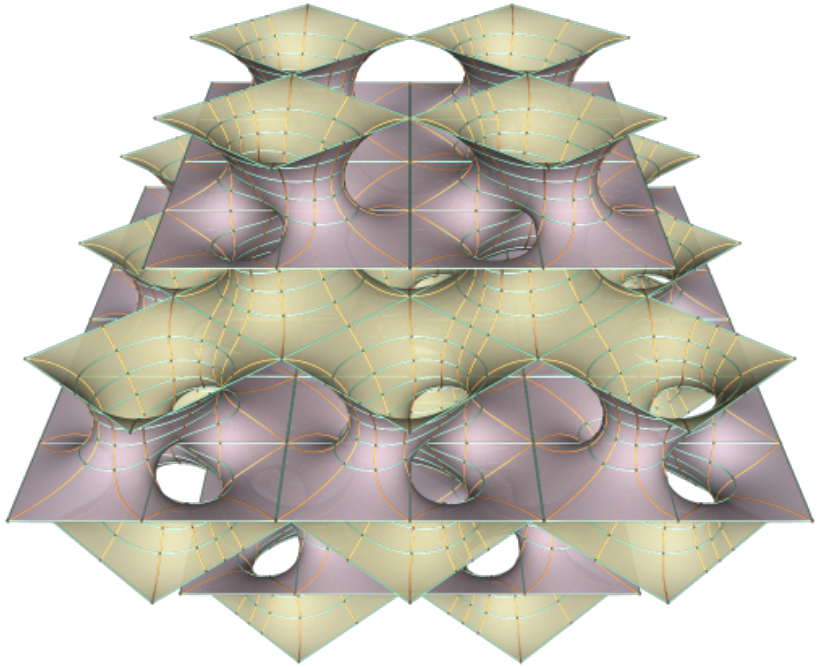
Na tej γ można 'rozpiąć' ∞ wiele powierzchni minimalnych.

Garnier, Rado i Douglas

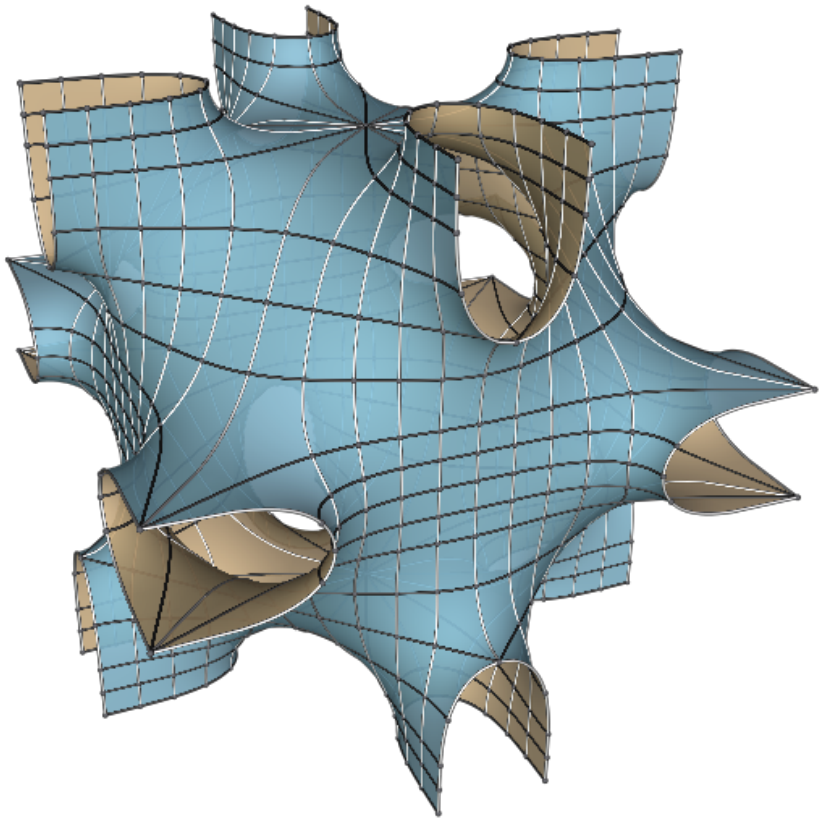
- 1928: René Garnier rozwiązuje zagadnienie Plateau dla dowolnej łamanej $\gamma \subset \mathbb{R}^3$;
- 1930–1931: Jesse Douglas i Tibor Radó niezależnie rozwiązują zagadnienie Plateau;
  - Radó: aproksymacja wielokątami i powierzchniami wielościanów;
  - Douglas: szukać minimów innego funkcjonału! Tylko tak sprytnie zdefniować ów pomocniczy funkcjonał, żeby jego minima były osiągane dla tych samych powierzchni, co minima pola.
- 1936: Douglas dostaje medal Fieldsa (Radó ma 41 lat, drugi medal dostaje Lars Ahlfors).

