Trochę się obawiamy, czy udostępniając ten plik nie wyświadczymy niektórym niedźwiedziej przysługi. Z tego powodu wyraźnie ostrzegamy, że **z tego pliku nie da się nauczyć GAL-u**, ponieważ

- Przedstawione tu metody trudno opanować na pamięć, za to dość łatwo odtworzyć, jeśli się zna stojącą za nimi teorię (której nie przedstawiliśmy — to nie skrypt).
- Cały ten plik dotyczy w większości zadań praktycznych, które w zasadzie nie są GAL-em. (Nawet na kolokwium nie dają 100% punktów, tylko najwyżej 60%. Zresztą patrz niżej.)

Dajemy go Wam po to, żeby sobie coś powtórzyć / utrwalić / zrozumieć jakieś detale niezrozumiane na ćwiczeniach itp.

Aha, **nawet jeśli by się dało** nauczyć stąd GAL-u (na jakąś tróję), **to nie warto**, ponieważ

- Ten przedmiot ma swój urok, który zwykł się ujawniać w zadaniach typu 5 na kolokwium. Za to nie tutaj :)
- Jest to być może jedyny przedmiot na matematyce, dla którego stworzenie takiego spisu metod jest w ogóle możliwe. Lepiej od razu zacząć przestawiać się na inny sposób myślenia.

Miłej lektury! :)

1 Przestrzenie cykliczne i niezmiennicze

Badanie podprzestrzeni cyklicznych i niezmienniczych jest prostsze dla przekształceń jordanizujących się. Z tego powodu w tym rozdziale będziemy na ogół zakładać, że przekształcenie $\varphi : V \to V$ nad ciałem K posiada bazę Jordana $\mathcal{A}$.

Oznaczenie. Niech $\varphi : V \to V$ będzie ustalonym endomorfizmem. Wtedy $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k\text{-krotne złożenie}}$.

Oznaczenie (wewnętrzne). Niech $\tilde{V}_{(\lambda)}$ będzie lin-em *wszystkich* (a nie tylko własnych) wektorów z bazy Jordana związanych z wartością λ.

Z twierdzenia Jordana wynika, że $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tilde{V}_{(\lambda)}$, gdzie Λ jest zbiorem pierwiastków wielomianu charakterystycznego $w_\varphi(\lambda)$.

Falka w oznaczeniu jest dlatego, że niektórzy przez $V_{(\lambda)}$ oznaczają przestrzeń wektorów własnych dla λ, a nam chodzi o całe klatki.

Teoria

Definicja 1.

- *Przestrzenią niezmienniczą* dla φ (albo *φ-niezmienniczą*) nazywamy podprzestrzeń $W \subseteq V$ taką, że $\varphi(W) \subseteq W$.

- *Przestrzenią cykliczną* dla φ oraz wektora α nazywamy podprzestrzeń

$$C_\varphi(\alpha) = \operatorname{lin}\Big(\alpha,\, \varphi(\alpha),\, \varphi^2(\alpha),\, \varphi^3(\alpha),\, \dots\Big),$$

  którą można też opisać jako najmniejszą podprzestrzeń φ-niezmienniczą zawierającą α.

  Jeśli V jest skończenie wymiarowa, to również $C_\varphi(\alpha)$ jest skończenie wymiarowa, a stąd wynika, że powyższy wielokropek można zastąpić ciągiem skończonym, tzn. istnieje k takie, że $C_\varphi(\alpha) = \operatorname{lin}\big(\alpha, \dots, \varphi^k(\alpha)\big)$ i dopisywanie następnych elementów nie powiększy już tego lin-u.

- Podprzestrzeń $W \subseteq V$ nazywamy *cykliczną* dla φ, jeśli $W = C_\varphi(\alpha)$ dla pewnego α.

Fakt 2. Dla dowolnych $W \subseteq V$ oraz $\lambda \in K$, W jest φ-niezmiennicza $\Leftrightarrow$ W jest $\varphi_{(\lambda)}$-niezmiennicza.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\alpha \in W$, wówczas $\varphi_{(\lambda)}(\alpha) = \varphi(\alpha) - \lambda\alpha \in W$, ponieważ W jest φ-niezmiennicza.
($\Leftarrow$) Wystarczy zauważyć, że $\varphi = \big(\varphi_{(\lambda)}\big)_{(-\lambda)}$, i skorzystać z ($\Rightarrow$) :) $\square$

Fakt 3. Dla dowolnych $\alpha \in V$ oraz $\lambda \in K$ mamy $C_\varphi(\alpha) = C_{\varphi_{(\lambda)}}(\alpha)$.

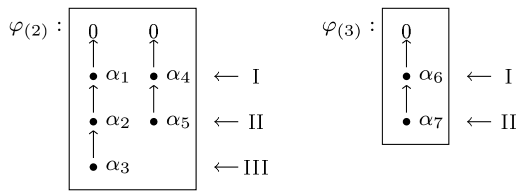
Dowód. Dla dowolnego ψ, $C_\psi(\alpha)$ jest najmniejszą ψ-niezmienniczą podprzestrzenią zawierającą α. Jednak z faktu 2 wynika, że podprzestrzenie φ-niezmiennicze są te same, co $\varphi_{(\lambda)}$-niezmiennicze, zatem jeśli wśród jednych i drugich wybierzemy najmniejszą zawierającą α, otrzymamy tę samą. $\square$

Definicja 4. Wektor $\alpha \in V$ (niekoniecznie bazowy) nazwiemy wektorem *k-tego poziomu*, jeśli wśród wektorów bazy $\mathcal{A}$ potrzebnych do wygenerowania α najgłębszy znajduje się dokładnie na k-tym poziomie.

Przykład. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $\mathbb{R}^6$ i niech

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ \hline & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 3 \end{array}\right],$$

co odpowiada następującym rysunkom (liczbami rzymskimi zaznaczamy poziomy wektorów bazowych):



W takim razie mamy

$$\tilde{V}_{(2)} = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), \qquad \tilde{V}_{(3)} = \operatorname{lin}(\alpha_6, \alpha_7).$$

Wektor $\alpha_1 + \alpha_4$ leży na poziomie I, ponieważ leżą tam α_1 oraz α_4. Wektor $\alpha_1 - 2\alpha_2 + 17\alpha_4 + 2\alpha_5$ leży na poziomie II, ponieważ leżą tam α_2 i α_5, zaś pozostałe wykorzystane wektory bazowe (α_1 i α_4) leżą wyżej. Wektor 0 wymaga jak zwykle szczególnego traktowania; przyjmijmy, że leży na poziomie zerowym.

