Będziemy używać notacji $A \oplus B \oplus \ldots$ dla macierzy blokowej, której bloki są zerowe oprócz leżących na przekątnej bloków $A, B, \ldots$

1a. Łatwo (na przykład korzystając z tego, że $\det \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} = \det X \det Z$) policzyć, że $w_A(x) = (x-3)^4$. W rozkładzie Jordana macierzy A są więc tylko klatki odpowiadające wartości własnej 3. Eliminacją wierszową dowiadujemy się, że $\mathrm{rk}(A - 3I) = 2$, zatem są $4 - 2 = 2$ klatki. Ale już $(A - 3I)^2 = 0$, więc mogą być rozmiaru co najwyżej 2, czyli dokładnie 2, zatem

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1b. Wielomian minimalny macierzy A to $m_A = (x-3)^2$. Aby macierz B miała $w_A = w_B$ oraz $m_A = m_B$ potrzeba i wystarcza, by miała tylko klatki odpowiadające wartości własnej 3, z których każda jest rozmiaru co najwyżej 2. Łatwo widać, że jedyne takie macierze to

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2a. Mamy $H = (0,0,4) + \mathrm{lin}\left((1,1,-2),(0,1,-1),(1,2,-3)\right) = (0,0,4) + \mathrm{lin}\left((1,1,-2),(0,1,-1)\right)$. W tej postaci generatory TH są liniowo niezależne, więc $\dim H = 2$ i bazą punktową są na przykład $(0,0,4),(1,1,2),(0,1,3)$. Co więcej, $TH \subseteq (1,1,1)^{\perp}$, więc z powdów wymiarowych w miejscu zawiernia mamy równość i $H = (0,0,4) + (1,1,1)^{\perp}$, czyli H jest opisane równaniem $x + y + z = 4$.

2b. Punkt p spełnia równanie opisujące H, więc $p \in H$.

2c. $L \ni (2,0,0) \notin H$, więc $L \not\subseteq H$.

3. Mamy $w_A(x) = x^3(x-1) = w_{B_t}(x)$, zatem w postaci Jordana obu macierzy klatka odpowiadająca wartości własnej 1 jest jedna i rozmiaru 1. Suma rozmiarów klatek odpowiadających wartości 0 jest równa 3, więc z faktu, że $\mathrm{rk} A = 2$ wynika, że wartości 0 odpowiada jedna klatka rozmiaru 3. Rozumując analogicznie dla B_t, $\mathrm{rk} B_t = 2$ jest warunkiem wystarczającym dla $A \sim B_t$, więc wobec oczywistej konieczności jest mu równoważny. Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{rk} B_t = 2$ dla $t \neq -1$ oraz $\mathrm{rk} B_t = 1$ dla $t = -1$, więc ostatecznie $A \sim B_t$ wtw gdy $t \neq -1$.

4. Udowodnimy fakt ogólniejszy: jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $w_A(x) = (1-x)^n$, to $A^k \sim A$ dla każdego $k \in \mathbb{N}^+$. Powinno być wiadomo, że jeśli $A_i \sim B_i$ dla każdego i, to $\oplus A_i \sim \oplus B_i$. Pozwala to bez straty ogólności założyć, że A

jest pojedynczą klatką Jordana odpowiadającą wartości 1, czyli $A = I + J$, gdzie J jest nilpotentną klatką rzędu $n-1$. Chcemy wykazać, że $A^k \sim A$, czyli $A^k - I \sim A - I = J$. Wystarczy pokazać, że $A^k - I$ jest macierzą nilpotentną rzędu $n-1$, bo nilpotentność gwarantuje zera na przekątnej postaci Jordana, a rząd $n-1$ zapewnia, że jest podobna konkretnie do J. Ze wzoru dwumianowego $A^k - I = (I+J)^k - I = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J^k = J \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} J^i$. Niech $B = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} J^i$. Macierze J i B komutują, więc $(A^k - I)^n = J^n B^n = 0$. Ponadto B jest górnotrójkątna (bo każda J^i taka jest) i jej wszystkie wyrazy na przekątnej są niezerowe (konkretnie równe k), więc jest odwracalna i $\mathrm{rk}\left(A^k - I\right) = \mathrm{rk} JB = \mathrm{rk} J = n-1$, co kończy dowód.