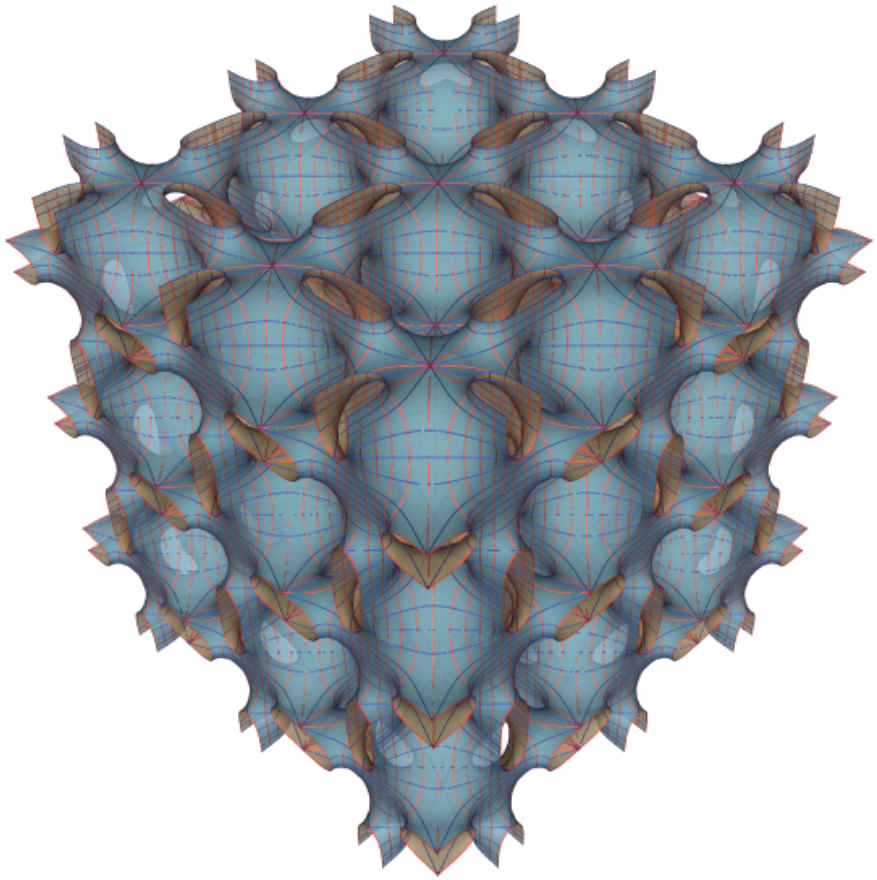
Przykłady cd.: powierzchnia Fischera-Kocha