> Można też myśleć o tym tak:
> $$\{\text{wektory } k\text{-tego poziomu w } \tilde{V}_{(\lambda)}\} = \ker \varphi_{(\lambda)}^k \setminus \ker \varphi_{(\lambda)}^{k-1}.$$

Fakt 5. Jeśli $\alpha \in \tilde{V}_{(\lambda)}$ jest wektorem poziomu $k > 0$, to $\varphi_{(\lambda)}(\alpha)$ jest poziomu $k - 1$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z liniowości $\varphi_{(\lambda)}$ i popatrzeć na obrazek sznurków. $\square$

Fakt 6. Jeśli $\alpha \in \tilde{V}_{(\lambda)}$ jest wektorem k-tego poziomu, to

$$C_\varphi(\alpha) = C_{\varphi_{(\lambda)}}(\alpha) = \operatorname{lin}\left(\alpha,\ \varphi_{(\lambda)}(\alpha),\ \varphi^2_{(\lambda)}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi^{k-1}_{(\lambda)}(\alpha)\right),$$

a ponadto wymienione wektory są niezależne.

Dowód. Z faktu 5 wynika, że $\varphi^k_{(\lambda)}(\alpha) = 0$, więc w tym momencie z pewnością można "zakończyć wielokropek" w definicji $C_\varphi(\alpha)$. Poza tym wynika stamtąd, że wymienione wektory leżą na różnych poziomach, więc są niezależne (np. dlatego, że ich współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ uszeregowane wg poziomów tworzą macierz schodkową). $\square$

Fakt 7. Jeśli dla wartości własnej λ istnieje dokładnie jedna klatka Jordana, to dla dowolnego wektora k-tego poziomu $\alpha \in \tilde{V}_{(\lambda)}$ zachodzi

$$C_\varphi(\alpha) = \ker \varphi^k_{(\lambda)}.$$

Dowód. Jeśli mamy tylko jedną klatkę dla λ, to $\dim\ker\varphi^k_{(\lambda)} = k$. W takim razie z faktu 6 wynika równość wymiarów, a skądinąd również zawieranie $\subseteq$. Zatem mamy równość podprzestrzeni. $\square$

Fakt 8. Dowolna podprzestrzeń φ-niezmiennicza jest sumą (niekoniecznie prostą) skończenie wielu podprzestrzeni cyklicznych.

Dowód. Jeśli W jest taką przestrzenią i $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest jej bazą, to W jest sumą przestrzeni $C_\varphi(\beta_i)$. $\square$

Uwaga. Z twierdzenia z wykładu wynika, że można nawet wymagać, żeby suma była prosta. Dowód jest trudny i go pomijamy, można go znaleźć na stronie prof. Strojnowskiego (kliknij link).

Fakt 9. Jeśli dla wartości własnej λ istnieje dokładnie jedna klatka Jordana, to wszystkie podprzestrzenie φ-niezmiennicze zawarte w $\tilde{V}_{(\lambda)}$ są cykliczne.

Dowód. Z faktu 7 wynika, że wszystkie niezerowe podprzestrzenie φ-cykliczne zawarte w $\tilde{V}_{(\lambda)}$ zawierają wektor bazowy pierwszego poziomu. Wobec tego nie istnieją ich sumy proste, a zatem (korzystając z powyższej uwagi) widzimy, że podprzestrzeń niezmiennicza może być jedynie sumą prostą *jednej* podprzestrzeni cyklicznej, czyli się z nią pokrywać. $\square$

Lemat 10. Niech $\alpha = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_{(\lambda)}$, gdzie $\alpha_{(\lambda)} \in \tilde{V}_{(\lambda)}$. Wówczas

$$C_\varphi(\alpha) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_\varphi(\alpha_{(\lambda)}).$$

Ponieważ zakładamy jordanizowalność φ, mamy $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tilde{V}_{(\lambda)}$, zatem przedstawienie wektora α jako sumy $\sum \alpha_{(\lambda)}$ jest jednoznaczne.

Obrazowo, lemat mówi przede wszystkim tyle, że dowolna podprzestrzeń φ-cykliczna jest sumą podprzestrzeni φ-cyklicznych zawartych w różnych $\tilde{V}_{(\lambda)}$. Podajemy jednak bardziej techniczne i zarazem silniejsze sformułowanie, które pozwala w praktyce usprawnić obliczenie $C_\varphi(\alpha)$ dla skomplikowanych wektorów α.

Przykład. Ponieważ $\alpha_1 + \alpha_4$ oraz α_6 są własne, z definicji mamy $C_\varphi(\alpha_1+\alpha_4) = \operatorname{lin}(\alpha_1+\alpha_4)$ oraz $C_\varphi(\alpha_6) = \operatorname{lin}(\alpha_6)$. Wobec z tego z lematu wynika natychmiast, że

$$C_\varphi(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6) = \operatorname{lin}\left(\alpha_1 + \alpha_4,\ \alpha_6\right).$$

Dowód lematu 10. Zawieranie $\subseteq$ wynika z definicji C_φ oraz z liniowości φ. Suma przestrzeni $C_\varphi(\alpha_{(\lambda)})$ jest prosta, ponieważ każda z nich zawiera się w odpowiedniej $\tilde{V}_{(\lambda)}$, zaś suma tych przestrzeni jest prosta. Pozostaje zatem wykazać zawieranie $\supseteq$. W tym celu wystarczy sprawdzić, że $C_\varphi(\alpha) \supseteq C_\varphi(\alpha_{(\lambda)})$ dla każdego λ, a skoro $C_\varphi(\alpha)$ jest niezmiennicza, wystarczy w tym celu sprawdzić, że $\alpha_{(\lambda)} \in C_\varphi(\alpha)$.

Będziemy teraz rozumować indukcyjnie względem *sumy poziomów* wektorów $\alpha_{(\lambda)}$, którą oznaczymy przez L. Najpierw zauważmy, że jeśli tylko jeden spośród wektorów $\alpha_{(\lambda)}$ jest niezerowy, to jest on równy α, zatem nie ma czego dowodzić. W szczególności mamy zapewnioną bazę indukcji dla $L = 1$; ponadto możemy założyć, że istnieją co najmniej dwie wartości λ obecne w α (nazwijmy λ *obecną* w α, gdy $\alpha_{(\lambda)} \neq 0$). Skoro tak, wybierzmy dowolną z nich i oznaczmy przez λ_0.

