

Zadania domowe z GAL II — seria 10 (termin: 15 VI)

Wskazówka ogólna. Te zadania nie są rachunkowe (gdziekolwiek wystarczą wręcz *śladowe* rachunki). Najlepiej spróbuj rozwiązać każde w pięciu liniach tekstu.

1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Czy macierze $A + A^T$ i $A + A$ są podobne?

2. W trójkącie ABC wybrano wierzchołki D, E, F odpowiednio na bokach BC, CA, AD w taki sposób, że

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AF}{AB} = \frac{\pi^2}{129}.$$

Udowodnij, że wszystkie środkowe trójkątów ABC oraz DEF przecinają się w jednym punkcie.

Możesz korzystać ze szkolnej wiedzy na temat geometrii trójkąta.

(Wskazówka: skorzystaj z przekształceń afinicznych. Być może pomoże Ci rozważenie najpierw przypadku, gdy ABC jest równoboczny.)

3. W \mathbb{R}^3 dane są liniowo zależne wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ o długości 1 i takie, że kąt między każdymi dwoma różnymi z nich wynosi $\frac{2\pi}{3}$. Niech π_α oznacza rzut prostopadły na $\text{lin}(\alpha)$, zaś π_M — rzut prostopadły na $M = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Wiedząc, że w takiej sytuacji przekształcenie liniowe $\pi_{\alpha_1} + \pi_{\alpha_2} + \pi_{\alpha_3}$ musi być równe $a \cdot \pi_M$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, znajdź a .

Bonus dla ambitnych: Udowodnij, że liniowa zależność $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wynika z pozostałych założeń.

4. Niech

$$\alpha = (1, 1), \quad \beta = (1, 0), \quad \gamma = (1, -10).$$

Czy istnieje iloczyn skalarny w \mathbb{R}^2 , względem którego kąt $\angle(\alpha, \beta)$ jest większy niż kąt $\angle(\beta, \gamma)$?

5. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz

$$X_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + 3x_2^2 = 5, \}$$
$$X_2 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^n \mid ax_1^2 + bx_2^2 = -5\}.$$

Dla jakich wartości a, b istnieje afiniczna izometria przeprowadzająca X_1 na X_2 ?