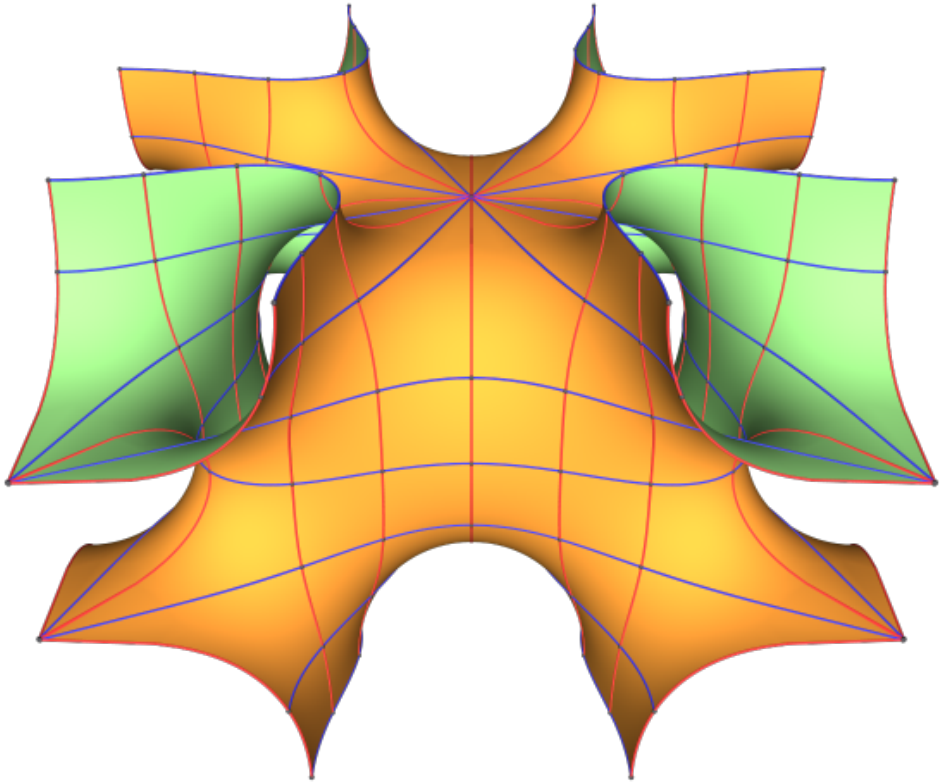


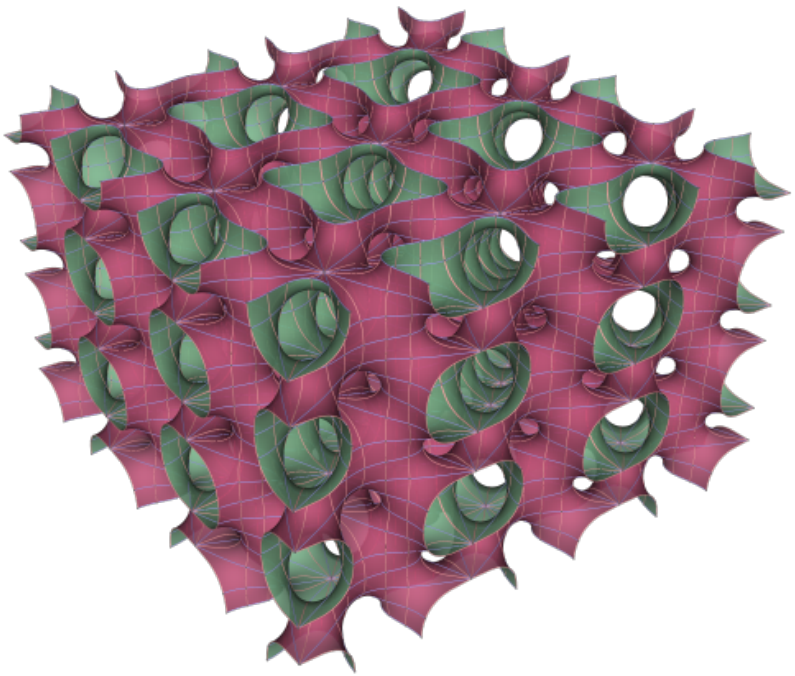
