1. Nasza podprzestzeń to

$$(1,1,0,1) + \operatorname{lin}\{(1,-1,2,-1),(-2,-2,5,3),(3,1,-3,-4)\}.$$

Pierwszy z generatorow podprzestrzeni TH jest sumą 2 pozostałych, które nie są równoległe, więc $TH = \operatorname{lin}\{(1,-1,2,-1),(-2,-2,5,3),(3,1,-3,-4)\} = \operatorname{lin}\{(1,-1,2,-1),(-2,-2,5,3)\}$ jest wymiaru 2. Wystarczy nam podać dwa niezależne równania postaci

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

spełniane przez każdy element TH, bo opiszą większą od niej podprzestrzeń, ale z twierdzenia Kroneckera-Capelliego będzie ona również wymiaru 2, więc będzie równa TH. Na to, by równanie $(*)$ było spełnione dla każdego $x \in TH$ potrzeba i wystacza, by $a_1 - a_2 + 2a_3 - a_4 = 0$ oraz $-2a_1 - 2a_2 + 5a_3 + 3a_4 = 0$. Rozwiąując ten układ równań, dostajemy dwa niezależne rozwiązania, np. $(5,1,0,4)$, $(-11,0,1,-9)$. Zatem TH jest opisane przez

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ -11x_1 + x_3 - 9x_4 = 0, \end{cases}$$

a H przez $x - (1,1,0,1) \in TH$, czyli

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 10 \\ -11x_1 + x_3 - 9x_4 = -20. \end{cases}$$

2. Z układu opisującego l_2 wynika, że $x_2 = 1$ oraz $x_1 = 3x_3$, zatem $l_2 = (0,1,0) + \operatorname{lin}\{(3,0,1)\}$. Niech punktami przecięcia l z prostymi l_1, l_2 będą odpowiednio $(0,5,1) + a(1,2,0)$ oraz $(0,1,0) + b(3,0,1)$. Przechodznie wyznaczonej (wyznaczonej, bo łatwo sprawdzić, że proste l_1 i l_2 nie mają punktów wspólnych) przez nie prostej przez $(4,4,1)$ jest równoważne z afiniczną zależnością punktów $(4,4,1),(a,2a+5,1),(3b,1,b)$, czyli równoległością wektorów $(a-4,2a+1,0),(3b-4,-3,b-1)$. Żaden z nich nie może być zerowy, więc $b-1=0$, a stąd $2a+1 = 3(a-4)$, czyli $a = 13$ (i odwrotnie, dla tych wartości mamy równoległość). Punktami przecięcia są więc $(13,31,1)$ oraz $(3,1,1)$. Pozostało znaleźć układ rónań opisujący prostą $l = (4,4,1) + \operatorname{lin}\{(1,3,0)\} = (0,-8,1) + \operatorname{lin}\{(1,3,0)\}$. Widać stąd natychmiast, że $x_3 = 1$ oraz $x_2 = -8 + 3x_1$, a z powodów wymiarowych 2 rónania wystarczą.

3. Niech $H_1 = p_1 + \mathrm{lin}\,\{u_1, \ldots, u_k\}$ oraz $H_2 = p_2 + \mathrm{lin}\,\{v_1, \ldots, v_l\}$. Wówczas

$$\mathrm{af}\,(H_1 \cup H_2) = \mathrm{af}\,\{p_1, p_1 + u_1, \ldots, p_1 + u_k, p_2, p_2 + v_1, \ldots, p_2 + v_l\} =$$

$$= p_1 + \mathrm{lin}\,\{u_1, \ldots, u_k, \overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_2} + v_1, \ldots, \overrightarrow{p_1p_2} + v_l\} =$$

$$= p_1 + \mathrm{lin}\,\{u_1, \ldots, u_k, \overrightarrow{p_1p_2}, v_1, \ldots, v_l\} = p_1 + TH_1 + \mathrm{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + TH_2,$$

co kończy dowód.

5. Z $H_1 \subset H_2$ wynika, że $TH_1 \subset TH_2$. Ale $\dim TH_1 = \dim H_1 \geqslant \dim H_2 = \dim TH_2$, więc z wiedzy o przestrzeniach liniowych $TH_1 = TH_2$, ale wtedy dla dowolnego $h \in H_1 \cap H_2 = H_1$ mamy $H_1 = h + TH_1 = h + TH_2 = H_2$.