Rozpatrzmy wektor $\beta = \varphi_{(\lambda_0)}(\alpha) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \beta_{(\lambda)}$, gdzie $\beta_{(\lambda)} = \varphi_{(\lambda_0)}(\alpha_{(\lambda)})$. Zauważmy, że z faktu 5 wynika, że

$$\beta_{(\lambda_0)} = \varphi_{(\lambda_0)}(\alpha_{(\lambda_0)})$$

leży o jeden poziom wyżej niż $\alpha_{(\lambda_0)}$, zaś dla $\lambda \neq \lambda_0$ wektor

$$\beta_{(\lambda)} = \varphi_{(\lambda_0)}(\alpha_{(\lambda)}) = \varphi_{(\lambda)}(\alpha_{(\lambda)}) + (\lambda_0 - \lambda) \cdot \alpha_{(\lambda)}$$

pozostaje na tym samym poziomie, na którym znajdował się $\alpha_{(\lambda)}$. Wynika stąd, że wektor β ma sumę poziomów $L - 1$, zatem z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $C_\varphi(\beta)$ zawiera wszystkie $\beta_{(\lambda)}$, to jest

$$\varphi_{(\lambda_0)}(\alpha_{(\lambda_0)}) \qquad \text{oraz} \qquad \varphi_{(\lambda)}(\alpha_{(\lambda)}) + (\lambda_0 - \lambda) \cdot \alpha_{(\lambda)} \quad \text{dla } \lambda \neq \lambda_0. \tag{1}$$

Ale, jako że $\beta = \varphi(\alpha) - \lambda_0\alpha \in C_\varphi(\alpha)$, mamy $C_\varphi(\beta) \subseteq C_\varphi(\alpha)$, zatem $C_\varphi(\alpha)$ zawiera wszystkie wektory wymienione w (1). Co więcej, dzieje się tak dla każdej λ_0 obecnej w α. Przechodząc po nich wszystkich (i korzystając z założenia, że są co najmniej dwie :), otrzymujemy, że dla każdych $\lambda' \neq \lambda$ obecnych w α przestrzeń $C_\varphi(\alpha)$ zawiera wektory

$$\varphi_{(\lambda)}(\alpha_{(\lambda)}) \qquad \text{oraz} \qquad \varphi_{(\lambda)}(\alpha_{(\lambda)}) + (\lambda' - \lambda) \cdot \alpha_{(\lambda)},$$

a więc również zawiera $\alpha_{(\lambda)}$. Jeśli zaś λ jest nieobecna w α, to $\alpha_{(\lambda)} = 0 \in C_\varphi(\alpha)$. To kończy krok indukcyjny i zarazem cały dowód. □

Fakt 11. Dowolna podprzestrzeń φ-niezmiennicza jest sumą prostą podprzestrzeni φ-niezmienniczych zawartych w różnych $\tilde{V}_{(\lambda)}$.

Dowód. Skorzystamy z lematu 10, aby wykazać, że jeśli W jest niezmiennicza, to

$$W = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(W \cap \tilde{V}_{(\lambda)}\big).$$

Jest jasne, że suma po prawej zawiera się w W, oraz że jest prosta, ponieważ każdy składnik zawiera się w odpowiednim $\tilde{V}_{(\lambda)}$, a te przestrzenie tworzą sumę prostą. Wystarczy zatem wykazać $\subseteq$. Niech $\alpha \in W$, wówczas $C_{\varphi(\alpha)} \subseteq W$, zaś z lematu 10 mamy

$$\alpha \in C_\varphi(\alpha) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(C_\varphi(\alpha) \cap \tilde{V}_{(\lambda)}\big) \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \big(W \cap \tilde{V}_{(\lambda)}\big).$$ □

Metody

1. Opisz wszystkie wektory k-tego poziomu leżące w $\tilde{V}_{(\lambda)}$.

1. Wypisz ogólną kombinację liniową wektorów bazowych z $\tilde{V}_{(\lambda)}$ leżących na poziomach $\leq k$.
   Gdyby użyć głębszych wektorów, kombinacja liniowa również leżałaby głębiej niż na k-tym poziomie.
2. Dołóż warunek: współrzędne odpowiadające wektorom bazowym k-tego poziomu nie mogą być wszystkie naraz zerowe.
   Bo gdyby wszystkie były zerowe, to kombinacja leżałaby gdzieś płyciej niż na k-tym poziomie.

Przykład. Dla rozważanego wcześniej φ, ogólną postacią wektora II poziomu należącego do $\tilde{V}_{(2)}$ jest

$$a\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_4 + e\alpha_5, \qquad \text{gdzie } a, b, d, e \in \mathbb{R} \text{ oraz } (b, e) \neq (0, 0).$$

2. Opisz (podając bazę) przestrzeń cykliczną $C_\varphi(\alpha)$, gdzie $\alpha \in \tilde{V}_{(\lambda)}$.

1. Wyznacz numer poziomu k, na którym leży α.
2. Bazę $C_{\varphi(\alpha)}$ tworzy (na mocy faktu 6) następujący ciąg k wektorów:

$$\alpha,\ \varphi_{(\lambda)}(\alpha),\ \varphi^2_{(\lambda)}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi^{k-1}_{(\lambda)}(\alpha). \tag{2}$$

- Jeśli α jest wektorem z bazy Jordana, powyższy ciąg składa się po prostu z α oraz wszystkich wektorów znajdujących się wyżej na tym samym sznurku na rysunku dla $\varphi_{(\lambda)}$.
- Jeśli α nie jest bazowy, ale mamy jego rozkład w bazie Jordana, to przykładanie $\varphi_{(\lambda)}$ jest wciąż łatwe: wszystkie współrzędne na rysunku dla $\varphi_{(\lambda)}$ powinny w każdym kroku przenosić się o jeden poziom w górę, i ginąć po osiągnięciu najwyższych zer (patrz przykład).

Przykład. a) Dla podanego wcześniej φ przestrzenie cykliczne dla wektorów bazowych są takie:

$$\begin{aligned} &C_\varphi(\alpha_1) = \operatorname{lin}(\alpha_1), && C_\varphi(\alpha_4) = \operatorname{lin}(\alpha_4), && C_\varphi(\alpha_5) = \operatorname{lin}(\alpha_5),\\ &C_\varphi(\alpha_2) = \operatorname{lin}(\alpha_2, \alpha_1), &&&&\\ &C_\varphi(\alpha_3) = \operatorname{lin}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1). &&&& \end{aligned}$$

