GAL, kolokwium nr 2, 29.04.2005, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Dana jest baza $\mathcal{A} = \{(3,4,1),(1,2,0),(0,1,0)\}$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$.
Niech $\mathcal{A}^* = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ będzie bazą dualną do $\mathcal{A}$.
a) Znaleźć wzory na funkcjonały Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3.
b) Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni $\ker(\varphi^*)$.
(funkcjonały otrzymanej bazy przestrzeni $\ker(\varphi^*)$ podać wzorami).

2. Rozpatrzmy funkcję $< , >: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ daną wzorem $< (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) >=$ $= rx_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + (5-r)x_3y_3$.
a) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ funkcja $< , >$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbf{R}^3$?
Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ funkcja $< , > |W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $W = \mathrm{lin}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
b) Dla $r = 2$ znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

3. W $\mathbf{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Znaleźć wzór na przekształcenie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będace rzutem prostopadłym na prostą $L = (1,0,1) + \mathrm{lin}((1,1,0))$.
b) Niech $p = (1,1,2)$ oraz $K = \mathrm{af}((1,0,0),(2,-1,-1))$. Dla każdej izometrii $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ spełniającej warunki $g(p) = p$ oraz $g(K) = K$ obliczyć $g((4,4,5))$.

4. Niech $< , >$ będzie iloczynem skalarnym na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V.
a) Wykazać, że V ma bazę prostopadłą.
b) Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Wykazać, że φ zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna.

5. Niech $< , >$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni V.
a) Wykazać, że w V istnieje dokładnie jeden układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_n$ taki, że dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ zachodzi

$$< \alpha_i, \beta_j >= \begin{cases} 1 \text{ gdy } i = j \\ 0 \text{ gdy } i \neq j \end{cases}$$

b) Wykazać, że układ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ z punktu a) jest bazą przestrzeni V oraz że dla każdego wektora $\gamma \in V$ zachodzi: $||\gamma||^2 = \sum_{i=1}^{n} < \alpha_i, \gamma > \cdot < \beta_i, \gamma >$.