GAL potok 1, semestr letni, kolokwium nr 2, 08.05.2008, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

1. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dana jest płaszczyzna $M : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ oraz prosta $L = \mathrm{af}((2,0,1),(5,-2,2))$.
a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący prostą L.
b) Niech K będzie prostą przechodzącą przez punkt $p = (1,1,1)$, przecinającą prostą L i równoległą do płaszczyzny M. Znaleźć parametryzację prostej K.

2. W $(\mathbf{R}^3, < \, , \, >_{st})$ dane są proste $L_1 = (1,2,1) + \mathrm{lin}((1,1,-1))$ oraz $L_2 = (1,-1,1) + \mathrm{lin}((2,1,0))$.
a) Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (3,0,1)$ na prostą L_1.
b) Dla jakich punktów $p \in L_1, q \in L_2$ ich odległość $\rho(p,q)$ jest najmniejsza?

3. W $(\mathbf{R}^3, < \, , \, >_{st})$ rozpatrzmy punkty $p_1 = (1,1,2)$, $p_2 = (2,1,2)$, $p_3 = (1,2,2)$ oraz $q_1 = (1,2,1)$, $q_2 = (3,2,1)$, $q_3 = (1,4,1)$.
a) Czy istnieje izometria $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ taka, że $f(p_i) = q_i$ dla $i = 1,2,3$? Odpowiedź uzasadnić.
b) Opisać (podając wartości na wybranej bazie punktowej przestrzeni $\mathrm{af}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$) wszystkie izometrie $g : \mathrm{af}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \to \mathrm{af}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3)$ takie, że $g(\mathrm{af}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)) = \mathrm{af}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)$, $g(\mathrm{af}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3)) = \mathrm{af}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_3)$.

4. Niech $(V, < \, , \, >)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową liniową i niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym.
a) Wykazać, że φ zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy φ zachowuje długość wektorów.
b) Wykazać, że jeśli φ jest różnowartościowe, to dla każdego n wymiarowego równoległościanu R zachodzi równość $\mu_n(\varphi(R)) = |\det(\varphi)| \cdot \mu_n(\mathrm{R})$, gdzie μ_n oznacza n wymiarową miarę.

5. Niech $< \, , \, >$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V i niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V.
a) Wykazać, że $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa, to $W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$.
c) Podać przykład, że założenie skończonego wymiaru w b) jest istotne.