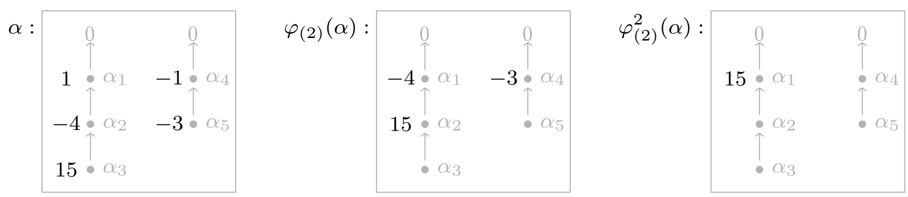
b) Dla przykładowego niebazowego wektora $\alpha = \alpha_1 - 4\alpha_2 + 15\alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_5$ (III-go poziomu) mamy zaś

$$\varphi_{(2)}(\alpha) = -4\alpha_1 + 15\alpha_2 - 3\alpha_4, \qquad \varphi^2_{(2)}(\alpha) = 15\alpha_1$$

i wobec tego

$$C_\varphi(\alpha) = \operatorname{lin}\Big(\alpha_1 - 4\alpha_2 + 15\alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_5, \quad -4\alpha_1 + 15\alpha_2 - 3\alpha_4, \quad 15\alpha_1\Big).$$

Wędrówkę współczynników widać najlepiej na obrazku:



Mając już $C_\varphi(\alpha)$ z powyższej metody, możemy często coś uprościć, albo nawet posklejać, np.

$$\begin{aligned} C_\varphi(\alpha_1-4\alpha_2+15\alpha_3-\alpha_4-3\alpha_5) &= \mathrm{lin}\Big(\alpha_1-4\alpha_2+15\alpha_3-\alpha_4-3\alpha_5, \quad -4\alpha_1+15\alpha_2-3\alpha_4, \quad 15\alpha_1\Big) = \\ &= \mathrm{lin}\Big(-4\alpha_2+15\alpha_3-\alpha_4-3\alpha_5, \quad 15\alpha_2-3\alpha_4, \quad \alpha_1\Big) = \\ &= \mathrm{lin}\Big(-3\alpha_2+5\alpha_3-\alpha_5, \quad 5\alpha_2-\alpha_4, \quad 5\alpha_1\Big) = \\ &= C_\varphi(-3\alpha_2+5\alpha_3-\alpha_5). \end{aligned} \tag{3}$$

Ale nie wydaje się, żeby w ogólności było warto się tym przejmować. No, może z wyjątkiem jednej ogólnej sytuacji, którą opisujemy w punkcie 3d.

3. Zrozum/opisz wszystkie podprzestrzenie φ-cykliczne zawarte w $\tilde{V}_{(\lambda)}$ [podając ich bazy, wymiary, liczbę itp.].

Rozwiązanie zależy od sytuacji oraz od tego, jak bardzo chcemy być dokładni. Niech R oznacza rozmiar największej klatki Jordana w $\tilde{V}_{(\lambda)}$.

(a) Jedyną podprzestrzenią cykliczną 0-wymiarową jest oczywiście $\{0\}$.

(b) W maksymalnej ogólności: aby opisać szukane podprzestrzenie wymiaru $0 < k \le R$, wypisujemy ogólną postać wektora k-tego poziomu z $\tilde{V}_{(\lambda)}$ (patrz 1), a potem dla niej wypisujemy bazę C_φ (patrz 2).

Przykład. Istnieje nieskończenie wiele podprzestrzeni φ-cyklicznych zawartych w $\tilde{V}_{(2)}$. Mają one postać:

$$\begin{array}{llll} \text{wymiaru } 0: & \{0\}, & & \\ \text{wymiaru } 1: & \mathrm{lin}\Big(a\alpha_1+d\alpha_4\Big), & \text{gdzie } a,d\in\mathbb{R} & \text{oraz } (a,d)\neq(0,0), \\ \text{wymiaru } 2: & \mathrm{lin}\Big(a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5, \quad b\alpha_1+e\alpha_4\Big), & \text{gdzie } a,b,d,e\in\mathbb{R} & \text{oraz } (b,e)\neq(0,0), \\ \text{wymiaru } 3: & \mathrm{lin}\Big(a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+d\alpha_4+e\alpha_5, \quad b\alpha_1+c\alpha_2+e\alpha_4, \quad c\alpha_1\Big), & \text{gdzie } a,b,c,d,e\in\mathbb{R} & \text{oraz } c\neq 0. \end{array}$$

(c) Czasami w zadaniu pytają: "Czy istnieje podprzestrzeń cykliczna taka, że... ?" W takim wypadku do znalezienia dobrego przykładu może wystarczyć przejrzenie przestrzeni cyklicznych dla wektorów bazowych (patrz 2).

(d) Może się zdarzyć, że dla różnych wektorów otrzymamy *różne opisy tych samych podprzestrzeni* (np. tak, jak w (3)). W zależności od sytuacji, opisanie każdej podprzestrzeni cyklicznej *dokładnie raz* może być prostsze lub trudniejsze niż w podpunkcie (b). Warto tu wiedzieć, że:

(i) Jeśli $\tilde{V}_{(\lambda)}$ zawiera tylko jedną klatkę Jordana, to (na mocy faktu 7) dla każdego $0 < k \le R$ istnieje tylko jedna szukana podprzestrzeń wymiaru k; jest nią C_φ dla wektora bazowego k-tego poziomu, którą łatwo opisać (patrz 2).

Przykład. Istnieją dokładnie trzy podprzestrzenie φ-cykliczne zawarte w $\tilde{V}_{(3)}$:

$$\begin{array}{ll} \text{wymiaru } 0: & \{0\}, \\ \text{wymiaru } 1: & \mathrm{lin}(\alpha_6), \\ \text{wymiaru } 2: & \mathrm{lin}(\alpha_7,\ \alpha_6). \end{array}$$

(ii) W przeciwnym razie dla każdego $0 < k \le R$ istnieje nieskończenie wiele[1] szukanych podprzestrzeni wymiaru k (to wynika dość prędko z faktów 6 i 5).

[1] O ile pracujemy nad ciałem nieskończonym.

4. Zrozum/opisz wszystkie podprzestrzenie φ-cykliczne [podając ich bazy, wymiary, liczbę itp.].

1. Rozwiąż najpierw analogiczny problem we wnętrzu każdej z przestrzeni $\tilde{V}_{(\lambda)}$ (patrz **3**).
2. Następnie skorzystaj z lematu 10: aby opisać wszystkie podprzestrzenie φ-cykliczne, wybieraj na wszystkie możliwe sposoby po jednej takiej podprzestrzeni wewnątrz każdego $\tilde{V}_{(\lambda)}$ i obliczaj ich sumy proste. W razie potrzeby pamiętaj, że:
   - Wymiar takiej "mieszanej" przestrzeni cyklicznej jest sumą wymiarów jej "składowych";
   - Wektorem opisującym "mieszaną" przestrzeń cykliczną jest suma wektorów opisujących jej "składowe".