Powierzchnia Neoviusa



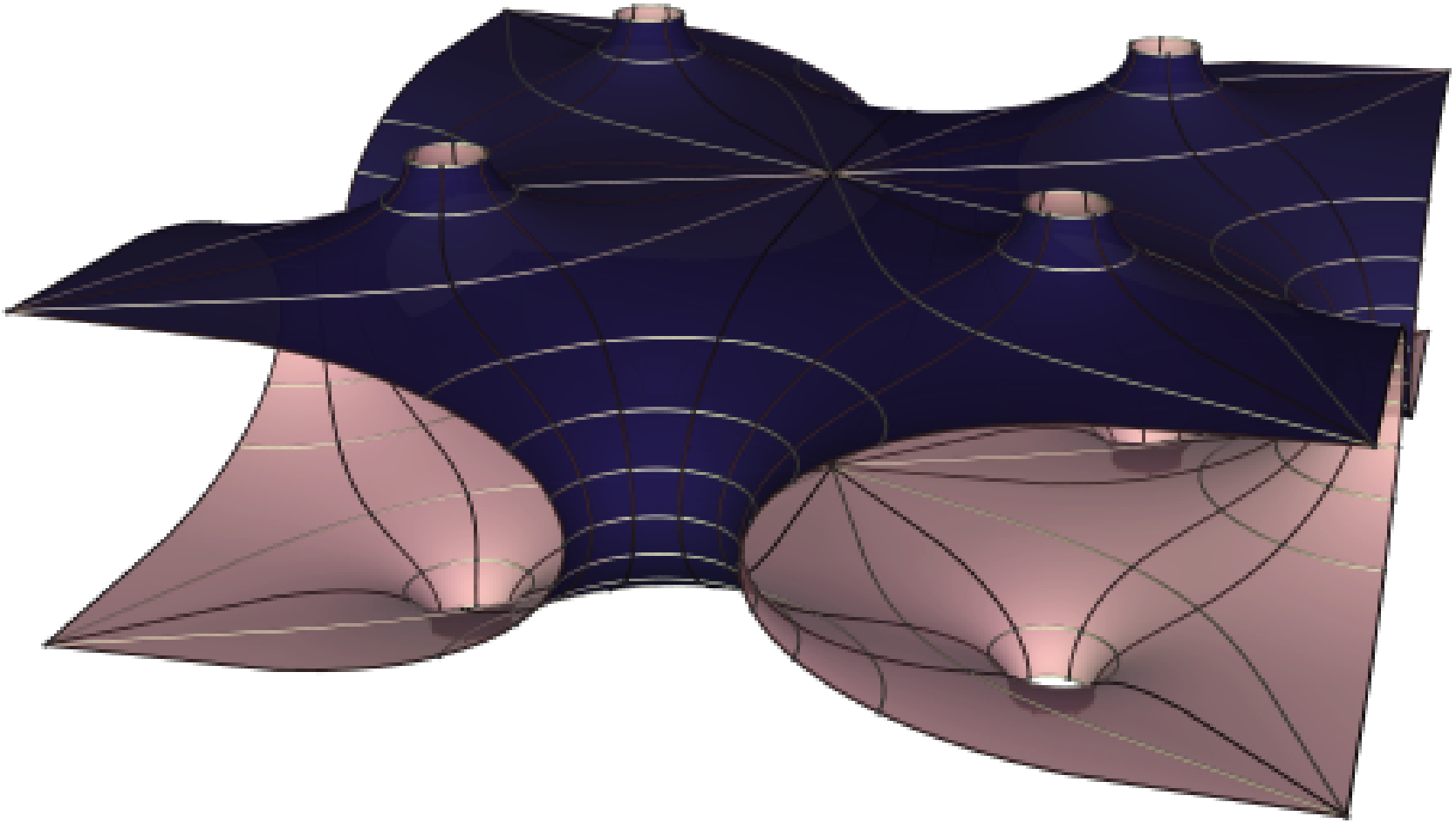


Powierzchnia I–WP (Alan Schoen, 1970)

