GAL Potok 1. Kolokwium 18.04.2000.

TEMAT B

1. Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą następującymi bazami przestrzeni R^3:
$\mathcal{A} : (0,1,0),(1,2,3),(0,3,1)$, $\mathcal{B} : (4,1,2),(2,3,7),(1,0,0)$.
Niech $\psi : R^3 \to R$ będzie funkcjonałem liniowym, który w bazie sprzężonej do $\mathcal{A}$ ma współrzędne 2, 3, 5.
a) Znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie sprzężonej do $\mathcal{B}$.
b) Niech $\varphi : R^3 \to R^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Czy ψ należy do $\ker(\varphi^*)$?

2. Rozpatrzmy następujące macierze z $M_{3\times3}(R)$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
a) Które z macierzy B_i są kongruentne z A nad R, a które z macierzy B_i są kongruentne z A nad C?
b) Znaleźć taką macierz odwracalną $C \in M_{3\times3}(R)$, że macierz C^TAC jest diagonalna i każdy wyraz z przekątnej macierzy C^TAC należy do zbioru $\{1,-1,0\}$.

3. Rozpatrzmy formę dwuliniową na przestrzeni R^3 daną wzorem: $\xi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + \lambda x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + \lambda x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3$.
a) Dla jakich wartości parametru $\lambda \in R$ forma ξ jest iloczynem skalarnym?
b) Niech $\lambda = 2$. Dla tak określonego ξ znaleźć w R^3 taką bazę prostopadłą $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, że $\alpha_1 \in W$ oraz $\alpha_2 \in W$, gdzie $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 | \; x_2 + x_3 = 0\}$.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\xi : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową symetryczną.
a) Wykazać, że jeśli V_1 i V_2 są podprzestrzeniami liniowymi w V, to $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$.
b) Niech X będzie zbiorem wszystkich wektorów izotropowych w V. Wykazać, że jeśli $\mathrm{char}(K) \neq 2$, to:
$$X \text{ jest podprzestrzenią liniową w } V \iff X = V^\perp.$$