Przykład. Opiszemy wszystkie *trójwymiarowe* podprzestrzenie cykliczne dla naszego φ. Ponieważ $\mathbb{R}^7 = V = \tilde{V}_{(2)} \oplus \tilde{V}_{(3)}$, każda taka podprzestrzeń jest sumą pewnej cyklicznej A-wymiarowej zawartej w $\tilde{V}_{(2)}$ oraz cyklicznej B-wymiarowej zawartej w $\tilde{V}_{(3)}$, gdzie $A+B=3$. Listy podprzestrzeni cyklicznych zawartych w $\tilde{V}_{(2)}$ oraz w $\tilde{V}_{(3)}$ (uporządkowane wg wymiaru) podaliśmy już w przykładach do metody **3**. Zatem: trójwymiarowe podprzestrzenie φ-cykliczne w $\mathbb{R}^7$ mają postać

$$\begin{aligned}
C_\varphi\big((a\alpha_1+d\alpha_4)+\alpha_7\big) &= \mathrm{lin}\,\big(a\alpha_1+d\alpha_4\big)\oplus\mathrm{lin}\,\big(\alpha_7,\ \alpha_6\big), && (a,d)\neq(0,0), && /\tfrac{A=1}{B=2}/\\
C_\varphi\big((a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5)+\alpha_6\big) &= \mathrm{lin}\,\big(a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5,\ b\alpha_1+e\alpha_4\big)\oplus\mathrm{lin}\,\big(\alpha_7\big), && (b,e)\neq(0,0), && /\tfrac{A=2}{B=1}/\\
C_\varphi\big(a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+d\alpha_4+e\alpha_5\big) &= \mathrm{lin}\,\big(a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3+d\alpha_4+e\alpha_5,\ b\alpha_1+c\alpha_2+e\alpha_4,\ c\alpha_1\big), && c\neq 0. && /\tfrac{A=3}{B=0}/
\end{aligned}$$

5. Dla danej podprzestrzeni cyklicznej $W \subseteq V$, zrozum/opisz postać/rozkład Jordana obcięcia $\varphi\big|_W : W \to W$.

- Jeśli $W = C_\varphi(\alpha) \subseteq \tilde{V}_{(\lambda)}$, to bazą Jordana jest ciąg (2) opisany w metodzie 2, a macierz Jordana ma jedną klatkę dla wartości λ.
- Jeśli $W = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} W_{(\lambda)}$ jest sumą podprzestrzeni cyklicznych z różnych $\tilde{V}_{(\lambda)}$, wyznacz osobno bazę/rozkład/postać Jordana dla każdego $\varphi\big|_{W_{(\lambda)}}$ i odpowiednio je połącz.

Przykład. Dla następującej podprzestrzeni uzyskanej w przykładzie do metody 4:

$$C_\varphi\big((a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5)+\alpha_6\big) = \mathrm{lin}\,\big(a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5,\ b\alpha_1+e\alpha_4\big)\oplus\mathrm{lin}\,\big(\alpha_7\big),\quad (b,e)\neq(0,0)$$

bazą Jordana jest układ

$$\beta_1 = a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5,\qquad \beta_2 = b\alpha_1+e\alpha_4,\qquad \beta_3=\alpha_7,$$

zaś macierzą obcięcia φ do tej przestrzeni w tej bazie jest

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right].$$

6. Zrozum/opisz podprzestrzenie φ-niezmiennicze [oraz rozkład/postać Jordana obcięć φ do nich].

Właściwie chodzi o skorzystanie z opisu przestrzeni cyklicznych (metody **2**–**5**) oraz ich związków z podprzestrzeniami niezmienniczymi (fakt 8 w mocnej wersji i/lub fakt 11).

- Obowiązują zastrzeżenia z metody **3**, w szczególności: może nie warto opisywać wszystkich podprzestrzeni niezmienniczych, bo wystarczy rozejrzeć się wśród najładniejszych? Ładne podprzestrzenie niezmiennicze to takie, które są rozpinane przez fragmenty bazy $\mathcal{A}$. Taki fragment można (na mocy faktów 6 i 8) wybrać dowolnie, byle by spełniał warunek: wektor znajdujący się na rysunku sznurków bezpośrednio nad wektorem wybranym również musiał zostać wybrany.

Inaczej mówiąc, musimy umieć dojść do wybranych wektorów startując od górnych zer i nie odwiedzając wektorów niewybranych.

Przykład. a) Ładnymi 2-wymiarowymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla naszego φ są

$$(*)\qquad \operatorname{lin}(\alpha_2,\alpha_1),\quad \operatorname{lin}(\alpha_5,\alpha_4),\quad \operatorname{lin}(\alpha_7,\alpha_6),\quad \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4),\quad \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_6),\quad \operatorname{lin}(\alpha_4,\alpha_6),$$

nie są zaś nimi między innymi $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_5)$ (bo brakuje α_4 leżącej bezpośrednio nad α_5) oraz $\operatorname{lin}(\alpha_3,\alpha_1)$ (bo brakuje α_2 leżącej bezpośrednio nad α_3).

b) Dla ładnych podprzestrzeni niezmienniczych oczywiście łatwo znaleźć postać Jordana obcięcia φ: wystarczy zachować odpowiednie wiersze i kolumny w macierzy Jordana dla całego φ. Dla podprzestrzeni wymienionych w (*) otrzymujemy odpowiednio macierze

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix},\quad \left[\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 2 \end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 3 \end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 3 \end{array}\right].$$

- Aby zrozumieć/opisać podprzestrzenie niezmiennicze, zrób to najpierw dla podprzestrzeni cyklicznych (patrz **2**–**5**), a następnie (na mocy wzmocnionego faktu 8) zbuduj wszystkie możliwe sumy proste takich przestrzeni. (Jeśli potrzebujesz postaci/rozkładu Jordana, znajdź je dla poszczególnych składników i odpowiednio połącz).

Przykład. a) Dwuwymiarowa podprzestrzeń φ-niezmiennicza wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ może być albo odpowiednią płaszczyzną cykliczną (opisaliśmy je już w przykładzie do metody **3**), albo sumą prostą dwóch prostych cyklicznych.