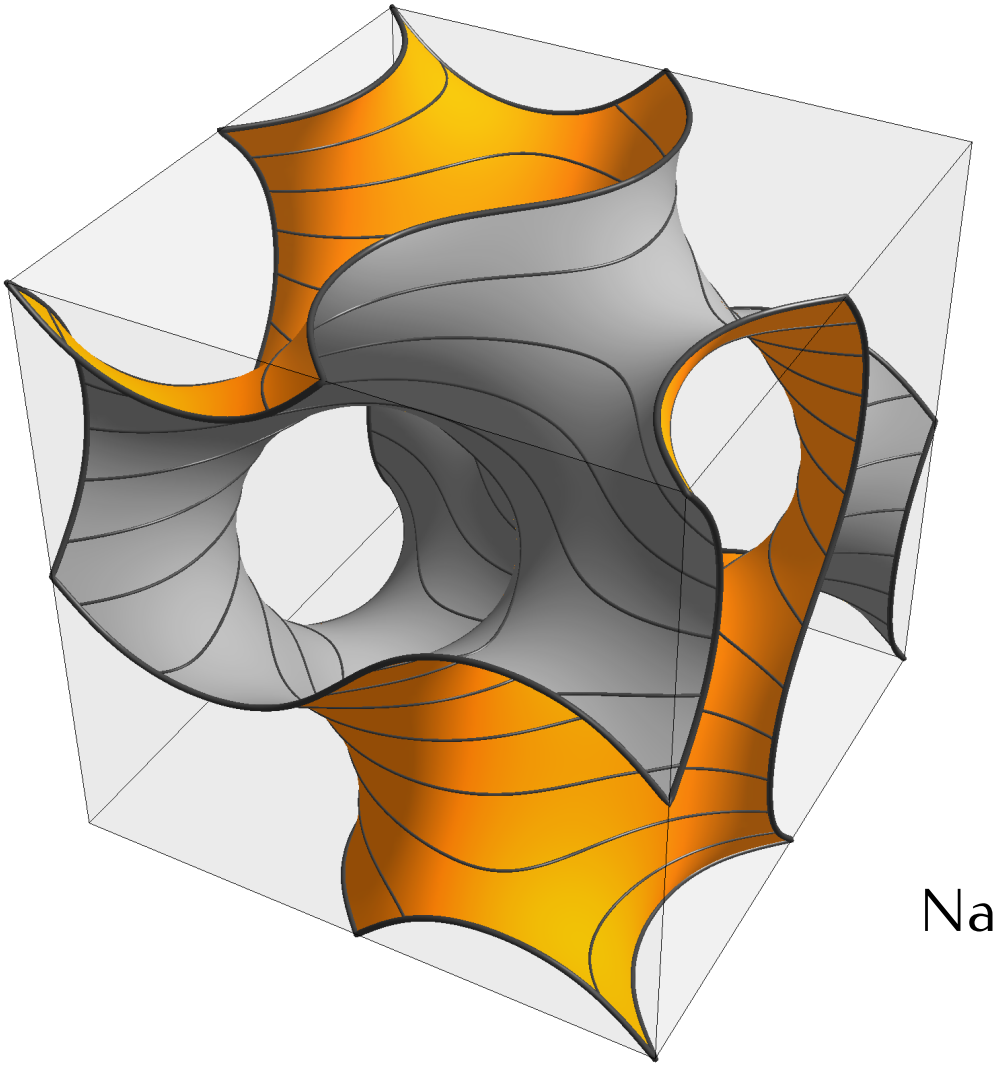




Powierzchnia S'–S" (Alan Schoen, 1970)



Żyroida (Alan Schoen, 1970)



Równanie:

$$\sum_{i=1}^{3} \cos(x_i)\sin(x_{i+1}) = 0$$

(z umową $x_4 = x_1$, gdzie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$).

Nie zawiera prostych, nie ma płaszczyzn symetrii.

Nazwa – od poskręcanych kanałów.

Jeszcze jeden przykład: powierzchnia Costy

Czy istnieją powierzchnie miminalne, które spełniają 3 warunki:

1. są zanurzone w przestrzeni trójwymiarowej bez żadnych samoprzecięć,
2. nie mają brzegu, tylko ciągną się gładkimi płatami gdzieś w nieskończoność,
3. są skończonego typu, tzn. nie mają nieskończenie wielu dziur na wylot (takich, jak różne okresowe powierzchnie minimalne)?

