$q>1,\ k\in\mathbb{N}$? $\exists c\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$q^n > c\,n^k$$

$\boxed{q=1+a,\ a>0}$

$$q^n=(1+a)^n=\left(1+na+\binom{n}{2}a^2+\ldots+\underbrace{\binom{n}{k}a^k}+\ldots+a^n\right)$$

DWUMIAN NEWTONA

$$q^n>\underbrace{\binom{n}{k}a^k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot a^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^k$$

$\boxed{n>2k}\to\ >\left(\frac{n}{2}\right)^k\frac{a^k}{k!}=n^k\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^k\cdot 1/k!$

$\to\ k<\frac{n}{2}\Rightarrow n,n-1,\ldots,n-k+1>\frac{n}{2}$

WIADOMO TERAZ:

$$\begin{cases} q^n>c_1\cdot n^k, & c_1=\left(\frac{a}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{k!},\quad n>2k\\ q^n>c_2\,n^k, & n=1,2,\ldots,2k\end{cases}$$

o ile weźmiemy $c_2=\frac{1}{2}\inf\left\{\frac{q^n}{n^k}:n=1,2,\ldots,2k\right\}$

Ostatecznie bierzemy $c=\min(c_1,c_2)>0$

$$a_n=\frac{2^n\,n!}{n^n}$$

n parzyste

WZÓR STIRLINGA

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n\approx\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}\longrightarrow 0$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot n=n!$$

$$n!\leq(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}\leq\ldots$$

spośród $\frac{n}{2}$ iloczynów par liczb ten jest największy.

$$\left[\frac{n(n+2)}{2^2}\right]^{\frac{n}{2}}\qquad\qquad\frac{n^n}{2^n}$$

$$A=\left\{\frac{n^n}{(n!)^2}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$(n!)^2=(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)\cdot(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1)$$
$$=\underbrace{(1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\ldots\cdot(n\cdot 1)}_{n\text{ nawiasów}}\qquad (*)$$

$(1\cdot n)\leq 2(n-1)\leq 3(n-2)\leq\ldots\sim\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\quad(\ldots)$

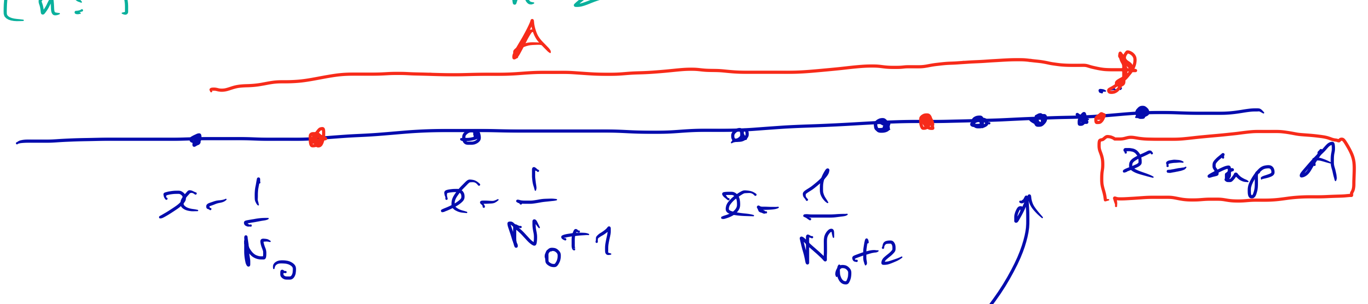
$(n!)^2\geq n^n\qquad\frac{n^n}{(n!)^2}\leq 1\quad(=1$ dla $n=1)$

$\rightsquigarrow\ \sup A=1$

Dla parzystych n: $(n!)^2\geq$ {$n-1$ nawiasów w $(*)$ szacujemy z dołu przez n}

$$\geq n^{n-1}\,\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)=n^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{n^n}{(n!)^2}\leq\frac{1}{n}\cdot\frac{4n}{n+2}\leq\frac{4}{n}\longrightarrow 0$$



$x-\frac{1}{m},\ m\geq N_0$

elementy A

„mogą być tylko w co trzeciej dziurze"

np. $A=\left\{x-\frac{\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}}{2},\ k=1,2,\ldots\right\}$

? $\ 1>\frac{c\,n^k}{q^n}$

$$q^n=\Big(\underbrace{\sqrt[k]{q}\cdot\ldots\cdot\sqrt[k]{q}}_{k\text{ sztuk}}\Big)^n$$

$\Rightarrow q^{\frac{1}{k}}=1+x,\quad x>0$

$$\left(q^{1/k}\right)^n=(1+x)^n\geq 1+nx\qquad\boxed{\text{Bernoulli}}$$
$$>nx\qquad\Big|\uparrow k$$

$$\boxed{q^n>n^k x^k}\qquad x^k=\left(\sqrt[k]{q}-1\right)^k$$