Jednak, jako że proste cykliczne zawierają się w płaszczyźnie $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4)=\ker\varphi_{(2)}$, dowolna suma prosta dwóch takich prostych musi być po prostu równa $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4)$, a więc jest to jedyny nowy przykład (tzn. każda płaszczyzna niezmiennicza wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ jest albo tą, albo jedną z cyklicznych).

b) Trójwymiarowa podprzestrzeń φ-niezmiennicza wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ może albo być cykliczna, albo być sumą prostą prostej cyklicznej i płaszczyzny cyklicznej. (Teoretyczna możliwość sumy prostej trzech prostych cyklicznych odpada, jako że wszystkie one zawierają się w przestrzeni dwuwymiarowej $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4)$). Wówczas musi ona mieć postać

$$(*)\qquad C_\varphi(a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5)\oplus C_\varphi(a'\alpha_1+d'\alpha_4)=\operatorname{lin}\left(a\alpha_1+b\alpha_2+d\alpha_4+e\alpha_5,\ b\alpha_1+e\alpha_4,\ a'\alpha_1+d'\alpha_4\right),$$

gdzie wymagamy, aby $(b,e)\neq 0$ oraz $(a',d')\neq 0$, a także by wektory (b,e), (a',d') były niezależne; wszystkie te warunki można zapisać zwarcie w postaci

$$r\left(\begin{bmatrix} b & e \\ a' & d' \end{bmatrix}\right)=2,$$

albo jeszcze krócej przy pomocy wyznacznika: $ba'-ed'\neq 0$.

A kolejna odrobina sprytu podpowiada, że w takim wypadku $\operatorname{lin}(b\alpha_1+e\alpha_4,\ a'\alpha_1+d'\alpha_4)=\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4)$, zatem opis (*) upraszcza się do

$$\operatorname{lin}(b\alpha_2+e\alpha_5,\ \alpha_1,\ \alpha_4),\qquad (b,e)\neq(0,0).$$

I to już wygląda zjadliwie, ale w ogólności nie zawsze da się aż tak dobrze.

c) Dowolna trójwymiarowa podprzestrzeń φ-niezmiennicza W musi być sumą A-wymiarowej niezmienniczej wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ oraz B-wymiarowej niezmienniczej wewnątrz $\tilde{V}_{(3)}$. Ponieważ w $\tilde{V}_{(3)}$ jest tylko jedna klatka Jordana, na mocy faktu 9 wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze wewnątrz $\tilde{V}_{(3)}$ są cykliczne, zatem wypisaliśmy je już w przykładzie do metody **3**. Mamy więc trzy przypadki:

- W jest podprzestrzenią cykliczną (jedną z wypisanych w przykładzie do metody **4**);
- W jest sumą prostą $\operatorname{lin}(\alpha_6)$ oraz pewnej nie-cyklicznej niezmienniczej płaszczyzny wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ (jednej z wypisanych w przykładzie **a)**);
- W jest pewną nie-cykliczną niezmienniczą podprzestrzenią wewnątrz $\tilde{V}_{(2)}$ (jedną z wypisanych w przykładzie **b)**).

d) Na koniec popatrzmy, do których z podprzestrzeni opisanych w **c)** możemy obciąć φ, by uzyskać przekształcenie diagonalizowalne. Z metody **5** wynika, że jest to równoważne temu, by wszystkie składniki cykliczne w W były jednowymiarowe, a więc potrzebujemy ich trzech; przeglądając rodzaje podprzestrzeni niezmienniczych znalezione w **c)** widzimy, że jedyną podprzestrzenią o aż trzech składnikach cyklicznych jest $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6)$.

2 Przestrzenie afiniczne

Na początek wyjaśnienie dwoistości rozwiązań. Niektórzy (w tym my) patrzą na przestrzenie afiniczne jako na przesunięcia liniowych, i najwygodniej im tłumaczyć wszystko jak najszybciej na język przestrzeni liniowych. Inni, zwłaszcza w przypadku prostych zadań, lubią nie marnować czasu na to przejście i używać specjalnych metod macierzowych dla przestrzeni afinicznych. Żeby zadowolić choć trochę jednych i drugich, rozwiązujemy niektóre zadania oboma tymi "sposobami", nazywając je odpowiednio *wektorowym* i *macierzowym*. To nie najlepsze nazwy, bo macierze są w obu wariantach; ponadto same obliczenia są czasami w obu "sposobach" identyczne. Chodzi nam głównie o rozróżnienie dwóch dróg myślenia.

7. Opisz podprzestrzeń liniową $T(H)$ styczną do danej podprzestrzeni afinicznej H.

- Jeśli H jest dana jako $p+V$, gdzie V — podprzestrzeń liniowa, to $T(H)=V$.
- Jeśli H jest dana jako $\mathrm{af}(p_0,\dots,p_n)$, to wybierz wśród $p_0,\dots,p_n$ dowolny punkt zaczepienia i przenumeruj punkty tak, by punktem zaczepienia było p_0; wówczas

$$T(H)=\mathrm{lin}\big(p_1-p_0,\,p_2-p_0,\,\dots,\,p_n-p_0\big).$$

  Pamiętaj, że jeśli wyjściowe punkty nie były w położeniu ogólnym, to otrzymane wektory nie będą bazą $T(H)$.

- Jeśli H jest opisane układem równań o macierzy $\left[\begin{array}{c|c} \quad A \quad & B \end{array}\right]$, to $T(H)$ jest opisane układem o macierzy $\left[\begin{array}{c|c} \quad A \quad & 0 \end{array}\right]$.

8. Czy punkt p należy do $\mathrm{af}(p_0,\dots,p_n)$ / jest kombinacją afiniczną punktów $p_0,\dots,p_n$? [Jeśli tak, znajdź współczynniki tej kombinacji.]

Wektorowo:

1. Wybierz wśród punktów $p_0,\dots,p_n$ punkt zaczepienia p_0.
2. Sprawdź, czy wektor $p-p_0$ należy do $\mathrm{lin}\big(p_1-p_0,\,p_2-p_0,\,\dots,\,p_n-p_0\big)$.
3. Jeśli $p-p_0$ jest kombinacją p_1-p_0, p_2-p_0, …, p_n-p_0 ze współczynnikami $a_1,a_2,\dots,a_n$, to

$$p=(1-a_1-a_2-\dots-a_n)p_0+a_1p_1+a_2p_2+\dots+a_np_n.$$

Macierzowo:

1. Zbuduj układ równań o macierzy

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c||c} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n & p \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. Punkt p należy do $\mathrm{af}(p_0,p_1,\dots,p_n)$ $\Leftrightarrow$ układ ma rozwiązania; przy tym każde rozwiązanie układu nadaje się na szukany ciąg współczynników kombinacji afinicznej.

9. Czy punkty $p_0,\dots,p_n$ znajdują się w położeniu ogólnym (tzn. są "afinicznie niezależne")?

Wektorowo: 1. Wybierz wśród punktów $p_0, \ldots, p_n$ punkt zaczepienia p_0.