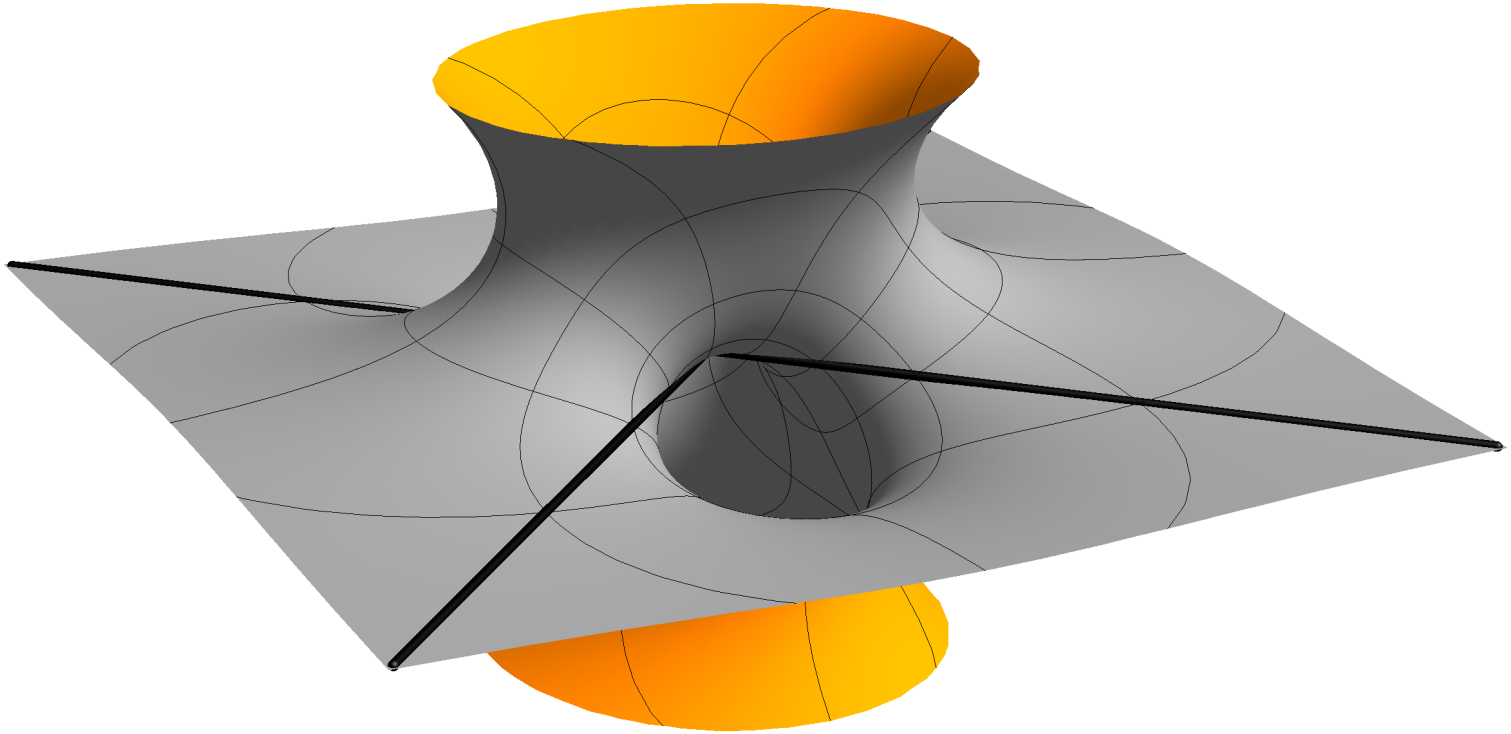
Jeszcze jeden przykład: powierzchnia Costy

Czy istnieją powierzchnie miminalne, które spełniają 3 warunki:

1. są zanurzone w przestrzeni trójwymiarowej bez żadnych samoprzecięć,
2. nie mają brzegu, tylko ciągną się gładkimi płatami gdzieś w nieskończoność,
3. są skończonego typu, tzn. nie mają nieskończenie wielu dziur na wylot (takich, jak różne okresowe powierzchnie minimalne)?

Do lat 1980-tych znane były **tylko trzy** takie powierzchnie: katenoida, helikoida i płaszczyzna.

Przykład Costy: 1982



Z dokładnością do homeomorfizmu, powierzchnia Costy jest torusem z trzema punktowymi dziurkami.

