**Zadania domowe z GAL II — seria A**
**(termin: 20 VI — przed egzaminem)**
*(Autorem części zadań jest dr A. Bojanowska)*

**1.** Niech
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
**a)** Czy macierz $A^{100}$ jest diagonalizowalna?
**b)** Znajdź przykład macierzy $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ takiej, że $B^5 = A$.

**2.** Znajdź ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego) bazę wektorów własnych dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanego wzorem
$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (2x_2 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2).$$

**3.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź układ równań opisujący płaszczyznę prostopadłą do $[0,1,0,1] + \operatorname{lin}\big((1,1,0,3),\ (0,2,1,1)\big)$ i przechodzącą przez punkt $[1,1,0,0]$.

**4.** Niech
$$\mathcal{A}: \quad (1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,1,1)$$
oraz
$$M(\xi_a)_{\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
**a)** Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $\xi_a$ jest iloczynem skalarnym?
**b)** Podaj wzór analityczny na $\xi_1$.

**5.** Udowodnij, że diagonalizowalne przekształcenie ortogonalne jest symetrią prostopadłą.

**6.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź równanie opisujące obraz płaszczyzny $M : \{x_1 + x_3 = 2$ przy symetrii prostopadłej względej prostej $l = [1,0,1] + \operatorname{lin}\big((1,1,1)\big)$.
*Wskazówka: Wystarczą dwie linijki rachunków.*

**7.** **a)** Podaj przykład iloczynu skalarnego w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, dla którego trójkąt o wierzchołkach

$$[1,0], \quad [2,0], \quad [4,5]$$

jest równoboczny.
**b)** Czy istnieje iloczyn skalarny spełniający warunek z punktu **a)**, dla którego

$$\angle\big((1,0),(0,1)\big) \leq 90^\circ \text{ ?}$$

*Wskazówka: Rozważ iloczyny skalarne w trójkącie z punktu **a)**.*

**8.** Sklasyfikuj następującą izometrię przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (ze standardowym iloczynem skalarnym):

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (-x_3, x_1, x_2).$$

Określ, czy jest to symetria, obrót, czy też ich złożenie. Znajdź bazę ortonormalną, w której macierz $\varphi$ ma postać

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array}\right]$$

**9.** W zależności od wartości $t \in \mathbb{R}$ określ typ afiniczny hiperpowierzchni $X_t \subseteq \mathbb{R}^3$ zadanej równaniem

$$x_2^2 + 2x_2x_3 + 2tx_2 + 2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1 - 1 = 0$$

oraz wyznacz jej środki symetrii.
*Wskazówka: Rachunki mogą się uprościć, jeśli najpierw rozważysz $t = 0$.*

**10.** Niech hiperpowierzchnia $X_t \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ będzie opisana równaniem postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0,$$

gdzie dokładnie jeden ze współczynników $c_i$ jest równy parametrowi $t$, zaś wszystkie pozostałe współczynniki $a_i$, $b_{ij}$, $c_i$, $d$ są stałymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że poprzez zmienianie wartości $t$ można uzyskać co najwyżej trzy różne typy afiniczne powierzchni $X_t$.