2. Sprawdź, czy wektory $p_1 - p_0$, $p_2 - p_0$, $\ldots$, $p_n - p_0$ są niezależne.

Macierzowo: Sprawdź, czy rząd macierzy

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ \hline 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array}\right]$$

jest równy liczbie punktów (czyli $n+1$).

10. Znajdź bazę punktową przestrzeni $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_n)$.

1. Wybierz wśród punktów $p_0, \ldots, p_n$ punkt zaczepienia p_0.
2. Wyznacz bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni liniowej $T(H) = \mathrm{lin}\big(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0\big)$.
3. Bazą punktową przestrzeni H jest układ

$$p_0,\, p_0 + \alpha_1,\, \ldots,\, p_0 + \alpha_k.$$

11. Przejdź pomiędzy opisem H poprzez bazę punktową / układ bazowy / parametryzację.

Reguła jest bardzo prosta:

$$p_0,\, p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n \quad \text{jest bazą punktową } H$$
$$\Updownarrow$$
$$p_0;\, p_1 - p_0,\, p_2 - p_0,\, \ldots,\, p_n - p_0 \quad \text{jest układem bazowym } H$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{odwzorowanie} \quad \mathbb{R}^n \ni (t_1,\ldots,t_n) \mapsto p_0 + t_1(p_1-p_0) + t_2(p_2-p_0) + \ldots + t_n(p_n-p_0) \in H \quad \text{jest parametryzacją } H$$

12. Znajdź (np. jej bazę punktową) podprzestrzeń afiniczną $H \subseteq \mathbb{R}^N$ opisaną układem równań.

Wektorowo: 1. Wyznacz przestrzeń $T(H)$ (patrz 7) i znajdź jej bazę.

2. Zgadnij dowolny punkt $p \in H$; układ bazowy H tworzą p oraz baza $T(H)$. Stąd łatwo uzyskać bazę punktową (patrz 11).

Macierzowo: 1. Wypisz rozwiązanie ogólne układu równań opisującego H (tak, jak na początku października).

Przykład. Dla układu $\{\, x_1 - x_2 + x_3 = 1$ budujemy macierz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$, schodkujemy ją i redukujemy (w naszym przypadku jest to już zrobione). Wyznaczamy zmienne wolne (lub inaczej “parametry” — u nas są to x_2, x_3), wypisujemy wzory na zmienne związane ($x_1 = x_2 - x_3 + 3$) i wreszcie wypisujemy rozwiązanie ogólne

$$H = \big\{[x_2 - x_3 + 3,\, x_2,\, x_3] \;\big|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\big\}. \tag{*}$$

Gdyby zabrać wąsy i dopisać z przodu “$(x_2, x_3) \mapsto$”, otrzymalibyśmy de facto parametryzację H.

2. Teraz metoda do wyboru (oczywiście wszystkie są łatwo równoważne):

– Przedstaw wyrażenie obliczone w (*) jako sumę punktu i kombinacji wektorów — daje to układ bazowy, a potem bazę punktową (patrz **11**).

Przykład. Mamy

$$[x_2 - x_3 + 3,\ x_2,\ x_3] = [3,0,0] + x_2(1,1,0) + x_3(1,0,1),$$

więc układ bazowy to $[3,0,0]$; $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, zaś baza punktowa to $[3,0,0]$, $[4,1,0]$, $[4,0,1]$.

– Aby uzyskać bezpośrednio bazę punktową, możesz podstawić w (*) za kolejne zmienne wolne wartości

$$(0,0,\ldots,0), \quad (1,0,\ldots,0), \quad (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, \quad (0,0,\ldots,1).$$

Przykład. Podstawienie $(x_2,x_3) = (0,0)$ daje $[3,0,0]$; $(x_2,x_3) = (1,0)$ daje $[4,1,0]$; $(x_2,x_3) = (0,1)$ daje $[4,0,1]$. Wychodzi ta sama baza punktowa, co powyżej.

13. Opisz podprzestrzeń afiniczną $H \subseteq \mathbb{R}^N$ układem równań.

Wektorowo:

1. Wyznacz przestrzeń styczną $T(H)$ (patrz **7**) i opisz ją układem; niech $\left[\begin{array}{c|c} \quad A \quad & 0 \end{array}\right]$ będzie macierzą tego układu.
2. Wybierz dowolny punkt $p \in H$ i zastąp w powyższym układzie ostatnią zerową kolumnę przez taką, żeby punkt p spełniał wszystkie równania. Otrzymany układ opisuje H.

Przykład. Niech $H = \mathrm{af}\big([1,0,-3],[2,1,-2]\big) = [1,0,-3] + \mathrm{lin}\big((1,1,1)\big)$. Opisujemy podprzestrzeń $T(H) = \mathrm{lin}\big((1,1,1)\big)$ układem równań: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Następnie podstawiamy punkt p do lewych stron wszystkich równań i odpowiednio zmieniamy prawe, otrzymując $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$. Ten układ opisuje H.

Macierzowo:

1. Jeśli H jest dane jako $\mathrm{af}(p_0, p_1, \ldots, p_n) \subseteq \mathbb{R}^N$, zbuduj macierz

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c||c} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix} \\ \hline 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zauważ, że z metody **8** wynika, że H jest dokładnie zbiorem takich $[x_1, \ldots, x_N]$, dla których układ równań o tej macierzy ma jakieś rozwiązanie.

2. Zeschodkuj; dla każdego otrzymanego wiersza postaci $\left[\begin{array}{cccc||c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \diamond \end{array}\right]$ wypisz równanie $\diamond = 0$.
3. Wszystkie wypisane równania tworzą razem układ opisujący H.

Przykład. Weźmy znów $H = \mathrm{af}\big([1,0,-3],[2,1,-2]\big)$. Budujemy macierz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -3 & -2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

która po zeschodkowaniu daje

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + 1 \end{array}\right],$$

zatem H jest opisane układem równań $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 = 0 \end{cases}$. To inny układ niż otrzymany sposobem wektorowym, ale łatwo sprawdzić, że równoważny.

14. Znajdź przekrój przestrzeni afinicznych H_1, H_2.

- Wszystko, co będzie tu napisane (z wyjątkiem liczenia wymiaru!), jest analogiczne do sytuacji liniowej opisanej w metodniku z poprzedniego semestru (aktualnie pod numerem **17**).

- Są zasadniczo dwa sposoby: pierwszy stosuje się, gdy obie przestrzenie są opisane układem, drugi, gdy znamy np. bazę punktową H_1, a H_2 jest opisane układem. Można zawsze zmienić opis H_1 lub H_2 korzystając z metod **12**, **13**, **10** oraz **11**.