Co dalej? Przykłady współczesnych wyników

- Alt, Gulliver, Lesley, Osserman, Royden (1970–73): Nie ma ani prawdziwych, ani fałszywych punktów rozgałęzienia.
- Hardt, Simon (1979): Każda krzywa gładka jest brzegiem pewnej powierzchni minimalnej (nieznanego genusu) pozbawionej samoprzecięć.
- Ekholm, White, Wienholtz (2002): Całkowita krzywizna $\gamma \leqslant 4\pi \Rightarrow$ żadna powierzchnia minimalna rozpięta na γ nie ma samoprzecięć.
- Przykład ważnego problemu otwartego: klasyfikacja okresowych powierzchni minimalnych.

John Horgan i "śmierć dowodu"

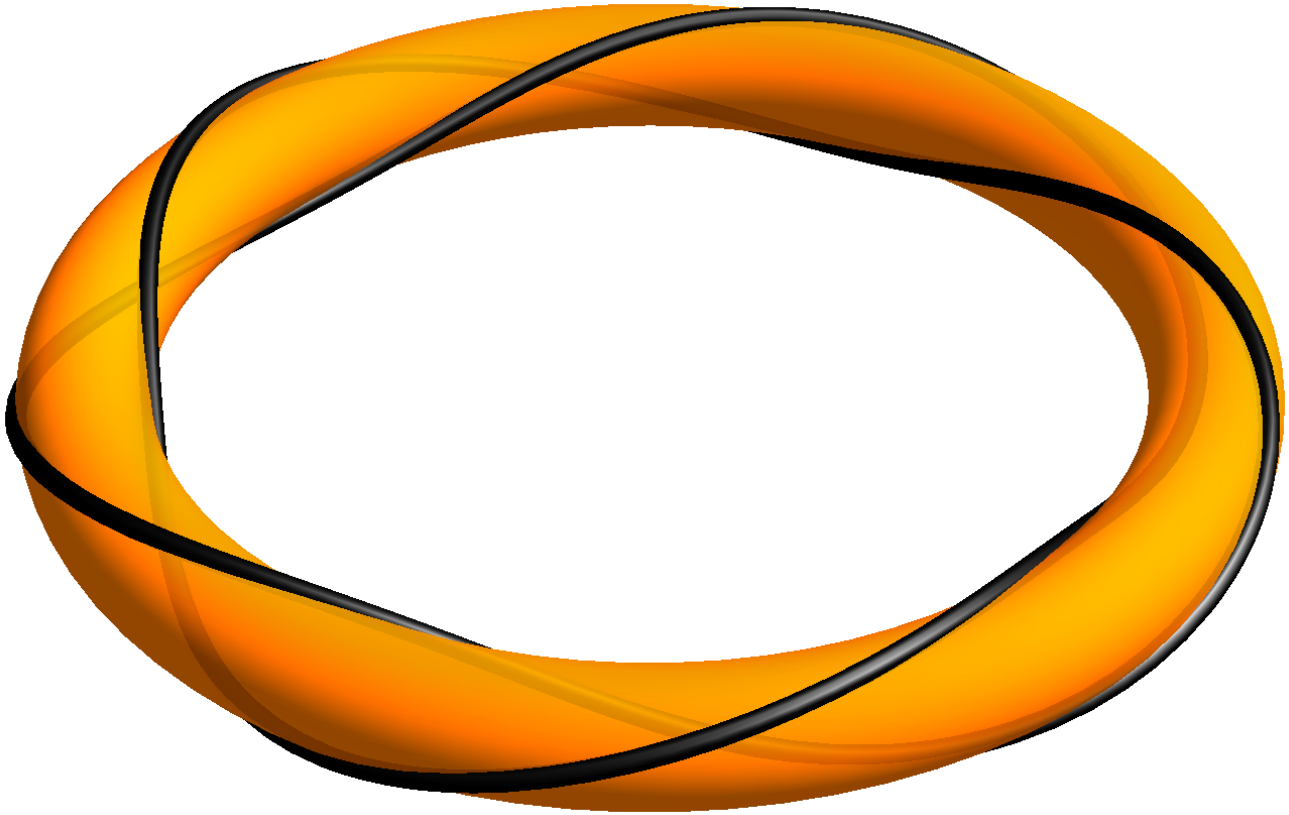
1. 1993: John Horgan, *Scientific American*, artykuł **"Śmierć dowodu"**.
2. Przykład polemiki – David Hoffman (MSRI w Berkeley):

   "Śmierć dowodu" Johna Horgana logice i ścisłości przeciwstawia sensację i kontrowersję. (...)