- Sposób pierwszy (zakładamy, że H_1, H_2 są opisane układem):

  1. Połącz układy opisujące H_1, H_2 w jeden wielki układ równań.
  2. Otrzymany układ opisuje $H_1 \cap H_2$; możesz teraz np. znaleźć bazę punktową (patrz **12**).

- Sposób drugi (zakładamy, że $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest *bazą punktową* H_1, zaś H_2 jest opisane układem U; jeśli H_1 jest dane jako "af" pewnych punktów, to należy najpierw znaleźć jego *bazę punktową* (patrz **10**)):

  Przykład. Niech H_1 ma bazę punktową $[1,0,1]$, $[2,2,4]$, $[2,1,2]$, zaś H_2 będzie opisane równaniem $2x_1 - x_3 = 3$.

  1. Jeśli masz ochotę, przenumeruj punkty $p_0, \ldots, p_n$, by mieć ładny punkt zaczepienia p_0.
  2. Przedstaw dowolny element H_2 jako $p_0 + a_1(p_1 - p_0) + \ldots + a_n(p_n - p_0)$; posprzątaj wynik.

     W naszym przykładzie dowolny element H_2 ma postać $[1,0,1] + a_1(1,2,3) + a_2(1,1,1) = [1 + a_1 + a_2,\ 2a_1 + a_2,\ 1 + 3a_1 + a_2]$.
  3. Podstaw uzyskany napis do układu U; posprzątaj, aby dostać warunki na zmienne $a_1, \ldots, a_n$.

     Podstawienie daje $2(1 + a_1 + a_2) - (1 + 3a_1 + a_2) = 3$; po sprzątnięciu mamy $-a_1 + a_2 = 2$.
  4. Znajdź bazę punktową otrzymanego układu na $a_1, \ldots, a_n$ (patrz **12**). Oznacz ją $q_1, \ldots, q_k$.

     U nas wychodzi $q_1 = [-2,0]$, $q_2 = [-1,1]$.
  5. Dla każdego q_i znajdź element H_2 odpowiadający takim współczynnikom $a_1, \ldots, a_n$, jak nakazują współrzędne q_i.

     Ponieważ $q_1 = [-2,0]$, podstawiamy $a_1 = -2$, $a_2 = 0$ do wyrażenia $[1 + a_1 + a_2, 2a_1 + a_2, 1 + 3a_1 + a_2]$ i otrzymujemy $[-1,-4,-5]$.

     Analogicznie dla q_2 podstawiamy $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ i otrzymujemy $[1,-1,-1]$.
  6. Bazę punktową $H_1 \cap H_2$ tworzą punkty obliczone przed chwilą.

     Czyli $[-1,-4,-5]$ oraz $[1,-1,-1]$.

- Jeśli pytają tylko o wymiar $H_1 \cap H_2$, to czasem można uniknąć liczenia, ale trzeba uważać, ponieważ znany nam z pierwszego semestru wzór

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$$

nie przekłada się bezpośrednio na przestrzenie afiniczne. Zwłaszcza, że przekrój dwóch przestrzeni afinicznych może być *pusty* (a nie *zerowy*), a jest w ogóle dyskusyjne, czy zbiór pusty jest przestrzenią afiniczną (a tym bardziej, jaki ma wymiar).

> Zresztą, czym miałoby być $H_1 + H_2$? Zbiorem sum punktów? To nie ma sensu — punktów się nie dodaje. Zbiorem średnich arytmetycznych? To już poprawna definicja, ale wynik nie zawsze jest podprzestrzenią afiniczną, np. dla $\mathrm{af}([0,0], [1,0])$ oraz $\mathrm{af}([0,1], [1,1])$ otrzymalibyśmy nieskończony pas opisany warunkiem $0 \le x_2 \le 1$. Może zbiorem kombinacji afinicznych, tzn. zbiorem $\mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$? To już ma jakiś sens, ale tak rozumiana "suma" dwóch prostych może mieć wymiar 3, np. dla $\mathrm{af}([0,0,0], [1,0,0])$ oraz $\mathrm{af}([0,0,1], [0,1,1])$. Więc nie jest prosto.

W tej sytuacji chyba najprościej korzystać z następujących dwóch faktów:

– Jeśli tylko $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, to zachodzi $T(H_1 \cap H_2) = T(H_1) \cap T(H_2)$, a stąd wynika, że

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim\big(T(H_1) + T(H_2)\big).$$

Dowód. Wybierając dowolny punkt $p \in H_1 \cap H_2$ mamy

$$p + T(H_1 \cap H_2) = H_1 \cap H_2 = (p + T(H_1)) \cap (p + T(H_2)) = p + (T(H_1) \cap T(H_2))$$

i wystarczy po obu stronach pracowicie "odjąć" p. □

– Jeśli $H_1, H_2 \subseteq H$ oraz $T(H_1) + T(H_2) = T(H)$, to $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ (i wobec tego $\dim(H_1 \cap H_2)$ można obliczyć z poprzedniego faktu).

Dowód. Wybierzmy dowolne punkty $p_1 \in H_1$, $p_2 \in H_2$. Ponieważ $T(H_1) + T(H_2) = T(H)$, wektor $p_2 - p_1$ musi zapisywać się jako $\alpha_1 + \alpha_2$ dla pewnych $\alpha_1 \in T(H_1)$, $\alpha_2 \in T(H_2)$. Wówczas

$$H_1 = p_1 + T(H_1) \quad \ni \quad p_1 + \alpha_1 = p_2 + (-\alpha_2) \quad \in \quad p_2 + T(H_2) = H_2.$$ □

15. Znajdź podprzestrzeń afiniczną $H' \subseteq \mathbb{R}^N$ równoległą do H i przechodzącą przez punkt p.

- Przypomnienie: H' *równoległa* do H oznacza na tym przedmiocie, że $T(H) = T(H')$.

  Zatem proste poziome w $\mathbb{R}^3$ nie są równoległe do poziomych płaszczyzn. (Trochę szkoda).

- Zasadniczo chodzi o to, że jako H' można wziąć $p + T(H)$. A konkretniej:
  – Jeśli H jest dane jako $\mathrm{af}(p_0, \ldots, p_n)$, to wystarczy wziąć (por. 7)

  $$H' = \mathrm{af}\Big(p,\ p + p_1 - p_0,\ p + p_2 - p_0,\ \ldots,\ p + p_n - p_0\Big).$$

  – Jeśli H jest opisane układem o macierzy $\left[\begin{array}{c|c} \quad A \quad & B \end{array}\right]$, układ opisujący H' można otrzymać podmieniając kolumnę B na B' taką, by układ był spełniony przez punkt p (por. 7 oraz 13 w wersji wektorowej).