   Jestem gorącym zwolennikiem wykorzystywania grafiki komputerowej zarówno w badaniach matematycznych, jak i dla ułatwienia komunikacji. Czy jednak istnieje choć jeden matematyk, który broniłby Horgana "dowodów wideo" jako czegoś, co ma zastąpić tradycyjne rozumowania?

3. Matthias Weber (1998): żart, poważny artykuł naukowy o **nie-powierzchni minimalnej Horgana** (hipotetycznej powierzchni minimalnej, która jednak nie istnieje).

Twierdzenie Farý'ego–Milnora (1951)



Jeśli

$$\mathcal{C}[\gamma] = \int_\gamma |\kappa| \leqslant 4\pi,$$

to γ nie jest zawęźlona.

4π jest optymalne: dla każdego $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieje $\gamma = \gamma_{\varepsilon,n}$ taka, że $\mathcal{C}[\gamma] < 4\pi + \varepsilon$, która jest węzłem (torusowym) o n skrzyżowaniach.
To twierdzenie jest wnioskiem z twierdzenia Eckholma–White'a–Wienholtza.

Dlaczego mówiłem o powierzchniach minimalnych?

1. Bo to piękny fragment matematyki:
   - wiąże się i z fizyką, i z geometrią, ale także z równaniami różniczkowymi i analizą matematyczną;
   - wyrasta z prostych pytań, ale jest niebanalny i wciąż żywy;
   - ilustruje, że w matematyce chodzi o **rozwiązywanie problemów**, a nie o teorie, budowane same dla siebie;
   - jego ślady można zauważyć i w sztuce, i w przyrodzie.
2. Bo doszliśmy dzięki temu do **rachunku wariacyjnego:** działu matematyki, w którym chodzi o poszukiwanie obiektów optymalnych, w sytuacji, gdy liczba stopni swobody jest nieskończona.

Dlaczego mówiłem o powierzchniach minimalnych?

1. Bo to piękny fragment matematyki:
   - wiąże się i z fizyką, i z geometrią, ale także z równaniami różniczkowymi i analizą matematyczną;
   - wyrasta z prostych pytań, ale jest niebanalny i wciąż żywy;
   - ilustruje, że w matematyce chodzi o **rozwiązywanie problemów**, a nie o teorie, budowane same dla siebie;
   - jego ślady można zauważyć i w sztuce, i w przyrodzie.
2. Bo doszliśmy dzięki temu do **rachunku wariacyjnego:** działu matematyki, w którym chodzi o poszukiwanie obiektów optymalnych, w sytuacji, gdy liczba stopni swobody jest nieskończona.

A dlaczego nie było tylko o bańkach mydlanych? Bo, jak mówi Goethe, *matematycy zaraz wszystko przekładają na swój własny język i od tej pory znaczy to zupełnie co innego.*

Ilustracje:

1. Krzywa monstrum: © John M. Sullivan, Technische Universität Berlin
2. Powierzchnie D Schwarza, Neoviusa, Fischera-Kocha, Schoena: © Matthias Weber, Indiana University

Polecane lektury popularne

- Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba. *The parsimonious universe. Shape and form in the natural world*. Springer, 1996.
- Charles V. Boys. *Soap bubbles and the forces which mould them.* London, 1896.

  Dedykacja: *"to G. F. Rodwell, the first science-master appointed at Marlborough College, this book is dedicated by the author as a token of esteem and gratitude, and in the hope that it may excite in a few young people some small fraction of the interest and enthusiasm which his advent and his lectures awakened in the author, upon whom the light of science then shone for the first time."*